3. DOĞRUSAL DENKLEM SİSTEMLERİ ve SAYISAL ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Doğrusal denklem sistemlerinin sayısal çözümleri sıkca karşılaşılan problemlerden biridir. Doğrusal denklem sistemleri başlıca;

a. Sınır değer problemlerinin başlangıç değer yönemleri ile çözümünde,
b. Sınır değer problemlerinin sonlu farklar (SFY) veya sonlu elemanlar yöntemi(SEY) ile çözümünde,
c. Kısmi dieransiyel denklemlerin sonlu farklar yöntemi ile çözümünde,
d. Optimizasyon problemlerinde,
e. İstatistiksel analizlerde,
f. En küçük kareler yöntemi ile eğri uydurma problemlerinde,
g. Doğrusal olmayan denklem sistemlerinin doğrusallaştırma yöntemi ile çözümlerinde,
h. Sonlu elemanlar yöntemi ile çözümlerinde

olduğu gibi çeşitli uygulamalar esnasında sıkca karşılaşılır. Genel olarak doğrusal denklem sistemi;

$$\begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots\dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots\dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots\dots\dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \qquad (1)$$

veya

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = c_i\,, \quad (\mathrm{i} = 1,2,\dots,\mathrm{n})$$

yada dizey notasyonu ile

$$\mathbf{A\,x = b} \qquad (2)$$

gösterilir. Bu denklem sisteminde b=0 olması halinde “homojen denklem sistemi” b vektörünün sıfırdan farklı olduğu denklemlere ise “homojen olmayan denklem sistemi” adı verilir. Homojen denklem sistemi her zaman bir önemsiz (trival) çözüme sahiptir. Sıfır veya önemsiz çözüm dışında bulunursa bu çözüme gerçek (nontrivial) çözüm denir. Ayrıca çözümü varolan denklem sistemine “tutarlı, consistent”, çözümü olmayan denklem sistemine ise “tutarsız, inconsistent” denklem sistemi denir. Tutarlı bir denklem sisteminde A dizeyinin rankı ile genişletilmiş [A:b] dizeyinin rankı birbirine eşittir. Tutarsız denklem sisteminde ise bu iki dizeyin rankı farklıdır. Ayrıca doğrusal denklem sisteminin çözümü bir özdeğer probleminin çözümü kapsamında incelenir.

Homojen olmayan denklem sisteminin çözümü için geliştirilen yöntemler iki grubta ele alınabilir. Bunlar dolaysız(direct) ve dolaylı(indirect) yöntemlerdir. Her iki gruba giren bu yöntemlerden bazıları:

a. DOLAYSIZ YÖNTEMLER(DİRECT METHODS)

Cramer yöntemi
Gauss eleminasyon yöntemi
Gauss-Jordan yöntemi
Ayrıştırma (Cholesky) yöntemi

b. DOLAYLI YÖNTEMLER(İNDİRECT METHODS)

Basit yineleme(iterasyon) yöntemi
Gauss-Seidel yöntemi
SOR(Successive Over Relaxation) yöntemi
Optimizasyon yöntemleri (Dik iniş (steepest descent) ve eşlenik eğim(conjugate gradient))

a. DOLAYSIZ YÖNTEMLER (DIRECT METHODS)

1. Cramer Yöntemi

Bu yöntem küçük sayıda denklemlerden oluşan denklem sistemlerinin çözümünde kullanılmaktadır. Cramer yönteminde, dizey yapısında verilen katsayı dizeyinin determinantının hesaplanmasını gerektirir. Yöntem kısaca, katsayılar dizeyinde bilinmeyenlerin bulundugu sütüna eşitlik yöneyinin getirilmesi ve yeni oluşturulan dizeyin determinantının hesaplanarak katsayı dizeyinin determinantına oranlanması şeklinde yürütülür. Örneğin;

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

Denklem sistemi dizey yapısında,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Elde edlir. Bilinmeyen x_i değeri ayrı ayrı yazılacak olursa,

$$x_1 = \frac{\begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}{|A|}, \qquad x_2 = \frac{\begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{bmatrix}}{|A|}, \qquad x_3 = \frac{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{bmatrix}}{|A|}$$

Örnek: Aşağıda verilen denklem sisteminde x_1, x_2 ve x_3 değerlerini Cramer yöntemiyle hesaplayınız?

