

**T.C.**  
**MARMARA ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DERS :** **OPTİMİZASYON TEKNİKLERİ**

**ÖĞR.ÜYESİ :** *Yard.Doç.Dr. MEHMET TEKTAŞ*

## ATAMA PROBLEMLERİ

### PROBLEM:

Aşağıdaki tabloda saat olarak her öğrencinin iş eğitimi dersinde, ilgili iş bitirme süresi verilmektedir. Buna göre, minimum zamanda işlerin öğrencilere atanması problemini çözünüz.

### İŞLER

	BEBEK	SARKAÇ	TABLO	RESİM	
ÖĞRENCİ	AHMET	10	14	15	13
	ELİF	12	13	16	12
	İBRAHİM	8	12	12	11
	HATİCE	13	16	18	13

### ÇÖZÜM:

### İŞLER

	BEBEK	SARKAÇ	TABLO	RESİM	
ÖĞRENCİ	AHMET	0	4	5	3
	ELİF	0	1	4	0
	İBRAHİM	0	4	4	3
	HATİCE	0	3	5	0

### İŞLER

	BEBEK	SARKAÇ	TABLO	RESİM	
ÖĞRENCİ	AHMET	0	3	1	3
	ELİF	0	0	0	0
	İBRAHİM	0	3	0	3
	HATİCE	0	2	1	0

**Ahmet bebek, Elif sarkaç, İbrahim tablo, Hatice resim işine atanır.**

$$\text{minz} = 10 + 13 + 12 + 13 = 48$$

## ULAŞTIRMA PROBLEMLERİ

### PROBLEM:

Ülkemizde birçok köy ve beldeler de taşıma sistemiyle öğretime devam edilmektedir. Aşağıdaki tablolarda köyler, beldeler ve taşımacılık yapan firmaların ortaya koydukları fiyatlar verilmiştir. Verilenlere göre en az maliyet ile öğrencileri okullarına ulaştırınız?

<u>Köyler</u>	<u>Öğrenci Sayısı</u>	<u>Liseler</u>	<u>Öğrenci Kapasitesi</u>
Yaylaalan	200	Teknik Lise	250
Tilkiler	400	Düz Lise	200
Sırtköy	250	Anadolu Lisesi	350

	<u>Teknik Lise</u>	<u>Düz Lise</u>	<u>Anadolu Lisesi</u>
<u>Yaylaalan</u>	10	6	5
<u>Tilkiler</u>	7	8	8
<u>Sırtköy</u>	6	9	12

### CÖZÜM:

	<u>Teknik Lise</u>	<u>Düz Lise</u>	<u>Anadolu Lisesi</u>	Arz
<u>Yaylaalan</u>	10 $x_{11}$	6 $x_{12}$	5 $x_{13}$	200
<u>Tilkiler</u>	7 $x_{21}$	8 $x_{22}$	8 $x_{23}$	400
<u>Sırtköy</u>	6 $x_{31}$	9 $x_{32}$	12 $x_{33}$	250
Talep	250	200	350	

#### Kısıtlar

$$x_{11}+x_{12}+x_{13} \leq 200$$

$$x_{21}+x_{22}+x_{23} \leq 400$$

$$x_{31}+x_{32}+x_{33} \leq 250$$

$$x_{11}+x_{21}+x_{31} \geq 250$$

$$x_{12}+x_{22}+x_{32} \geq 200$$

$$x_{13}+x_{23}+x_{33} \geq 350$$

arz kısıtlayıcıları

talep kısıtlayıcıları

**Kuzey-batı köşesi yöntemi:**

	<b><u>Teknik Lise</u></b>	<b><u>Düz Lise</u></b>	<b><u>Anadolu Lisesi</u></b>	<b><u>Farklı bir lise</u></b>	Arz
<b><u>Yaylaalan</u></b>	10 200	6 $x_{12}$	5 $x_{13}$	0	200
<b><u>Tilkiler</u></b>	7 50	8 200	8 150	0	400
<b><u>Sırtköy</u></b>	6 $x_{31}$	9 $x_{32}$	12 200	0 50	250
Talep	250	200	350	50	850

