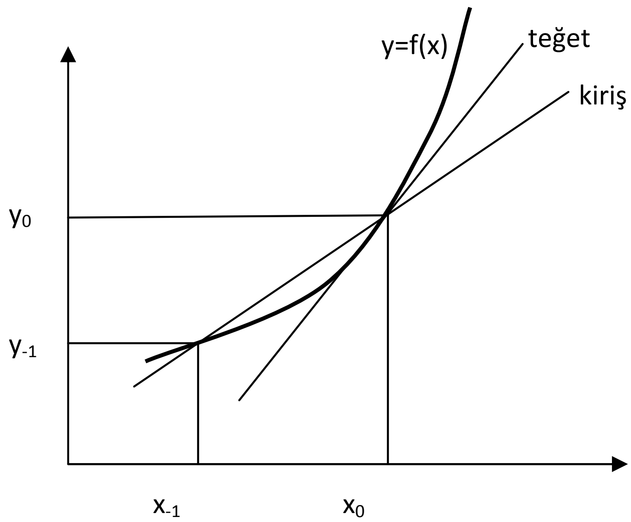
5. SAYISAL TÜREV

Türev kavramı sayısal analizin temel konularından birini oluşturur. Türev' e geometrik açıdan bakıldığında bir fonksiyona ilişkin eğrinin her hangi bir x noktasındaki yatayla yaptığı açı yada diğer bir ifadeyle x noktasındaki teğetinin eğimi olarak görülebilir (Şekil 1). Diğer yandan türev, bir gözlemler veya ölçümler değerinin türevi ile, ölçülen veya gözlenen değerlerin uzaklığa veya zamana bağlı değişimini yansıtır.

Sonlu fark tablolarının elde edilmesinde incelediğimiz ileri, geri ve merkezi farkları kullanarak bir fonksiyonun veya gözlem veya ölçüm değerlerinin sayısal türevlerinin hesaplanışını kolaylıkla yapabiliriz.



Şekil 1. Geri fark sayısal türevin grafik olarak gösterimi.

Şekil 1' de gösterildiği gibi y=f(x) fonksiyonunda,

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Limit değeri türevi ifade eder.

5.1 Geri, İleri ve Merkezi fark ile sayısal türev

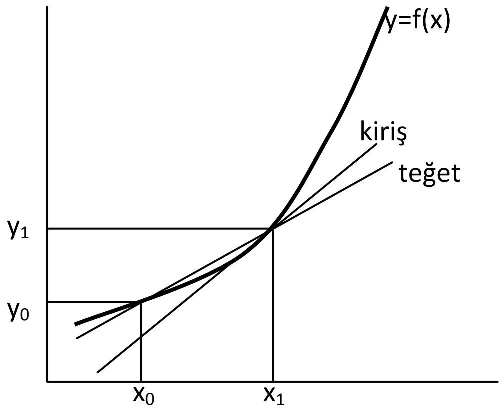
a) Geri Fark ile sayısal türev:

$$y'(x_0) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$$ (Şekil 1'de teğetin eğimi)

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x_0) - y(x_0 - \Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_0 - y_{-1}}{\Delta x} \cong \frac{y_0 - y_{-1}}{\Delta x} = \frac{\nabla y_0}{\Delta x}$$ (Şekil 1' de kirişin eğimi)

b) İleri Fark ile sayısal Türev



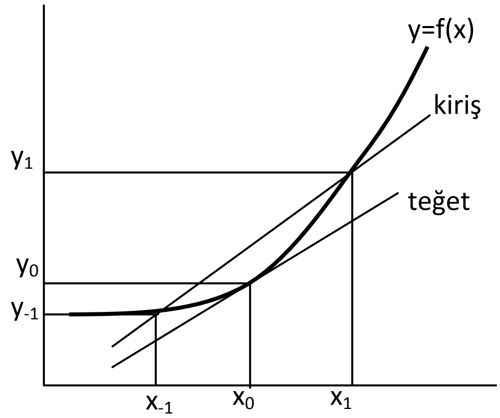
Şekil 2. İleri fark fark sayısal türevin grafik olarak gösterimi.

$$y'(x_0) = \left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{x=x_0}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} \cong \frac{y_1 - y_0}{\Delta x}$$

$$= \frac{\Delta y_0}{\Delta x}$$ (Şekil 2' de kirişin eğimi)



Şekil 3. Merkezi fark sayısal türevin grafik olarak gösterimi.

c) Merkezi Fark ile sayısal Türev

$$y'(x_0) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x_0+\Delta x) - y(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}$$

$= \dfrac{\delta y_0}{2\Delta x}$ (Şekil 3' te kirişim eğimi)

