## 2. FONKSİYONLAR

**1.** *Aşağıdaki kurallarla verilen fonksiyonların grafiklerini çiziniz.*

(**a**) $f(x) = 4|x|$ (**b**) $f(x) = -|x|$ (**c**) $f(x) = -4|x|$ (**ç**) $f(x) = |x-3|$

(**d**) $f(x) = -|x-3|$ (**e**) $f(x) = |3x-1|$ (**f**) $f(x) = -|3x-1|$

**2.** *Aşağıdaki kurallarla verilen fonksiyonların grafiklerini çiziniz.*

(**a**) $f(x) = |x| + 4$ (**b**) $f(x) = |x| - 4$ (**c**) $f(x) = 4 - |x|$

**3.** *Bilgisayar bellek çipleri üretip satan bir fabrikanın pazarlama bölümü, fiyat-talep ve gelir fonksiyonlarının*

$$\begin{aligned} p(x) &= 75 - 3x \\ R(x) &= x(75 - 3x) \end{aligned}$$

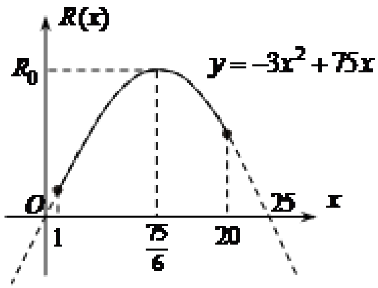
*eşitlikleriyle verildiğini belirlemiştir. Burada $x$,* milyon *olarak talep sayısını göstermektedir. $R(x)$ de* milyon dolar *olarak gelirdir. Bu fonksiyonların tanım aralığı $1 \le x \le 20$ eşitsizliğiyle verilmiştir.*

(**a**) *Gelir fonksiyonunun grafiğini çiziniz.*

(**b**) *Maksimum gelir elde edebilmek için gereken üretim sayısını bulunuz. Maksimum gelir nedir?*

(**c**) *Maksimum gelir elde edildiğinde her bir çipin fiyatı ne olur?*

**Çözüm:** (a)




(2-1.1. şekil)

(**b**) $\frac{75}{6}$ milyon adet üretildiğinde gelir en büyük olur. $\left(\frac{75000000}{6} = 12\,500\,000 \text{ adet.}\right)$

$R_0 = R(\frac{75}{6}) = \frac{75}{6}\left(75 - 3 \cdot \frac{75}{6}\right) = 468.75$ milyon dolar olur. (468750000 dolar) (**c**) $p(\frac{75}{6}) = 75 - 3 \cdot \frac{75}{6} = 37,5$ dolar. □

**4.** *Bilgisayar bellek çipleri üretip satan bir fabrikanın pazarlama bölümü, gelir ve maliyet fonksiyonlarının*

$$\begin{aligned} R(x) &= x\,(75-3x) \\ C(x) &= 125+16x \end{aligned}$$

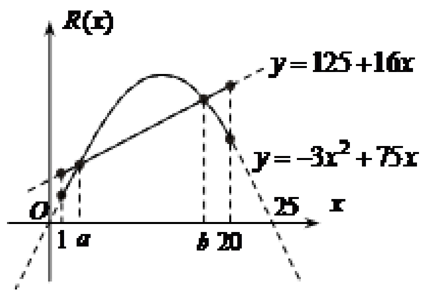
*eşitliğiyle verildiğini belirlemiştir. Burada* $x$, milyon *olarak talep sayısını göstermektedir.* $R(x)$ *de* milyon dolar *olarak gelirdir. Bu fonksiyonun tanım aralığı* $1 \le x \le 20$ *eşitsizliğiyle verilmiştir.*

(**a**) *Gelir ve maliyet fonksiyonlarının grafiğini aynı koordinat sisteminde çiziniz.*

(**b**) *Gelir ve maliyetin eşit olduğu başabaş noktasını bulunuz.*

(**c**) $x$ *in hangi değerleri için kâr, hangi değerleri için zarar olur?*

**Çözüm:** (**a**)




(2-1.2. şekil)

(**b**) $x\,(75-3x) = 125+16x$ eşitliğinden $a = 2,415$ milyon çip ve $b = 17,251$ milyon çip bulunur.

(**c**) $2,415 < x < 17,251$ aralığında firma kâr eder.

$1 \le x < 2,415$ ve $17,251 < x \le 20$ aralıklarında firma zarar eder. □

**5.** *Aşağıda kuralları verilen fonksiyonların grafiklerini çiziniz.*

**(a)** $f(x) = 3^x$ **(b)** $f(x) = -3^x$ **(c)** $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ **(ç)** $f(x) = -\left(\frac{1}{3}\right)^x$

**Çözüm:** □

**6.** *Aşağıda kuralları verilen fonksiyonların grafiklerini çiziniz.*

**(a)** $f(x) = 3^x + 1$ **(b)** $f(x) = 3^{-x} - 1$ **(c)** $f(x) = -3^{-x} + 1$

**Çözüm:** $\square$

**7.** *Aşağıda kuralları verilen fonksiyonların grafiklerini çiziniz.*

**(a)** $f(x) = 3^{x+1}$ **(b)** $f(x) = 3^{x-1}$ **(c)** $f(x) = -3^{x+1}$ **(ç)** $f(x) = -3^{x-1}$

**8.** 3500 *TL para* 4 *ayda bir yenilenmek üzere yıllık* %8 *faiz oranıyla bankaya yatırılıyor. Bu para* 6 *yıl sonra ne kadar olur?*

**Çözüm:** $A = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt} = 3500\left(1 + \frac{0{,}08}{3}\right)^{3\cdot 6} \simeq 5620,8$ dir.

**9.** *Aşağıda kuralları verilen fonksiyonların grafiklerini çiziniz.*

**(a)** $f(x) = \log_3 x$ **(b)** $f(x) = -\log_3 x$ **(c)** $f(x) = 1 + \log_3 x$

**(ç)** $f(x) = -1 + \log_3 x$ **(d)** $f(x) = 1 - \log_3 x$

**10.** *Aşağıda kuralları verilen fonksiyonların grafiklerini çiziniz.*

**(a)** $f(x) = \log_3(x-1)$ **(b)** $f(x) = \log_3(x+1)$

**(c)** $f(x) = 1 + \log_3(x-1)$ **(ç)** $f(x) = -1 + \log_3(x-1)$

**11.** *Aşağıda verilen sayıları bulunuz.*

**(a)** $\log_2 128$ **(b)** $\log_4 1$ **(c)** $\log_3 243$

**(ç)** $\log_9 \sqrt[3]{9}$ **(d)** $\log_3 \sqrt[5]{81}$ **(e)** $\log_{\sqrt{2}} 32$

**12.** *Aşağıda verilen sayıları bulunuz.*

**(a)** $\log_3 64 \cdot \log_2 27$ **(b)** $\log_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} 8$

**Çözüm**: **(a)** $\log_3 64 \cdot \log_2 27 = \log_3\left(2^6\right) \cdot \log_2\left(3^3\right)$

$$= (6\log_3 2)\cdot(3\log_2 3) = 18\,(\log_3 2)\cdot(\log_2 3) = 18\,(\log_3 3) = 18$$

**(b)** $\log_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} 8 = \dfrac{\log_2 8}{\log_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \dfrac{\log_2\left(2^3\right)}{\log_2 1 - \log_2\left(\sqrt{2}\right)} = \dfrac{3\log_2 2}{0 - \log_2\left(2^{1/2}\right)} = \dfrac{3}{0 - \frac{1}{2}\log_2 2} = -6$ $\square$

**13.** $\log_2 125 \cdot \log_5 9 \cdot \log_3\left(\frac{1}{16}\right)$ *sayısını hesaplayınız.*

**Çözüm:** $\log_2 125 \cdot \log_5 9 \cdot \log_3\left(\frac{1}{16}\right) = \log_2\left(5^3\right)\cdot\log_5\left(3^2\right)\cdot\log_3\left(2^{-4}\right)$

$$= 3\log_2 5 \cdot 2\log_5 3 \cdot (-4)\log_3 2 = -24\,(\log_2 5)\cdot(\log_5 3)\cdot(\log_3 2) = -24\log_2 2 = -24$$

□

**14.** $\log_a\left(\frac{1}{27}\right) = -\frac{3}{2}$ *ise* $a$ *nedir?*

**Çözüm**: $\log_a\left(\frac{1}{27}\right) = \log_a\left(3^{-3}\right) = (-3)\log_a 3$ olduğundan $\log_a\left(\frac{1}{16}\right) = -\frac{3}{2}$ eşitliği,

$$-3\log_a 3 = -\frac{3}{2}$$

eşitliğine denktir. Buradan $\log_a 3 = \frac{1}{2}$ elde edilir. Buradan da $3 = a^{1/2}$ bulunur. $3 = a^{1/2}$ eşitliğinin her iki yanının karesi alınarak $3^2 = a$ elde edilir. Buna göre $a = 9$ dur. □

**15**. *$P$ lira para yıllık %10 faizle bankaya yatırıldığında kaç yıl sonra beş katına çıkar?*

**Çözüm:** Bileşik faiz formülüne göre

$$5P = P\left(1 + \frac{10}{100}\right)^t$$

olur. Bu eşitliği sağlayan $t$ sayısını arıyoruz demektir. Buradan

$$\begin{aligned} 5 &= (1,1)^t \\ \ln 5 &= t\ln(1,1) \\ t &= \tfrac{\ln 5}{\ln(1,1)} \approx 17 \text{ yıl} \end{aligned}$$

olur. □

**16.** *Trigonometri çemberinden yararlanarak* $\cos(x+\pi) = -\cos x$ *ve* $\sin(x+\pi) = -\sin x$ *olduğunu gösteriniz.*

**17.** *Trigonometri çemberinden yararlanarak* $\cos(x+\frac{\pi}{2}) = \sin x$ *ve* $\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x$ *olduğunu gösteriniz.*

**18.** *Radyan olarak ölçüleri* $\pi+\frac{\pi}{6}$, $\pi-\frac{\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{6}$ *olan açıların kosinüs ve sinüslerini,* $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *ve* $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ *olduğundan yararlanarak ve trigonometri çemberini kullanarak geometrik olarak bulunuz.*

**19.** *Aşağıda verilen sayıları bulunuz.*

**(a)** $\cos(-90^o)$ **(b)** $\sin(-270^o)$ **(c)** $\sin(540^o)$ **(d)** $\cos(135^o)$

**20.** *Aşağıda verilen sayıları bulunuz.*

**(a)** $\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$ **(b)** $\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$ **(c)** $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ **(d)** $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

**21.** *Aşağıda kuralları verilen fonksiyonların grafiklerini çiziniz.*

**(a)** $f(x) = \cos 2x$ **(b)** $f(x) = \sin 2x$ **(c)** $f(x) = -\cos 2x$ **(ç)** $f(x) = -\sin 2x$

## 3. LİMİT VE SÜREKLİLİK

**1.** *Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.*

**(a)** $\lim\limits_{x\to(-1)^-} x^2$ **(b)** $\lim\limits_{x\to5^-} x$ **(c)** $\lim\limits_{x\to2^-} 8$ **(d)** $\lim\limits_{x\to4^-} |x|$

**(e)** $\lim\limits_{x\to5^+} x$ **f)** $\lim\limits_{x\to1^+} x^3$ **(g)** $\lim\limits_{x\to0^+} (|x|-1)$ **(h)** $\lim\limits_{x\to4^+} |x|$

**2.** *Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.*

**(a)** $\lim\limits_{x\to(-1)^-} |x+1|$ **(b)** $\lim\limits_{x\to3^-} |x-3|$ **(c)** $\lim\limits_{x\to6^-} |x-6|$ **(d)** $\lim\limits_{x\to(-2)^-} |x+2|$

**(e)** $\lim\limits_{x\to(-7)^+} |x+7|$ **(f)** $\lim\limits_{x\to2^+} |x-2|$ **(g)** $\lim\limits_{x\to(-3)^+} |x+3|$ **(h)** $\lim\limits_{x\to5^+} |x-5|$

**3.** *Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.*

**(a)** $\lim\limits_{x\to(-1)} |x+1|$ **(b)** $\lim\limits_{x\to3} |x-3|$ **(c)** $\lim\limits_{x\to6} |x-6|$ **(d)** $\lim\limits_{x\to(-2)} |x+2|$

**(e)** $\lim\limits_{x\to(-7)} |x+7|$ **(f)** $\lim\limits_{x\to2} |x-2|$ **(g)** $\lim\limits_{x\to(-3)} |x+3|$ **(h)** $\lim\limits_{x\to5} |x-5|$

**4**. $\lim\limits_{x\to3} \left(3x^2-5x+2\right)$ *limiti varsa bulunuz.*

**5**. $\lim\limits_{x\to1} \sqrt{4x^2-x+1}$ *limiti varsa bulunuz.*

**6**. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin 4x}{5x}$ *limiti varsa bulunuz.*

**Çözüm:** $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin 4x}{5x} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{4}{5}\dfrac{\sin 4x}{4x} = \dfrac{4}{5}\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin 4x}{4x} = \dfrac{4}{5}.$ □

**7**. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{2x}{\sin 7x}$ *limiti varsa bulunuz.*

**Çözüm:** $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{2x}{\sin 7x} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{2}{7}\dfrac{7x}{\sin 7x} = \dfrac{2}{7}\lim\limits_{x\to0} \dfrac{7x}{\sin 7x} = \dfrac{2}{7}.$ □

**8**. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\tan 3x}{8x}$ *limiti varsa bulunuz.*

**Çözüm:** $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\tan 3x}{8x} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{3}{8}\dfrac{\tan 3x}{3x} = \dfrac{3}{8}\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\tan 3x}{3x} = \dfrac{3}{8}.$ □

**9**. $\lim\limits_{x\to(-3)} \dfrac{x^2-9}{x+3}$ *limiti varsa bulunuz.*

**Çözüm:** $\lim\limits_{x\to(-3)} \dfrac{x^2-9}{x+3} = \lim\limits_{x\to(-3)} \dfrac{(x-3)(x+3)}{x+3} = \lim\limits_{x\to(-3)} (x-3) = -6.$ □

**10**. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2+x-2}{x-1}$ *limiti varsa bulunuz.*

**Çözüm:** $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2+x-2}{x-1} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{(x-1)(x+2)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1} (x+2) = 3.$ □

**11**. $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{x-3}{x^2-4x+3}$ *limiti varsa bulunuz.*

**12**. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$ *limiti varsa bulunuz.*

**13**. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x-1}{|x-1|}$ *limiti varsa bulunuz.*

**Çözüm:** $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{x-1}{|x-1|} = \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{x-1}{-(x-1)} = \lim\limits_{x\to1^-} (-1) = -1,$

$$\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x-1}{|x-1|} = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x-1}{(x-1)} = \lim\limits_{x\to1^+} (1) = 1$$

dir. 2 noktasındaki sağdan ve soldan limitler farklı olduğundan bu örnekte verilen fonksiyonun bu noktada limiti yoktur. □

**14**. $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2|x-2|}{x-2}$ *limiti varsa bulunuz.*

**Çözüm:** $\lim\limits_{x\to2^-} \dfrac{x^2|x-2|}{x-2} = \lim\limits_{x\to2^-} \dfrac{x^2(-(x-2))}{x-2} = \lim\limits_{x\to2^-} \left(-x^2\right) = -4,$

$$\lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{x^2|x-2|}{x-2} = \lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{x^2(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to2^+} \left(x^2\right) = 4$$

dir. 2 noktasındaki sağdan ve soldan limitler farklı olduğundan bu örnekte verilen fonksiyonun bu noktada limiti yoktur. □

**15**. $\lim\limits_{x\to(-1)} \dfrac{x\,|x+1|}{x+1}$ *limiti varsa bulunuz.*

**16.** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\left|x^2-4\right|}{x-2}$ *limiti varsa bulunuz.*

**Çözüm:**

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{\left|x^2-4\right|}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-\left(x^2-4\right)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-(x-2)(x+2)}{x-2} = -\lim_{x\to 2^-} (x+2) = -4,$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{\left|x^2-4\right|}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{\left(x^2-4\right)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} (x+2) = 4,$$

dir. 2 noktasındaki sağdan ve soldan limitler farklı olduğundan bu örnekte verilen fonksi-yonun bu noktada limiti yoktur. □

**17.** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{|x-2|}$ *limiti varsa bulunuz.*

**18.** $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{5+h}-\sqrt{5}}{h}$ *limiti varsa bulunuz.*

**Çözüm:** $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{5+h}-\sqrt{5}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\left(\sqrt{5+h}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5+h}+\sqrt{5}\right)}{h\left(\sqrt{5+h}+\sqrt{5}\right)}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(5+h-5)}{h\left(\sqrt{5+h}+\sqrt{5}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{5+h}+\sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}. \ \square$$

**19**. $x \in \mathbb{R}$ *için*

$$f(x) = \begin{cases} -x^2-2x, & x < -1 \text{ ise} \\ -x, & -1 < x \text{ ise} \end{cases}$$

*biçiminde tanımlanan $f$ fonksiyonu veriliyor.*

**(a)** *$f$ fonksiyonunun $x_0 = 0$ noktasında limiti varsa bulunuz.*

**(b)** *$f$ fonksiyonunun $x_0 = -1$ noktasında limiti varsa bulunuz.*

**(c)** *$f$ fonksiyonunun $x_0 = -2$ noktasında limiti varsa bulunuz.*

**Çözüm:**

**(a)** $x_0 = 0$ için $x_0$ noktasının komşuluğunda $f(x) = -x$ olduğu göz önünde bulundurularak

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (-x) = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$$

elde edilir. Sağdan ve soldan limitler eşit olduğundan bu fonksiyonun $x_0$ noktasında limiti 0 dır.