$$Z_{\min}=200.10+7.50+8.200+8.150+12.200+0.50$$

$$Z_{\min}=7550 \text{ TL.}$$

**En küçük maliyetli hücreler yöntemi:**

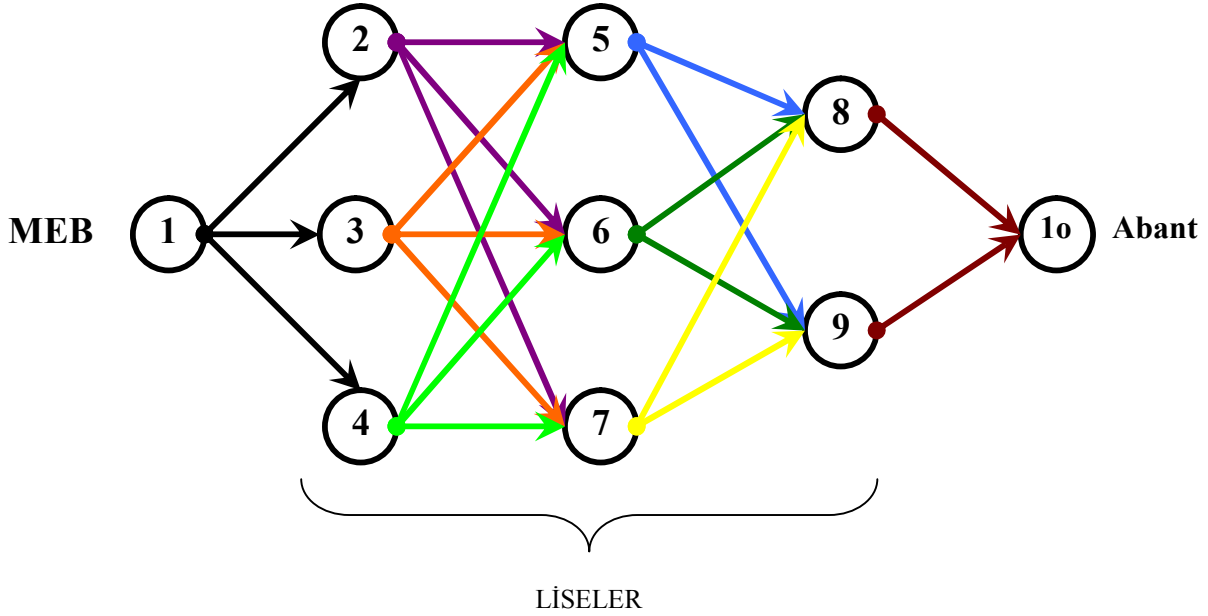
	<b><u>Teknik Lise</u></b>	<b><u>Düz Lise</u></b>	<b><u>Anadolu Lisesi</u></b>	<b><u>Farklı bir lise</u></b>	Arz
<b><u>Yaylaalan</u></b>	10	6	5 200	0	200
<b><u>Tilkiler</u></b>	7 50	8 200	8 150	0	400
<b><u>Sırtköy</u></b>	6 200	9	12	0 50	250
Talep	250	200	350	50	850

$$Z_{\min}=7.50+8.200+8.150+5.200+6.200+0.50$$

$$Z_{\min}=7350 \text{ TL.}$$

## KISAYOL PROBLEMLERİ

**PROBLEM:** MEB tarafından düzenlenen bir organizasyonda İstanbul'da bulunan liselerdeki okul birincilerini ödüllendirmek için bir gezi düzenleniyor. MEB merkez binasından hareket eden otobüs 8 liseden öğrenci alıp Beykoz'a gidecektir. Devlete en az maliyeti getirmek için gidilebilecek en kısa mesafeyi belirleyiniz.



