4.1. SONLU FARK TABLOLARI

Tanımlı bir f(x) fonksiyonunda, farklı x değerleri verilerek, bu x değerlerine karşılık gelen f(x) değerleri bulunabilir. Dolayısıyla istenilen bir x değerine karşılık gelen f(x) değeri analitik fonksiyonlar için mümkündür. Ancak fonksiyonu (analitik ifadesi) bilinmeyen sadece x noktalarındaki değerleri bilinen gözlem veya deneye dayalı verilerin olması durumunda bilinen x değerlerinin arasında veya dışındaki noktalarda değerlerine ihtiyaç duyulabilir. Bu işlem bir aradeğer bulma problemidir. Ara değer bulma işleminde sonlu fark tabloları sıkca kullanılır.

ileri yön fark tabloları:

Birinci mertebe farklar

$\Delta y_0=y_1-y_2=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$
$\Delta y_1=y_2-y_1=f(x_0+2\Delta x)-f(x_0+\Delta x)$
...
$\Delta y_n=y_{n+1}-y_n=f(x_0+(n+1)\Delta x)-f(x_0+n\Delta x)$

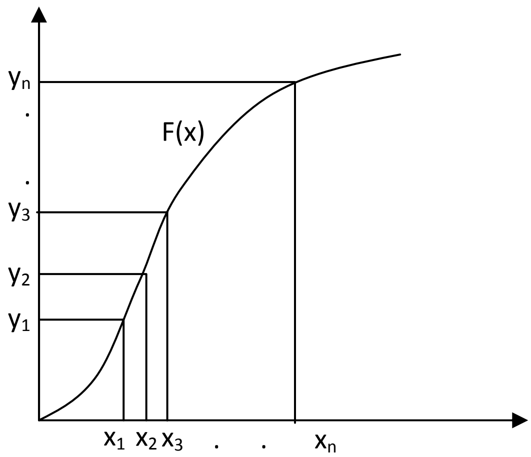
İkinci mertebe farklar

$$\begin{aligned}\Delta^2 y_0 &= \Delta(\Delta y_0)\\ &= \Delta(y_1-y_0)\\ &= (y_2 - y_1)-(y_1 - y_0)\\ &= y_2 - 2y_1 + y_0\end{aligned}$$

Üçüncü mertebeden farklar

$$\begin{aligned}\Delta^3 y_0 &= \Delta(\Delta(\Delta y_0)))\\ &= \Delta(\Delta(y_1-y_0))\\ &= \Delta(\Delta y_1-\Delta y_0)\\ &= \Delta(y_2-2y_1 +y_0)\\ &= (y_3- y_2)-2(y_2-y_1)+(y_1-y_0)\\ &= y_3- 3y_2-3y_1-y_0\end{aligned}$$

Daha üst mertebeden ileri farklar da kolaylıkla oluşturulabilir.



Örnek:

Aşağıda belirli yüksekliklerde ölçülmüş sıcaklık değerleri verilmiştir. Buna göre d^2y/dh^2' nin yaklaşık değeri nedir ve 10. mertebeye kadar sonlu fark tablosunu hazırlayınız?