0.3x1 + 0.52x2 + x3 = -0.010
0.5x1 + x2 + 1.9x3 = 0.067
0.1x1 + 0 .3x2 + 0.5x3 = -0.440

Çözüm:

Verilen denklem sistemini dizey yapısında yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} 0.3 & 0.52 & 1 \\ 0.5 & 1 & 1.9 \\ 0.1 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.01 \\ 0.067 \\ -0.44 \end{bmatrix}$$

A=xb

Katsayı dizeyi, A nın determinantı hesaplanırsa,

$$|A| = +a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

$$|A| = +0.3\begin{vmatrix} 1 & 1.9 \\ 0.3 & 0.5 \end{vmatrix} - 0.52\begin{vmatrix} 0.5 & 1.9 \\ 0.1 & 0.5 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0.5 & 1 \\ 0.1 & 0.3 \end{vmatrix}$$

$$|\mathrm{A}| = 0.3[0.5 - 0.57] - 0.52[0.25 - 0.19)] + 1[0.15 - 0.1]$$
$$|\mathrm{A}| = -0.0022$$

Bilinmeyen x_1, x_2 ve x_3 değerleri için,

$$x_1 = \frac{\begin{bmatrix} -0.01 & 0.52 & 1 \\ 0.067 & 1 & 1.9 \\ -0.44 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}}{|A|} = \frac{0.03278}{-0.0022} = -14.9,$$

$$x_2 = \frac{\begin{bmatrix} 0.3 & -0.01 & 1 \\ 0.5 & 0.67 & 1.9 \\ 0.1 & -0.44 & 0.5 \end{bmatrix}}{|A|} = \frac{0.0649}{-0.0022} = -29.5$$

$$x_3 = \frac{\begin{bmatrix} 0.3 & 0.52 & -0.01 \\ 0.5 & 1 & 0.67 \\ 0.1 & 0.3 & -0.44 \end{bmatrix}}{|A|} = \frac{-0.04356}{-0.0022} = 19.8$$

2. Gauss Eleminasyon Yöntemi

Gauss eleminasyon yönteminin esası, doğrusal denklem sisteminin üçgen dizey yapısına dönüştürülmesi ve bilinmeyenlerin geri giderek hesaplanmasına dayanır. (1) veya (2) ile verilen denklem sistemi, üst üçgen yapısına

$$
\begin{aligned}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + \dots\dots\dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a'_{22} x_2 + a'_{23} x_3 + a'_{24}x_4 + \dots\dots\dots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
a'_{nn}x_n &= b'_n
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

dönüştürülebilir. Üst üçgen dizey yapısına dönüştürmede izlenen adımlar sırasıyla:

Adım-1: Dizeyin birinci satırı (eşitlik yöneyi dahil) a_{11}' e bölünür.

$$
\begin{bmatrix}
1 & \dfrac{a_{12}}{a_{11}} = \alpha_{12} & \dfrac{a_{13}}{a_{11}} = \alpha_{13} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \dfrac{b_1}{a_{11}} = \beta_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}
$$

Adım-2: A dizeyinin birinci satırı a_{21} ile çarpılır ve ikinci satırdan çıkartılır. Böylece a21 elemanı sıfırlanmış olur. Aynı şekilde birinci satır a31 ile çarpılıp üçüncü satırdan çıkartılır böylece a31 sıfırlanmış olur. Bu işlem A dizeyinin tüm satırları için tekrarlanırsa A dizeyinin birinci sütunu sıfırlanmış olur.

