BÖLÜM 12

12.Denklemlerin Yaklaşık Çözüm Yöntemleri

**12.1. Köklerin Varlığı ve Tekliği:**

Bu bölümde bir bilinmeyenli denklemlerin yaklaşık çözüm metotları verilecektir. Bu metotlara geçmeden önce yapılması gereken şey köklerin varlığı, bulundukları aralıkların tespiti ve bu aralıkların mümkün olduğu kadar daraltılmasıdır. f ( x ) cebirsel veya transandant fonksiyon olmak üzere bir bilinmeyenli bir denklem her zaman;

 f ( x ) = 0 (1)

şeklinde yazılır. Böyle bir denklemi çözmek için şu iki hususa dikkat edilmelidir.

**i)** (1) denkleminin köklerinin varlığını, tekliğini ve bu köklerin bulundukları aralıkları belirlemek için bir kritere ihtiyaç vardır. f(x) fonksiyonu [a, b] aralığında sürekli ve

 f(a) . f(b) < 0 ise f(x) = 0 denkleminin [a, b]’ye ait en az bir kökü vardır.

**Geometrik Anlamı :** Sürekli bir fonksiyonun grafiğinin bir parçasına ait uç noktaları

Ox- eksenini en az bir noktada keser.( Şekil.12.1 )



 Şekil.12.1

**ii)** Fazla olarak f(x) fonksiyonu [a, b]’de monoton ise, [a, b]’de f(x) = 0’ın tek kökü vardır. 

 Şekil.12.1.a Şekil.12.1.b

f(a) . f(b) < 0, f sürekli ve f monoton ise xo ∈ [a, b] tektir.

 Buna göre, (1) denkleminin reel köklerinin tespiti için f(x)’in monoton olduğu aralıkları tespit etmek yeterlidir.

Örneğin **;** x1 ve x2 (x1 < x2) için f ′(x) = 0 olsun. Böylece, tespit edilen (-∞, x1],

[x1, x2], [x2, +∞) aralıklarında f(x) sürekli ve bu aralıkların uç noktalarında f(x) zıt işaretli değer alıyorsa (1) denkleminin göz önüne alınan aralıklarda reel kökleri mevcuttur. Şayet, f(x)

fonksiyonu [a, b] aralığı boyunca sürekli, monoton fakat bu aralığın uçlarında aynı işarete sahip ise (1) denkleminin [a, b]’de hiçbir reel kökü mevcut değildir.

Daha önceden de bilindiği gibi göz önüne alınan bir [a, b] aralığında f ′(x) > 0 ise f(x) monoton artan, f ′(x) < 0 ise f(x) monoton azalandır. Ayrıca şu hususu da ihmal etmemek gerekir. f(x)’in [a, b] aralığı boyunca işaret değiştirmediğini fakat bu aralığın belli bir xo noktasında f ‘ (xo) = 0 olduğunu farz edelim.

 

 Şekil.12.2.a Şekil.12.2.b

Aşikardır ki böyle bir durumda f ′( xo) mevcut değildir. Bazen, f ′(x) = 0 denklemi

f (x) = 0 denkleminden daha basit olur ve kökleri ayırma problemiyle daha basit çözülebilir. Eğer (1) denklemi cebirsel ise f ′(x)’de cebirseldir ama derecesi bir azalır.(Şekil. 12.2.a.b)

**Örnek.12.1:** x3 – x – 1 = 0 denkleminin köklerinin bulundukları aralıkları ayırınız

**Çözüm.12.1:**f (x) = x3 – x – 1 ise f ′(x) = 3x2 – 1 ⇒ süreklidir. Şimdide monoton aralıkları bulalım.



⇒ [/3, ∞ ) arasında bir tek kök vardır.

f (1) = -1 < 0 ve f (2) = 5 > 0 Tek reel kök [1, 2] aralığındadır.

y = f (x) fonksiyonunun kolayca çizilebildiği hallerde f (x) = 0 denkleminin kökleri eğrinin Ox-eksenini kestiği noktalar bulunarak elde edilir.

