SORU 1 Aşağıdaki boşluklar öğrenci tarafından doldurulacaktır. (Puan Hariç)

Adı:	Soyadı:	Grup No:	Sıra No:	**Puan**
İmza:	Elektronik Posta(e-mail) adresi:	Öğrenci No:		

`Lütfen bu soruyu bu kağıdın ön yüzünü ve gerekirse arka yüzünü kullanarak cevaplayınız.`

[10 p] a) $[0,5]$ kapalı aralığının eşit uzunluklu 5 alt aralıktan oluşan bir parçalanışındaki alt aralıkların orta noktalarını kullanarak $f(x) = \sin(\pi x)$ fonksiyonu için bir Riemann toplamı yazınız ve bu toplamı hesaplayınız.

[15 p] b) $y = 4x - x^2$ ve $y = x$ eğrilerinin sınırladığı alan parçasının $x = 4$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

(a) $[0,5]$ aralığının parçalanışı: $[0,1]$, $[1,2]$, $[2,3]$, $[3,4]$, $[4,5]$.

Alt aralıkların uzunlukları: $\Delta x_k = \dfrac{5-0}{5} = 1, \quad k = 1,2,3,4,5.$

Orta noktalar: $c_k = k - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2k-1}{2}, \quad k = 1,2,3,4,5 \implies c_1 = \dfrac{1}{2}, c_2 = \dfrac{3}{2}, c_3 = \dfrac{5}{2}, c_4 = \dfrac{7}{2}, c_5 = \dfrac{9}{2}.$

Riemann toplamı: $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} f(c_k)\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{5} \sin\left[\frac{\pi(2k-1)}{2}\right]\cdot 1$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{5} \sin\left[\frac{\pi(2k-1)}{2}\right]\cdot 1 = \sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{3\pi}{2} + \sin\frac{5\pi}{2} + \sin\frac{7\pi}{2} + \sin\frac{9\pi}{2} = 1.$$

(b) Eğrilerin kesim noktaları: $4x - x^2 = x \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x = 0$ ve $x = 3$.

Kabuk yarıçapı $= 4 - x$, kabuk yüksekliği $= 4x - x^2 - x = 3x - x^2$ olmak üzere

$$V = 2\pi \int_0^3 (4-x)(3x - x^2)\,dx = 2\pi \int_0^3 (12x - 4x^2 - 3x^2 + x^3)\,dx$$

$$= 2\pi\left(12\,\frac{x^2}{2} - \frac{7}{3}\,x^3 + \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^3 = \frac{45}{2}\pi$$

SORU 2 Aşağıdaki boşluklar öğrenci tarafından doldurulacaktır. (Puan Hariç)

Adı:	Soyadı:	Grup No:	Sıra No:	**Puan**
İmza:	Elektronik Posta(e-mail) adresi:	Öğrenci No:		

`Lütfen bu soruyu bu kağıdın ön yüzünü ve gerekirse arka yüzünü kullanarak cevaplayınız.`

[13 p] a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\tan^{-1} x - \pi 2^{x-3}}{\ln(2-x) + \int_1^x t^3 \sin^{-1} t \, dt}$ limitini hesaplayınız.

[12 p] b) Verilen integrallerin yakınsaklığını veya ıraksaklığını belirleyiniz:

i) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2 + 3\sqrt{x} - 2}\, dx$ ii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\csc^2\left(\frac{\pi}{4}\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\, dx.$

ÇÖZÜM

(a) $$\lim_{x\to 1} \frac{\tan^{-1} x - \pi 2^{x-3}}{\ln(2-x) + \int_1^x t^3 \sin^{-1} t \, dt} = \{(0/0)\} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{1+x^2} - \pi 2^{x-3}\ln 2}{-\frac{1}{2-x} + x^3 \sin^{-1} x} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{\pi \ln 2}{4}}{-1 + \sin^{-1}(1)}$$

$$= \frac{2 - \pi \ln 2}{4\left(-1 + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{2 - \pi \ln 2}{2(\pi - 2)}.$$

(b) (i) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2 + 3\sqrt{x} - 2}$, $g(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2} = \dfrac{1}{x^{5/3}}$ alalım. $\displaystyle\int_1^\infty g(x)\, dx = \int_1^\infty \frac{dx}{x^{5/3}}$, $p = 5/3 > 1$

integrali yakınsak olduğundan ve $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2 + 3\sqrt{x} - 2} \cdot \frac{x^{5/3}}{1}$

$\displaystyle= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2 + 3\sqrt{x} - 2} = 1 \neq 0$ olduğundan Limit karşılaştırma testine göre $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\, dx$

integrali yakınsaktır.