$$
\begin{bmatrix}
1 & \dfrac{a_{12}}{a_{11}} = \alpha_{12} & \dfrac{a_{13}}{a_{11}} = \alpha_{13} \\
a_{21} - 1a_{21} & a_{22} - a_{21}\,\alpha_{12} & a_{23} - a_{21}\alpha_{13} \\
a_{31} - 1a_{31} & a_{32} - a_{31}\alpha_{12} & a_{33} - a_{31}\alpha_{13}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \dfrac{b_1}{a_{11}} = \beta_1 \\ b_2 - a_{21}\beta_1 \\ b_3 - a_{31}\beta_1 \end{bmatrix}
$$

Adım 2'nin sonunda

$$
\begin{bmatrix}
1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\
0 & a^{*}{}_{22} & a^{*}{}_{23} \\
0 & a^{*}{}_{32} & a^{*}{}_{33}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \beta_1 \\ b_2^{*} \\ b_3^{*} \end{bmatrix}
$$

dizey elde edilir. Aynı işlemi (Adım 1 ve Adım 2) boyu ilk dizey boyutuna göre bir azalmış dizey üzerinde uygulanırsa, sonuçta elde edilecek dizey üst üçgen dizey olur. Sondan başlayarak geri gitmek suretiyle bilinmeyenler elde edilir.

Pivotlama

A katsayı dizeyinin diagonal (köşegen) elemanlarına pivot elemanı denir. Gauss eleminasyon yönteminin uygulanmasında A katsayı dizeyinin köşeğenleri üzerinde sıfır veya sıfıra yakın elemanların bulunması durumunda sıfıra bölme durumu ile karşılaşılır. Bu durumun üstesinden gelmek için pivot elemanı en büyük olacak şekilde eşitlikler arasında değişiklik yapılır. Böylelikle hem köşegen üzerindeki sıfır elemanlar varsa giderilmiş olur hemde yuvarlatma hataları en aza indirgenmiş olur. Pivotlama işleminde sadece pivot elemanının büyük yapılması işlemine kısmi pivotlama, bütün satırlar dikkate alınarak büyük elemanlar secilmesi durumuna ise tam pivotlama denir. Bu duruma bir örnek vermek istersek,

$0.0003\ x_1 + 3.0000x_2 = 2.0001$
$1.0000\ x_1 + 1.0000x_2 = 1.0000$

gibi bir denklem sistemini çözmek istersek, burada pivot elemanı olan a_{11}= 0.0003 değeri sıfıra çok yakındır. Bu denklemi pivotlama işlemi yapmadan çözersek, ilk satır a_{11}'e bölünür.

$1.0000\ x_1 + 10000x_2 = 6667.0$
$1.0000\ x_1 + 1.0000x_2 = 1.0000$

Daha sonra a_{21} birinci satır ile çarpılıp, ikinci satırdan çıkartılırsa,

$1.0000\ x_1 + 10000x_2 = 6667.0$
$(1.0000-1.0000*1.0000)\ x_1 + (1.0000-1.0000*10000)x_2 = 1.0000-(1.0000*6667.0)$

$1.0000\ x_1 + 10000x_2 = 6667.0$
$0\ x_1 + 9999x_2 = 6666.0$

$X_2 = 6666.0/9999 = 0.66666$
$X_1 = 1.00005$

Şimdi pivotlama işlemi yapılırsa, birinci satır ile ikinci satır yerdeğiştirirse,

$1.0000\ x_1 + 1.0000x_2 = 1.0000$
$0.0003\ x_1 + 3.0000x_2 = 2.0001$

Pivotlamadan önceki çözüm aşamaları tekrar edilirse, bilinmeyenler: X_2= 0.66663 ve X_1= 0.33336 elde edilir.

Örnek: Aşağıda verilen denklem sistemini Gauss eleminasyon yöntemi ile çözünüz?

$$2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -11$$
$$x_1 + x_2 - 2x_3 = 8$$
$$3x_1 - 2x_2 - x_3 = -1$$

Çözüm: Denklem sistemi dizey notasyonunda yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -11 \\ 8 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Adım 1. Dizeyin ve karşılık gelen vektörün birinci satırı a_{11}' e bölünür.