**Örnek.12.2:** Cos x – x2 = 0 denkleminin köklerinin bulunduğu aralıkları bulalım.

**Çözüm.12.2:** y=Cos x ve y= x2  fonksiyonlarının grafiği çizildiğinde bu iki eğrinin kesiştiği x1 ve x2 noktaları ki bu noktalar denklemin kökleri olup aşağıda verilen aralıkta

bulunurlar(Şekil. 12.3).



Şekil.12.3

## 12.2. Bir Denklemin Kökünün Yaklaşık Değerinin Hesabı:

f (x) = 0 denkleminin [a, b] aralığında xo gibi bir kökünün olduğunu kabul edelim. xo kökü yerine [a, b] aralığında bulunan herhangi bir c değerini yaklaşık kök alabiliriz. Mühim olan, neticedeki xo– c hatasının göz önüne alınan problem için müsaade edilen hatayı aşmamasıdır. xo kökünün değeri bilinmediğinden xo– c hatası da hesaplanamaz.

Bu nedenle, hatanın mutlak değeri için bir üst sınır belirleyeceğiz. Yani kökün verilen yaklaşık bir değerinin, mutlak hatasını inceleyeceğiz.

Δ (c) > | xo – c | (2)

xo, [a, b] aralığında olacağından ; a < xo < b yazılır. (3) Buna göre, (2) ve (3) ‘den c, [a, b]’nin neresinde olursa olsun;

Δ (c) = b – a (4)

alabiliriz. Eğer, a veya b, c’nin yaklaşık değeri olarak alınırsa ( bir alt tahmin ) xo ≈ b [b - a] olur. Şayet, c [a, b] aralığının bir noktası olarak alınırsa xo kökünün altında mı, üstünde mi olduğunu anlamak mümkün değildir. Bu nedenle;

 (5) orta nokta olarak alınırsa (3) gereğince; (6) dır.

**12.3: Köklerin Bulunduğu Aralığın Mümkün Olduğu Kadar Daraltılması**

## Bu kısımda, bir denklemin yaklaşık kökünün daha iyi bir değerini bulmaya çalışacağız.

## Δ (c) = b – a formülü gösteriyor ki [a, b] aralığında bulunan xo kökü için c değerinin seçilmesinden meydana gelen hata [Δ (c) = b - a], b - a uzunluğu küçülürken azalır.

## Eğer [a, b] aralığı xo kökünü ihtiva ediyorsa, bu aralık içinde bulunan ve xo’ı ihtiva eden daha küçük bir [a1, b1]’de bulunabilir.

( a ≤ a1 < xo < b1 ≤ b ; b1 -a1 < b - a )

### Bu şekilde, [a1, b1] aralığı kök için daha iyi bir yaklaşım belirtir. c ≠ xo olmak üzere [a, b] aralığında alınan bir c noktası ile, xo kökünü ihtiva eden [a, c] veya [c, b] aralıklarından biri [a1, b1] olarak alınır. c noktasının seçimi için çeşitli metotlar kullanılır. Bu metotlar şunlardır.

### **12. 3.1. Deneme Metodu :**

### Bu metotta, [a, b] aralığında gelişigüzel bir c noktası seçilir. f (x) fonksiyonu [a, b] ve [c, b] aralıklarında hangisinin uç noktalarında ters işarete sahip olursa, o aralık [a1, b1] olarak alınır. Metodun başarısı c noktasının seçimindeki isabete bağlıdır.

### **12. 3.2. İkiye bölme Metodu :**

Bu metodun değişik bir şekli aralığın ikiye ayrılmasıdır. Burada c, [a, b] aralığının orta noktası c =  olarak alınır.