Üst mertebeden türevlerin, örneğin ikinci mertebe türevlerin sonlu farklara göre hesaplanmasında, birinci mertebe türevlerin tekrar türevleri hesaplanarak elde edilir:

İkinci Mertebe türevin geri farklarla hesaplanmasında,

$$y''(x_0) = \frac{dy'}{dx} \cong \frac{y'(x_0) - y'(x_0-\Delta x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\nabla y_0}{\Delta x} - \frac{\nabla y_{-1}}{\Delta x}\right] = \frac{1}{\Delta x^2}\left[\nabla y_0 - \nabla y_{-1}\right] = \frac{1}{\Delta x^2}\nabla^2 y_0$$

İkinci Mertebe türevin ileri farklarla hesaplanmasında,

$$y''(x_0) = \frac{dy'}{dx} \cong \frac{y'(x_0+\Delta x) - y'(x_0)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\Delta y_1}{\Delta x} - \frac{\Delta y_0}{\Delta x}\right] = \frac{1}{\Delta x^2}\left[\Delta y_1 - \Delta y_0\right] = \frac{1}{\Delta x^2}\Delta^2 y_0$$

ve ikinci mertebe türevin Merkezi fark ile hesaplanmasında,

$$y''(x_0) = \frac{dy'}{dx} \cong \frac{y'(x_0+\Delta x) - y'(x_0-\Delta x)}{2\Delta x} = \frac{1}{2\Delta x}\left[\frac{\delta y_1}{2\Delta x} - \frac{\delta y_0}{2\Delta x}\right] = \frac{1}{(2\Delta x)^2}\delta^2 y_0$$

Üçüncü mertebeden sayısal türevlerin hesaplanmasında ikinci mertebe türev eşitlikleri kullanılarak elde edilir.

Örnek:

$y=e^x$ fonksiyonunun $x_0=1$ noktasındaki eğimini (türevini) $\Delta x=0.1$ adım aralığı alarak,

a) Geri farklar,
b) İleri farklar,
c) Merkezi farklar yöntemlerine göre hesaplayınız?

a) Geri farklar yöntemine göre:

$$y'(x_0) = \frac{y_0 - y_{-1}}{\Delta x} = \frac{\nabla y_0}{\Delta x}$$

$y=e^x$

$y_{-1}= e^x|_{x=1.0-0.1=0.9} = 2.4596$

$y_0=e^x|_{x=1} =2.71829$

$$= \frac{2.71829 - 2.4596}{0.1} = 2.5869$$

b) İleri farklar yöntemine göre:

$$y'(x_0) = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{\Delta y_0}{\Delta x}$$

$y_1= e^x|_{x=1+\Delta x=1.1} =3.0042$

=(3.0042-2.71829)/0.1

=2.8591

c) Merkezi fark yöntemine göre:

$$y'(x_0) = \frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} = \frac{\delta y_0}{2\Delta x}$$

$y'(x_0)=(y_1-y_{-1})/(2\Delta x)$

= (3.0042 - 2.4596)/(2*0.1)= 2.7230

5.2. Taylor seri açılımıyla sayısal türev hesaplama

Bir f(x) fonksiyonun x+Δx noktasındaki değerini yaklaşık olarak hesaplamak için Taylor seri açılımından yararlanılır. Taylor seri açılımı:

$$\mathrm{F}(\mathrm{x}_0 + \Delta \mathrm{x}) = \mathrm{F}(\mathrm{x}_0) + \frac{\Delta x}{1!} F'(x_0) + \frac{\Delta x^2}{2!} F''(x_0) + \frac{\Delta x^3}{3!} F'''(x_0) + \ldots + \frac{\Delta x^n}{n!} F^n(x_0)$$

ile verilir. Burada Δx=(x-x0) farkını ve F',F'',..., F^n türev mertebesini gösterir. Taylor serisinde serinin kesilen noktadan sonraki hatanın mertebesi, kesilen noktadaki Δx' in mertebesine eşit olur. Örneğin verilen Taylor serisinde üçüncü terim' den sonraki terimler atılacak olursa, yapılan hatanın mertebesi 3 olacaktır. Taylor serisinde ikinci terimden sonraki terimler atılacak olursa,

$$\mathrm{F}(\mathrm{x}_0 + \Delta \mathrm{x}) = \mathrm{F}(\mathrm{x}_0) + \Delta x F'(x_0)$$

ve bu ifadeden F'(x0) çekilirse,

F'(x0) = [F(x0 + Δx) – F(x0)] /Δx = $\Delta F_0/\Delta x$

Birinci mertebeden ileri fark türev eşitliği elde edilmiş olur. Burada yapılan işlemlerde Δx=(x-x0) ifadesinde Δx' in pozitif oldugu kabul edilmiştir. (x-x0) sonucu negatif olsa idi, Taylor serisi de

$$\mathrm{F}(\mathrm{x}_0 + \Delta\mathrm{x}) = \mathrm{F}(\mathrm{x}_0) - \frac{\Delta x}{1!}F'(x_0) + \frac{\Delta x^2}{2!}F''(x_0) - \frac{\Delta x^3}{3!}F'''(x_0) + ... + \frac{\Delta x^n}{n!}F^n(x_0)$$