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{2}{2} \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{-11}{2} \\ 8 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1.5 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5.5 \\ 8 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Adım 2. İkinci satırın birinci elemanı, a_{21} dizeyin ve karşılık gelen vektörün birinci satır ile çarpılarak ikinci satırdan çıkartılır.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1.5 & 1 \\ (1-1*1) & (1-1*(-1.5)) & (-2-1*1) \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5.5 \\ (8-1*(-5.5)) \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1.5 & 1 \\ 0 & 2.5 & -3 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5.5 \\ 13.5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Adım 3. Üçüncü satırın birinci elemanı, a_{31} birinci satır ve karşılık gelen vektörün birinci satırı ile çarpılarak üçüncü satırdan çıkartılır.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1.5 & 1 \\ 0 & 2.5 & -3 \\ (3-1*3) & (-2-3*(-1.5)) & (-1-3*1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5.5 \\ 13.5 \\ (-1-3*(-5.5)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1.5 & 1 \\ 0 & 2.5 & -3 \\ 0 & 2.5 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5.5 \\ 13.5 \\ 15.5 \end{bmatrix}$$

Bu adım sonunda katsayı dizeyinin birinci sütunu sıfırlanmış olur. Bu aşamadan sonra a_{22} ikinci satıra ve karşılık gelen vektörün ikinci satırına bölünür.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1.5 & 1 \\ 0 & \frac{2.5}{2.5} & \frac{-3}{2.5} \\ 0 & 2.5 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5.5 \\ \frac{13.5}{2.5} \\ 15.5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1.5 & 1 \\ 0 & 1 & -1.2 \\ 0 & 2.5 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5.5 \\ 5.4 \\ 15.5 \end{bmatrix}$$

Benzer şekilde a_{32} ikinci satır ve karşılık gelen vektörün ikinci satırı ile çarpılır ve üçüncü satırdan çıkartılır.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1.5 & 1 \\ 0 & 1 & -1.2 \\ 0 & (2.5-1*2.5) & (-4-2.5*(-1.2)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.5 \\ 5.4 \\ (15.5-2.5*(5.4)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1.5 & 1 \\ 0 & 1 & -1.2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.5 \\ 5.4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Son olarak a_{33} üçüncü satır ve karşılık gelen vektörün üçüncü satırına bölünürek üst üçgen dizey elde edilmiş olur.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1.5 & 1 \\ 0 & 1 & -1.2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.5 \\ 5.4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Bu aşamadan sonra son satırdan başlayarak bilinmeyenler tek tek yerine koymak suretiyle hesaplanır.

$x_3 = -2$

$x_2 - 1.2x_3 = 5.4$

$x_2 - 1.2*(-2) = 5.4$

$x_2 = 3$

$x_1 + (-1.5x_2) + x_3 = -5.5$

$x_1 = 1$

3. Gauss- Jordan Yöntemi

Bu yöntem Gauss eleminasyon yöntemi ile aynı yaklaşıma sahiptir. Fakat Gauss eleminasyon yönteminde katsayılar dizeyi bir üst üçgen dizey yapısına getirilirken, Gauss-Jordan yönteminde ise katsayı dizeyi bir birim dizey yapısına dönüştürülür. Gauss-Jordan yöntemi ile doğrusal denklem sisteminin çözümünün birinci aşaması Gauss eleminasyon işlemi ile aynıdır. Bu nedenle, üst üçgen dizey yapısına dönüştürülmüş kaysayı dizeyi ile devam edilirse,

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ 0 & 1 & \alpha_{2,3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

Üst üçgen dizeyi birim dizeye dönüştürmek için, en alt satırdan başlayarak Gauss eleminasyon yönteminde izlenen adımlar uygulanır.

Adım-1. $\alpha_{2,3}$ elemanı 3.satır ile çarılır ve 2.satırdan çıkartılır. Bu işlemde karşılık gelen sütün vektörün (β vektörü) ilgili elemanından da çıkartılır.