**Örnek.12.3 :** İkiye bölme metodunu uygulayarak x3 – x –1 = 0 denkleminin [1, 2] aralığı içindeki kökünü geliştiriniz.

**Çözüm.12.3:**f (x) = x3 – x –1 , a = 1 , b = 2 , c =  =1,5

f (1) = -1 < 0, f (1,5) = 0,875 > 0 , f (2) = 5 > 0 dır.

f (x) fonksiyonu [1, 1,5] aralığında işaret değiştirdiğinden bu aralık [a1, b1] aralığı olarak alınır.( a1 = a =1 ; b1 = c = 1,5 )

**Örnek.12.4 :** İkiye bölme metodunu uygulayarak x sin x-1=0 denkleminin kökünü [0,2]’ de %o,o 1 hata ile hesaplayınız.

**Çözüm.12.4:**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  k | ak | bk | ck | F(ck) | İşaretleri  |
| f(ck) | f(ak) | f(bk) |
| 012345678910 | 011111,06251,093751,1093751,1093751,113281251,11328125 | 221,51,251,1251,1251,1251,1251,11718751,11718751,115234375 | 11,51,251,1251,06251,093751,1093751,11718751,113281251,1152343751,114257813 | -0,158529010,4962424790,1862307740,015051043-0,07182663-0,02836172-0,006642774860,004208034-0,001216490,0014960,0001398 | -+++---+-++ | ----------- | +++++++++++ |

Deneme metodunda c noktası f (x) fonksiyonunun özelliklerinden bağımsız olarak seçilmektedir. Şayet f (x) fonksiyonunun özellikleri göz önüne alınacak olursa yaklaşım daha sıhhatli olur.

**12. 3.3. Kirişler (Değişken Kesen)Metodu:**

c noktasının seçimi olarak şekil.12.4.a.b.c.d’ de görüldüğü gibi y = f (x) eğrisinin [a, b] aralığında kalan parçasına ait girişin Ox- eksenini kestiği nokta alınabilir.



Şekil.12.4.a Şekil.12.4.b



Şekil.12.4.c Şekil.12.4.d

A [a, f(a)] ve B[b, f(b)] noktasındaki geçen doğrunun denklemi;

  (7)

 şeklinde olup bunun Ox- eksenini kestiği nokta;

  olur. (8)

Buna göre , c, [a, b]’nin içindedir. Bir eğrinin eğriliği;



ne kadar küçük ise, eğri parçasının uçlarını birleştiren kirişin Ox- eksenini kestiği nokta esas köke o nispette yakın olur. Yani , [a, b] aralığında f ′(x)‘in değeri büyük ve f ′′(x) değeri küçük ise c yaklaşık değeri xo köküne yakın olur. f (x) ve f ′′(x) farklı işaretli ise c noktası

[a, b] aralığının bitim notasına daha yakın, f (x) ile f ′′(x) aynı işaretli ise c noktası [a, b] aralığına baş tarafına daha yakındır.

**Örnek.12.5 :** Kirişler metodunu kullanarak x3 – x –1 = 0 denkleminin [1, 2] aralığı içindeki kökünü geliştiriniz.

**Çözüm.12.5:**f (x) = x3 – x –1 , f ′(x) = 3x2 – 1 , f ′′(x) = 6x ⇒ (2)’ de

f ′(x) > 0 , f (1) < 0 , f (2) > 0 buna göre c noktası [a1, b1] aralığının solundadır.

(c < xo < b , a1 = c , b1 = b)



Bu nedenle, c yaklaşık değeri bir alt tahmindir. Böylece [a1, b1] = [1, 1.2 ] olarak alınabilir.