1-2 arası: 5500  
1-3 arası: 9000  
1-4 arası: 7700

2-5 arası: 6800  
2-6 arası: 7900  
2-7 arası: 10500  
3-5 arası: 5800  
3-6 arası: 7600  
3-7 arası: 6600  
4-5 arası: 5100  
4-6 arası: 7000  
4-7 arası: 8300

5-8 arası: 6100  
5-9 arası: 7900  
6-8 arası: 5400  
6-9 arası: 9400  
7-8 arası: 7900  
7-9 arası: 2700

8-10 arası: 10300  
9-10 arası: 13900

### ÇÖZÜM:

$$F_3(5)=\min \begin{cases} C58+f4(8)=6100+10300=16400 \\ C59+f4(9)=7900+13900=21800 \end{cases}$$

$$F_3(6)=\min \begin{cases} C68+f4(8)=5400+10300=15700 \\ C69+f4(9)=9400+13900=23300 \end{cases}$$

$$F_3(7)=\min \begin{cases} C78+f4(8)=7900+10300=18200 \\ C68+f4(9)=2700+13900=16600 \end{cases}$$

$$F_2(2)=\min \begin{cases} C25+f3(5)=6800+16400=23200 \\ C26+f3(6)=7900+15700=23600 \\ C27+f3(7)=10500+16600=27100 \end{cases}$$

$$F_2(3)=\min \begin{cases} C35+f3(5)=5800+16400=22200 \\ C36+f3(6)=7600+15700=23300 \\ C37+f3(7)=6600+16600=23200 \end{cases}$$

$$F_2(4)=\min \begin{cases} C45+f3(5)=5100+16400=21500 \\ C46+f3(6)=7000+15700=22700 \\ C47+f3(7)=8300+16600=24900 \end{cases}$$

( $f_4(8)=1030$  ve  $f_4(9)=1390$ )

$$F_1(1)=\min \begin{cases} C12+f_2(2)=550+2320=28700 \\ C13+f_2(3)=900+2220=31200 \\ C14+f_2(4)=770+2150=29200 \end{cases}$$

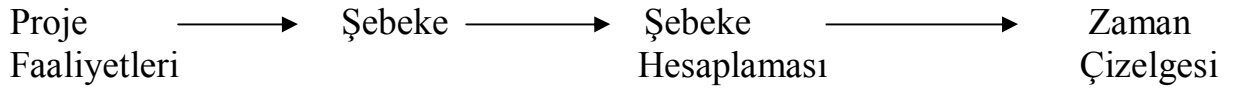
(Burada,  $f_n(a)$  şeklindeki ifadelerde  $n$  aşama(stage) sayısıdır.)

**Sonuç: 1-2-5-8-10=28700 m'dir.**

## CPM VE PERT

CPM ( Critical Path Method --- Kritik Yol Yöntemi ) ve PERT (Program Evaluation and Review Technique --- Program Değerlendirme ve Gözden Geçirme Tekniği) projelerin planlanması, çizelgelenmesi ve kontrolüne yardımcı olmak üzere tasarlanmış şebeke esaslı modellerdir. Bir proje, her birinde zaman ve kaynak harcanan birbirleriyle ilişkili faaliyetlerin bir araya getirilmesidir. CPM ve PERT'in amacı çizelgeleme faaliyetlerinin analitik anlamlar kazandırmaktır.

Yöntemlerin adımları :



Birbirinden bağımsız olarak geliştirilen iki yöntem olan CPM ve PERT'te , CPM faaliyet sürelerini deterministik (önceden belirlenmiş ve kesin ) olarak kabul ederken , PERT bu sürelerin olasılıklı olduğunu kabul etmektedir. Burada sadece CPM'den söz edilecektir.

### 1. ŞEBEKE GÖSTERİMİ

Projenin her faaliyeti projedeki gelişmenin yönünü işaret eden yönlü bağlantı (daha çok *ok* diye bilinir) ile gösterilir. Şebekenin düğümleri (olaylar diye de adlandırılır ) projenin farklı faaliyetleri arasında öncelik ilişkisi kurar.