**(b)** $$\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = \lim_{x\to(-1)^-} \left(-x^2 - 2x\right) = -\left(-1\right)^2 - 2\left(-1\right) = 1,$$

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim_{x\to(-1)^+} (-x) = -\left(-1\right) = 1,$$

dir. Sağdan ve soldan limitler eşit olduğundan bu fonksiyonun $-1$ noktasında limiti vardır ve 1 sayısına eşittir.

**(c)** $x_0 = -2$ için $x_0$ noktasının komşuluğunda $f(x) = -x^2 - 2x$ olduğu göz önünde bulundurularak

$$\lim_{x\to(-2)^-} f(x) = \lim_{x\to(-2)^-} \left(-x^2 - 2x\right) = -\left(-2\right)^2 - 2\left(-2\right) = 0$$

$$\lim_{x\to(-2)^+} f(x) = \lim_{x\to(-2)^+} \left(-x^2 - 2x\right) = -\left(-2\right)^2 - 2\left(-2\right) = 0$$

elde edilir. Sağdan ve soldan limitler eşit olduğundan bu fonksiyonun $-2$ noktasında limiti vardır ve 0 sayısıdır. □

**20.** $x \in \mathbb{R}$ *için*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 2 \text{ ise} \\ x - 1, & 2 < x \text{ ise} \end{cases}$$

*biçiminde tanımlanan* $f$ *fonksiyonu veriliyor.*

**(a)** $f$ *fonksiyonunun* $x_0 = 0$ *noktasında limiti varsa bulunuz.*

**(b)** $f$ *fonksiyonunun* $x_0 = 2$ *noktasında limiti varsa bulunuz.*

**(c)** $f$ *fonksiyonunun* $x_0 = 3$ *noktasında limiti varsa bulunuz.*

**21.** *Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.*

**(a)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{4x^3 + 3x^2 - 1}$ **(b)** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{4x^3 + 3x^2 - 1}$

**(c)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2 - x + 3}{2x^2 + 7x}$ **(d)** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2 - x + 3}{2x^2 + 7x}$

**(e)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3 - 3x + 1}{5x^2 + x - 4}$ **(f)** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3 - 3x + 1}{5x^2 + x - 4}$

**Çözüm:** **(a)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x+2}{4x^3+3x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x^3\left(4+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x\left(4+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}\right)}$

$$=\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{4+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}}\right)=0\cdot\frac{1}{4}=0.$$

**(b)** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x+2}{4x^3+3x^2-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x^3\left(4+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x\left(4+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}\right)}$

$$=\left(\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{4+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}}\right)=0\cdot\frac{1}{4}=0.$$

**(c)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-x+3}{2x^2+7x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(4-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(2+\frac{7}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}{2+\frac{7}{x}}=\frac{4-0+0}{2+0}=2.$

**(d)** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2-x+3}{2x^2+7x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(4-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(2+\frac{7}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}{2+\frac{7}{x}}=\frac{4-0+0}{2+0}=2.$

**(e)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-3x+1}{5x^2+x-4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(2-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(5+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{5+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}$

$$=\left(\lim_{x\to+\infty}x\right)\cdot\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{5+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}\right)=(+\infty)\cdot\frac{2}{5}=+\infty.$$

**(f)** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3-3x+1}{5x^2+x-4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\left(2-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(5+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(2-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{5+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}$

$$=\left(\lim_{x\to-\infty}x\right)\cdot\left(\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{5+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}\right)=(-\infty)\cdot\frac{2}{5}=-\infty. \quad\square$$

**22.** *Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.*

**(a)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{\sqrt{9x^2+2}}$ **(b)** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{\sqrt{9x^2+2}}$

**(c)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-7}{\sqrt{x^2+4x+5}}$ **(d)** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-7}{\sqrt{x^2+4x+5}}$

**Çözüm: (a)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{\sqrt{9x^2+2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(9+\frac{2}{x^2}\right)}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2}\sqrt{9+\frac{2}{x^2}}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{9+\frac{2}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{9+\frac{2}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1-0}{\sqrt{9+0}}=\frac{1}{3}.$$

**(b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{\sqrt{9x^2+2}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(9+\frac{2}{x^2}\right)}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2}\sqrt{9+\frac{2}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{9+\frac{2}{x^2}}}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{(-x)\sqrt{9+\frac{2}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)}{(-1)\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}}=(-1)\frac{1-0}{\sqrt{9+0}}=-\frac{1}{3}.$$

**(c)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-7}{\sqrt{x^2+4x+5}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(3-\frac{7}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(3-\frac{7}{x}\right)}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(3-\frac{7}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(3-\frac{7}{x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{7}{x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}}=\frac{3-0}{\sqrt{1+0+0}}=3.$$

**(d)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-7}{\sqrt{x^2+4x+5}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(3-\frac{7}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(3-\frac{7}{x}\right)}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(3-\frac{7}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(3-\frac{7}{x}\right)}{(-x)\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}}$$

$$=(-1)\lim_{x\to-\infty}\frac{3-\frac{7}{x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}}=(-1)\frac{3-0}{\sqrt{1+0+0}}=-3.\ \square$$

**23.** $\lim\limits_{x\to(-2)}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}$ *limiti varsa bulunuz.*

**Çözüm:** $$\lim_{x\to(-2)^-}\frac{x^2+x-6}{x^2-4}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to(-2)^-}\frac{x+3}{x+2}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to(-2)^+}\frac{x^2+x-6}{x^2-4}=\lim_{x\to(-2)^+}\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to(-2)^+}\frac{x+3}{x+2}=+\infty$$

dir. $-2$ noktasındaki sağdan ve soldan limitler farklı olduğundan bu örnekte verilen fonksiyonun bu noktada limiti yoktur. □

**24.** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3|x|}{2x+5}$ *ve* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{3|x|}{2x+5}$ *limitleri varsa bulunuz.*

**Çözüm:** $$\lim_{x\to-\infty}\frac{3|x|}{2x+5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3(-x)}{2x+5}=-\frac{3}{2},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3|x|}{2x+5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{2x+5}=\frac{3}{2}$$

dir. □

**25.** $x\in\mathbb{R}$ *için*

$$f(x)=\begin{cases} x-\frac{|x-1|}{x-1}, & x\neq 1 \text{ ise}\\ 0, & x=1 \text{ ise}\end{cases}$$

*biçiminde tanımlanan $f$ fonksiyonu veriliyor.*

**(a)** *$f$ fonksiyonu $x_0=1$ noktasında sürekli midir?*

**(b)** *$f$ fonksiyonu $x_0=1$ noktasında sağdan sürekli midir?*

**(c)** *$f$ fonksiyonu $x_0=1$ noktasında soldan sürekli midir?*

**26.** $x\in\mathbb{R}$ *için*

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x-1}, & x\neq 1 \text{ ise}\\ 0, & x=1 \text{ ise}\end{cases}$$

*biçiminde tanımlanan $f$ fonksiyonu veriliyor.*

**(a)** *$f$ fonksiyonu $x_0=1$ noktasında sürekli midir?*

**(b)** *$f$ fonksiyonu $x_0=0$ noktasında sürekli midir?*

**27.** $x\in\mathbb{R}$ *için*

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x<1 \text{ ise} \\ -x^2+1, & x>1 \text{ ise} \end{cases}$$

*biçiminde tanımlanan $f$ fonksiyonu $x_0=1$ noktasında sürekli midir?*

**28.** $x\in\mathbb{R}$ *için*

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x\neq 1 \text{ ise} \\ 2, & x=1 \text{ ise} \end{cases}$$

*biçiminde tanımlanan $f$ fonksiyonu $x_0=2$ noktasında sürekli midir?*

**29**. *Aşağıda kuralları verilen fonksiyonların sürekli olduğu kümeleri belirtiniz.*

**(a)** $f(x)=5x^2+3$ **(b)** $f(x)=\dfrac{3x^2-1}{(x-1)(x+2)}$ **(c)** $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+1}$

**(d)** $f(x)=\sqrt[3]{2x-51}$ **(e)** $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ **(f)** $f(x)=\sqrt[6]{x^2+3}$

**30.** $x\in\mathbb{R}-\{2\}$ *için* $f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x-2}$ *kuralıyla tanımlanan $f$ fonksiyonunun $x_0=2$ noktasındaki sürekliliğini inceleyiniz.*

**Çözüm:** Verilen fonksiyon $x_0=2$ için tanımlı olmadığından bu noktada sürekli değildir. Öte yandan

$$\lim_{h\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2} = \lim_{h\to 2}\frac{(x-2)(x+3)}{x-2} = \lim_{h\to 2}(x+3) = 5$$

dır. $f$ fonksiyonunun tanım kümesi genişletilerek $f(2)=5$ olarak tanımlanırsa bu fonksiyon $x_0=2$ için sürekli olur. Bundan dolayı $f$ fonksiyonunun 2 noktasındaki süreksizliği kaldırılabilir süreksizliktir. □

## 4. TÜREV

### Türev Kavramı

**1.** *$x \in \mathbb{R}$ için*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 1 \text{ ise} \\ -x^2 + 1, & x > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

*biçiminde tanımlanan $f$ fonksiyonu $x_0 = 2$ noktasında türevli midir?*

**2**. $f(x) = |x|$ *olduğuna göre bu fonksiyonun 0 noktasında türevinin bulunmadığını gösteriniz.*

### Türev Alma Kuralları

**3.** *Aşağıdaki kuralları verilen $f$ fonksiyonları için $f'$ fonksiyonunun kuralını bulunuz.*

**(a)** $f(x) = 2 - 4x + 3x^2$ **(b)** $f(x) = x\,(x-5)^2$ **(c)** $f(x) = \left(x^3+1\right)^5$

**4.** *Aşağıdaki kuralları $y = f(x)$ biçiminde verilen $f$ fonksiyonları için $y'$ yü bulunuz.*

**(a)** $f(x) = \left(2x - \frac{1}{3}\right)^4$ **(b)** $f(x) = x^2\left(3x + \frac{1}{2}\right)^3$

**5.** $y^3x + x^2(y-1) = 0$ *eşitliğiyle belirlenen $f : x \to y$ fonksiyonunun türev fonksiyonunu belirtiniz.*

**6**. $f(x) = |x|$ *olduğuna göre $x \neq 0$ için* $f'(x) = \dfrac{|x|}{x}$ *olduğunu gösteriniz.*

**7**. $f(x) = \left|x^2 - 4\right|$ *olduğuna göre $f'(x)$ ne olur?*

**Çözüm:** $u = |x|$ ise $u' = \dfrac{|x|}{x}$ olduğundan $f'(x) = \dfrac{\left|x^2-4\right|}{x^2-4} \cdot (2x)$ olur. $\square$

**8.** *Aşağıdaki kurallarla verilen fonksiyonların türevlerini hesaplayınız.*

| | | |
|---|---|---|
| **(a)** $f(x) = 7$ | **(b)** $f(x) = -2x - 5$ | **(c)** $f(x) = 1 - 4x^2$ |
| **(ç)** $f(x) = 3x^4 - x + 5$ | **(d)** $f(x) = \left(x^3 - 3x^2 - 1\right)^9$ | **(e)** $f(x) = x^3(2-x)^5$ |
| **(f)** $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$ | **(g)** $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 6}{x-1}$ | **(h)** $f(x) = \dfrac{-x}{\left(x^2+1\right)^2}$ |

**9.** *$f(x) = x^3 + 4x - 3$ fonksiyonunun grafiğinin, $x = 1$ için elde edilen noktasındaki teğetinin denklemini bulunuz.*

**Çözüm:** $x = 1$ için $f(1) = 2$ olduğundan $(1, 2)$ noktasındaki teğetin denklemini bulacağız.

$$f'(x) = 3x^2 + 4$$

olduğundan $f'(1) = 7$ dir. Buna göre söz konusu noktadaki teğetin eğimi 7 tir. $(1, 2)$ noktasından geçen ve eğimi 7 olan doğrunun denklemi

$$y - 2 = 7\,(x - 1)$$

dir. Bu denklem düzenlenerek $y - 7x + 5 = 0$ denklemi elde edilir. □

**Diferensiyel Kavramı**

**10.** *$\sqrt{4,1}$ sayısını yaklaşık olarak hesaplayınız.*

**Çözüm:** $f(x) = \sqrt{x}$ alalım. $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ tir. $x_0 = 4$, $x = 4,1$ diyelim.

$$f(x) = f(4,1) \approx f(4) + (0,1) \cdot f'(4) = 2 + (0,1) \cdot \tfrac{1}{4} = 2,025$$

olur. □

**11.** *Takım elbise üreten bir firmanın $x$ adet satıştan elde ettiği gelir*

$$R(x) = 60x - 0,025x^2, \qquad 0 \leq x \leq 2000$$

*eşitliğiyle verilmiştir.*

(**a**) *Üretim sayısı* 900 *adetten* 1000 *adete çıkarılırsa gelirdeki ortalama artış nedir?*

(**b**) *Marjinal (anlık) gelir fonksiyonunu bulunuz.*

(**c**) *Üretim sayısı* 900 *adet iken gelirdeki ani değişim hızı nedir? Üretim sayısı* 960 *adet iken gelirdeki ani değişim hızı nedir?*

**Çözüm:** (**a**) Üretim sayısı 900 adetten 1000 adete çıkarılırsa gelirdeki artış

$$R(1000) - R(900)$$

dür.

$$R(950) - R(900) = \left(60 \cdot 1000 - 0,025\,(1000)^2\right) - \left(60 \cdot 900 - 0,025\,(900)^2\right) = 1250\ (lira)$$

olur. Gelirdeki ortalama artış $\frac{R(1000)-R(900)}{1000-900}$ dır.

$$\frac{R(1000) - R(900)}{1000 - 900} = \frac{1250}{100} = 12,5\ (lira)$$

bulunur. Bu demektir ki, üretim 900 ile 1000 arasında iken üretim sayısı 1 arttırıldığında gelir $12,5$ *lira* artar.