**Örnek.12.6 :** Değişken Kesen: a0=0 , b0=2 , f(0)=-1 , f(2)=0,81859485

 

**Çözüm.12.6:**

  ⇒c1=1.12124074 ⇒ f(c1)=0.00983461

  ⇒ c2=1.11416120 ⇒ f(c2)=0.00000563

  ⇒ c3=1.11415714 ⇒ f(c3)=0,0000000

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| k | ak | ck | bk | f(ck) | İşaretleri |
| f(ck) | f(ak) | f(bk) |
| 0123 | 01.099750171.099750171.09975017 | 1.099750171.121240741.114161201.11415714 | 221.121240741.11416120 | -0,020019210,009834610,000005630000000 | -+++ | ---- | ++++ |

**12.3.4. Teğetler (Newton-Raphson) Metodu :**[a, b] aralığının uçlarından birini z ile gösterelim. [z, f (z)] koordinatlı noktadan geçen doğrular demetinin denklemi;

 y – f (z) = k (x-z) olur.

k = f ′(z) ise y = f (x) eğrisinin [z, f (z)] noktasındaki teğeti elde edilir. Teğetin

Ox- eksenini kestiği noktanın apsisi;

 ……………………………………………………(9)

[a, b] fonksiyonunun eğriliği küçükse c noktası xo köküne o ölçüde yakındır. z = a ve z = b olmasına göre (9) denklemi değişik c değerleri verir. c noktası [a, b] aralığının dışında bulunabilir. (Şekil.12.5)



Şekil.12.5

Halbuki teğet B den çizilmiş olsaydı c noktası [a, b] aralığında bulunurdu. Burada önemli olan c’nin [a, b] aralığı içine düşmesidir. İkinci olarak, aralığın uçlarından hangisinin alınacağı hakkında aşağıdaki şekiller fikir verir. (Şekil.12.6.(a)(b)(c)(d)).



Şekil.12.6.(a)(b)(c)(d).

f (z) ve f ′′(z) işaretinin aynı olduğu noktadan çizilen teğetin Ox- eksenini kestiği c noktası

 [a, b] aralığının içinde bulunur. Aynı zamanda c noktası xo ile z arasındadır.

**Örnek.12.7:** Newton-Raphson metoduyla x3 – x –1 = 0 denkleminin [1, 2] aralığı içindeki kökünü geliştiriniz.

**Çözüm.12.7:** f (x) = x3 – x –1 ise f ′(x) = 3x2 – 1 ve f ′′(x) = 6x olur.

 Buna göre, [1, 2] aralığında;

 f ′(x) > 0 , f (2) > 0 , f ‘’(2) > 0

olduğundan teğet aralığı bitim noktasından çizilmelidir.

x = z = 2 olarak f ′(2) = 11 ve (1 - 7)’ den

 bulunur.

c > xo ‘dır. O halde, yeni aralık [1, 1.6] alınır.

Eğer köke iki uçtan birden yaklaşılırsa daha çabuk ve sıhhatli çözüme gidilir. Bu da her iki metodun birden uygulanması ile olur.

**Örnek.12.8:** Newton-Raphson metoduyla f(x)=x.sinx-1 denkleminin [0, 2] aralığı içindeki kökünü geliştiriniz.

**Çözüm.12.8:**f(0)<0 

 f(2)>0 

z=1 seçelim. 



f(c1)=-0,007937328, f(1) < 0 , f(2) > 0

c2=-0,007937328 [1,114728675,-2]

 Z1



f(c1)=0,008729>0 f(a1) < 0 x0≅1,114728675[%o8]

[1,114728675;1.120444158]

z2

**12. 3.5. Teğet – Kiriş Metodu**

Farklı iki metodun birden uygulanması özelliğidir. Bu metot verilen denklemin sol tarafının ikinci türevinin aynı kalması halinde uygulanır. Bu durumda her iki yandan da köke yaklaşıldığı garanti edilebilir. Teğet, Ox- eksenini y = f (x) eğrisinin konveks tarafında keserken, kiriş konkav tarafında keser.

**Örnek.12.9 :** Teğet - Kiriş metoduyla x3 – x –1 = 0 denkleminin [1, 2] aralığı içindeki kökünü geliştiriniz.

**Çözüm.12.9:**f (x) = x3 – x –1 , f (1) = – 1 < 0, f (2) = 5 > 0

f ′(x) = 3x2 – 1 , f ′′(x) = 6x, f ′′ (x) > 0 dır.