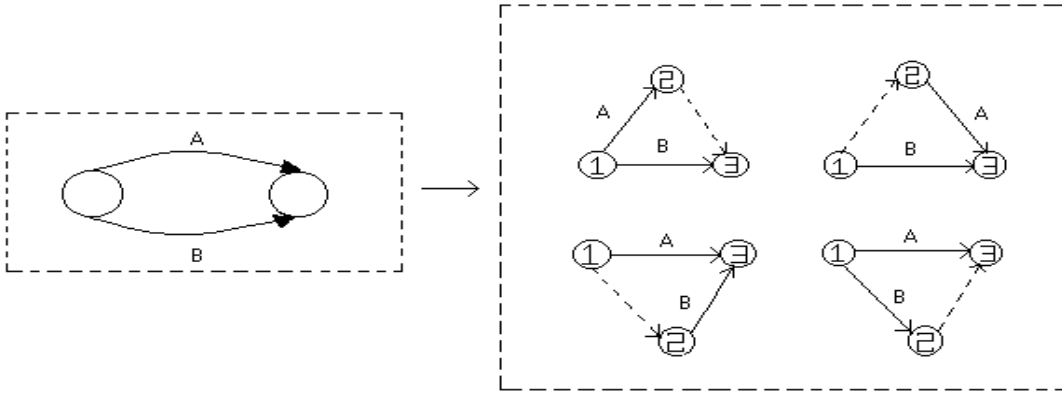
Şebekenin oluşturulması için üç kural vardır :

**1.Kural:** Şebekedeki her faaliyet yalnızca bir ok ile gösterilir.

**2.Kural:** Her faaliyet iki ayrı düğümlerle (başlangıç ve bitiş) tanımlanmalıdır.

Şekil 1'de bir kukla faaliyetinin A ve B gibi eş zamanlı iki

faaliyetin gösteriminde nasıl kullanıldığını açıklamaktadır. Tanıma göre, genellikle kesikli ok ile gösterilen bir kukla faaliyet zaman ve kaynak harcamayan bir faaliyettir. Kukla faaliyetin şebeke eklenmesi, Şekil 1'de gösterilen dört yoldan biriyle olabilir. A ve B'nin eşzamanlılığı korunurken iki eşzamanlı faaliyete tek bir düğümlerle bağlanması 2. kuralın sağlanması için gereklidir.



**ŞEKİL 1**

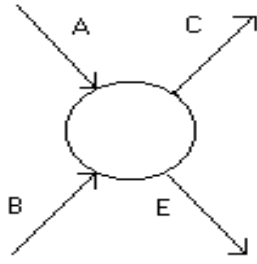
**3.Kural:** Doğru öncelik ilişkileri kurabilmek için,şebekeye her yeni faaliyete eklenirken aşağıdaki sorular sorulmalıdır :

- a) Şebekeye eklenecek faaliyetten hemen önce hangi faaliyetlerin gelmesi zorunludur?
- b) Şebekeye eklenecek faaliyeti hangi faaliyetlerin izlemesi zorunludur?
- c) Şebekeye eklenecek faaliyete eşzamanlı olarak hangi faaliyetler bulunmaktadır?

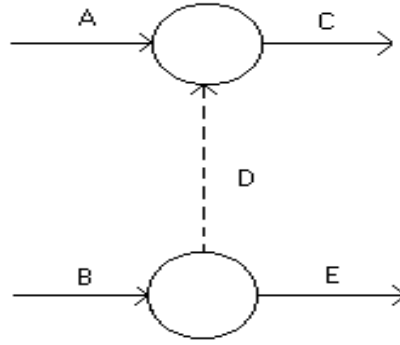
Bu sorulara cevap verebilmek için faaliyetler arasında uygun öncelik ilişkisini sağlayacak kukla faaliyetlerin kullanımı gerekebilir. Örneğin ,aşağıdaki önceliklerin karşılanmak zorunda olduğunu varsayalım :

- 1) C faaliyeti A ve B'nin tamamlanmasından hemen sonra başlayabilir.
- 2) E faaliyeti sadece B'nin tamamlanmasından hemen sonra başlayabilir.