(**b**) $R'(x) = 60 - 0,05x$ tir. $R'(x)$, üretim sayısı $x$ iken üretim arttırılmaya başladığında gelirdeki ani değişim hızını gösterir.

(**c**) $$R'(900) = 60 - 0,05 \cdot 900 = 15 \ (lira)$$

ve

$$R'(960) = 60 - 0,05 \cdot 960 = 12 \ (lira)$$

dır.

Bu sorunun (a) kısmında bulunan sonuç ile (c) kısmında bulunan sonuçları karşılaştırınız. □

**12.** *Haftada $x$ adet oyuncak bebek üreten bir firmanın maliyet ve gelir fonksiyonları*

$$C(x) = 5000 + 2x, \quad R(x) = 12x - \frac{x^2}{800}, \qquad 0 \le x \le 9000$$

*eşitlikleriyle verilmiştir. Haftalık üretim* 2000 *adet iken* 2010 *adete çıkarılırsa gelir ve kârdaki yaklaşık artışı diferensiyel kavramından yararlanarak bulunuz.*

**Çözüm:** $dx = 2000 - 2010 = 10$ dur. $dR(x) = R'(x)dx = \left(12 - \frac{x}{400}\right) dx$ olduğundan

$$dR(2000) = \left(12 - \frac{2000}{400}\right) \cdot 10 = 70 \ (lira)$$

olur. Demek ki haftalık üretim 2000 adet olduğu anda üretim 2010 adete çıkarılırdığında gelirdeki yaklaşık artış, 70 *lira* dır.

$$P(x) = R(x) - C(x) = (12x - \frac{x^2}{800}) - (5000 + 2x) = 10x - \frac{x^2}{800} - 5000$$

olduğundan $dP(x) = P'(x)dx = \left(10 - \frac{x}{400}\right) dx$ olur. Buna göre

$$dP(2000) = \left(10 - \frac{2000}{400}\right) \cdot 10 = 50 \ (lira)$$

olur. Demek ki haftalık üretim 2000 adet olduğu anda üretim 2010 adete çıkarılırdığında kârdaki yaklaşık artış, 50 *lira* dır. □

### Bazı Özel Fonksiyonların Türevleri

**13**. $f(x) = \ln|x + \sin x|$ *olduğuna göre* $f'(x)$ *ne olur?*

**Çözüm:** $u = |x|$ ise $u' = \dfrac{|x|}{x}$ olduğundan

$$f'(x) = \frac{1}{|x+\sin x|} \cdot \frac{|x+\sin x|}{x+\sin x} \cdot (1+\cos x) = \frac{1+\cos x}{x+\sin x}$$

olur. □

**14.** *Aşağıdaki türevleri hesaplayınız.*

**(a)** $\dfrac{d}{dx}\left(x^{\frac{7}{2}}\right)$ **(b)** $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt[5]{x^3}\right)$ **(c)** $\dfrac{d}{dx}\left(x^{-8}\right)$

**(ç)** $\dfrac{d}{dx}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)$ **(d)** $\dfrac{d}{dx}\left(2x^5 - 7x + 1\right)$ **(e)** $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x} + 3x^2\right)$

**(f)** $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x^3} - x^2 + \dfrac{2}{x^5}\right)$ **(g)** $\dfrac{d}{du}\left(u^3 - \sqrt[5]{u}\right)$ **(h)** $\dfrac{d}{dt}\left(t^3 - \frac{1}{2}\sqrt{1+t^2}\right)$

**15.** *Aşağıdaki türevleri hesaplayınız.*

**(a)** $\dfrac{d}{dx}\ln(1 - e^x)$ **(b)** $\dfrac{d}{dx}\ln\left(2x + e^{(x^2)}\right)$ **(c)** $\dfrac{d}{dx}\cos\left(e^{-x}\right)$

**(ç)** $\dfrac{d}{dx}\left(3^x \cdot e^x\right)$ **(d)** $\dfrac{d}{dx}\left(e^{\sqrt{\sin x}}\right)$ **(e)** $\dfrac{d}{dx}\left(\arcsin e^x\right)$

**16.** *Aşağıdaki kurallarla verilen fonksiyonların türevlerini hesaplayınız.*

**(a)** $f(x) = \ln\left(4 + x^2\right)$ **(b)** $f(x) = \ln(\ln x)$ **(c)** $f(x) = \ln\ln\ln x$

**(ç)** $f(x) = (\ln x)^5$ **(d)** $f(x) = \arcsin(\ln x)$ **(e)** $f(x) = \ln(\arcsin x)$

**(f)** $f(x) = \ln(\cos x)$ **(g)** $f(x) = \cos(\ln x)$ **(h)** $f(x) = \sin\ln\ln x$

**17.** *Aşağıdaki kurallarla verilen fonksiyonların türevlerini hesaplayınız.*

**(a)** $f(x) = x^2\cos\left(x^2 + 1\right)$ **(b)** $f(x) = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

**(c)** $f(x) = \frac{1-\sin x}{1+\cos x}$ **(ç)** $f(x) = \dfrac{\cos 2x}{\sin^2 2x}$

**(d)** $f(x) = \sin^2(\cos x)$ **(e)** $f(x) = \sin\left(x\sqrt{1+x^2}\right)$

**(f)** $f(x) = \cos^2\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ **(g)** $f(x) = \sqrt{\left(\dfrac{\sin x}{1+\sin x}\right)}$

**18.** $y = \dfrac{3}{\ln x}$ *olduğuna göre $y''$ ne olur?*

**19.** *Aşağıdaki kurallarla verilen fonksiyonların ikinci türevlerini hesaplayınız.*

**(a)** $f(x) = e^{\cos x}$ **(b)** $f(x) = xe^x$

**20.** $f(x) = (x-1)^x$ *olduğuna göre* $f'(x)$ *ne olur?*

**Çözüm:** $y = (x-1)^x$ diyelim.

$$\begin{aligned}
\ln y &= \ln x \cdot \ln (x-1) \\
\tfrac{1}{y} y' &= \tfrac{1}{x} \cdot \ln (x-1) + (\ln x) \cdot \tfrac{1}{x-1} \\
\tfrac{1}{y} y' &= \tfrac{\ln(x-1)}{x} + \tfrac{\ln x}{x-1} \\
y' &= (x-1)^x \left[ \tfrac{\ln(x-1)}{x} + \tfrac{\ln x}{x-1} \right]
\end{aligned}$$

olur. □

**21.** $f(x) = \left(x^2 + \sin x\right)^{\ln x}$ *olduğuna göre* $f'(x)$ *ne olur?*

**Çözüm:** $y = \left(x^2 + \sin x\right)^{\ln x}$ diyelim.

$$\begin{aligned}
\ln y &= \ln x \cdot \ln \left(x^2 + \sin x\right) \\
\tfrac{1}{y} y' &= \tfrac{1}{x} \cdot \ln \left(x^2 + \sin x\right) + (\ln x) \cdot \tfrac{1}{(x^2 + \sin x)} (2x + \cos x) \\
\tfrac{1}{y} y' &= \tfrac{\ln\left(x^2 + \sin x\right)}{x} + \tfrac{(\ln x)(2x + \cos x)}{(x^2 + \sin x)} \\
y' &= \left(x^2 + \sin x\right)^{\ln x} \left[ \tfrac{\ln\left(x^2 + \sin x\right)}{x} + \tfrac{(\ln x)(2x + \cos x)}{(x^2 + \sin x)} \right]
\end{aligned}$$

olur. □

**22.** $f(x) = x^{\tan x}$ *olduğuna göre* $f'(x)$ *ne olur?*

**Çözüm:** $y = x^{\tan x}$ diyelim.

$$\begin{aligned}
\ln y &= \tan x \cdot \ln x \\
\tfrac{1}{y} y' &= \left(1 + \tan^2 x\right) \ln x + \tan x \cdot \tfrac{1}{x} \\
y' &= x^{\tan x} \left[ \left(1 + \tan^2 x\right) \ln x + \tfrac{\tan x}{x} \right]
\end{aligned}$$

olur. □

**23.** *Aşağıdaki kurallarla verilen fonksiyonların türevlerini hesaplayınız.*

**(a)** $y = x^{\left(x^3\right)}$ **(b)** $y = \left(x^2+4\right)^x$ **(c)** $y = \left(x^2+1\right)^{\sqrt{\ln x}}$

**(ç)** $y = (\sin x)^{\cos x}$ **(d)** $y = \sin\left(x^{\sqrt{x}}\right)$ **(e)** $y = (\cos x)^{\ln x}$

**Sürekli Bileşik Faiz**

**24.** 200 $TL$, *yıllık* %7 *sürekli bileşik faiz ile bankaya yatırılıyor. Bu para,* 4 *yıl sonra kaç liraya ulaşır?*

**Çözüm:** $A = Pe^{rt} = 200 \cdot e^{(0{,}07)\cdot 4} = 200 \cdot e^{0{,}28} \approx 264{,}63\ TL$ olur. □

**25.** 2000 $TL$ para, *yıllık* %5 *sürekli bileşik faiz ile bankaya yatırılıyor. Bu para, kaç yıl sonra* 6000 *lira olur?*

**Çözüm:** $6000 = 2000 \cdot e^{(0{,}05)t}$ eşitliğini sağlayan $t$ sayısını arıyoruz. Bu eşitlikten önce $e^{(0{,}05)t} = 3$ bulunur. Bu eşitliğin her iki yanının doğal logaritması alınarak $(0{,}05)\,t = \ln 3$ ve buradan $t = \frac{\ln 3}{0{,}05} \approx 22$ *yıl* bulunur. □

**26.** $P$ *lira* para, *yıllık* %8 *sürekli bileşik faiz ile bankaya yatırılıyor. Bu para, kaç yıl sonra ikiye katlanır?*

**Çözüm:** $2P = P \cdot e^{(0{,}08)t}$ eşitliğini sağlayan $t$ sayısını arıyoruz. Bu eşitlikten önce $e^{(0{,}08)t} = 2$ bulunur. Bu eşitliğin her iki yanının doğal logaritması alınarak $(0{,}08)\,t = \ln 2$ ve buradan $t = \frac{\ln 2}{0{,}08} \approx 8{,}7$ *yıl* bulunur. □

## 6 – 6. BELİRLİ İNTEGRAL

**1.** $\displaystyle\int_{-2}^{3} \left(x^2\right) dx$ *belirli integralini hesaplayınız.*

**Çözüm: (a)** $\displaystyle\int_{-2}^{3} \left(x^2\right) dx = \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{3} = 9 - \left(-\tfrac{8}{3}\right) = \tfrac{35}{3}$ □

**2.** $\displaystyle\int_{0}^{3} \left(3x^2 - 2x - 1\right) dx$ *belirli integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:** $\displaystyle\int_{0}^{3} \left(3x^2 - 2x - 1\right) dx = \left[x^3 - x^2 - x\right]_0^3 = (27 - 9 - 3) - 0 = 15$ □

**3.** $\displaystyle\int_{1}^{9} 3\sqrt{x}dx$ *belirli integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:** $\displaystyle\int_{1}^{9} 3\sqrt{x}dx = \left[2x^{\frac{3}{2}}\right]_1^9 = 2\left(9^{\frac{3}{2}} - 1\right) = 54 - 2 = 52$ □

**4.** $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \left(\sin^2 x\right) dx$ *belirli integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:** $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \left(\sin^2 x\right) dx = \int_{0}^{2\pi} \left(\tfrac{1-\cos 2x}{2}\right) dx = \tfrac{1}{2}\left[x - \tfrac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{2\pi} = \pi$ □

**5.** $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{2x+1}$ *belirli integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:** $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{2x+1} = \tfrac{1}{2}\left[\ln|2x+1|\right]_0^1 = \tfrac{1}{2}\left(\ln 3 - \ln 1\right) = \tfrac{1}{2}\ln 3$ □

**6.** $\displaystyle\int_{1}^{9} \frac{1-\sqrt{x}}{x}dx$ *belirli integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:**

$$\int_{1}^{9} \frac{1-\sqrt{x}}{x}dx = \int_{1}^{9} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \left[\ln|x| - 2\sqrt{x}\right]_1^9 = (\ln 9 - 6) - (\ln 1 - 2) = 2\ln 3 - 4 \ \square$$

**7.** $\displaystyle\int_{0}^{2} \left(x\sqrt{4-x^2}\ \right) dx$ *belirli integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:** $\int \left(x\sqrt{4-x^2}\ \right) dx$ integralinde, $4 - x^2 = t^2$ diyelim. $-2xdx = 2tdt$ olur. Buna göre

$$\int \left(x\sqrt{4-x^2}\,\right) dx = -\int \left(t^2\right) dt = -\tfrac{1}{3}t^3 = -\tfrac{1}{3}\left(\sqrt{4-x^2}\right)^3 + c$$

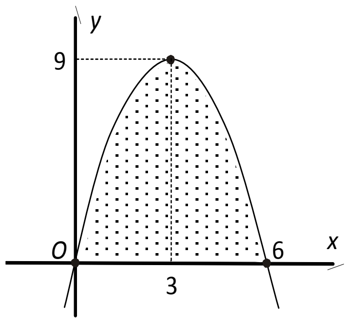
elde edilir.

$$\int_0^2 \left(x\sqrt{4-x^2}\,\right) dx = -\tfrac{1}{3}\left[\left(\sqrt{4-x^2}\right)^3\right]_0^2 = -\tfrac{1}{3}\left(\left(\sqrt{4-4}\right)^3 - \left(\sqrt{4}\right)^3\right) = \tfrac{8}{3}$$

tür. □

**8.** *$y = -x^2 + 6x$ eğrisi ile $Ox$ ekseninin çevrelediği bölgenin alanını bulunuz.*

**Çözüm:** $y = -x^2 + 6x$ eğrisi ile $Ox$ ekseninin çevrelediği bölge, $6-6.1$. şekilde gölgeli olarak gösterilmiş bölgedir. Bu bölgenin alanı $A$ olsun.



