SORU 1 Aşağıdaki boşluklar öğrenci tarafından doldurulacaktır. (Puan Hariç)

Soyadı:	Adı:	Grup No:	Sıra No:	Puan
İmza:	Elektronik Posta(e-mail) adresi:	Öğrenci No:		

`Lütfen bu soruyu bu kağıdın ön yüzünü ve gerekirse arka yüzünü kullanarak cevaplayınız.`

Aşağıdaki integralleri hesaplayınız

[13p] a) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2(x^2-1)}\,dx$ [12p] b) $\displaystyle\int_0^{\ln\sqrt{3}} e^{-x}\tan^{-1}(e^x)\,dx$

ÇÖZÜM

a) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2(x^2-1)}dx$

$$\frac{x+2}{x^2(x^2-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1}$$

$$x+2 = Ax(x^2-1) + B(x^2-1) + Cx^2(x+1) + Dx^2(x-1)$$
$$= (A+C+D)x^3 + (B+C-D)x^2 - Ax - B$$

$$\left.\begin{aligned} A+C+D&=0 \\ B+C-D&=0 \\ -A&=1 \\ -B&=2 \end{aligned}\right\} \quad A=-1,\ B=-2,\ C=3/2,\ D=-1/2$$

$$I = -\int\frac{dx}{x} - 2\int\frac{dx}{x^2} + \frac{3}{2}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1} \Rightarrow I = -\ln|x| + \frac{2}{x} + \frac{3}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C$$

b) $\displaystyle\int_0^{\ln\sqrt{3}} e^{-x}\tan^{-1}e^x\,dx$

$\tan^{-1}(e^x) = u \Rightarrow \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}dx = du$

$e^{-x}dx = dv \Rightarrow v = -e^{-x}$

$$I = -e^{-x}\tan^{-1}(e^x)\Big|_0^{\ln\sqrt{3}} + \int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{e^{-x}\cdot e^x}{1+e^{2x}}dx = \left(-e^{-\ln\sqrt{3}}\tan^{-1}(e^{\ln\sqrt{3}}) + e^0\tan^{-1}(e^0)\right) + \int_0^{\ln\sqrt{3}}\frac{dx}{1+e^{2x}}$$

$$I = \left(-\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{\pi}{4}\right) + \int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{e^{-2x}dx}{e^{-2x}+1} \qquad \begin{aligned} e^{-2x}+1 &= u \\ -2e^{-2x}dx &= du \end{aligned}$$

$$= \left(-\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{\pi}{4}\right) + \int \frac{-\frac{1}{2}du}{u} = \left(-\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\ln(e^{-2x}+1)\Big|_0^{\ln\sqrt{3}}$$

$$= \left(-\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(\ln(e^{-2\ln\sqrt{3}}+1) - \ln(e^0+1)\right)$$

$$= \left(-\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(\ln\frac{4}{3} - \ln 2\right)$$

$$= \boxed{-\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}}$$

MATEMATİK 101 FINAL 2 Haziran 2010

SORU 2 Aşağıdaki boşluklar öğrenci tarafından doldurulacaktır. (Puan Hariç)

Soyadı:	Adı:	Grup No:	Sıra No:	Puan
İmza:	Elektronik Posta(e-mail) adresi:	Öğrenci No:		

`Lütfen bu soruyu bu kağıdın ön yüzünü ve gerekirse arka yüzünü kullanarak cevaplayınız.`

[13p] **a)** Aşağıdaki limiti hesaplayınız

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(1-\cotan x\right)^{\sec x} = ?$$

[12p] **b)** $\mathbf{r = -2}\sin\theta$ çemberinin içinde ve $\mathbf{r = 1}$ çemberinin dışında kalan bölgenin alanını bulunuz.