(a)



(b)

## ŞEKİL 2

Şekil 2 (a) , bu öncelik ilişkilerinin hatalı gösterimidir ; çünkü E, ancak B'nin tamamlanmasından sonra başlayabilecekken, C'de olduğu gibi hem A'nın hem de B'nin tamamlanmasından sonra başlamaktadır. Şekil 2 (b) ise, durumun kukla faaliyetle doğru gösterimidir.

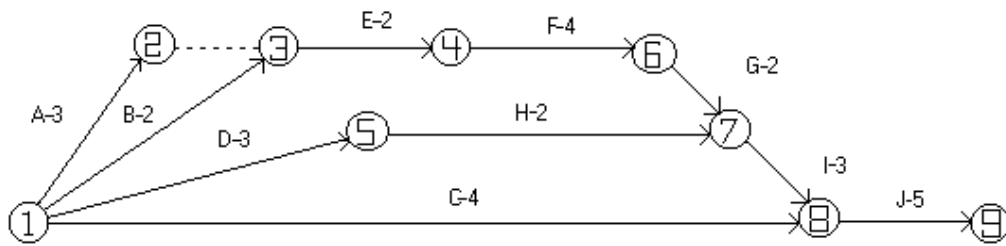
### UYGULAMA :

Bir otomobil firması yeni bir otomobil üretimi üzerinde çalışmaktadır. Otomobilin üretilmesi ile ilgili basitleştirilmiş faaliyetler aşağıda verilmiştir. Buna göre projenin şebeke diyagramını, kritik yol hesaplamasını ve zaman çizelgesini oluşturun.

<u>Faaliyet</u>	<u>Önceki Faaliyet</u>	<u>Süre(hafta)</u>
A : Mühendis I'ın araç taslağında düzeltmeler yapması.	—	3
B : Kalıpcıların örnek kalıpları hazırlaması.	—	2
C : Kaporta-Boya tasarımı.	—	4
D : Aracın mekanik ve elektrik aksamının projelendirilmesi.	—	3

Faaliyet	Önceki Faaliyet	Süre(hafta)
E : Mühendis II'nin düzeltilmiş araç taslağını ve örnek kalıpları onaylaması.	A,B	2
F : Aracın montaja başlanması.	E	4
G : Mühendis II'nin montajı yapılmış örnek aracın kontrolünü yapması.	F	2
H : Mühendis II'nin aracın mekanik ve elektrik aksamının kontrol etmesi	D	2
I : Gerekli tüm kalıpların hazırlanması.	G,H	3
J : Kaporta-Boya işlemi ve seri üretim.	C,I	5

**a) Şebeke diyagramı :**



**ŞEKİL 3**

Şekil 3 ,şebekenin farklı faaliyetleri arasındaki öncelik ilişkilerini tanımlamaktadır. (2,3) kukla faaliyeti, aynı anda gerçekleştirilen A ve B faaliyetlerinin bitişini bir kerede göstermek için kullanılmıştır. Düğümlerin numaralandırılması projenin ilerleme yönünü gösterecek biçimde yapılmıştır.

## 2. KRİTİK YOL HESAPLAMALARI

CPM'in uygulanması sonucunda projenin zaman çizelgesi oluşturulur. Bu amaca kolayca varabilmek için, aşağıdaki bilgiyi sağlayacak özel hesaplamaları gerçekleştirmemiz gerekir;

1. Projenin tamamlanması için gereken toplam süre,
2. Projenin faaliyetlerinin kritik ve kritik olmayan faaliyetler diye sınıflandırılması.

Başlangıç ve bitiş zamanları arasında gevşeklik (bolluk) olmayan faaliyete **kritik** faaliyet adı verilir. Aslında projeyi gecikmesiz bitirebilmek için her kritik faaliyet zamanında başlayıp bitmek zorundadır. **Kritik olmayan** faaliyet bazı çizelgeleme gevşemelerine izin verir, böylelikle, faaliyetin başlangıç zamanı belirli sınırlar içerisinde öne alınsa veya geciktirilse bile, bütünüyle projenin tamamlanma zamanında bir değişiklik olmaz.