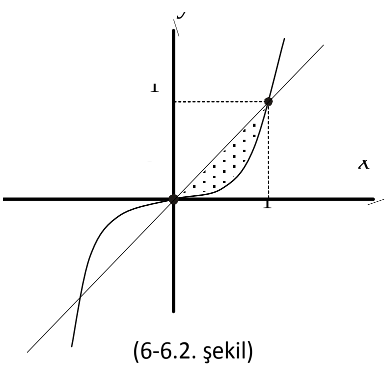

(6-6.1. şekil)

$$\begin{aligned} A &= \int_0^6 \left(-x^2+6x\right) dx \\ &= \left[-\tfrac{1}{3}x^3 + 6\cdot\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^6 \\ &= \left(-\tfrac{1}{3}6^3 + 6\cdot\tfrac{1}{2}6^2\right) - 0 \\ &= 36 \end{aligned}$$

dir. □

**9.** *Düzlemin birinci bölgesinde, $y = x^3$ eğrisi ile $x = y$ doğrusunun sınırladığı bölgenin alanını bulunuz.*

**Çözüm:** Verilen bölge, $6-6.2$. şekilde gölgeli olarak gösterilmiş bölgedir. Bu bölgenin alanı $A$ olsun.



(6-6.2. şekil)

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \left(x - x^3\right) dx \\ &= \left[\tfrac{x^2}{2} - \tfrac{x^4}{4}\right]_0^1 \\ &= \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\right) - 0 \\ &= \tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

dir. □

**10.** *Bir şirketin ayda $x$ adet televizyon üretimine karşılık aylık marjinal kârı*

$$P'(x) = 150 - (0,1)\,x, \qquad 0 \le x \le 3000$$

*eşitliğiyle verilmiştir. Bu şirket şu anda ayda* 1000 *adet üretim yapmaktadır. Üretimini ayda* 1200 *adet olacak biçimde arttırırsa aylık kârındaki değişim ne olur?*

**Çözüm:**

$$\begin{aligned} P(1200) - P(1000) &= \int_{1000}^{1200} (150 - 0,1x)\,dx = \left[150x - (0,05)\,x^2\right]_{1000}^{1200} \\ &= \left(150 \cdot 1200 - (0,05)\,(1200)^2\right) - \left(150 \cdot 100 - (0,05)\,(1000)^2\right) \\ &= 108000 - 100000 = 8000 \end{aligned}$$

olur. □

**11.** *$f(x) = -5x^2 + x$ olsun. $f$ nin $[-1, 2]$ aralığındaki ortalama değerini bulunuz.*

**Çözüm:** $f$ *nin* $[-1, 2]$ aralığındaki ortalama değeri $y_0$ olsun.

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^{2}\left(-5x^2 + x\right)dx = \tfrac{1}{3}\left[\tfrac{-5}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{2} \\ &= \tfrac{1}{3}\left[\left(\tfrac{-40}{3} + 2\right) - \left(\tfrac{5}{3} + \tfrac{1}{2}\right)\right] = -\tfrac{9}{2} \end{aligned}$$

olur. □

**12.** *Bir malın fiyat-talep denklemi, $p = D(x) = 100e^{-0,05x}$ eşitliğiyle verilmiştir.* $[60, 80]$ *aralığındaki ortalama fiyatı bulunuz.*

**Çözüm:** $[60, 80]$ aralığındaki ortalama fiyat $p_0$ olsun.

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{1}{b-a}\int_a^b D(x)dx = \frac{1}{20}\int_{60}^{80} 100e^{-0,05x}dx = 5\left[\tfrac{1}{-0,05}e^{-0,05x}\right]_{60}^{80} \\ &= -100\left[e^{-4} - e^{-3}\right] = 100\left(e^{-3} - e^{-4}\right) \approx 3,147 \end{aligned}$$

olur. □

## 6 – 2. DEĞİŞKEN DEĞİŞTİRME YÖNTEMİ

**1.** $\int \frac{2}{5-4x}dx$ integralini hesaplayınız.

**Çözüm:** $1-4x=u$ diyelim. $-4dx=du$ olduğundan $dx=\frac{du}{-4}$ olur. Buna göre verilen integral

$$\int \frac{2}{5-4x}dx = \int \frac{2}{u}\frac{du}{-4} = \frac{2}{-4}\int \frac{1}{u}du = -\tfrac{1}{2}\ln|u|+c = -\tfrac{1}{2}\ln|5-4x|+c$$

olur. □

**2.** $\int \frac{4x}{(5x^2-2)^7}dx$ integralini hesaplayınız.

**Çözüm:** $5x^2-2=u$ diyelim. $10x\,dx=du$ olduğundan $dx=\frac{du}{10x}$ olur. Buna göre

$$\begin{aligned}\int \frac{4x}{(5x^2-2)^7}dx &= \int \frac{4x}{u^7}\frac{du}{10x} = \tfrac{4}{10}\int \frac{1}{u^7}du = \tfrac{2}{5}\int u^{-7}du \\ &= \tfrac{2}{5}\tfrac{1}{(-6)}u^{-6}+c = \tfrac{-1}{15}\left(5x^2-2\right)^{-6}+c = \frac{-1}{15\left(5x^2-2\right)^6}+c\end{aligned}$$

olur. □

**3.** $\int \sqrt{2-3x}\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

**Çözüm: (a)** $2-3x=u$ diyelim. $-3dx=du$ olduğu hemen görülür. Buradan $dx=\frac{1}{-3}du$ bulunur. Buna göre

$$\int \sqrt{2-3x}\,dx = \int \sqrt{u}\,\tfrac{1}{-3}du = -\tfrac{1}{3}\int u^{1/2}du = -\tfrac{2}{9}u^{3/2} = -\tfrac{2}{9}(2-3x)^{3/2}+c = -\tfrac{2}{9}\sqrt{(2-3x)^3}+c$$

olur. □

**4.** $\int \frac{5x^4-3}{\sqrt{x^5-3x+1}}dx$ *integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:** $x^5-3x+1=u$ diyelim. $\left(5x^4-3\right)dx=du$ olduğundan $dx=\dfrac{du}{5x^4-3}$ olur. Buna göre

$$\int \frac{5x^4-3}{\sqrt{x^5-3x+1}}dx = \int \frac{5x^4-3}{\sqrt{u}}\frac{du}{5x^4-3} = \int u^{-1/2}du = 2u^{1/2}+c = 2\sqrt{x^5-3x+1}+c$$

olur. □

**5.** $\displaystyle\int \frac{2x+5}{\sqrt{x^2+5x-1}}dx$ *integralini hesaplayınız.*

**6.** $\displaystyle\int \frac{10x-2}{\sqrt{5x^2-2x}}dx$ *integralini hesaplayınız.*

**7.** $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}dx$ *integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:** $\sqrt{x}=u$ diyelim. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx = du$ olduğundan $dx = 2u du$ olur. Buna göre

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}dx \;=\; \int \frac{e^u}{2u}2u du \;=\; \int e^u du \;=\; e^u + c \;=\; e^{\sqrt{x}} + c$$

dir. □

**8.** $\displaystyle\int e^{2x-1}dx$ *integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:** $2x-1=u$ diyelim. $2dx = du$ olduğundan $dx = \frac{du}{2}du$ olur. Buna göre

$$\int e^{2x-1}dx \;=\; \int e^u \tfrac{du}{2} du \;=\; \tfrac{1}{2}\int e^u du \;=\; \tfrac{1}{2}e^u + c \;=\; \tfrac{1}{2}e^{2x-1} + c$$

dir. □

**9.** $\displaystyle\int e^{-2x}dx$ *integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:** $-2x=u$ diyelim. $-2dx = du$ olduğundan $dx = \frac{du}{-2}du$ olur. Buna göre

$$\int e^{-2x}dx \;=\; \int e^u \tfrac{du}{-2} du \;=\; -\tfrac{1}{2}\int e^u du \;=\; -\tfrac{1}{2}e^u + c \;=\; -\tfrac{1}{2}e^{-2x} + c$$

dir. □

**10.** $\displaystyle\int e^{-x}dx$ *integralini hesaplayınız.*

**11.** $\displaystyle\int e^{5x}dx$ *integralini hesaplayınız.*

**12.** $\int xe^{3-x^2}dx$ *integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:** $3-x^2=u$ diyelim. $-2xdx = du$ olduğundan $dx = \frac{du}{-2x}du$ olur. Buna göre

$$\int xe^{3-x^2}\,dx \;=\; \int xe^u\,\tfrac{du}{-2x} \;=\; -\tfrac{1}{2}\int e^u\,du \;=\; -\tfrac{1}{2}e^u + c \;=\; -\tfrac{1}{2}e^{3-x^2} + c$$

dir. □

**13.** $\int \frac{1}{x}e^{\ln x}\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:** $\ln x = u$ diyelim. $\dfrac{1}{x}dx = du$ olduğundan $dx = x\,du$ olur. Buna göre

$$\int \tfrac{1}{x}e^{\ln x}\,dx \;=\; \int \tfrac{1}{x}e^u x\,du \;=\; \int e^u\,du \;=\; e^u + c \;=\; e^{\ln x} + c$$

dir. □

**14.** $\displaystyle\int 2^{7x}\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:** $7x = u$ diyelim. $7dx = du$ olduğundan $dx = \frac{du}{7}du$ olur. Buna göre

$$\int 2^{7x}\,dx \;=\; \int 2^u\,\tfrac{du}{7} \;=\; \tfrac{1}{7}\int 2^u\,du \;=\; \tfrac{1}{7}\tfrac{1}{\ln 2}2^u + c \;=\; \tfrac{1}{7\ln 2}2^{7x} + c$$

dir. □

**15.** $\displaystyle\int \frac{5^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:** $\sqrt{x} = u$ diyelim. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx = du$ olduğundan $dx = 2u\,du$ olur. Buna göre

$$\int \frac{5^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx \;=\; \int \frac{5^u}{u}2u\,du \;=\; 2\int 5^u\,du \;=\; 2\tfrac{1}{\ln 5}5^u + c \;=\; \tfrac{2}{\ln 5}5^{\sqrt{x}} + c$$

dir. □

**16.** $\int \frac{\ln 5}{x}5^{\ln x}\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:** $\ln x = u$ diyelim. $\dfrac{1}{x}dx = du$ olduğundan $dx = x\,du$ olur. Buna göre

$$\int \tfrac{\ln 5}{x}5^{\ln x}\,dx \;=\; \int \tfrac{\ln 5}{x}5^u x\,du \;=\; (\ln 5)\int 5^u\,du \;=\; 5^u + c \;=\; 5^{\ln x} + c$$

dir. □

**17.** $\displaystyle\int \frac{4 + 3\cos x}{2\sin x}\,dx$ integralini hesaplayınız.

**Çözüm:**

$$\begin{aligned}\int \frac{4+3\cos x}{2\sin x}dx &= 2\int \frac{1}{\sin x}dx + \tfrac{3}{2}\int \frac{\cos x}{\sin x}dx \\ &= 2\ln|\csc x - \cot x| + \tfrac{3}{2}\ln|\sin x| + c\end{aligned}$$

dir. □

**18.** $\int \cos(4x-7)\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:** $4x-7=u$ diyelim. $4dx=du$ olduğundan $dx=\frac{du}{4}$ olur. Buna göre

$$\int \cos(4x-7)\,dx = \int \cos u \tfrac{du}{4} = \tfrac{1}{4}\int \cos u\,du = \tfrac{1}{4}\sin u + c = \tfrac{1}{4}\sin(4x-7)+c$$

olur. □

**19.** $\int \sin(2x+8)\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

**20.** $\int 3x^2\cos(2+x^3)\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:** $2+x^3=u$ diyelim. $3x^2dx=du$ olduğundan $dx=\dfrac{du}{3x^2}$ olur. Buna göre

$$\int 3x^2\cos(2+x^3)\,dx = \int 3x^2\cos u\frac{du}{3x^2} = \int \cos u\,du = \sin u + c = \sin(2+x^3)+c$$

olur. □

**21.** $\int x^2\sin(x^3-1)\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

**22.** $\displaystyle\int \frac{\sin\sqrt{x}}{4\sqrt{x}}dx$ integralini hesaplayınız.

**Çözüm:** $\sqrt{x}=u$ diyelim. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx=du$ olduğundan $dx=2\sqrt{x}du=2udu$ olur. Buna göre

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{4\sqrt{x}}dx = \int \frac{\sin u}{4u}2u\,du = \tfrac{1}{2}\int \sin u\,du = -\tfrac{1}{2}\cos u + c = -\tfrac{1}{2}\cos\sqrt{x}+c$$

dir. □

**23.** $\displaystyle\int \frac{2\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ integralini hesaplayınız.

**24.** $\int \sin x\cos^6 x\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:** $\cos x = u$ diyelim. $-\sin x dx = du$ olduğundan $dx = \frac{du}{-\sin x}$ olur. Buna göre

$$\int \sin x \cos^6 x dx = \int (\sin x)\, u^6 \tfrac{du}{-\sin x} = -\int u^6 du = -\tfrac{1}{7}u^7 + c = -\tfrac{1}{7}\cos^7 x + c$$

olur. □

**25.** $\int \cos x \sin^6 x dx$ *integralini hesaplayınız.*

**26.** $\int \cos x \sin^4 x dx$ *integralini hesaplayınız.*

**27.** $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^5 x} dx$ integralini hesaplayınız.

**Çözüm:** $\cos x = u$ diyelim. $-\sin x dx = du$ olduğundan $dx = \frac{du}{-\sin x}$ olur. Buna göre

$$\int \frac{\sin x}{\cos^5 x} dx = \int \frac{\sin x}{u^5} \frac{du}{-\sin x} = -\int u^{-5} du = \tfrac{1}{4}u^{-4} + c = \frac{1}{4\cos^4 x} + c$$

dir. □

**28.** $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^5 x} dx$ integralini hesaplayınız.

**29.** $\displaystyle\int \frac{\tan\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx$ integralini hesaplayınız.

**Çözüm:** $\sqrt{x} = u$ diyelim. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} dx = du$ olduğundan $dx = 2u du$ olur. Buna göre

$$\int \frac{\tan\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx = \int \frac{\tan u}{2u} 2u du = \int \tan u du = -\ln|\cos u| + c = -\ln|\cos\sqrt{x}| + c$$

dir. □

**30.** $\displaystyle\int \frac{\cot\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx$ integralini hesaplayınız.

**Çözüm:** $\sqrt{x} = u$ diyelim. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} dx = du$ olduğundan $dx = 2u du$ olur. Buna göre

$$\int \frac{\cot\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx = \int \frac{\cot u}{2u} 2u du = \int \cot u du = \ln|\sin u| + c = \ln|\sin\sqrt{x}| + c$$

dir. □

**31.** $\displaystyle\int \frac{x\tan\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}dx$ integralini hesaplayınız.

**Çözüm:** $\sqrt{x^2+1}=u$ diyelim. $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=du$ olduğundan $dx=\frac{u}{x}du$ olur. Buna göre

$$\begin{aligned}\int \frac{x\tan\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}dx &= \int \frac{x\tan u}{u}\frac{u}{x}du = \int \tan u du\\ &= -\ln|\cos u|+c = -\ln\left|\cos\sqrt{x^2+1}\right|+c\end{aligned}$$

dir. □

**32.** $\displaystyle\int \frac{x\cot\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx$ integralini hesaplayınız.

**Çözüm:** $\sqrt{1-x^2}=u$ diyelim. $\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}dx=du$ olduğundan $dx=\frac{u}{-x}du$ olur. Buna göre

$$\begin{aligned}\int \frac{x\cot\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \int \frac{x\cot u}{u}\frac{u}{-x}du = -\int \cot u du\\ &= -\ln|\sin u|+c = -\ln\left|\sin\sqrt{1-x^2}\right|+c\end{aligned}$$

dir. □

**33.** $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$ integralini hesaplayınız.

**Çözüm:** $\arctan x=u$ diyelim. $\dfrac{1}{1+x^2}dx=du$ olduğundan $dx=\left(1+x^2\right)du$ olur. Buna göre

$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx = \int \frac{u}{1+x^2}\left(1+x^2\right)du = \int u du = \tfrac{1}{2}u^2+c = \tfrac{1}{2}\left(\arctan x\right)^2+c$$

dir. □

**34.** $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arccot} x}{1+x^2}dx$ integralini hesaplayınız.

**Çözüm:** $\operatorname{arccot} x=u$ diyelim. $\dfrac{-1}{1+x^2}dx=du$ olduğundan $dx=-\left(1+x^2\right)du$ olur. Buna göre

$$\int \frac{\operatorname{arccot} x}{1+x^2}dx = -\int \frac{u}{1+x^2}\left(1+x^2\right)du = -\int u du = -\tfrac{1}{2}u^2+c = -\tfrac{1}{2}\left(\operatorname{arccot} x\right)^2+c$$

dir. □

**35.** $\displaystyle\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ integralini hesaplayınız.

**Çözüm:** $\arcsin x = u$ diyelim. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = du$ olduğundan $dx = \sqrt{1-x^2}\,du$ olur. Buna göre