Daha önceki hesaplamalarla [a1, b1] = [1.1 , 1.6] bulunur.

**Örnek.12.10 :** f(x)=lnx-5+x denkleminin kökünü teğetler, kirişler ve ikiye bölme metoduyla çözünüz?

**Çözüm.12.10:**

**i)** İkiye bölme metodu;

f(x)= lnx-5+x

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| k | ak | bk  | ck | f(ak) | f(bk) | f(ck) |
| 1. | 3 | 4 | 3,5 | -0,90138 | 0,38629 | -0,24723 |
| 2. | 3,5 | 4 | 3,75 | -0,24723 | 0,38629 |  0,07175 |
| 3. | 3,5 | 3,75 | 3,625 | -0,24723 | 0,07175 | -0,08714 |
| 4. | 3,625 | 3,75 | 3,6875 | -0,08714 | 0,07175 | -0,00755 |
| 5. | 3,6875 | 3,75 | 3,71875 | -0,00755 | 0,07175 |  0,03213 |
| 6. | 3,6875 | 3,71875 | 3,703125 | -0,00755 | 0,03213 |  0,01230 |
| 7. | 3,6875 | 3,703125 | 3,6953125 | -0,00755 | 0,01230 |  0,00237 |
| 8. | 3,6875 | 3,6953125 | 3,69140625 | -0,00755 | 0,00237 | -0,00258 |
| 9. | 3,69140625 | 3,6953125 | 3,693359375 | -0,00237 | 0,00237 | -0,0001 |

9. adımda onbinde 1 hatayla yani %0,01 hatayla bulundu, kök 3,693359375 dir.

**ii)** Teğetler metodu;

f(x)= lnx-5+x











x3 köktür yüz binde bir (% 0,001) hata ile bulunmuştur. x3=3,69343

**iii)** Kirişler yöntemi; f(x)= lnx-5+x

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| k | ak | bk | ck | f(ak) | f(bk) | f(ck) |
| 1. | 3 | 4 | 3,70000 | -0,90138 | 0,38629 | 0,00833 |
| 2. | 3 | 3,7 | 3,69358 | -0,90138 | 0,00833 | 0,00017 |
| 3. | 3 | 3,69358 | 3,69343 | -0,90138 | 0,00017 | -0,00001 |

3. adımda yüz binde bir (%0,001) hatayla kök bulunmuştur. Kök= 3,69343

**Örnek.12.11 :** f(x)=ex-2-x denkleminin kökünü teğetler, kirişler ve ikiye bölme metoduyla çözünüz?

**Çözüm.12.11:**

**i)** İkiye bölme metodu;

f(x)= ex-2-x

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| k | ak | bk | ck | f(ak) | f(bk) | f(ck) |
| 1. | 1 | 2 | 1,5 | -0,28171 | 3,38905 |  0,98168 |
| 2. | 1 | 1,5 | 1,25 | -0,28171 | 0,98168 |  0,24034 |
| 3. | 1 | 1,25 | 1,125 | -0,28171 | 0,24034 | -0,04478 |
| 4. | 1,125 | 1,25 | 1,1875 | -0,04478 | 0,24034 |  0,09137 |
| 5. | 1,125 | 1,1875 | 1,15625 | -0,04478 | 0,09137 |  0,02174 |
| 6. | 1,125 | 1,15625 | 1,140625 | -0,4478 | 0,02174 | -0,01199 |
| 7. | 1,140625 | 1,15625 | 1,1484375 | -0,01190 | 0,02174 |  0,00482 |
| 8. | 1,140625 | 1,1484375 | 1,14453125 | -0,01190 | 0,00482 | -0,00356 |
| 9. | 1,14453125 | 1,1484375 | 1,146484375 | -0,00356 | 0,00482 |  0,00062 |
| 10. | 1,14453125 | 1,146484375 | 1,14551875 | -0,00356 | 0,00062 | -0,00144 |
| 11. | 1,14551875 | 1,146484375 | 1,146001563 | -0,00144 | 0,00062 | -0,00041 |
| 12. | 1,146001563 | 1,146484375 | 1,146242969 | -0,00041 | 0,00062 |  0,0001 |

12. adımda köke sağdan on binde 1 (%0,001) hassasiyetle yaklaşıldı.