**Olayı** , gerekli hesaplamaları yapabilmek için , bazı faaliyetlerin bitip başkalarının başladığı andaki bir nokta ile tanımlarız. Şebekede bir olay bir düğüme karşılı gelir. Daha sonra aşağıdaki tanımlamaları yaparız :

$e_j = j$  olayın en erken gerçekleşme zamanı

$\Delta_j = j$  olayının en geç gerçekleşme zamanı

$D_{ij} = (i,j)$  faaliyetinin süresi

$j$  olayının *en erken* ve *en geç* gerçekleşme zamanları , tüm projenin başlama ve tamamlanma zamanlarına göre belirlenir.

Kritik yol hesaplamaları , biri ileriye öteki geriye doğru olmak üzere iki yönlüdür : **İleriye doğru hesaplama** olayların en erken gerçekleşme zamanlarını, **geriye doğru hesaplama** ise en geç gerçekleşme zamanlarını belirler.

**İleriye doğru hesaplama (en erken gerçekleşme zamanları,  $e_j$  )**

Burada hesaplama 1. düğümden başlar ve n. Düğüme kadar yinelenerek ilerler.

**Başlangıç adımı.** Projenin 0 zamanında başladığını göstermek için  $e_1 \equiv 0$  olarak alınır.

**j. genel adım.** p , q ,.....,v düğümlerinin, (p,j) , (q,j),.....,(v,j) gelen faaliyetleriyle j. düğüme doğrudan bağlı olduğu verilmişse ve p ,q ,.....,v olaylarının (düğümlerinin) en erken gerçekleşme zamanları daha önceden hesaplanmışsa , j olayının en erken gerçekleşme zamanı şöyle hesaplanır :

$$e_j = \max. ( e_p + D_{pj} , e_q + D_{qj} , \dots , e_v + D_{vj} )$$

n.düğümdeki  $e_n$  hesaplandığında ileriye doğru hesaplama tamamlanmış olur. Tanıma göre  $e_j$  , j.düğüm ,ç,n en uzun yolu (süreyi) gösterir.

### **Geriye doğru hesaplama ( en geç gerçekleşme zamanları, $\Delta$ )**

İleriye doğru hesaplama tamamlandıktan sonra n. Düğüme geriye doğru hesaplama başlar ve yinelenerek 1.düğüme geri döner.

**Başlangıç adımı.** Projenin en son olayının en erken ve en geç gerçekleşme zamanının aynı olduğunu gösterecek şekilde ,  $\Delta_n \equiv e_n$  olarak belirle.

**j. genel adım.** . p , q ,.....,v düğümlerinin, (j,p) , (j,q),.....,(j,v) çıkan faaliyetleriyle j. düğüme doğrudan bağlı olduğu verilmişse ve p ,q ,.....,v olaylarının (düğümlerinin) en geç gerçekleşme zamanları daha önceden hesaplanmışsa , j olayının en geç gerçekleşme zamanı şöyle hesaplanır :

$$\Delta_j = \min. ( \Delta_p - D_{pj} , \Delta_q - D_{jq} , \dots , \Delta_v - D_{jv} )$$

Geriye doğru hesaplama , 1. düğümdenki  $\Delta_1$  hesaplandığında tamamlanır.

Önceki hesaplamalar esas alındığında , bir (i,j) faaliyeti , aşağıdaki üç koşulu sağlıyorsa **kritik faaliyet** olacaktır :

1.  $\Delta_i = e_i$
2.  $\Delta_j = e_j$
3.  $\Delta_j - \Delta_i = e_j - e_i = D_{ij}$

**Bu üç koşul şunları ifade etmektedir :**

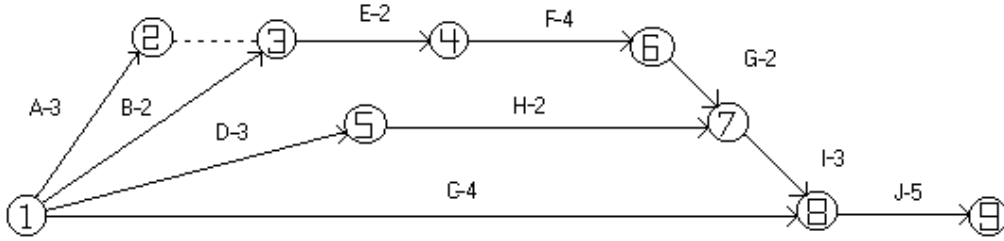
1. ve 2. koşul için ;  
i ve j olaylarının en erken ve en geç gerçekleşme zamanları eşittir.