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ 0 & 1 & \alpha_{2,3} - 1 * \alpha_{2,3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 - \beta_3\,\alpha_{2,3} \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

Benzer şekilde $\alpha_{1,3}$ elemanı birinci satır ile çarpılır ve 1. Satırdan çıkartılır. Bu işlemde karşılık gelen sütün vektörün (β vektörü) ilgili elemanından da çıkartılır.

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} - 1\alpha_{1,3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 - 1\alpha_{1,3} \\ \gamma_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha_{1,2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1^* \\ \gamma_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

Adım-2. $\alpha_{1,2}$ elemanı ikinci satırın $\alpha_{2,2}$ elemanı ile çarpılır ve $\alpha_{1,2}$ den çıkartılırsa,

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha_{1,2} - 1\alpha_{1,2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1^* - \alpha_{1,2}\,\gamma_2 = \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

Buradan , $X_1=\gamma_1$, $x_2=\gamma_2$ ve $x_3=\beta_3$ bulunur.

Örnek:

$$2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -11$$
$$X_1 + x_2 - 2x_3 = 8$$
$$3x_1 - 2x_2 - x_3 = -1$$

```
a =[
     2   -3    2
     1    1   -2
     3   -2   -1 ] ;

b=[-11;8;-1]' ;
c=[a b];
[c,p]=rref(b);

c =
    1    0    0    1
    0    1    0    3
    0    0    1   -2

p =
    1    2    3
```

Doğrusal denklem sisteminin çözümünde Gauss-jordan yöntemi kullanılmak istenirse, MATLAB programlama dilinde rrref hazır fonksiyonu kullanılabilir. Elde edilen c dizeyinin son sütünü bize bilinmeyen x değerlerini (Ax=b' deki) geri kalan kısım ise birim dizeyi verir. P yöneyi kısmi pivotlama işleminde yerdeğiştiren satırların numarasını gösterir.

4. LU (Ayrıştırma, Cholesky) Yöntemi

Singular olmayan bir A dizeyi her zaman iki üçgen dizey çarpımı şeklinde gösterilebilir:

$$A = L\,U$$

Burada, [L] = alt üçgen dizey ve [U] = üst üçgen dizeydir. Doğrusal denklem sistemininde [A] [x] = [b], yerine yazılırsa yazılırsa,

$$LUx=b$$

Burada her iki taraf L^{-1} ile çarpılırsa

$$L^{-1} L U x = L^{-1} b$$

$z = L^{-1} b$

elde edilir. Burada z kolaylıkla çözülebilir. Çünkü L^{-1} alt üçgen dizey ve b yöneyi bilinen dizey ve yöneylerdir. z yöneyinin hesaplanmasından sonra,

$$U x = z$$

yerine yazılarak bilinmeyen x değerleri elde edilir. A katsayı dizeyinin A=LU gibi iki üçgen dizey şeklinde ifade edilmesi (ayrıştırılması):

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

Eşitliğin karşılık gelen elemanları eşitlenirse,

$u_{11}=a_{11}$	$l_{21} u_{11}=a_{21}$	$l_{31}u_{11} = a_{31}$
$u_{12}=a_{12}$	$l_{21}u_{12} + u_{22}=a_{22}$	$l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} = a_{32}$
$u_{13}=a_{13}$	$l_{21}u_{13} + u_{23} = a_{23}$	$l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} = a_{33}$

Bu eşitliklerden alt ve üst üçgen elemanları yazılırsa;

$l_{21}=a_{21}/a_{11}$
$l_{31}=a_{31}/a_{11}$
$l_{32}=(a_{32}-a_{31}*a_{12}/a_{11})/(a_{22}-a_{21}a_{12}/a_{11})$
$u_{22}=a_{22}-a_{21}a_{12}/a_{11}$
$u_{23}=a_{23}-a_{21}a_{13}/a_{11}$
$u_{33}=[\ (a_{33}-a_{31}a_{13}/a_{11})\ (a_{32}-a_{31}a_{12}/a_{11})\ (a_{23}-a_{21}a_{13}/a_{11})]\ /\ (a_{22}-a_{21}a_{12}/a_{11})$

elde edilir.