ÇÖZÜM

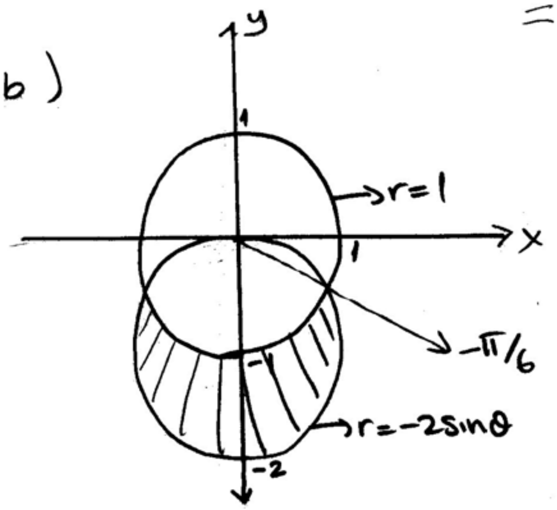
a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (1-\cotan x)^{\sec x} \quad 1^{\infty} = e^{\lim\limits_{x\to\pi/2} \sec x \ln(1-\cotan x)} \quad 0/0$

$= e^{\lim\limits_{x\to\pi/2} \frac{\ln(1-\cotan x)}{\cos x}}$

$= e^{\lim\limits_{x\to\pi/2} \frac{\frac{\operatorname{cosec}^2 x}{1-\cotan x}}{-\sin x}}$

$= e^{\lim\limits_{x\to\pi/2} -\frac{1}{\sin^3 x}\cdot\frac{1}{1-\cotan x}} = e^{-1}$

b)



$-2\sin\theta = 1 \Rightarrow \sin\theta = -1/2 \Rightarrow \theta = -\pi/6$

$A = \frac{1}{2}\cdot 2\int_{-\pi/2}^{-\pi/6}\left((-2\sin\theta)^2 - 1^2\right)d\theta$

$A = \int_{-\pi/2}^{-\pi/6}\left(4\sin^2\theta - 1\right)d\theta$

$A = \int_{-\pi/2}^{-\pi/6}\left(2(1-\cos 2\theta) - 1\right)d\theta$

$A = \int_{-\pi/2}^{-\pi/6}(1-2\cos 2\theta)d\theta = \theta - \sin 2\theta \Big|_{-\pi/2}^{-\pi/6}$

$= \left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right) - \left(\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \cancel{\sin(-\pi)}\right)$

$= \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

SORU 3 Aşağıdaki boşluklar öğrenci tarafından doldurulacaktır. (Puan Hariç)

Soyadı:	Adı:	Grup No:	Sıra No:	**Puan**
İmza:	Elektronik Posta(e-mail) adresi:	Öğrenci No:		

`Lütfen bu soruyu bu kağıdın ön yüzünü ve gerekirse arka yüzünü kullanarak cevaplayınız.`

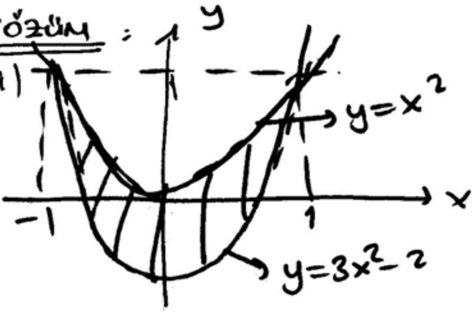
[13p] **a)** $\mathbf{y = 3x^2 - 2}$ ve $\mathbf{y = x^2}$ eğrileri ile sınırlı R bölgesinin $\mathbf{y = 1}$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan katı cismin hacmini bulunuz.

[12p] **b)** $\mathbf{y = \sin x}$ ve $\mathbf{y = \cos x}$ eğrileri ve $\mathbf{x = \frac{\pi}{4}}$ ve $\mathbf{x = \frac{\pi}{2}}$ doğruları ile sınırlı R bölgesinin $\mathbf{y}$ ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan katı cismin hacmini Shell metodu ile bulunuz.