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{u}{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2}\,du = \int u du = \tfrac{1}{2}u^2 + c = \tfrac{1}{2}(\arcsin x)^2 + c$$

dir. □

**36.** $\int 2\sec^2 x \tan x dx$ *integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:** $\tan x = u$ diyelim. $\sec^2 x dx = du$ olduğundan $dx = \frac{du}{\sec^2 x}$ olur. Buna göre

$$\int 2\sec^2 x \tan x dx = \int 2\left(\sec^2 x\right) u \frac{du}{\sec^2 x} = \int 2u du = u^2 + c = \tan^2 x + c$$

olur. □

**37.** $\int 2\csc^2 x \cot x dx$ *integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:** $\cot x = u$ diyelim. $-\csc^2 x dx = du$ olduğundan $dx = \frac{du}{-\csc^2 x}$ olur. Buna göre

$$\int 2\csc^2 x \cot x dx = \int 2\left(\csc^2 x\right) u \frac{du}{-\csc^2 x} = -\int 2u du = -u^2 + c = -\cot^2 x + c$$

olur. □

**38.** $\int 3\sec^2 x \tan^2 x dx$ *integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:** $\tan x = u$ diyelim. $\sec^2 x dx = du$ olduğundan $dx = \frac{du}{\sec^2 x}$ olur. Buna göre

$$\int 3\sec^2 x \tan^2 x dx = \int 3\left(\sec^2 x\right) u^2 \frac{du}{\sec^2 x} = \int 3u^2 du = u^3 + c = \tan^3 x + c$$

olur. □

**39.** $\int 3\csc^2 x \cot^2 x dx$ *integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:** $\cot x = u$ diyelim. $-\csc^2 x dx = du$ olduğundan $dx = \frac{du}{-\csc^2 x}$ olur. Buna göre

$$\int 3\csc^2 x \cot^2 x dx = \int 3\left(\csc^2 x\right) u^2 \frac{du}{-\csc^2 x} = -\int 3u^2 du = -u^3 + c = -\cot^3 x + c$$

olur. □

**40.** $\int e^{\sin x} \cos x dx$ *integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:** $\sin x = u$ diyelim. $\cos x dx = du$ olduğundan $dx = \frac{du}{\cos x}$ olur. Buna göre

$$\int e^{\sin x} \cos x dx = \int e^u \cos x \frac{du}{\cos x} = \int e^u du = e^u + c = e^{\sin x} + c$$

olur. □

**41.** $\int e^{\cos x} \sin x dx$ *integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:** $\cos x = u$ diyelim. $-\sin x dx = du$ olduğundan $dx = \frac{du}{-\sin x}$ olur. Buna göre

$$\int e^{\cos x} \sin x dx = \int e^u \sin x \frac{du}{-\sin x} = -\int e^u du = -e^u + c = -e^{\cos x} + c$$

olur. □

**42.** $\int e^{-4\cos x} \sin x dx$ *integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:** $-4\cos x = u$ diyelim. $4\sin x dx = du$ olduğundan $dx = \frac{du}{4\sin x}$ olur. Buna göre

$$\int e^{-4\cos x} \sin x dx = \int e^u \sin x \frac{du}{4\sin x} = \frac{1}{4}\int e^u du = \frac{1}{4}e^u + c = \frac{1}{4}e^{-4\cos x} + c$$

olur. □

**43.** $\int e^{4+\ln\sin x} \cot x dx$ *integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:** $4 + \ln\sin x = u$ diyelim. $\cot x dx = du$ olduğundan $dx = \frac{du}{\cot x}$ olur. Buna göre

$$\int e^{4+\ln\sin x} \cot x dx = \int e^u \cot x \frac{du}{\cot x} = \int e^u du = e^u + c = e^{4+\ln\sin x} + c$$

olur. □

**44.** $\int e^{1+\ln\cos x} \tan x dx$ *integralini hesaplayınız.*

**45.** $\displaystyle\int \frac{2^{1/x}}{x^2} dx$ *integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:** $\frac{1}{x} = u$ diyelim. $\dfrac{-1}{x^2} dx = du$ olduğundan $dx = -x^2 du$ olur. Buna göre

$$\int \frac{2^{1/x}}{x^2} dx = \int \frac{2^u}{x^2}\left(-x^2\right) du = -\int 2^u du = -\frac{1}{\ln 2}2^u + c = \frac{-1}{\ln 2}2^{1/x} + c$$

dir. □

**46.** $\int e^x \cos(e^x) dx$ *integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:** $e^x = u$ diyelim. $e^x dx = du$ olduğundan $dx = \frac{du}{u}$ olur. Buna göre

$$\int e^x \cos(e^x)\,dx \;=\; \int u \cos u \frac{du}{u} \;=\; \int \cos u\,du \;=\; \sin u + c \;=\; \sin(e^x) + c$$

olur. □

**47.** $\int e^x \sin(e^x)\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

**48.** $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{1+x^8}$ integralini hesaplayınız.

**Çözüm:** $x^4 = u$ diyelim. $4x^3\,dx = du$ olduğundan $dx = \dfrac{du}{4x^3}$ olur. Buna göre

$$\int \frac{x^3dx}{1+x^8} \;=\; \int \frac{x^3}{1+u^2}\frac{du}{4x^3} \;=\; \tfrac{1}{4}\int \frac{1}{1+u^2}du \;=\; \tfrac{1}{4}\arctan u + c \;=\; \tfrac{1}{4}\arctan(x^4) + c$$

dir. □

$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}\arctan(x^4)\right) = \frac{x^3}{x^8+1}$
$= (\sin x)\, e^{-4\cos x}$

## 6 – 4. KISMİ İNTEGRASYON YÖNTEMİ

**1.** $\int (x-4)(x+3)^5 \, dx$ *integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:** $x-4=u,\ (x+3)^5 \, dx = dv$ diyelim. $dx = du$ ve $\frac{1}{6}(x+3)^6 = v$ olur. Buna göre

$$\begin{aligned} \int (x-4)(x+3)^5 \, dx &= (x-4)\left(\tfrac{1}{6}(x+3)^6\right) - \int \tfrac{1}{6}(x+3)^6 \, dx \\ &= \tfrac{1}{6}(x-4)(x+3)^6 - \tfrac{1}{42}(x+3)^7 + c \end{aligned}$$

olur. □

**2.** $\int (x-1)^2 (x+4)^3 \, dx$ *integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:** $(x-1)^2 = u,\ (x+4)^3 \, dx = dv$ diyelim. $2(x-1)dx = du$ ve $\frac{1}{4}(x+4)^4 = v$ olur. Buna göre

$$\begin{aligned} \int (x-1)^2 (x+4)^3 \, dx &= (x-1)^2 \left(\tfrac{1}{4}(x+4)^4\right) - \int \tfrac{1}{4}(x+4)^4 \, 2(x-1)dx \\ &= \tfrac{1}{4}(x-1)^2 (x+4)^4 - \tfrac{1}{2}\int (x-1)(x+4)^4 \, dx \end{aligned}$$

olur. Şimdi sağ yandaki $\int (x-1)(x+4)^4 \, dx$ integralini hesaplamak için bu integralde kısmi integrasyon yöntemini uygulayacağız. $x-1=t,\ (x+4)^4 \, dx = dh$ diyelim.

$$dx = dt \quad \text{ve} \quad \tfrac{1}{5}(x+4)^5 = h$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \int (x-5)(x+1)^3 \, dx &= \int t dh = th - \int h dt = (x-1)\left(\tfrac{1}{5}(x+4)^5\right) - \int \tfrac{1}{5}(x+4)^5 \, dx \\ &= \tfrac{1}{5}(x-1)(x+4)^5 - \tfrac{1}{30}(x+4)^6 \end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki $\int (x-1)(x+4)^4 \, dx$ integrali yerine burada bulunan eşiti konularak

$$\int (x-1)^2 (x+4)^3 \, dx = \tfrac{1}{4}(x-1)^2 (x+4)^4 - \tfrac{1}{10}(x-1)(x+4)^5 + \tfrac{1}{60}(x+4)^6 + c$$

elde edilir. □

**3.** $\int x^2 \sin x dx$ *integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:** $x^2 = u,\ \sin x dx = dv$ diyelim. $2x dx = du$ olduğu hemen görülür. $\int \sin x dx = \int dv$ eşitliğinden de $-\cos x = v$ elde edilir.

$$\int x^2 \sin x dx = \int u dv = uv - \int v du = x^2(-\cos x) - \int (-\cos x) 2x dx = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x dx$$

olur. $\int x \cos x dx$ integralini hesaplamak için bu integralde yeniden kısmi integrasyon yöntemi uygulayalım. $x = t,\ \cos x dx = dh$ diyelim. $dx = dt$ ve $\sin x = h$ elde edilir.

$$\int x \cos x dx = \int t dh = th - \int h dt = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x - (-\cos x) = x \sin x + \cos x$$

olur. Böylece

$$\int x^2 \sin x\, dx = -x^2 \cos x + 2\left(x \sin x + \cos x\right) = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c$$

bulunur. □

**4.** $\int \ln x\, dx$ *integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:** $\ln x = u$, $dx = dv$ diyelim. $\frac{1}{x}\, dx = du$ ve $x = v$ elde edilir.

$$\int \ln x\, dx = (\ln x)\, x - \int x\left(\tfrac{1}{x}\, dx\right) = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c$$

olur. □

**5.** $\int (\ln x)^2\, dx$ *integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:** $\ln x = u$, $\ln x\, dx = dv$ diyelim. $\frac{1}{x}\, dx = du$ ve $x \ln x - x = v$ elde edilir.

$$\begin{aligned} \int (\ln x)^2\, dx &= (\ln x)\left(x \ln x - x\right) - \int \left(x \ln x - x\right)\left(\tfrac{1}{x}\, dx\right) \\ &= x(\ln x)^2 - x \ln x - \int \ln x\, dx + \int dx \\ &= x(\ln x)^2 - x \ln x - (x \ln x - x) + x + c \\ &= x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + c \end{aligned}$$

olur. □

**6.** $\int x \ln x\, dx$ *integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:** $\ln x = u$, $x\, dx = dv$ diyelim. $\frac{1}{x}\, dx = du$ ve $\frac{1}{2}x^2 = v$ elde edilir.

$$\int x \ln x\, dx = (\ln x)\left(\tfrac{1}{2}x^2\right) - \int \left(\tfrac{1}{2}x^2\right)\left(\tfrac{1}{x}\, dx\right) = \tfrac{1}{2}x^2 \ln x - \tfrac{1}{2}\int x\, dx = \tfrac{1}{2}x^2 \ln x - \tfrac{1}{4}x^2 + c$$

olur. □

**7.** $\int x^2 \ln x\, dx$ *integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:** $\ln x = u$, $x^2\, dx = dv$ diyelim. $\frac{1}{x}\, dx = du$ ve $\frac{1}{3}x^3 = v$ elde edilir.

$$\int x^2 \ln x\, dx = (\ln x)\left(\tfrac{1}{3}x^3\right) - \int \left(\tfrac{1}{3}x^3\right)\left(\tfrac{1}{x}\, dx\right) = \tfrac{1}{3}x^3 \ln x - \tfrac{1}{3}\int x^2\, dx = \tfrac{1}{3}x^3 \ln x - \tfrac{1}{9}x^3 + c$$

olur. □

**8.** $\int xe^{3x}\, dx$ *integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:** $x = u$, $e^{3x}\, dx = dv$ diyelim. $dx = du$ ve $\frac{1}{3}e^{3x} = v$ elde edilir.

$$\int xe^{3x}\, dx = x\left(\tfrac{1}{3}e^{3x}\right) - \int \left(\tfrac{1}{3}e^{3x}\right) dx = \tfrac{1}{3}xe^{3x} - \tfrac{1}{3}\int e^{3x}\, dx = \tfrac{1}{3}xe^{3x} - \tfrac{1}{9}e^{3x} + c$$

olur. □

**9.** $\int 6x^2 e^{3x}\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:** $x^2 = u$, $6e^{3x}\,dx = dv$ diyelim. $2x\,dx = du$ ve $2e^{3x} = v$ elde edilir.

$$\int 6x^2 e^{3x}\,dx \;=\; x^2\left(2e^{3x}\right) - \int 2e^{3x}\,(2x\,dx) \;=\; 2x^2 e^{3x} - 4\int x e^{3x}\,dx$$

olur. Şimdi sağ yandaki $\int x e^{3x}\,dx$ integralini hesaplamak için bu integralde kısmi integrasyon yöntemini uygulayacağız. $x = t$, $e^{3x}\,dx = dh$ diyelim. $dx = dt$ ve $\frac{1}{3}e^{3x} = h$ elde edilir.

$$\int x e^{3x}\,dx \;=\; \int t\,dh = th - \int h\,dt \;=\; x\left(\tfrac{1}{3}e^{3x}\right) - \int \tfrac{1}{3}e^{3x}\,dx \;=\; \tfrac{1}{3}xe^{3x} - \tfrac{1}{9}e^{3x}$$

bulunur. Yukarıdaki $\int x e^{3x}\,dx$ integrali yerine burada bulunan eşiti konularak

$$\int 6x^2 e^{3x}\,dx \;=\; 2x^2 e^{3x} - 4\left(\tfrac{1}{3}xe^{3x} - \tfrac{1}{9}e^{3x}\right) + c \;=\; 2x^2 e^{3x} - \tfrac{4}{3}xe^{3x} + \tfrac{4}{9}e^{3x} + c$$

elde edilir. □

**10.** $\int 4xe^{-4x}\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:** $x = u$, $4e^{-4x}\,dx = dv$ diyelim. $dx = du$ ve $-e^{-4x} = v$ elde edilir.

$$\int 4xe^{-4x}\,dx \;=\; x\left(-e^{-4x}\right) - \int\left(-e^{-4x}\right)dx \;=\; -xe^{-4x} + \int e^{-4x}\,dx \;=\; -xe^{-4x} - \tfrac{1}{4}e^{-4x} + c$$

olur. □

**11.** $\int 2\sin(\ln x)\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:** $2\sin(\ln x) = u$, $dx = dv$ diyelim. $2\left(\cos(\ln x)\right)\frac{1}{x}\,dx = du$ ve $x = v$ elde edilir.

$$\int 2\sin(\ln x)\,dx \;=\; 2\left(\sin(\ln x)\right)x - \int x\left(\cos(\ln x)\right)\tfrac{2}{x}\,dx \;=\; 2x\sin(\ln x) - 2\int\cos(\ln x)\,dx$$

olur. Şimdi sağ yandaki $\int\cos(\ln x)\,dx$ integralini hesaplamak için bu integralde kısmi integrasyon yöntemini uygulayacağız. $\cos(\ln x) = t$, $dx = dh$ diyelim. $\left(-\sin(\ln x)\right)\frac{1}{x}\,dx = dt$ ve $x = h$ elde edilir.

$$\begin{aligned}\int\cos(\ln x)\,dx \;&=\; \int t\,dh = th - \int h\,dt \;=\; \left(\cos(\ln x)\right)x - \int x\left(-\sin(\ln x)\right)\tfrac{1}{x}\,dx \\ &=\; x\cos(\ln x) + \int\sin(\ln x)\,dx\end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki $\int\cos(\ln x)\,dx$ integrali yerine burada bulunan eşiti konularak

$$\begin{aligned}\int 2\sin(\ln x)\,dx \;&=\; 2x\sin(\ln x) - 2\left(x\cos(\ln x) + \int\sin(\ln x)\,dx\right) \\ &=\; 2x\sin(\ln x) - 2x\cos(\ln x) - 2\int\sin(\ln x)\,dx\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitliğin sağ yanında bulunan $\int\sin(\ln x)\,dx$ integrali sol tarafa geçirilerek

$$\int 2\sin(\ln x)\,dx \;=\; x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x)$$

bulunur. □

**12.** $\int 2\cos(\ln x)\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

**13.** $\int 4x^3 e^{2x}\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:** $x^3 = u,\ 4e^{2x}\,dx = dv$ diyelim. $3x^2\,dx = du$ ve $2e^{2x} = v$ elde edilir.

$$\int 4x^3 e^{2x}\,dx \;=\; x^3\left(2e^{2x}\right) - \int 2e^{2x}\left(3x^2\,dx\right) \;=\; 2x^3e^{2x} - 6\int x^2e^{2x}\,dx \tag{1}$$

olur. Şimdi sağ yandaki $\int x^2e^{2x}\,dx$ integralini hesaplamak için bu integralde kısmi integrasyon yöntemini uygulayacağız. $x^2 = t,\ e^{2x}\,dx = dh$ diyelim. $2x\,dx = dt$ ve $\frac{1}{2}e^{2x} = h$ elde edilir.