$d^2y/dh^2 = \Delta^2 y/(\Delta h)^2 = y_2 - 2y_1 + y_o/h^2$

$\Delta^2 y = y_2 - 2y_1 + y_o = 21 - 2*(29) + 32$

$= 53 - 58$

$= -5$

$d^2y/dh^2 = \Delta^2 y/h^2$

$= -5/(0.2)^2$

$= \mathbf{-5}/0.04 = -125$

h(km)	**y(°)**	**Δy_0**	**$\Delta^2 y_0$**	**$\Delta^3 y_0$**	**$\Delta^4 y_0$**	**$\Delta^5 y_0$**	**$\Delta^6 y_0$**	**$\Delta^7 y_0$**	**$\Delta^8 y_0$**	**$\Delta^9 y_0$**	**$\Delta^{10} y_0$**
0.0	32	-3	**-5**	12	-20	30	-44	25	-7	-26	114
0.2	29	-8	7	-8	10	-14	-19	18	-33	88	
0.4	21	-1	-1	2	-4	5	-1	-15	55		
0.6	20	-2	1	-2	1	4	-16	40			
0.8	18	-1	-1	-1	5	-12	24				
1.0	17	-2	-2	4	-7	12					
1.2	15	-4	2	-3	5						
1.4	11	-2	-1	2							
1.6	9	-3	1								
1.8	6	-2									
2.0	4										

Geri yön fark Tabloları:

İleri yön sonlu fark tablolarına benzer şekilde ancak bu defa başlangıç x değerlerinin gerisine doğru giderek buna karşılık gelen y değerleri geri farklar için bulunmaktadır.

Birinci mertebeden geri farklar

$\nabla y_0 = y_0 - y_{-1} = f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)$

$\nabla y_{-1} = y_{-1} - y_{-2}$

...

$\nabla y_{-n} = y_{-n} - y_{-(n+1)}$

İkinci mertebeden geri farklar

$\nabla^2 y_0 = \nabla(y_0 - y_{-1})$

$= \nabla(y_0) - \nabla(y_{-1})$

$= (y_0 - y_{-1}) - (y_{-1} - y_{-2})$

$= y_0 - 2y_{-1} + y_{-2}$

Daha üst mertebeden farklar benzer şekilde elde edilir.

Örnek:

Bir önceki örnekte verilen d2y/dx2 değerini geri farklar' dan yararlanarak hesaplayalım ve 10. dereceye kadar sonlu fark tablosunu oluşturalım.

h(km)	y(°)	∇y_0	$\nabla^2 y_0$	$\nabla^3 y_0$	$\nabla^4 y_0$	$\nabla^5 y_0$	$\nabla^6 y_0$	$\nabla^7 y_0$	$\nabla^8 y_0$	$\nabla^9 y_0$	$\nabla^{10} y_0$
0.0	32										
0.2	29	-3									
0.4	21	-8	-5								
0.6	20	-1	-7	-2							
0.8	18	-2	-1	6	8						
1.0	17	-1	1	2	-4	-12					
1.2	15	-2	1	0	-2	2	14				
1.4	11	-4	-2	-3	-3	-1	-3	-17			
1.6	9	-2	2	4	7	10	11	14	31		
1.8	6	-3	-1	-3	-7	-14	-24	-35	-49	-80	
2.0	4	-2	1	2	5	12	26	50	85	134	214

$d^2y/dh^2 = \nabla^2 y/(\nabla h)^2 = (y_0 - 2y_{-1} + y_{-2})/h^2$ burada -2 ve -1 indislerini sağlamak için bir referans' a ihtiyaçımız vardır. Örneğin referans ölçü numarası olarak 1.0 (km) alırsak bu durumda $y_0 = 17$, $y_{-1}=18$ ve $y_{-2}=20$ olur. Böylece,

$$\nabla^2 y = (y_0 - 2y_{-1} + y_{-2}) = 17-2*18+20$$
$$= 1$$
$$d^2y/dh^2 = \nabla^2 y/h^2$$
$$= 1/(0.2)^2$$
$$= 1/0.04 = 25$$

Merkezi Fark Tabloları:

Merkezi fark tabloları ileri ve geri fark tablolarına benzer şekilde yapılır. Burada ilerleme, adım aralığı (h)' ın yarısı kadar ileri ve geri değerleri alınarak elde edilir.

x_i noktasında birinci mertebe merkezi fark,

$\delta y_i = y_{i+1/2} - y_{i-1/2}$

İkinci mertebe merkezi fark

$\delta^2 y_i = \delta(\delta y_i) = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}$

ve

n.ci mertebe merkezi fark

$\delta^n y_i = \delta^{n-1} y_{i+1/2} - \delta^{n-1} y_{i-1/2}$

şeklinde yazılabilir. Yukarıda tanımlanan operatörlerin tümü doğrusal operatörlerdir. Bu operatörler ile birlikte kullanılan üç operatör daha vardır. Bunlar; Ortalama operatörü μ, kaydırma operatörü, E ve türev operatörü D dir.