Buna göre, kök 1,146242969 dur.

**ii)** Teğetler metodu;

f(x)= ex-2-x









f(x3)=-0,000006

x3 köktür % 0,0006 hassasiyetle hesaplandı.

**iii)** Kirişler yöntemi;

f(x)=ex-2-x

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| k | ak | bk | ck | f(ak) | f(bk) | f(ck) |
| 1. | 1 | 2 | 1,07674 | -0,28171 | 0,38905 | -0,14164 |
| 2. | 1,07674 | 2 | 1,11377 | -0,14164 | 0,38905 | -0,06795 |
| 3. | 1,11377 | 2 | 1,13118 | -0,06795 | 0,38905 | -0,03186 |
| 4. | 1,13118 | 2 | 1,13926 | -0,03186 | 0,38905 | -0,01480 |
| 5. | 1,13926 | 2 | 1,14299 | -0,01480 | 0,38905 | -0,00685 |
| 6. | 1,14299 | 2 | 1,14549 | -0,00685 | 0,38905 | -0,00150 |
| 7. | 1,14549 | 2 | 1,14586 | -0,00150 | 0,38905 | -0,00071 |
| 8. | 1,14603 | 2 | 1,14603 | -0,00071 | 0,38905 | -0,00035 |
| 9. | 1,14611 | 2 | 1,14611 | -0,00035 | 0,38905 | -0,00017 |

9. adımda on binde bir (%0,01) hassasiyetle köke yaklaşılmıştır. Kök= 1,14611

**12.4. Denklemlerin Yaklaşık Çözümlerinde İterasyon Metotları**

Bir denklemin kökü köklerin geliştirilmesi metotları ile belirlendikten sonra kökün belirli bir hassasiyetle yaklaşık değeri bulunmuş olur. [ao, bo] ilk aralık iken köklerin geliştirilmesi metotlarından birini kullanarak daha küçük [a1, b1] belirlenir. En son [ak, bk] (k=0, 1, .... ) bulunur.

a0 ≤ a1 ≤ a2 ≤ ...................≤ ak ≤ ............≤ xo ≤ ........≤ bk

Bu aralığın ([ak, bk]) uçları xo kökünün yaklaşık birer çözümleri olur. ( Burada xo ≈ ak değeri xo ‘ın bir alt yaklaşımı xo  ≈ bk değeri de xo  ‘ın bir üst yaklaşımıdır.Bu köklere yaklaşım istenilen hassasiyete gelene kadar devam edilir. Bu tür metotlara iteratif (ardışık) metot denir.

ak → xo  veya bk → xo ise iteratif metot yakınsaktır denir.

**12.4.1.Newton’un Karekök Algoritması:**f(x)=xN- A =0 denkleminin kökleri;

  (k=1,2,....)

A’nın n. kökünü verir. P0 öğrenci tarafından seçilir.

**Örnek.12.12:** x2-5=0 denkleminin yaklaşık çözümü nedir?

**Çözüm.12.12:** N=2 ; A=5

 P0=2 alalım. 

 

**12.4.2.Newton-Raphson Metodu:** Aşağıdaki şekli göz önüne alırsak;

 olur. ve x2=x1-h ise;

  olur ve buradan;  (n=0,1,2…) formülü elde edilir(Şekil.12.7).



Şekil.12.7. Newton-Raphson Metodunun grafik gösterimi

**Örnek.12.13:** x5-300=0 denkleminin kökünü milyarda bir hassasiyetle çözünüz.

**Çözüm.12.13:**A=300; P0=3 ; N=5 ; N-1=4

 

 

 

 

 

 

 

  bulunur.