şeklinde olacaktı. Bu durumda ikinci terimden sonrası atılacak olursa,

$$\mathrm{F}(\mathrm{x}_0 - \Delta\mathrm{x}) = \mathrm{F}(\mathrm{x}_0) - \Delta x F'(x_0)$$

ve bu ifadeden F'(x0) çekilirse,

F'(x0) = [F(x0)-F(x0-Δx)]/Δx = $\nabla F_0/\Delta x$

Birinci mertebeden geri fark türev eşitliği elde edilmiş olur. Benzer şekilde elde edilen ileri fark ve geri fark türev eşitlikleri kullanılarak (farkları alınarak) merkezi fark türev eşitliği elde edilebilir.

$$\mathrm{F}(\mathrm{x}_0 + \Delta\mathrm{x}) = \mathrm{F}(\mathrm{x}_0) + \Delta x F'(x_0)$$

$$\mathrm{F}(\mathrm{x}_0 - \Delta\mathrm{x}) = \mathrm{F}(\mathrm{x}_0) - \Delta x F'(x_0)$$

Farklarından

F(x0+Δx) - F(x0-Δx) = 2Δx F'(x0)

ve

F'(x0)= [F(x0+Δx) - F(x0-Δx)]/2Δx = δF(x0)/2Δx

Taylor serisinde daha fazla sayıda terim kullanarak (burada ilk iki terim kullanmış olduk) yapılan türev alma işleminde hata değeri azaltılabilir ve yeni türev bağıntıları geliştirmek mümkündür.

Örnek:

Yeni birinci mertebeden bir türev bağıntısı elde etmek için Taylor serisini

$$\mathrm{F}(\mathrm{x}_0 + m\Delta\mathrm{x}) = \mathrm{F}(\mathrm{x}_0) + \frac{m\Delta x}{1!}F'(x_0) + \frac{(m\Delta x)^2}{2!}F''(x_0) + \frac{(m\Delta x)^3}{3!}F'''(x_0) + ... + \frac{(m\Delta x)^n}{n!}F^n(x_0)$$

şeklinde yazalım. Sırasıyla Taylor serisinde m=1, m=2 ve m=3 alarak 3 eşitlik oluşturalım ve serilerin ilk üç teriminden sonraki terimleri ihmal edelim. Elde etmiş olduğumuz her bir seriyi sırasıyla a,b ve c gibi katsayılarla çarpalım:

m=1 için

$$a * F_1 = F(x_0) + \Delta x F'(x_0) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} F''(x_0) + \frac{(\Delta x)^3}{3!} F'''(x_0)$$

m=2 için

$$b * F_2 = F(x_0) + 2\Delta x F'(x_0) + \frac{(4\Delta x^2)}{2!} F''(x_0) + \frac{(8\Delta x^3)}{3!} F'''(x_0)$$

ve m=3 için

$$c * F_3 = F(x_0) + 3\Delta x F'(x_0) + \frac{(9\Delta x^2)}{2!} F''(x_0) + \frac{(27\Delta x^3)}{3!} F'''(x_0)$$

Yazılan bu üç seri taraf tarafa toplanırsa,

$aF_1+bF_2+cF_3=F(x0)(a+b+c)+\Delta xF'(x0)(a+2b+3c)+\Delta x^2F''(x0)(a+4b+9c)/2+\Delta x^3F''(x0)(a+8b+27c)/6$

elde edilir. Birinci mertebeden bir türev tanımı çıkartacağımızdan

a+4b+9c = 0

a+8b +27c=0

olması gerekir. b=k1a ve c=k2a tanımlaması yaparsak,

a(1+4k1 + 9k2)=0

a(1+8k1 + 27k2)=0

buradan k1 ve k2 çözülürse,

k1=1/2 ve k2=1/9

ve

b= -a/2 , c=a/9

elde edilir.a,b ve c katsayıları tamsayı olması gerektiğinden a=18 olmak zorundadır. Böylece a=18, b=-9 ve c=2 olarak belirlenmiş olur. a,b,c katsayıları yerine yazılarak birinci mertebeden bir türev bağıntısı:

$F'(x0)= [\ 2F3 -9F2 + 18F1 – 11F(x0)\ ] / 6\Delta x + O(\Delta x^3)$

olur. Burada $O(\Delta x^3)$ yapılan hatanın derecesini gösterir.