Ortalama operatörü, μ

$$\mu f(x)= \frac{1}{2}\left[f(x+\frac{h}{2}) + f(x-\frac{h}{2}) \right]$$

Kaydırma operatörü, E

$$Ef(x) = f(x+h)$$

ve türev operatörü, D

$$Df(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Bu doğrusal operatörler arasında ilişkiler mevcuttur. Örneğin kaydırma operatörü, E ile ileri fark operatörü Δ arasında,

$$E= 1 +\Delta$$

ilişkisi vardır. Benzer şekilde kaydırma operatörü E ile türev operatörü D arasında,

$$E = e^{hD}$$

ilişkisi vardır (İyi bir ispat alıştırması, üzerinde düşünmenizi öneririm!).

4.2. ENTERPOLASYON

Enterpolasyon, gözlem veya ölçüm sonuçlarından hareketle, bilinmeyen noktalardaki değerleri bulma işlemidir. Genel anlamda ise, bilinmeyen bir f(x) fonksiyonunun x0, x1,…,xn gibi ayrık noktalarda verilen f0, f1,…,fn değerlerini kullanarak, bu fonksiyonu temsil eden ve daha basit bilinen bir F(x) fonksiyonu ile ifade edilmesidir. Bilinen F(x) fonksiyonuna "enterpolasyon fonksiyonu" denir. Bilinmeyen değerler bilinen değerlerin arasında bir noktada ise, bilinen noktalardaki değerler kullanılarak hesaplanabilir. Fakat bilinmeyen nokta bilinen noktaların dışında bir yerde ise, bu durumda bu noktayı sağlayan bir eşitlik elde edilir ve bu eşitlikten bilinmeyen değer hesaplanır. Genel olarak, bilinmeyen nokta (aranan nokta) sonlarda ise geri yön, başlarda ise ileri yön ve ortalarda ise merkezi yön enterpolasyon yöntemi tercih edilir.

Enterpolasyon fonksiyonu için polinom, trigonometrik fonksiyon, üstel gibi fonksiyonlar kullanılır. Fakat çoğu durumda koşulları kolaylıkla sağlamalarından dolayı polinomlar tercih edilir. Enterpolasyon fonksiyonunun seciminde iki teorem kullanılır:

1. Eğer fonksiyon [a,b] aralığında sürekli ve türevlenebilir ise enterpolasyon fonksiyonu olarak polinom kullanılabilir. [a,b] aralığında küçük bir ε değeri için,

$| f(x) – F(x) | \leq \varepsilon$

koşulu sağlanabilir.

2. Periyodik ve sürekli bir fonksiyon için

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kx)$$

gibi sonlu trigonometrik fonksiyonu enterpolasyon fonksiyonu olarak kullanılabilir. x0, x1,….,xn noktalarının arasındaki mesafelerin eşit olması durumunda sonlu farklar enterpolasyon yöntemleri kullanılabilirken, ayrık noktalar arasındaki mesafelerin eşit olmaması durumunda farklı enterpolasyon yöntemleri tercih edilmelidir (örneğin, doğrusal enterpolasyon, Langrange enterpolasyon veya Aitken enterpolasyon yöntemi gibi).

a) Doğrusal enterpolasyon

Şayet enterpolasyon fonksiyonu olarak birinci dereceden bir polinom secilirse, bu tür enterpolasyona doğrusal enterpolasyon denir. Örnegin, [a,b] aralığında bir f(x) fonksiyonu verilirse ve enterpolasyon fonksiyonu olarak:

F(x)=αx+β

kullanılırsa,

f(a)=F(a)
f(b)=F(b)

koşulunu sağlaması gerekir. Böylece,

f(a)=F(a)= αa + β
f(b)=F(b)= αb + β

Yazılabilir. Buradan enterpolasyon fonksiyonundaki bilinmeyen α ve β değerlerini elde etmek için her iki ifade taraf tarafa cıkartılarak toplanırsa,

α= [f(b) – f(a)] / (b-a)
β=[bf(a) – af(b)] / (b-a)

elde edilir. Enterpolasyon fonksiyonu F(x)

F(x) = [(f(b) – f(a))/ (b-a)] x + (bf(a) – af(b))/(b-a) (1)

elde edilir. Son yazılan enterpolasyon fonksiyonu daha acık yazılırsa,

F(x)= [f(b)/(b-a)] x – [f(a)/(b-a)]x + bf(a)/(b-a) – af(b)/(b-a)

burada

w0(x)= (b-x)/(b-a) (2)
w1(x)=(x-a)/(b-a) (3)

gibi iki ağırlık fonksiyonu tanımlanırsa,

F(x) = w0 f(a) + w1 f(b)

şeklinde yazılabilir. X bağımsız değişkeni [a,b] aralığında oldugu sürece,

w0(x) + w1(x) = 1

koşulunu sağlayacağı açıktır.

Örnek:

f(x)=e^x fonksiyonunun [0.2, 0.3] aralığındaki değerleri sırasıyla [1.22140, 1.34986] dır. Doğrusal enterpolasyon yöntemi ile x=0.26 noktasındaki değer nedir?

(1) ifadesi F(x) = [(f(b) – f(a))/ (b-a)] x + (bf(a) – af(b))/(b-a), yardımıyla,

F(0.26) = [(1.34986-1.22140)/(0.3-0.2)] 0.26 + [(0.3*1.22140 – 0.2*1.34986)/(0.3-0.2)]= 1.298476

veya

w0(x)= (b-x)/(b-a)=(0.3-0.26)/0.1 = 0.04/0.1=0.4
w1(x)=(x-a)/(b-a)=(0.26-0.2)/0.1=0.06/0.1=0.6
F(0.26)=0.4*1.22140 + 0.6*1.34986 = 1.298476

bulunur. f(x)=e^x olduğundan, x=0.26’ da fonksiyonun gerçek değeri f(0.26)=1.2669 dır. İşlemdeki mutlak hata miktarı:

| $e^{0.26}$ –F(0.26)|=| 1.2669 – 1.298476| = 0.0316
Bağıl hata miktarı (% olarak):

| $e^{0.26}$ –F(0.26)|/ $e^{0.26}$ = 2.43 %

Bu problemde f(x) fonksiyonu için tanımlanan [a,b] aralığı dar bir aralık alındığından doğrusal enterpolasyon yöntemi ile elde edilen sonuç gerçek sonuca oldukca yakın cıkmıştır. Bu durum hata ilede görülebilir. Bununla birlikte fonksiyon için tanımlanacak aralık büyüdükce doğrusal enterpolasyon yaklaşımı kullanmakla elde edilecek sonuçlarda hata miktarının artacağı unutulmamalıdır.

b) Langrange Enterpolasyon Yöntemi

Langrange yönteminde verilen x aralıkları eşit olmak zorunda değildir. Langrange enterpolasyon yönteminin özünü, bilinen noktalara önce bir eğri uydurulması sonra eğriyi temsil eden denklemden istenilen noktaların değerlerinin elde edilmesine dayanır. Yöntemin anlaşılması açısından,

F(x) = αx + β

şeklinde bir enterpolasyon polinomu ele alınırsa, x_0 ve x_1 gibi noktalarda değerleri sırasıyla f_0 ve f_1 olsun. Yani,