$$\int x^2e^{2x}\,dx \;=\; \int t\,dh = th - \int h\,dt \;=\; x^2\left(\tfrac{1}{2}e^{2x}\right) - \int \tfrac{1}{2}e^{2x}\,(2x\,dx) \;=\; \tfrac{1}{2}x^2e^{2x} - \int xe^{2x}\,dx$$

olur. (1) eşitliğindeki $\int x^2e^{2x}\,dx$ integrali yerine burada bulunan eşiti konularak

$$\int 4x^3e^{2x}\,dx \;=\; 2x^3e^{2x} - 6\left(\tfrac{1}{2}x^2e^{2x} - \int xe^{2x}\,dx\right) \;=\; 2x^3e^{2x} - 3x^2e^{2x} + 6\int xe^{2x}\,dx \tag{2}$$

elde edilir. Şimdi (2) eşitliğinin sağ yanındaki $\int xe^{2x}\,dx$ integralini hesaplamak için bu integralde kısmi integrasyon yöntemini uygulayacağız. $x = r,\ e^{2x}\,dx = ds$ diyelim. $dx = dr$ ve $\frac{1}{2}e^{2x} = s$ elde edilir.

$$\int xe^{2x}\,dx \;=\; \int r\,ds = rs - \int s\,dr \;=\; x\left(\tfrac{1}{2}e^{2x}\right) - \int \tfrac{1}{2}e^{2x}\,dx \;=\; \tfrac{1}{2}xe^{2x} - \tfrac{1}{4}e^{2x}$$

olur. (2) eşitliğindeki $\int xe^{2x}\,dx$ integrali yerine burada bulunan eşiti konularak

$$\int 4x^3e^{2x}\,dx \;=\; 2x^3e^{2x} - 3x^2e^{2x} + 6\left(\tfrac{1}{2}xe^{2x} - \tfrac{1}{4}e^{2x}\right) + c \;=\; e^{2x}\left(2x^3 - 3x^2 + 3x - \tfrac{3}{2}\right) + c$$

bulunur. □

**14.** $\int \sec^3 x\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:** $\sec x = u,\ \sec^2 x\,dx = dv$ diyelim. $\sec x\tan x\,dx = du$ ve $\tan x = v$ elde edilir.

$$\int \sec^3 x\,dx \;=\; \sec x\tan x - \int \tan x\,(\sec x\tan x\,dx) \;=\; \sec x\tan x - \int \sec x\tan^2 x\,dx$$

olur.

$$\int \sec x\tan^2 x\,dx \;=\; \int \sec x\left(\sec^2 x - 1\right)\,dx \;=\; \int \sec^3 x\,dx - \int \sec x\,dx$$

olduğu göz önüne alınarak

$$\begin{aligned}\int \sec^3 x\,dx &= \sec x\tan x - \left(\int \sec^3 x\,dx - \int \sec x\,dx\right)\\ &= \sec x\tan x - \int \sec^3 x\,dx + \int \sec x\,dx\\ &= \sec x\tan x - \int \sec^3 x\,dx + \ln|\sec x + \tan x|\end{aligned}$$

bulunur. Böylece elde edilen eşitliğin sağ yanında da hesaplanmak istenilen integralin bulunduğunu gördünüz mü? Bu integral sol yana alınıp gerekli işlemler yapılarak

$$\int \sec^3 x\,dx \;=\; \tfrac{1}{2}\sec x\tan x + \tfrac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + c$$

elde edilir. □

**15.** *$a \in \mathbb{R}^+$ olduğuna göre $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx$ integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:** $x = a\tan t$ diyelim. $dx = a\sec^2 t dt$ olur.

$$\sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{(a\tan t)^2 + a^2} = \sqrt{a^2\tan^2 t + a^2} = a\sec t$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx &= a^2\int \sec^3 t dt = a^2\left(\tfrac{1}{2}\sec t\tan t + \tfrac{1}{2}\ln|\sec t + \tan t|\right)\\ &= \tfrac{1}{2}a^2\left(\sec t\tan t + \ln|\sec t+\tan t|\right) + c_1\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin en sağında bulunan $\sec t$ ve $\tan t$ yerine $x$ değişkenine bağlı eşitini koymalıyız. Bunun için $\tan t = \frac{x}{a}$ ve $\sec t = \sqrt{1+\tan^2 t} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2+x^2}$ olduğundan

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx &= \tfrac{1}{2}a^2\left(\sec t\tan t + \ln|\sec t+\tan t|\right) + c_1\\ &= \tfrac{1}{2}a^2\left(\tfrac{1}{a}\sqrt{a^2+x^2}\tfrac{x}{a} + \ln\left|\tfrac{1}{a}\sqrt{a^2+x^2} + \tfrac{x}{a}\right|\right) + c_1\\ &= \tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2+x^2} + \tfrac{1}{2}a^2\ln\left|\sqrt{a^2+x^2}+x\right| + c\end{aligned}$$

elde edilir. □

**16.** *$a \in \mathbb{R}^+$ olduğuna göre $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$ integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:** $x = a\sec t$ diyelim. $dx = a\sec t\tan t dt$ olur.

$$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{(a\sec t)^2 - a^2} = \sqrt{a^2\sec^2 t - a^2} = a\tan t$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx &= a^2\int \sec t\tan^2 t dt = a^2\int \sec t\left(\sec^2 t - 1\right) dt = a^2\left(\int \sec^3 t dt - \int \sec t dt\right)\\ &= \tfrac{1}{2}a^2\sec t\tan t + \tfrac{1}{2}a^2\ln|\sec t+\tan t| - a^2\ln|\sec t+\tan t| + c_1\\ &= \tfrac{1}{2}a^2\sec t\tan t - \tfrac{1}{2}a^2\ln|\sec t+\tan t| + c_1\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin en sağında bulunan $\sec t$ ve $\tan t$ yerine $x$ değişkenine bağlı eşitini koymalıyız. Bunun için $\sec t = \frac{x}{a}$ ve $\tan t = \sqrt{\sec^2 t - 1} = \frac{1}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ olduğundan

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx &= \tfrac{1}{2}a^2\sec t\tan t - \tfrac{1}{2}a^2\ln|\sec t+\tan t| + c_1\\ &= \tfrac{1}{2}a^2\tfrac{x}{a}\tfrac{1}{a}\sqrt{x^2-a^2} - \tfrac{1}{2}a^2\ln\left|\tfrac{x}{a} + \tfrac{1}{a}\sqrt{x^2-a^2}\right| + c_1\\ &= \tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2} - \tfrac{1}{2}a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + c\end{aligned}$$

elde edilir. □

**17.** $\int \arcsin x\, dx$ *integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:** $\arcsin x = u$, $dx = dv$ diyelim. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = du$ ve $x = v$ olur. Buna göre

$$\int \arcsin x\, dx = (\arcsin x)\, x - \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\,(\arcsin x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

olur. Yukarıdaki $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ integralini hesaplamak için $1-x^2=t$ değişken değiştirmesi yapalım. $-2x\,dx = dt$ olur. Buna göre

$$\begin{aligned}\int \arcsin x\, dx &= x\,(\arcsin x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{dt}{-2x} = x\,(\arcsin x) + \int \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt \\ &= x\arcsin x + \sqrt{t} + c = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c\end{aligned}$$

bulunur. □

**18.** $\int x\arcsin x\, dx$ *integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:** $x = u$, $\arcsin x\, dx = dv$ diyelim. $dx = du$ ve $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} = v$ olur. Buna göre

$$\begin{aligned}\int x\arcsin x\, dx &= x\left(x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}\right) - \int \left(x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}\right)\,dx \\ &= x^2\arcsin x + x\sqrt{1-x^2} - \int x\arcsin x\,dx - \int \sqrt{1-x^2}\,dx\end{aligned}$$

olur. Böylece elde edilen eşitliğin sağ yanında da hesaplanmak istenilen integralin bulunduğunu gördünüz mü? Bu integral sol yana alınıp gerekli işlemler yapılarak

$$\int x\arcsin x\, dx = \tfrac{1}{2}x^2\arcsin x + \tfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} - \tfrac{1}{2}\int \sqrt{1-x^2}\,dx$$

bulunur. $x = \sin t$ değişken değiştirmesi yapılarak

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\arcsin x + \tfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$$

olduğu görülebilir. Sonuç olarak

$$\int x\arcsin x\, dx = \tfrac{1}{2}x^2\arcsin x - \tfrac{1}{4}\arcsin x + \tfrac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + c$$

elde edilir. □

## 6 – 3. RASYONEL FONKSİYONLARIN İNTEGRASYONU

**1.** $\displaystyle\int \frac{x^2-3x+2}{x-3}\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:** $x^2-3x+2$ polinomu, $x-3$ polinomuna bölündüğünde bölüm $x$ ve kalan 2 dir. Başka bir anlatımla

$$x^2-3x+2=(x-3)\,x+2$$

dir. Buna göre

$$\frac{x^2-3x+2}{x-3}=\frac{(x-3)\,x+2}{x-3}=x+\frac{2}{x-3}$$

olur. Bu eşitlikten yararlanarak

$$\int \frac{x^2-3x+2}{x-3}\,dx \;=\; \int x\,dx+\int \frac{2}{x-3}\,dx \;=\; \tfrac{1}{2}x^2+2\ln|x-3|+c$$

elde edilir. □

**2.** $\displaystyle\int \frac{-x+7}{x^2-2x-3}\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:** $\displaystyle\frac{-x+7}{x^2-2x-3}=\frac{-x+7}{(x-3)\,(x+1)}=\frac{A}{(x-3)}+\frac{B}{(x+1)}$ eşitliğinden,

$$\frac{-x+7}{x^2-2x-3}=\frac{A\,(x+1)+B\,(x-3)}{(x-3)\,(x+1)}$$

ve buradan da

$$\frac{-x+7}{x^2-2x-3}=\frac{(A+B)\,x+(A-3B)}{(x-3)\,(x+1)}$$

eşitliği elde edilir. İki polinomun eşit olması için polinomun katsayılarının karşılıklı olarak eşit olması gerekli ve yeterlidir. Buna göre

$$\begin{aligned} A+B &= -1 \\ A-3B &= \phantom{-}7 \end{aligned}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemininden $A=1,\ B=-2$ bulunur.

$$\begin{aligned}
\int \frac{-x+7}{x^2-2x-3}\,dx &= \int \left( \frac{1}{x-3} + \frac{-2}{x+1} \right) dx \\
&= \int \frac{1}{x-3}dx - 2\int \frac{1}{x+1}dx \\
&= \ln|x-3| - 2\ln|x+1| + c \\
&= \ln\left| \frac{x-3}{(x+1)^2} \right| + c
\end{aligned}$$

olur. □

**3.** $\displaystyle\int \frac{3x^2-5x}{(x+1)(x-1)^2}\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:** $\displaystyle\frac{3x^2-5x}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2}$ eşitliğinden,

$$\frac{3x^2-5x}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2 + B(x+1)(x-1) + C(x+1)}{(x-1)(x+2)^2}$$

ve buradan da

$$\frac{3x^2-5x}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{(A+B)x^2 + (-2A+C)x + (A-B+C)}{(x-1)(x+2)^2}$$

eşitliği elde edilir. İki polinomun eşit olması için polinomun katsayılarının karşılıklı olarak eşit olması gerekli ve yeterlidir. Buna göre

$$\begin{aligned}
A+B &= 3 \\
-2A+C &= -5 \\
A-B+C &= 0
\end{aligned}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminden $A=2,\ B=1,\ C=-1$ bulunur.

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x^2-5x}{(x+1)(x-1)^2}dx &= \int \left( \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx \\
&= 2\int \frac{1}{x+1}dx + \int \frac{1}{x-1}dx - \int \frac{1}{(x-1)^2}dx \\
&= 2\ln|x+1| + \ln|x-1| + \tfrac{1}{x-1} + c \\
&= \ln\left|(x+1)^2(x-1)\right| + \tfrac{1}{x-1} + c
\end{aligned}$$

olur. □

**4.** $\displaystyle\int \frac{3x^2+x+36}{x^3+9x}dx$ *integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:** $\displaystyle\frac{3x^2+x+36}{x^3+9x} = \frac{3x^2+x+36}{x\left(x^2+9\right)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+9}$ eşitliğinden,

$$\frac{3x^2+x+36}{x\left(x^2+9\right)} = \frac{Ax^2+9A+Bx^2+Cx}{x\left(x^2+1\right)} = \frac{(A+B)\,x^2+Cx+9A}{x\left(x^2+1\right)}$$

eşitliği elde edilir. İki polinomun eşit olması için polinomun katsayılarının karşılıklı olarak eşit olması gerekli ve yeterlidir. Buna göre

$$\begin{aligned} A+B &= 3 \\ C &= 1 \\ 9A &= 36 \end{aligned}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminden $A=4,\ B=-1,\ C=1$ bulunur.

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x^2+3}{x^3+x}dx &= \int \left(\frac{4}{x} + \frac{-x+1}{x^2+9}\right)dx = \int \frac{4}{x}dx + \int \frac{-x+1}{x^2+9}dx \\
&= 4\ln|x| - \int \frac{x}{x^2+9}dx + \int \frac{1}{x^2+9}dx \\
&= 4\ln|x| - \tfrac{1}{2}\ln\left|x^2+9\right| + \tfrac{1}{3}\arctan\tfrac{x}{3} + c = \ln\frac{x^4}{\sqrt{x^2+9}} + \tfrac{1}{3}\arctan\tfrac{x}{3} + c
\end{aligned}$$

olur. □

**5.** $\displaystyle\int \frac{x-3}{\left(x^2+4x+8\right)^2}dx$ *integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:** $x^2+4x+8$ polinomu, birinci dereceden çarpanlara ayrılamayan bir polinomdur.