Örnek:
Gauss-Jordan yönteminde verilen doğrusal denklem sistemi bu kez ayrıştırma yöntemi ile çözülecek olursa:

$$2x_1 -3x_2 + 2x_3 = -11$$
$$X_1 + x_2 - 2x_3= 8$$
$$3x_1- 2x_2-x_3 = -1$$

```
a =[
    2   -3    2
    1    1   -2
    3   -2   -1 ] ;
```

```
b=[-11;8;-1]' ;

[L,U]=lu(a);

L =

   0.6667    1.0000         0
   0.3333   -1.0000    1.0000
   1.0000         0         0
 U =

   3.0000   -2.0000   -1.0000
        0   -1.6667    2.6667
        0         0    1.0000
z=inv(L)*b
z =
  -1.0000
 -10.3333
  -2.0000

x=inv(U)*z

x =
   1.0000
   3.0000
  -2.0000
```

Örnek:

```
a=[1 2 3; 2 5 2; 3 1 5]
a =
    1    2    3
    2    5    2
    3    1    5
 b=[14 ; 18 ; 20 ]
b =
   14
   18
   20

[L,U]=lu(a)

L =
   0.3333    0.3846    1.0000
   0.6667    1.0000         0
   1.0000         0         0
```

```
U =
   3.0000    1.0000    5.0000
        0    4.3333   -1.3333
        0         0    1.8462

z=inv(L)*b

z =
  20.0000
   4.6667
   5.5385

x=inv(U)*z

x =
   1.0000
   2.0000
   3.0000
```

b. DOLAYLI YÖNTEMLER(İNDİRECT METHODS)

1. Jacobi iterasyon yöntemi
2. Gauss-Seidel iterasyon yöntemi

Doğrusal denklem sistemlerinin çözümünde kullanılan yinelemeli yöntemlerden Jacobi ve Gauss-Seidel sık kullanılan ardışık tekrar yöntemlerindendir. Ardışık tekrar yöntemleri "iterasyon işlemleri" olarakta adlandırılır. Daha önceki derslerimizde yazdığımız doğrusal denklem sisteminden

$$a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + ...+ a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + ...+ a_{2n}x_n = b_2$$
$$...$$
$$a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 + ...+ a_{nn}x_n = b_n$$

Dizey notasyonu,

Ax=b (1)

ile verilmiş bir denklem sisteminde her bir x_i bilinmeyeni için

$$x_1 = -\ 1/b_{11}(b_{12}x_2+b_{13}x_3 + ... +b_{1n}x_n) + b_1/b_{11}$$
$$x_2 = -\ 1/b_{22}(b_{11}x_1+b_{13}x_3 + ... +b_{1n}x_n) + b_2/b_{22}$$
$$x_1 = -\ 1/b_{11}(b_{11}x_1+b_{12}x_2 + ... +b_{1n}x_n) + b_3/b_{33}$$
$$...$$
$$x_n = -\ 1/b_{nn}(b_{11}x_1+b_{12}x_2 + ... +b_{1n-1}x_{n-1}) + b_n/b_{nn}$$

yazılabilir. Böyle bir sistem,

x= Ax +C (2)

yazılabilir. Dizey notasyonu ile verilen son ifadeyi açık yazarsak,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{b_{12}}{b_{11}} & . & . & \frac{b_{1n}}{b_{11}} \\ \frac{b_{21}}{b_{22}} & 0 & . & . & \frac{b_{2n}}{b_{22}} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \frac{b_{n1}}{b_{nn}} & \frac{b_{n2}}{b_{nn}} & . & . & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{b_1}{b_{11}} \\ \frac{b_2}{b_{22}} \\ . \\ . \\ \frac{b_n}{b_{nn}} \end{bmatrix}$$

Yukarda verilen A dizeyini,

A = D + L + U (3)

gibi üç dizeyin toplamı şeklinde yazılabilir. Burada, D, bir köşeğen dizeydir (d_{ij} =0, i $\neq$ j), L, alt üçgen dizey (L_{ij}=0 , i$\leq$j), U,üst üçgen dizey (U_{ij}=0, j$\leq$i).