(ii) $$\int_0^1 \frac{\csc^2\left(\frac{\pi}{4}\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{a \to 0^+} \int_0^1 \frac{\csc^2\left(\frac{\pi}{4}\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\, dx \qquad \left\{ \begin{array}{l} u = \sqrt{x} \Rightarrow du = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\, dx \\ x = a \Rightarrow u = \sqrt{a} \\ x = 1 \Rightarrow u = 1 \end{array} \right.$$

$$= \lim_{a \to 0^+} \int_{u=\sqrt{a}}^1 \frac{1}{2} \csc^2\left(\frac{\pi}{4} u\right) du = \lim_{a \to 0^+} \left[-\frac{2}{\pi} \cot\left(\frac{\pi}{4} u\right) \right]\Bigg|_{u=\sqrt{a}}^1$$

$$= \lim_{a \to 0^+} \left(-\frac{2}{\pi} \cot\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{2}{\pi} \cot\left(\frac{\pi\sqrt{a}}{4}\right) \right) = -\frac{2}{\pi} + \infty = \infty$$ olduğundan integral ıraksaktır.

SORU 3 Aşağıdaki boşluklar öğrenci tarafından doldurulacaktır. (Puan Hariç)

Adı:	Soyadı:	Grup No:	Sıra No:	**Puan**
İmza:	Elektronik Posta(e-mail) adresi:	Öğrenci No:		

`Lütfen bu soruyu bu kağıdın ön yüzünü ve gerekirse arka yüzünü kullanarak cevaplayınız.`

[13 p] a) $\mathbf{f}(\theta) = \sin^3\left(\frac{\theta}{3}\right)$ kutupsal eğrisinin $\theta = \mathbf{0}$'dan $\theta = \pi/\mathbf{2}$'ye kadar olan uzunluğunu bulunuz.

[12 p] b) $\mathbf{f}(\theta) = \cos\left(\mathbf{3}\theta\right)$ eğrisinin $\theta = \pi/\mathbf{3}$ noktasındaki teğetinin denklemini yazınız.

ÇÖZÜM

(a) $\mathbf{r}'(\theta) = \mathbf{f}'(\theta) = \mathbf{3}\cdot\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\sin^2\left(\frac{\theta}{\mathbf{3}}\right)\cdot\cos\left(\frac{\theta}{\mathbf{3}}\right)$

$$\mathbf{r}^2 + \left(\frac{\mathbf{dr}}{\mathbf{d}\theta}\right)^2 = \sin^6\left(\frac{\theta}{\mathbf{3}}\right) + \sin^4\left(\frac{\theta}{\mathbf{3}}\right)\cos\left(\frac{\theta}{\mathbf{3}}\right) = \sin^4\left(\frac{\theta}{\mathbf{3}}\right)$$

$$\mathbf{L} = \int_{\theta=0}^{\pi/2}\sqrt{\mathbf{r}^2 + \left(\frac{\mathbf{dr}}{\mathbf{d}\theta}\right)^2}\,\mathbf{d}\theta = \int_{\theta=0}^{\pi/2}\sin^2\left(\frac{\theta}{\mathbf{3}}\right)\mathbf{d}\theta = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\int_{\theta=0}^{\pi/2}\left[\mathbf{1} - \cos\left(\frac{\mathbf{2}\theta}{\mathbf{3}}\right)\right]\mathbf{d}\theta$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left[\theta - \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\sin\left(\frac{\mathbf{2}\theta}{\mathbf{3}}\right)\right]\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left[\frac{\pi}{\mathbf{2}} - \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\sin\left(\frac{\pi}{\mathbf{3}}\right)\right] = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(\frac{\pi}{\mathbf{2}} - \frac{\mathbf{3}\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{4}}\right) = \frac{\pi}{\mathbf{4}} - \frac{\mathbf{3}\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{8}}$$

(b) $\mathbf{x} = \cos\theta\cos(\mathbf{3}\theta)$, $\mathbf{y} = \sin\theta\cos(\mathbf{3}\theta)$

$$\Longrightarrow \mathbf{m} = \frac{\mathbf{dy}/\mathbf{d}\theta}{\mathbf{dx}/\mathbf{d}\theta}\Big|_{\pi/3} = \frac{\cos\theta\cos(\mathbf{3}\theta) - \mathbf{3}\sin\theta\sin(\mathbf{3}\theta)}{-\sin\theta\cos(\mathbf{3}\theta) - \mathbf{3}\cos\theta\sin(\mathbf{3}\theta)}\Big|_{\pi/3} = \frac{-\frac{1}{2} - \mathbf{0}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}(-\mathbf{1}) - \mathbf{0}} = -\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}}$$

$\Longrightarrow \mathbf{x_0} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$, $\mathbf{y_0} = -\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}$. Teğet denklemi $\mathbf{y} + \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}} = -\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}}\left(\mathbf{x} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)$ veya

$\mathbf{y} = -\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{3}}} - \frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{3}}}$ olarak bulunur.

SORU 4 Aşağıdaki boşluklar öğrenci tarafından doldurulacaktır. (Puan Hariç)

Adı:	Soyadı:	Grup No:	Sıra No:	**Puan**
İmza:	Elektronik Posta(e-mail) adresi:	Öğrenci No:		

`Lütfen bu soruyu bu kağıdın ön yüzünü ve gerekirse arka yüzünü kullanarak cevaplayınız.`

[8+5 p] (a) İntegralleri hesaplayınız: i) $\displaystyle\int \frac{\mathbf{dt}}{\sqrt{\mathbf{t}}(\mathbf{t}-\mathbf{2})}$ ii) $\displaystyle\int_0^1 \sinh^2(\mathbf{2x})\,\mathbf{dx}$.