$x^2+4x+8 = (x+2)^2+4$ yazılabilir. $x+2=t$ diyelim.

$$dx = dt \quad \text{ve} \quad x = t-2$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\int \frac{x-3}{\left(x^2+4x+8\right)^2}\,dx &= \int \frac{t-5}{\left(t^2+4\right)^2}\,dt \\
&= \int \frac{t}{\left(t^2+4\right)^2}\,dt - 5\int \frac{1}{\left(t^2+4\right)^2}\,dt \\
&= \frac{-1}{2\left(t^2+4\right)} - 5\cdot\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2} + \frac{t}{t^2+4}\right) \\
&= \frac{-5x-14}{8\left(x^2+4x+8\right)} - \frac{5}{16}\arctan\left(\tfrac{x+2}{2}\right) + c
\end{aligned}$$

olur. □

## 6 – 5. ÖZEL DEĞİŞKEN DEĞİŞTİRMELER

**1.** $\int \cos^5 x \sin^7 x dx$ *integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:** $\cos x = t$ diyelim. $-\sin x dx = dt$ olur. Buna göre

$$\begin{aligned}\int \cos^5 x \sin^7 x dx &= \int t^5 \left(\sin^6 x\right) \sin x dx = \int t^5 \left(1-\cos^2 x\right)^3 \sin x dx \\ &= -\int t^5 \left(1-t^2\right)^3 dt = -\int t^5 \left(1-3t^2+3t^4-t^6\right) dt \\ &= -\int \left(t^5-3t^7+3t^9-t^{11}\right) dt \\ &= -\tfrac{1}{6}\cos^6 x + \tfrac{3}{8}\cos^8 x - \tfrac{3}{10}\cos^{10} x + \tfrac{1}{12}\cos^{12} x + c\end{aligned}$$

bulunur. □

**2.** $\int \cos^3 x \sin^6 x dx$ *integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:** $\sin x = t$ diyelim. $\cos x dx = dt$ olur. Buna göre

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x \sin^6 x dx &= \int \cos^2 x \sin^6 x \cos x dx = \int \left(1-\sin^2 x\right) t^6 dt \\ &= \int \left(1-t^2\right) t^6 dt = \int \left(t^6-t^8\right) dt \\ &= \tfrac{1}{7}\sin^7 x - \tfrac{1}{9}\sin^9 x + c\end{aligned}$$

bulunur. □

**3.** $\int \cos^2 x \sin^4 x dx$ *integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:**

$$\int \cos^2 x \sin^4 x dx = \int \left(\tfrac{1+\cos 2x}{2}\right)\left(\tfrac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \tfrac{1}{8}\int \left(1-\cos 2x-\cos^2 2x+\cos^3 2x\right) dx$$

bulunur. $2x = u$ diyelim. $2dx = du$ olur. Buna göre

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x \sin^4 x dx &= \tfrac{1}{16}\int \left(1-\cos u-\cos^2 u+\cos^3 u\right) du \\ &= \tfrac{1}{16}u - \tfrac{1}{16}\sin u - \tfrac{1}{16}\int \left(\cos^2 u\right) du + \tfrac{1}{16}\int \left(\cos^3 u\right) du\end{aligned}$$

bulunur.

$$\int \left(\cos^2 u\right) du = \int \left(\tfrac{1+\cos 2u}{2}\right) du = \tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{4}\sin 2u$$

ve

$$\begin{aligned}\int \left(\cos^3 u\right) du &= \int \left(\cos^2 u\right)(\cos u) du = \int \left(1-\sin^2 u\right)(\cos u) du \\ &= \int \left(1-v^2\right) dv = v - \tfrac{1}{3}v^3 = \sin u - \tfrac{1}{3}\sin^3 u\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x \sin^4 x dx &= \tfrac{1}{16}u - \tfrac{1}{16}\sin u - \tfrac{1}{16}\left(\tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{4}\sin 2u\right) + \tfrac{1}{16}\left(\sin u - \tfrac{1}{3}\sin^3 u\right) \\ &= \tfrac{1}{32}u - \tfrac{1}{64}\sin 2u - \tfrac{1}{48}\sin^3 u \;=\; \tfrac{1}{16}x - \tfrac{1}{64}\sin 4x - \tfrac{1}{48}\sin^3 2x + c\end{aligned}$$

olur. □

**4.** $\int \cos 5x \sin 7x\, dx$ *integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:** $\cos\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\right]$ olduğundan yararlanarak

$$\begin{aligned}\cos 5x \sin 7x\, dx &= \tfrac{1}{2}\int \left[\sin 12x - \sin(-2x)\right] dx \;=\; \tfrac{1}{2}\int (\sin 12x + \sin 2x)\, dx \\ &= \tfrac{1}{24}(-\cos 12x) + \tfrac{1}{4}(-\cos 2x) + c \;=\; \tfrac{-1}{24}\cos 12x - \tfrac{1}{4}\cos 2x + c\end{aligned}$$

bulunur. □

**5.** $\int \cos 3x \cos 7x\, dx$ *integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:** $\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$ olduğundan yararlanarak

$$\begin{aligned}\int \cos 3x \cos 7x\, dx &= \tfrac{1}{2}\int \left[\cos 10x + \cos(-4x)\right] dx \;=\; \tfrac{1}{2}\int (\cos 10x + \cos 4x)\, dx \\ &= \tfrac{1}{20}\sin 10x + \tfrac{1}{8}\sin 4x + c\end{aligned}$$

bulunur. □

**6.** $\int \sin 8x \sin 2x\, dx$ *integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:** $\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$ olduğundan yararlanarak

$$\int \sin 8x \sin 2x\, dx = \tfrac{1}{2}\int \left[\cos 6x - \cos 10x\right] dx = \tfrac{1}{12}\sin 6x - \tfrac{1}{20}\sin 10x + c$$

bulunur. □

**7.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+2x}}{1-3\sqrt{1+2x}}dx$ *integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:** $1 + 2x = u^2$ diyelim. $dx = udu$ olur. Buna göre

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{1+2x}}{1-3\sqrt{1+2x}}dx &= \int \frac{u^2}{1-3u}du = -\tfrac{1}{9}\int (3u+1)\, du + \tfrac{1}{9}\int \tfrac{1}{1-3u}du \\ &= -\tfrac{1}{6}u^2 - \tfrac{1}{9}u - \tfrac{1}{27}\ln|1-3u| + c \\ &= -\tfrac{1}{6}(1+2x) - \tfrac{1}{9}\sqrt{1+2x} - \tfrac{1}{27}\ln\left|1 - 3\sqrt{1+2x}\right| + c\end{aligned}$$

olur. □

**8.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1-x^3}dx$ *integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:** $\sqrt{x}=u$ diyelim. $x=u^2$ ve $dx=2udu$ olur. Buna göre

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1-x^3}dx \;=\; 2\int \frac{u^2}{1-u^6}du$$

olur. Son integralde $u^3=t$ diyelim. $3u^2du=dt$ olur. Böylece

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x}}{1-x^3}dx \;&=\; \tfrac{2}{3}\int \frac{1}{1-t^2}dt \;=\; \tfrac{2}{3}\int \left(\tfrac{1}{2(t+1)}-\tfrac{1}{2(t-1)}\right)dt\\ &=\; \tfrac{1}{3}\ln|t+1|-\tfrac{1}{3}\ln|t-1|+c \;=\; \tfrac{1}{3}\ln\left|\tfrac{t+1}{t-1}\right|+c \;=\; \tfrac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{x^3}+1}{\sqrt{x^3}-1}\right|+c\end{aligned}$$

bulunur. □

**9.** $\displaystyle\int \frac{x^{1/4}}{1+x^{5/2}}dx$ *integralini hesaplayınız.*

**Çözüm:** $x^{1/4}=u$ diyelim. $x=u^4$ ve $dx=4u^3du$ olur. Buna göre

$$\int \frac{x^{1/4}}{1+x^{5/2}}dx \;=\; \int \frac{u\cdot 4u^3}{1+u^{10}}du \;=\; 4\int \frac{u^4}{1+u^{10}}du$$

olur. Son integralde $u^5=t$ diyelim. $5u^4du=dt$ olur. Böylece

$$\begin{aligned}\int \frac{x^{1/4}}{1+x^{5/2}}dx \;&=\; \tfrac{4}{5}\int \frac{1}{1+t^2}dt \;=\; \tfrac{4}{5}\arctan t+c\\ &=\; \tfrac{4}{5}\arctan t+c \;=\; \tfrac{4}{5}\arctan\left(x^{5/4}\right)+c\end{aligned}$$

bulunur. □

## 8 – 5. EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİ

**1.** Bir üreticinin ürettiği $x$ mal miktarına (sayısına) karşılık gelen maliyet sonuçları aşağıdaki çizelgedeki gibidir.

| $x$ *üretimi* (100 *birim*) | $C(x)$ *maliyeti* |
|---|---|
| 2 | 4 |
| 5 | 6 |
| 6 | 7 |
| 9 | 8 |

(1. çizelge)

Bu değerlerden yararlanarak üreticinin maliyet fonksiyonunu yaklaşık olarak bulunuz.

**Çözüm:** Verilen çizelgedeki değerler düzlemdeki koordinat sisteminde gösterildiğinde yaklaşık olarak bir doğru üsünde gibi görünürler. Bundan dolayı maliyet fonksiyonunun kuralının

$$y = ax + b$$

biçiminde olduğunu varsayabiliriz. Bir $x$ değerine karşılık, $y = ax + b$ kuralından bulunan $y$ değeri ile gerçek maliyeti gösteren $y$ değeri birbirinden farklıdır. Bu farklar aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir.

| $x$ | $y$ | $ax+b$ | $farklar$ |
|---|---|---|---|
| 2 | 4 | $2a+b$ | $4-2a-b$ |
| 5 | 6 | $5a+b$ | $6-5a-b$ |
| 6 | 7 | $6a+b$ | $7-6a-b$ |
| 9 | 8 | $9a+b$ | $8-9a-b$ |

(2. çizelge)

"En iyi yaklaşık doğru"yu elde edebilmek için 2. çizelgede bulunan farkların karelerinin toplamının en küçük olmasını istiyoruz. Bu farkların karelerinin toplamına $F(a,b)$ diyelim.

$$F(a,b) = (4-2a-b)^2 + (6-5a-b)^2 + (7-6a-b)^2 + (8-9a-b)^2$$

olur. Aradığımız doğruyu belirten $a$ ve $b$ sayıları, $F$ fonksiyonunu minimum yapan sayılardır.

$$F_a(a,b) = 2(4-2a-b)(-2) + 2(6-5a-b)(-5) + 2(7-6a-b)(-6) + 2(8-9a-b)(-9)$$
$$F_b(a,b) = 2(4-2a-b)(-1) + 2(6-5a-b)(-1) + 2(7-6a-b)(-1) + 2(8-9a-b)(-1)$$

olduğundan $F_a(a,b) = 292a + 44b - 304$ ve $F_b(a,b) = 44a + 8b - 50$ bulunur.

$$\begin{aligned} 292a + 44b - 304 &= 0 \\ 44a + 8b - 50 &= 0 \end{aligned}$$

denklem sisteminden $a_0 = 0,58$, $b_0 = 3,06$ bulunur.

$$F_{aa}(a_0, b_0) = 292, \quad F_{ab}(a_0, b_0) = 44, \quad F_{bb}(a_0, b_0) = 8$$

olduğundan

$$F_{ab}^2(a_0, b_0) - F_{aa}(a_0, b_0) F_{bb}(a_0, b_0) = 44^2 - 292 \cdot 8 = -400 < 0 \text{ ve } F_{aa}(a_0, b_0) > 0$$

olduğundan $F$ fonksiyonu, $(a_0, b_0)$ noktasında bir minimuma sahiptir.

Sonuç olarak aranılan doğrunun denklemi, $y = 0,58x + 3,06$ dir. Bu doğruya, "en küçük kareler doğrusu" veya "çekilme (regression) doğrusu" adı verilmişti.

Üretici, en küçük kareler doğrusunu kullanarak üreteceği mal miktarına karşılık gelen maliyeti kolayca hesaplayabilir.

Marjinal (birim, anlık) maliyet fonksiyonu

$$\frac{dy}{dx} = 0,58$$

olur. Ortalama maliyet fonksiyonu

$$\overline{y} = \frac{0,58x + 3,06}{x}$$

eşitliğiyle belirlidir. □

**2.** Aşağıdaki çizelgede verilen $x$ ve $y$ değerleri için en küçük kareler doğrusunu bulunuz.

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 3 |
| 3 | 4 |
| 4 | 3 |

(1. çizelge)

**Çözüm:** $y = ax + b$ biçiminde bir doğru arıyoruz. Bir $x$ sayısına karşılık, $y = ax + b$ kuralından bulunan $y$ değeri ile bu $x$ sayısına çizelgede karşılık getirilen $y$ değeri birbirinden farklıdır. Bu farklar aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir.

| $x$ | $y$ | $ax+b$ | $farklar$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | $a+b$ | $1-a-b$ |
| 2 | 3 | $2a+b$ | $3-2a-b$ |
| 3 | 4 | $3a+b$ | $4-3a-b$ |
| 4 | 3 | $4a+b$ | $3-4a-b$ |

(2. çizelge)

"En iyi yaklaşık doğru"yu elde edebilmek için 2. çizelgede bulunan farkların karelerinin toplamının en küçük olmasını istiyoruz. Bu farkların karelerinin toplamına $F(a,b)$ diyelim.

$$F(a,b) = (1-a-b)^2 + (3-2a-b)^2 + (4-3a-b)^2 + (3-4a-b)^2$$

olur. Aradığımız doğruyu belirten $a$ ve $b$ sayıları, $F$ fonksiyonunu minimum yapan sayılardır.

$$F_a(a,b) = 2(1-a-b)(-1) + 2(3-2a-b)(-2) + 2(4-3a-b)(-3) + 2(3-4a-b)(-4)$$
$$F_b(a,b) = 2(1-a-b)(-1) + 2(3-2a-b)(-1) + 2(4-3a-b)(-1) + 2(3-4a-b)(-1)$$

olduğundan $F_a(a,b) = 60a + 20b - 62$ ve $F_b(a,b) = 20a + 8b - 22$ bulunur.

$$\begin{aligned} 60a + 20b - 62 &= 0 \\ 20a + 8b - 22 &= 0 \end{aligned}$$

denklem sisteminden $a_0 = 0,7$, $b_0 = 1$ bulunur.

$$F_{aa}(a_0,b_0) = 60 \text{ ve } F_{ab}(a_0,b_0) = 20,\ F_{bb}(a_0,b_0) = 8$$

olduğundan

$$F_{ab}^2(a_0,b_0) - F_{aa}(a_0,b_0)\,F_{bb}(a_0,b_0) = 20^2 - 60\cdot 8 = -80 < 0 \quad \text{ve} \quad F_{aa}(a_0,b_0) > 0$$

olduğundan $F$ fonksiyonu, $(a_0,b_0)$ noktasında bir minimuma sahiptir.

Sonuç olarak aranılan doğrunun denklemi, $y = 0,7x + 1$ dir. Bu doğruya, "en küçük kareler doğrusu" veya "çekilme (regression) doğrusu" adı verilmişti. □

**3.** Aşağıdaki çizelgede verilen $x$ ve $y$ değerleri için en küçük kareler doğrusunu bulunuz. $x = 2,5$ için $y$ nin değerinin kaç olması beklenir?

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 2 | 1 |
| 2 | 2 |
| 4 | 0 |

(1. çizelge)

**Çözüm:** $y = ax + b$ biçiminde bir doğru arıyoruz. Bir $x$ sayısına karşılık, $y = ax + b$ kuralından bulunan $y$ değeri ile bu $x$ sayısına çizelgede karşılık getirilen $y$ değeri birbirinden farklıdır. Bu farklar aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir.

| $x$ | $y$ | $ax+b$ | $farklar$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | $a+b$ | $3-a-b$ |
| 2 | 1 | $2a+b$ | $1-2a-b$ |
| 2 | 2 | $2a+b$ | $2-2a-b$ |
| 3 | 0 | $3a+b$ | $0-3a-b$ |

(2. çizelge)

"En iyi yaklaşık doğru"yu elde edebilmek için 2. çizelgede bulunan farkların karelerinin toplamının en küçük olmasını istiyoruz. Bu farkların karelerinin toplamına $F(a,b)$ diyelim.

$$F(a,b) = (3-a-b)^2 + (1-2a-b)^2 + (2-2a-b)^2 + (-3a-b)^2$$

olur. Aradığımız doğruyu belirten $a$ ve $b$ sayıları, $F$ fonksiyonunu minimum yapan sayılardır.

$$F_a(a,b) = 2(3-a-b)(-1) + 2(1-2a-b)(-2) + 2(2-2a-b)(-2) + 2(-3a-b)(-3)$$
$$F_b(a,b) = 2(3-a-b)(-1) + 2(1-2a-b)(-1) + 2(2-2a-b)(-1) + 2(-3a-b)(-1)$$

olduğundan $F_a(a,b) = 36a + 16b - 18$ ve $F_b(a,b) = 16a + 8b - 12$ bulunur.

$$\begin{aligned} 36a + 16b - 18 &= 0 \\ 16a + 8b - 12 &= 0 \end{aligned}$$

denklem sisteminden $a_0 = -1,5$, $b_0 = 4,5$ bulunur.

$$F_{aa}(a_0,b_0) = 42, \quad F_{ab}(a_0,b_0) = 16, \quad F_{bb}(a_0,b_0) = 8$$

olduğundan

$$F_{ab}^2(a_0,b_0) - F_{aa}(a_0,b_0)\,F_{bb}(a_0,b_0) = 16^2 - 36 \cdot 8 = -32 < 0 \text{ ve } F_{aa}(a_0,b_0) > 0$$

olduğundan $F$ fonksiyonu, $(a_0,b_0)$ noktasında bir minimuma sahiptir.