2. koşul için ;

$D_{ij}$  süresi , j olayının en erken gerçekleşme zamanı ile i olayının en erken gerçekleşme zamanı arasında farka , aynı zamanda da j olayının en geç gerçekleşme zamanı ile i olayının en geç gerçekleşme zamanı arasındaki farka eşittir. Bu üç koşulu sağlamayan bir faaliyet **kritik olmayan** faaliyettir.

Şebekenin kritik faaliyetleri başlangıçtan bitişe tüm şebekeyi kapsayan kesintisiz bir yol oluşturmak zorundadır.

**b) Kritik yol hesaplaması :** Uygulama örneğinde çizilen şebeke diyagramı (Şekil 3) için kritik yol hesaplamasını yapalım.



**ŞEKİL 3**

### İleriye doğru hesaplama ( $E_i$ )

1.düğüm =  $E_1 = 0$  olarak belirle.

2.düğüm =  $E_2 = E_1 + D_{12} = 0+3 = 3$

3.düğüm =  $E_3 = \max.(E_1 + D_{13}, E_2 + D_{23}) = \max.(0+2, 3+0) = 3$

4.düğüm =  $E_4 = E_3 + D_{34} = 3 + 2 = 5$

5.düğüm =  $E_5 = E_1 + D_{15} = 0 + 3 = 3$

6.düğüm =  $E_6 = E_4 + D_{46} = 5 + 4 = 9$

7.düğüm =  $E_7 = \max.(E_6 + D_{67}, E_5 + D_{57}) = \max.(9+2, 3+2) = 11$

8.düğüm =  $E_8 = \max.(E_7 + D_{78}, E_1 + D_{18}) = \max.(11+3, 0+4) = 14$

9.düğüm =  $E_9 = E_8 + D_{89} = 14 + 5 = 19$  Hafta sonra proje tamamlanacak.

### Geriye doğru hesaplama ( $L_i$ )

9.düğüm =  $L_9 = E_9 = 19$  olarak belirle.

8.düğüm =  $L_8 = L_9 - D_{89} = 19 - 5 = 14$

$$7.\text{düğüm} = \Delta_7 = \Delta_8 - D_{78} = 14 - 3 = 11$$

$$6.\text{düğüm} = \Delta_6 = \Delta_7 - D_{67} = 11 - 2 = 9$$

$$5.\text{düğüm} = \Delta_5 = \Delta_7 - D_{57} = 11 - 2 = 9$$

$$4.\text{düğüm} = \Delta_4 = \Delta_6 - D_{46} = 9 - 4 = 5$$

$$3.\text{düğüm} = \Delta_3 = \Delta_4 - D_{34} = 5 - 2 = 3$$

$$2.\text{düğüm} = \Delta_2 = \Delta_3 - D_{23} = 3 - 0 = 3$$

$$1.\text{düğüm} = \Delta_1 = \min.( \Delta_2 - D_{12} , \Delta_3 - D_{13} , \Delta_5 - D_{15} , \Delta_8 - D_{18} )$$

$$\Delta_1 = \min.( 3 - 3 , 3 - 2 , 9 - 3 , 14 - 4 ) = 0$$

Doğru hesaplama  $\Delta_1$ ' i her zaman sıfır yapan hesaplamadır.