[12 p] (b) Kısmi integrasyon yöntemini kullanarak

$$\int \sin^n x\,dx = -\left(\frac{1}{n}\right)\sin^{n-1}(x)\cos(x) + \left(\frac{n-1}{n}\right)\int \sin^{n-2}(x)\,dx$$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM

(a) i) $\mathbf{t}=\mathbf{x^2}$, $\mathbf{dt}=\mathbf{2x\,dx}$ değişken dönüşümü yapılırsa $\displaystyle\int \frac{\mathbf{dt}}{\sqrt{\mathbf{t}}(\mathbf{t}-\mathbf{2})} = \int \frac{\mathbf{2\,dx}}{(\mathbf{x^2-2})}$ integrali

elde edilir. $\displaystyle\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x^2-2}} = \frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{x}-\sqrt{\mathbf{2}})(\mathbf{x}+\sqrt{\mathbf{2}})} = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{x}-\sqrt{\mathbf{2}}} + \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{x}+\sqrt{\mathbf{2}}}$ denkleminden

$\mathbf{A}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}}}$ ve $\mathbf{B}=-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}}}$ bulunur. Basit kesirler ayırma yöntemiyle

$$\int \frac{\mathbf{2\,dx}}{(\mathbf{x^2-2})} = \int \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}(\mathbf{x}-\sqrt{\mathbf{2}})} - \int \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}(\mathbf{x}+\sqrt{\mathbf{2}})} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\ln|\mathbf{x}-\sqrt{\mathbf{2}}| - \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\ln|\mathbf{x}+\sqrt{\mathbf{2}}| + \mathbf{C}$$

$= \dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\ln\left|\dfrac{\mathbf{x}-\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{x}+\sqrt{\mathbf{2}}}\right| + \mathbf{C}$ bulunur.

ii) $\sinh^2\mathbf{A} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\Big(\cosh\mathbf{2A}-\mathbf{1}\Big)$ bağıntısı kullanılarak

$\displaystyle\int_0^1 \sinh^2(\mathbf{2x})\,\mathbf{dx} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\int_0^1 \big(\cosh(\mathbf{4x})-\mathbf{1}\big)\mathbf{dx} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\Big(\frac{\sinh\mathbf{4x}}{\mathbf{4}}-\mathbf{x}\Big)\Big|_0^1 = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}\sinh(\mathbf{4}) - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ bulunur.

(b) $\displaystyle\int \sin^{\mathbf{n}}\mathbf{x}\,\mathbf{dx} = \int \sin^{\mathbf{n-1}}\mathbf{x}\cdot\sin\mathbf{x}\,\mathbf{dx},\ \begin{cases} \mathbf{u}=\sin^{\mathbf{n-1}}\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{du}=(\mathbf{n-1})\sin^{\mathbf{n-2}}\mathbf{x}\cdot\cos\mathbf{x}\,\mathbf{dx} \\ \mathbf{v}=\sin\mathbf{x}\,\mathbf{dx} \Rightarrow \mathbf{v}=-\cos\mathbf{x} \end{cases}$

$$= -\cos\mathbf{x}\cdot\sin^{\mathbf{n-1}}\mathbf{x} + \int (\mathbf{n-1})\sin^{\mathbf{n-2}}\mathbf{x}\cdot\cos^2\mathbf{x}\,\mathbf{dx}$$

$$= -\cos\mathbf{x}\cdot\sin^{\mathbf{n-1}}\mathbf{x} + \int (\mathbf{n-1})\sin^{\mathbf{n-2}}\mathbf{x}\cdot(\mathbf{1}-\sin^2\mathbf{x})\,\mathbf{dx}$$

$$= -\cos\mathbf{x}\cdot\sin^{\mathbf{n-1}}\mathbf{x} + (\mathbf{n-1})\int \sin^{\mathbf{n-2}}\mathbf{x}\,\mathbf{dx} - (\mathbf{n-1})\int \sin^{\mathbf{n}}\mathbf{x}\,\mathbf{dx} \Longrightarrow$$

$$[\mathbf{1}+(\mathbf{n-1})]\int \sin^{\mathbf{n}}\mathbf{x}\,\mathbf{dx} = -\cos\mathbf{x}\cdot\sin^{\mathbf{n-1}}\mathbf{x} + (\mathbf{n-1})\int \sin^{\mathbf{n-2}}\mathbf{x}\,\mathbf{dx} \Longrightarrow$$

$$\int \sin^{\mathbf{n}}\mathbf{x}\,\mathbf{dx} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\cos\mathbf{x}\cdot\sin^{\mathbf{n-1}}\mathbf{x} + \frac{(\mathbf{n-1})}{\mathbf{n}}\int \sin^{\mathbf{n-2}}\mathbf{x}\,\mathbf{dx}.$$