Sonuç olarak aranılan doğrunun denklemi, $y = -1,5x+4,5$ dir. $x = 2,5$ için $y = -1,5x+4,5$ eşitliğinden $y = 0,75$ bulunur. $\square$

**4.** Aşağıdaki çizelgede verilen $x$ ve $y$ değerleri için en küçük kareler doğrusunu bulunuz. $x = 25$ için $y$ nin değerinin kaç olması beklenir?

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | 10 |
| 5 | 22 |
| 10 | 31 |
| 15 | 46 |
| 20 | 51 |

(1. çizelge)

**Çözüm:** $y = ax + b$ biçiminde bir doğru arıyoruz. Bir $x$ sayısına karşılık, $y = ax + b$ kuralından bulunan $y$ değeri ile bu $x$ sayısına çizelgede karşılık getirilen $y$ değeri birbirinden farklıdır. Bu farklar aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir.

| $x$ | $y$ | $ax + b$ | $farklar$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 10 | $0 + b$ | $10 - 0 - b$ |
| 5 | 22 | $5a + b$ | $22 - 5a - b$ |
| 10 | 31 | $16a + b$ | $31 - 10a - b$ |
| 15 | 46 | $15a + b$ | $46 - 15a - b$ |
| 20 | 51 | $20a + b$ | $51 - 20a - b$ |

(2. çizelge)

"En iyi yaklaşık doğru"yu elde edebilmek için 2. çizelgede bulunan farkların karelerinin toplamının en küçük olmasını istiyoruz. Bu farkların karelerinin toplamına $F(a, b)$ diyelim.

$$F(a, b) = (10 - b)^2 + (22 - 5a - b)^2 + (31 - 10a - b)^2 + (46 - 15a - b)^2 + (51 - 20a - b)^2$$

olur. Aradığımız doğruyu belirten $a$ ve $b$ sayıları, $F$ fonksiyonunu minimum yapan sayılardır.

$$\begin{aligned} F_a(a, b) &= 2(22 - 5a - b)(-5) + 2(31 - 10a - b)(-10) \\ &\quad +2(46 - 15a - b)(-15) + 2(51 - 20a - b)(-20) \\ F_b(a, b) &= 2(10 - b)(-1) + 2(22 - 5a - b)(-1) + 2(31 - 10a - b)(-1) \\ &\quad +2(46 - 15a - b)(-1) + 2(51 - 20a - b)(-1) \end{aligned}$$

olduğundan $F_a(a, b) = 1500a + 100b - 4260$ ve $F_b(a, b) = 100a + 10b - 320$ bulunur.

$$\begin{aligned} 1500a + 100b - 4260 &= 0 \\ 100a + 10b - 320 &= 0 \end{aligned}$$

denklem sisteminden $a_0 = 2,12$, $b_0 = 10,8$ bulunur.

$$F_{aa}(a_0, b_0) = 1500,\ F_{ab}(a_0, b_0) = 100,\ \ F_{bb}(a_0, b_0) = 10$$

olduğundan

$$F_{ab}^2(a_0, b_0) - F_{aa}(a_0, b_0)\, F_{bb}(a_0, b_0) = 100^2 - 1500 \cdot 10 = -5000 < 0 \ \text{ ve } \ F_{aa}(a_0, b_0) > 0$$

olduğundan $F$ fonksiyonu, $(a_0, b_0)$ noktasında bir minimuma sahiptir.

Sonuç olarak aranılan doğrunun denklemi, $y = 2,12x+10,8$ dir. $x = 25$ için $y = 2,12x+10,8$ eşitliğinden $y = 63,8$ bulunur. □

**5.** Bir sınıftaki 10 öğrencinin ara sınav notları ortalaması ve genel sınav notları aşağıdaki çizelgedeki gibidir.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *ara sınav* $(x_k)$ | 49 | 53 | 67 | 71 | 74 | 78 | 83 | 85 | 91 | 99 |
| *genel sınav* $(y_k)$ | 61 | 47 | 72 | 76 | 68 | 77 | 81 | 79 | 93 | 99 |

(1. çizelge)

Bu değerlerden yararlanarak öğrencilerin ara sınav notları ortalaması ile genel sınav notları arasında $y = ax + b$ biçimindeki bağlantıyı bulunuz.

Bu 10 öğrencinin bulunduğu sınıftaki bir öğrencinin ara sınav notlarının ortalaması 95 olsun. Bu öğrencinin genel sınav notunun kaç olması beklenir?

**Çözüm:** Genel olarak $n$ tane $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, ..., $(x_n, y_n)$ noktasından geçen en küçük kareler doğrusu arandığında $a$ ve $b$ sayılarını veren denklem sisteminin

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) a + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) b &= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \\ \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) a + nb &= \sum_{k=1}^{n} y_k \end{aligned} \tag{1}$$

sistemi olduğunu göstermiştik. Bu denklem sisteminin çözümü

$$\begin{aligned} a &= \frac{n\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)}{n\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2} \\ b &= \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right) - a\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)}{n} \end{aligned} \tag{2}$$

dır. Burada verilen noktalar için $n = 10$ dur. Ayrıca

$$\sum_{k=1}^{10} x_k^2 = 49^2 + 53^2 + 67^2 + 71^2 + 74^2 + 78^2 + 83^2 + 85^2 + 91^2 + 99^2 = 58496$$

$$\sum_{k=1}^{10} x_k = 49 + 53 + 67 + 71 + 74 + 78 + 83 + 85 + 91 + 99 = 750$$

$$\sum_{k=1}^{10} x_k y_k = 49{\cdot}61+53{\cdot}47+67{\cdot}72+71{\cdot}76+74{\cdot}68+78{\cdot}77+83{\cdot}81+85{\cdot}79+91{\cdot}93+99{\cdot}99 = 58440$$

$$\sum_{k=1}^{10} y_k = 61+47+72+76+68+77+81+79+93+99 = 753$$

dür. Yukarıdaki (2) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} a &= \frac{n\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k\right) - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k\right)}{n\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2\right) - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)^2} &= \frac{10\cdot 58440 - 750\cdot 753}{10\cdot 58496 - 750^2} &= 0,875 \\ b &= \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k\right) - a\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)}{n} &= \frac{753 - 0,875\cdot 750}{10} &= 9,675 \end{aligned} \tag{2}$$

elde edilir. Sonuç olarak aranılan doğrunun denklemi, $y = 0,875x + 9,675$ dir. Bu doğruya, "en küçük kareler doğrusu" veya "çekilme (regression) doğrusu" adı verilmişti.

Bu 10 öğrencinin bulunduğu sınıftaki bir öğrencinin ara sınav notlarının ortalaması 95 olsun. Bu öğrencinin genel sınav notunun da $y = 0,875x + 9,675$ kuralına uyacağını varsayabiliriz. Bu durumda $y = 0,875\cdot 95 + 9,675$ eşitliğinden $y = 92,8$ bulunur. Öyleyse bu öğrencinin genel sınav notunun yaklaşık olarak 93 olması beklenmelidir. □

**6.** Amerika birleşik devletlerinde (A.B.D) 1950 yılından başlayarak her on yılda bir ev ısıtmasında kullanılan sıvı yakıt (fuel oil) yüzdeleri aşağıdaki çizelgedeki gibidir.

| *yıllar* | *yüzde* |
|---|---|
| 1950 | 22, 1 |
| 1960 | 32, 4 |
| 1970 | 26 |
| 1980 | 18, 1 |
| 1990 | 13, 2 |
| 2000 | 9 |

(1. çizelge)

Bu değerlerden yararlanarak ev ısıtmasında kullanılan sıvı yakıt (fuel oil) yüzdesini yıllara bağlı olarak gösteren en küçük kareler doğrusunu bulunuz.

2010 yılında tüketilen sıvı yakıt (fuel oil) yüzdesinin kaç olması beklenir?

**Çözüm:** 1950 yılı ölçümün başladığı yıl olduğundan bu yıl için $x_1 = 0$ alalım. $x_1 = 0$ için $y_1 = 22,1$ demektir. Benzer biçimde $x_2 = 10$ için $y_2 = 32,4$ demektir. Böyle devam edilerek aşağıdaki çizelge elde edilir.

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | 22, 1 |
| 10 | 32, 4 |
| 20 | 26 |
| 30 | 18, 1 |
| 40 | 13, 2 |
| 50 | 9 |

Genel olarak $n$ tane $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, ... , $(x_n, y_n)$ noktasından geçen en küçük kareler doğrusu arandığında $a$ ve $b$ sayılarınının

$$\begin{aligned} a &= \frac{n\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k\right) - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k\right)}{n\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2\right) - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)^2} \\ b &= \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k\right) - a\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)}{n} \end{aligned} \qquad (1)$$

eşitlikleriyle belirli olduğunu göstermiştik. Burada verilen noktalar için $n = 6$ dır. Ayrıca

$$\sum_{k=1}^{6} x_k^2 = 0^2 + 10^2 + 20^2 + 30^2 + 40^2 + 50^2 = 5500$$

$$\sum_{k=1}^{6} x_k = 0 + 10 + 20 + 30 + 40 + 50 = 150$$

$$\sum_{k=1}^{6} x_k y_k = 0 \cdot 22,1 + 10 \cdot 32,4 + 20 \cdot 26 + 30 \cdot 18,1 + 40 \cdot 13,2 + 50 \cdot 9 = 2365$$

$$\sum_{k=1}^{6} y_k = 22,1 + 32,4 + 26 + 18,1 + 13,2 + 9 = 120,8$$

dür. Yukarıdaki (1) eşitliklerinden

$$a = \frac{n\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)}{n\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2} = \frac{6 \cdot 2365 - 150 \cdot 120,8}{6 \cdot 5500 - 150^2} = -0,37$$

$$b = \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right) - a\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)}{n} = \frac{120,8 + 0,37 \cdot 150}{6} = 29,4 \qquad (2)$$

elde edilir. Sonuç olarak aranılan doğrunun denklemi, $y = -0,37x + 29,4$ dür.

2010 yılında $x = 60$ demektir. Buna göre 2010 yılında tüketilen sıvı yakıt (fuel oil) yüzdesi, $y = -0,37x+29,4$ eşitliğinde $x$ yerine 60 konularak bulunan sayıdır. $y = -0,37 \cdot 60+29,4 = 7,2$ dir. $\square$

**7.** Düzlemde, $(1,2)$, $(2,1)$, $(3,1)$, $(4,3)$ noktalarının en yakınından geçen parabol eğrisinin denklemini bulunuz.

**Çözüm:** Aradığımız parabolün denklemi, $y = ax^2 + bx + c$ biçimindedir. Buradaki $a$, $b$ ve $c$ sayıları,

$$F(a,b,c) = \sum_{k=1}^{n} \left(y_k - ax_k^2 - bx_k - c\right)^2$$

eşitliğiyle tanımlı $F$ fonksiyonunun minimum olmasını sağlayan $a$, $b$ ve $c$ sayılarıdır. Bu soruda $n = 4$ tür.

$$F(a,b,c) = (2-a-b-c)^2 + (1-4a-2b-c)^2 + (1-9a-3b-c)^2 + (3-16a-4b-c)^2$$

olur. Kısmi türevler hesaplandığında

$$F_a(a,b,c) = 2(2-a-b-c)(-1) + 2(1-4a-2b-c)(-4) + 2(1-9a-3b-c)(-9) + 2(3-16a-4b-c)(-16)$$

$$F_b(a,b,c) = 2(2-a-b-c)(-1) + 2(1-4a-2b-c)(-2) + 2(1-9a-3b-c)(-3) + 2(3-16a-4b-c)(-4)$$

$$F_c(a,b,c) = 2(2-a-b-c)(-1) + 2(1-4a-2b-c)(-1) + 2(1-9a-3b-c)(-1) + 2(3-16a-4b-c)(-1)$$

elde edilir. Bu eşitliklerin sağ yanları hesaplanarak

$$
\begin{aligned}
F_a(a,b,c) &= 708a+200b+60c-126 &= 0\\
F_b(a,b,c) &= 200a+60b+20c-38 &= 0 \qquad (1)\\
F_c(a,b,c) &= 60a+20b+8c-14 &= 0
\end{aligned}
$$

denklem sistemin bulunur. Bu denklem sistemi çözülerek $a = 0,75$, $b = -3,45$ ve $c = 4,75$ elde edilir. Buna göre aranılan parabolün denklemi $y = 0,75x^2 - 3,45x + 4,75$ dir. □

**8.** 1997 yılından başlayarak 2004 yılına kadar Çindeki motorlu araç üretimi sayıları çizelgedeki gibidir.

| *yıllar* | 1997 | 1998 | 1999 | 2000 | 2001 | 2002 | 2003 | 2004 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *üretim sayısı* | 1578 | 1628 | 1805 | 2009 | 2332 | 3251 | 4444 | 5071 |

(1. çizelge)

Bu çizelgedeki üretim sayılarında, 1000 araç bir birim olarak alınmıştır. 1997 yılında $x = 0$ alarak yıllar ve motorlu araç üretimi arasında $y = ax + b$ biçimindeki bağlantıyı bulunuz.

2010 yılında Çinin motorlu araç üretim sayısının kaç olması beklenir?

**Çözüm:** 1997 yılı için $x_1 = 0$ dır. $x_1 = 0$ için $y_1 = 1578$ demektir. Benzer biçimde $x_2 = 1$ için $y_2 = 1628$ demektir. Böyle devam edilerek aşağıdaki çizelge elde edilir.

| *yıllar* ($x_k$) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *üretim sayısı* ($y_k$) | 1578 | 1628 | 1805 | 2009 | 2332 | 3251 | 4444 | 5071 |

(2. çizelge)

Genel olarak $n$ tane $(x_1,y_1)$, $(x_2,y_2)$, ... , $(x_n,y_n)$ noktasından geçen en küçük kareler doğrusu arandığında $a$ ve $b$ sayılarınının

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{n\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k\right) - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k\right)}{n\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2\right) - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)^2} \\
b &= \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k\right) - a\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)}{n}
\end{aligned} \qquad (1)
$$

eşitlikleriyle belirli olduğunu göstermiştik. Burada verilen noktalar için $n = 8$ dır. Ayrıca

$$\sum_{k=1}^{8} x_k^2 = 0^2+1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2 = 140$$

$$\sum_{k=1}^{8} x_k = 0+1+2+3+4+5+6+7 = 28$$

$$\sum_{k=1}^{8} x_k y_k = 0 \cdot 1578 + 1 \cdot 1628 + 2 \cdot 1805 + 3 \cdot 2009 + 4 \cdot 2332 + 5 \cdot 3251 + 6 \cdot 4444 + 7 \cdot 5071 = 99009$$

$$\sum_{k=1}^{8} y_k = 1578 + 1628 + 1805 + 2009 + 2332 + 3251 + 4444 + 5071 = 22118$$

dür. Yukarıdaki (1) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} a &= \frac{n\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k\right) - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k\right)}{n\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2\right) - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)^2} &= \frac{8 \cdot 99009 - 28 \cdot 22118}{8 \cdot 140 - 28^2} &= 514,19 \\ b &= \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k\right) - a\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)}{n} &= \frac{22118 - 514,19 \cdot 28}{8} &= 965,1 \end{aligned} \qquad (2)$$

elde edilir. Sonuç olarak aranılan doğrunun denklemi, $y = (514,2)\,x + 965,1$ dir.

2010 yılında $x = 13$ demektir. Buna göre 2010 yılında üretilen araç sayısı,

$$y = (514,2)\,x + 965,1$$

eşitliğinde $x$ yerine 13 konularak bulunan sayıdır. $y = (514,2) \cdot 13 + 965,1 = 7649,7$ dir. Demek ki 2010 yılında üretilen araç sayısı 7649700 adettir. $\square$