Ödev:

Sizde x0 noktasının ileri ve gerisinde ikişer nokta alarak birinci mertebe türev işlemi için yeni bir bağıntı geliştiriniz ve hata derecesi ne olur?

5.3. Newton-Gregory bağıntıları yardımıyla sayısal türev hesaplama

Daha önceki enterpolasyon konusunda tanımlamış olduğumuz,ileri fark enterpolasyon ifadesi:

$Y_n= y_o + n\Delta y_o + [n(n-1)/2!]\Delta^2 y_o + [n(n-1)(n-2)/3!]\ \Delta^3 y_o + \dots$

n' ye göre türevi $\frac{dy_n}{dn}$ alınırsa,

$$\frac{dy_n}{dn} = \Delta y_0 + \frac{(2n-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{(3n^2-6n+2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots$$

Burada

$$n = \frac{x - x_0}{\Delta x}$$

$$\frac{dx}{dn} = \Delta x$$

ve

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dn}\frac{dn}{dx} = \frac{1}{\Delta x}\frac{dy}{dn}$$
$$= \frac{1}{\Delta x}\left[\Delta y_0 + \frac{(2n-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{(3n^2-6n+2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots\right]$$

elde edilir.x=x0 noktasındaki türev için n=0 olur ve

$$y_0' = \frac{1}{\Delta x}\left.\frac{dy}{dn}\right|_{n=0}$$
$$= \frac{1}{\Delta x}\left[\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 + \ldots\right]$$

olur. Benzer işlemi Geri yön enterpolasyon ifadesi

$y_n = y_o + n\nabla y_o + [n(n+1)/2!]\ \nabla^2 y_o + [n(n+1)(n+2)/3!]\ \nabla^3 y_o + \ldots$

için yapılırsa, genel bir ifade olarak

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dn}\frac{dn}{dx} = \frac{1}{\Delta x}\frac{dy}{dn}$$
$$= \frac{1}{\Delta x}\left[\nabla y_0 + \frac{1}{2}\nabla^2 y_0 + \frac{1}{3}\nabla^3 y_0 + \ldots\right]$$

elde edilir.

5.4. Bessel bağıntısı ile sayısal türev

Enterpolasyon konusunda verilmiş olan

$$y_n = \frac{y_0 + y_1}{2} + (n - 1/2)\delta y_{1/2} + \frac{n(n-1)}{2\,2!}(\delta^2 y_0 + \delta^2 y_1) + \frac{n(n-1/2)(n-1)}{3!}\delta^3 y_{1/2} + \ldots$$

ifadesinin $\frac{dy_n}{dn}$ türevi alınırsa,

$$\frac{dy_n}{dn} = (\delta y_{1/2} + \frac{2n-1}{4!}(\delta^2 y_0 + \delta^2 y_1) + \frac{3n^2 - 3n + 1/2}{3}\delta^3 y_{1/2}$$

$$y'(x) = \frac{1}{\Delta x}\frac{dy_n}{dn} = \frac{1}{\Delta x}\left[\delta y_{1/2} + \frac{2n-1}{4}(\delta^2 y_0 + \delta^2 y_1) + \frac{(3n^2 - 3n + 1/2)}{6}\delta^3 y_{1/2}\right]$$

ve x=x0 için

$$y'(x_0) = \frac{1}{\Delta x}\frac{dy_n}{dn} = \frac{1}{\Delta x}\left[\delta y_{1/2} - \frac{1}{4}(\delta^2 y_0 + \delta^2 y_1) + \frac{1}{6}\delta^3 y_{1/2} + \ldots\right]$$

şeklinde elde edilir.

Örnek:

$y=e^x$ $x\in[0, 5]$ ve $\Delta x=1.0$ aralığında fonksiyonun ileri fark tablosunu hazırlayarak x=2 noktasındaki türevi ileri yön (Newton-Gregory) bağıntısı ile hesaplayınız?

x	**y**	**Δy**	**Δ^2y**	**Δ^3y**
0	1.0	1.718	2.944	5.0940
1	2.718	4.662	8.038	13.7720
2	7.38	12.7	21.81	37.500
3	20.08	34.51	59.31	
4	54.59	93.82		
5	148.41			

İleri fark türev bağıntısı

$$y_0' = \frac{1}{\Delta x}\left[\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 + \ldots\right]$$

X_0=2 için (temel satır)

Y' = (1/1)[12.7 – (1/2)21.81 + (1/3)37.5]

= 14.2950

Fonksiyonun x=2 noktasındaki gerçek türev değeri ise y'= e^2= 7.3891 bu problemde x=2 noktası varolduğundan n=0 alınmış oldu.