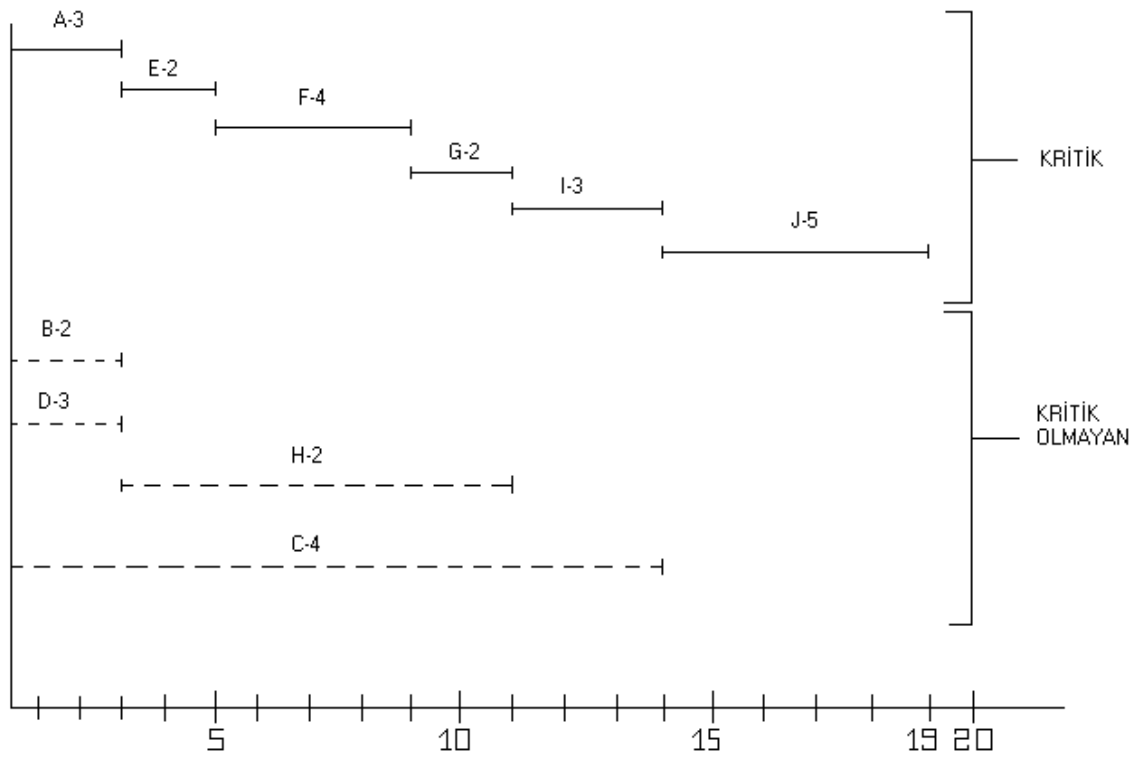
Kritik faaliyetin belirlenmesiyle ilgili kurallar şebeke başlangıcından(1.düğüm) bitişine(9.düğüm) kapsayan kritik yolun 1-2-3-4-6-7-8-9 ile tanımlandığını göstermektedir. Kritik faaliyetlerin sürelerinin toplamı [(1,2),(2,3),(3,4),(4,6),(6,7),(7,8),(8,9)] projenin süresine (19 hafta) eşittir.

### 3. ZAMAN ÇİZELGESİNİN OLUŞTURULMASI

Projenin farklı faaliyetleri için ön çizelgeyi faaliyetlerin zaman aralıklardan yola çıkarak elde edebiliriz. Sırasıyla iki gözlem yapılır :

1. Kritik faaliyetler ( düz çizgilerle gösterilenler ) , projenin belirlenen süre olan 19 hafta içerisinde bitirileceğini garanti eden ve birbirini izleyecek şekilde çizelgelenen faaliyetlerdir.
2. Kritik olmayan faaliyetler ( kesikli çizgilerle gösterilenler ) , kendi sürelerinden daha büyük aralıkları kapsarlar , böylelikle bu faaliyetler kendi aralıkları içerisinde çizelgelenirken bolluğa ( gevşekliğe ) izin verirler.

c) Zaman çizelgesi : Zaman çizelgesi aşağıdaki şekilde (Şekil 4) gösterilmiştir.



**ŞEKİL 4**