(Diğer yol ile çözüm yapanlara puan verilmeyecektir)

Çözüm :

a)



$3x^2-2=x^2 \Rightarrow x=\mp 1$

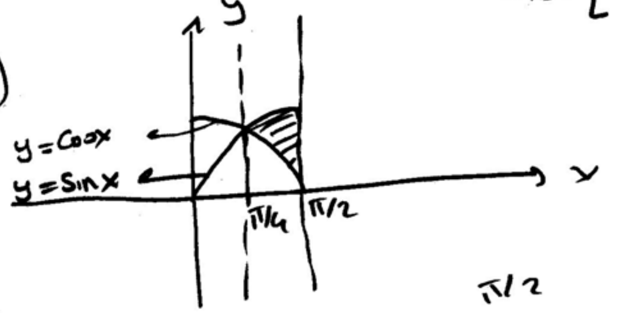
$V=\pi\int_{-1}^{1}\left[(1-(3x^2-2))^2-(1-x^2)^2\right]dx$

$=\pi\int_{-1}^{1}\left[(3-3x^2)^2-(1-x^2)^2\right]dx$

$=16\pi\int_0^1(1-x^2)^2dx=16\pi\int_0^1(1-2x^2+x^4)dx$

$=16\pi\left[x-\frac{2}{3}x^3+\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\boxed{\frac{128\pi}{15}}$

b)



$V_y=2\pi\int xy\,dx=2\pi\int_{\pi/4}^{\pi/2}x(\sin x-\cos x)\,dx$

$x=u \Rightarrow dx=du$

$(\sin x-\cos x)dx=dv \Rightarrow v=-\cos x-\sin x$

$V_y=2\pi\left[-x(\cos x+\sin x)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}+\int_{\pi/4}^{\pi/2}(\cos x+\sin x)\,dx\right]$

$=2\pi\left[\frac{\pi(\sqrt{2}-1)}{2}+(\sin x-\cos x)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}\right]=-\pi^2+\pi^2\frac{\sqrt{2}}{2}+2\pi$

$=\pi^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)+2\pi$

SORU 4 Aşağıdaki boşluklar öğrenci tarafından doldurulacaktır. (Puan Hariç)

Soyadı:	Adı:	Grup No:	Sıra No:	**Puan**
İmza:	Elektronik Posta(e-mail) adresi:	Öğrenci No:		

`Lütfen bu soruyu bu kağıdın ön yüzünü ve gerekirse arka yüzünü kullanarak cevaplayınız.`

[13p] a) $\displaystyle\int_3^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x}+1}\,dx$ genelleştirilmiş integralinin yakınsak veya ıraksaklığını araştırınız.

[12p] b) $x = t^3$, $y = \dfrac{3t^2}{2}$ $0 \le t \le \sqrt{3}$ eğrisinin uzunluğunu bulunuz.

ÇÖZÜM:

a) $\displaystyle\int_3^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x}+1}\,dx$ integrali $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}+1}$ $(x \geq 3)$ için sürekli olduğundan I. tip genelleştirilmiş integraldir

$g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ olsun. Karşılaştırma Kriterinin limit şekline göre,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\cdot \ln x = \infty$$

$L=\infty$ ve $\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ $(p=\frac{1}{2}<1)$ ıraksak olduğundan $\displaystyle\int_3^\infty f(x)dx$ integrali de ıraksaktır.

b) $x=t^3$, $y=\dfrac{3t^2}{2}$, $0\le t\le\sqrt{3}$

$\dfrac{dx}{dt}=3t^2$, $\dfrac{dy}{dt}=3t \Rightarrow \left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 = 9t^4+9t^2 = 9t^2(t^2+1)$

$$L=\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{9t^2(t^2+1)}\,dt$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} 3t\sqrt{t^2+1}\,dt = \frac{3}{2}\int u^{1/2}du = \frac{3}{2}\,\frac{u^{3/2}}{3/2}\Big| = (t^2+1)^{3/2}\Big|_0^{\sqrt{3}}$$

$(0\le t\le\sqrt{3})$ $t^2+1=u$, $2t\,dt=du$

$= (8-1) = 7$ //