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & & \\ & & . & & \\ & & & . & \\ & & & & a_{nn} \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & . & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & . & 0 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & . & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & . & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & 0 \end{bmatrix}$$

(D + L+U)x = b

Dx +(L+U)x = b

Dx = - (L + U)x +b

Buradan, x bilinmeyen vektörü,

x= - D^{-1} (L + U) x + D^{-1} b **(4)**

A = - D^{-1} (L + U) **(5)**

C = D^{-1} b **(6)**

Dönüşümü ile (2) ifadesiyle eşdeğer olduğu görülür. Yinelemeli yöntemlerde (2) ile verilen ifadenin sağ tarafındaki bilinmeyenler için bir tahmin yapılır (örneğin sıfır) secilir ve sol taraftaki bilinmeyenler hesaplanır. Hesaplanan bilinmeyenler bu kez sağ tarafta kullanılarak bir sonraki yinelemede elde edilecek x değerleri hesaplanır. Bu şekilde adımlar (yineleme) ile bilinmeyen x değerleri belirlenecek bir hassasiyetin altına düşünceye kadar devam ettirilir.

Jacobi yineleme (iterasyon) Yöntemi:

Bu yöntem toplam adımlarla yineleme yöntemi olarakta bilinir. Bu yöntemde çözümün bulunabilmesi için başlangıçta bir x_o vektörü seçilir. Yeni yaklaşık kökler:

$X_1=Ax_o + C$

İşlemiyle bulunur ve işleme

$X_2=Ax_1 + C$

.

$X_k=Ax_{k-1} + C$

olarak devam ettirilir. X_k bilinmeyen vektör elemanları

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} + c_i , \qquad \mathrm{i} = 1 : \mathrm{n} \tag{7}$$

Bağıntısı ile verilir. Burada k, yineleme sayısını gösterir. Yineleme işlemine belirlenen yineleme sayısı kadar veya,

$$\max_{i \le i \ge n} \frac{\left| x_i^k - x_i^{k-1} \right|}{x_i^k} \tag{8}$$

Yakınsama kriteri ile belirlenir.

Gauss-Seidel İterasyon Yöntemi

Doğrusal denklem sistemi (2) yapısında verildiğini veya uygun bir dönüşüm ile bu yapıya dönüştürüldüğü varsayılırsa, Gauss-Seidel yönteminde x_i bilinmeyenlerinden k. yaklaşık değeri hesaplanırken $x_1,x_2,x_3,...,x_{i-1}$ değerlerinin o ana kadarki hesaplanmış olan k. yineleme değerleri ve x_{i+1}, $x_{i+2},...,x_n$ değerlerinin de (k-1) yinelemeye kadar olan değerleri kullanılır. Bu işlem:

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{(k)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k-1)} + c_i \quad j \neq i \tag{9}$$

Basit bir yineleme işlemini $x_k = Ax_{k-1} + c$ yapısında yazmak mümkün olduğundan Jacobi yöntemindekine benzer şekilde, Gauss-Seidel yönteminde,

$Dx_k = -(Lx_k + Ux_{k-1}) + b$ veya $(D+L)\, x_k = -Ux_{k-1} + b$

yazılabilir. Eğer A dizeyi, $A = -(D+L)^{-1}$ ve $c=(D+L)^{-1}\, b$, şeklinde ifade edilirse

$x_k = Ax_{k-1} + c$

yapısına eşdeğer oldugu görülür. Yineleme yöntemlerinin genel bir özelliği olarak; bu yöntemlerin sonuça ulaşabilmesi için A katsayı dizeyinin tüm özdeğerlerinin birden küçük olması gerekir. Bunun olabilmesi içinde normlarının birden küçük olması gerekir. Eğer Ax=b doğrusal dizey denkleminde A katsayı dizeyi pozitif tanımlı bir dizey ise Gauss-Seidel yöntemi daima sonuça ulaşır.