$F_0 = \alpha x_0 + \beta$

ve

$F_1 = \alpha x_1 + \beta$

bu iki ifadeden α ve β çözülerek denklemde yerine yazılırsa,

$$F(x) = \alpha x + \beta = F_0 - \frac{F_1 - F_0}{x_1 - x_0} x_0 + \frac{F_1 - F_0}{x_1 - x_0} x$$

ve düzenlenirse,

$$F(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} F_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} F_1$$

Burada,

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$$

ve

$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

şeklinde tanımlanırsa,

$F(x) = L_0 F_0 + L_1 F_1$

yazılabilir. Yazılan bu L_0 ve L_1 katsayılarına Langrange katsayıları veya Langrange enterpolasyon fonksiyonları denir. Enterpolasyon fonksiyonu için tanımlanan F(x) yerine burada verilen birinci dereceden daha yüksek dereceli polinom verilmesi durumunda genel bir ifade,

$$F(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f_i \qquad (4)$$

tanımlanır. Burada L_i Langrange terimleri,

$$L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \qquad (5)$$

ile verilir.

Örnek: Tabloda verilen noktalara uyan bir eğri denklemini Lagnrange enterpolasyon yöntemiyle hesaplayınız?

X	0	1	3	5
y	-16	-3	-17	41

Çözüm:

Ölçüm sayısı (x nokta sayısı) n=4 oldugu için tanımlanabilecek en büyük polinom derecesi n-1 olacaktır. (4) ifadelerinden yararlanarak,

$F(x)=L_0f_0 + L_1f_1 + L_2f_2 + L_3f_3$

ve (5) ifadelerinden yararlanarak,

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{(0-1)(0-3)(0-5)} = \frac{x^3-9x^2+23x-15}{15}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x)(x-3)(x-5)}{(1)(1-3)(1-5)} = \frac{x^3-8x^2+15x}{8}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x)(x-1)(x-5)}{(3)(3-1)(3-5)} = \frac{-x^3+9x^2-5x}{12}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x)(x-3)(x-1)}{(5)(5-1)(5-3)} = \frac{x^3-4x^2+3x}{40}$$

$F(x)= -16L_0 -3L_1 -17L_2 +41L_3$

L_i katsayıları düzenlenerek F(x)' te yerine yazılırsa,

$F(x)= x^3 - 20x +16$

elde edilir.

c) Gregory-Newton İleri Yön Enterpolasyon Yöntemi

Daha önce bulunan ileri yön sonlu fark tablolarından yararlanarak,

$\Delta y_o=y_1-y_0$
$Y_1=y_o +\Delta y_o$
$\quad = (1+\Delta)\, y_o$ (6)

Benzer şekilde,

$\Delta^2 y_o=y_2-2y_1+y_0$
$y_2=y_o(1+2\Delta + \Delta^2)= (1+\Delta)^2\, y_o$ (7)

ve

$\Delta^3 y_o = y_3 - 2y_2 + 2y_1 - y_o$
$y_3 = y_o + 3\Delta y_o + 3\Delta^2 y_o + \Delta^3 y_o = (1+\Delta)^3 y_o$ (8)
...
$y_n = (1+\Delta)^n y_o$ (9)

şeklinde genel bir eşitlik yazılabilir. $(a+b)^n$ şeklinde bir ifade için Binom serisi,

$(a+b)^n = a^n b^0 + na^{n-1}b + [n(n-1)a^{n-2}b^2]/2! + \ldots\ldots + ab^{n-1}/(n-1)! + b^n/n!$

ile verilir. Buna göre, son yazılan ifade de verilen parantez içi binom serisine açılacak olursa,

$(1+\Delta)^n = [1 + n\Delta + [n(n-1)/2!]\Delta^2 + [n(n-1)(n-2)/3!]\Delta^3 + \ldots\ldots + y.d.t]$ (10)

Bu ifade (9) bağıntısında yerine yazılırsa,

$Y_n = y_o + n\Delta y_o + [n(n-1)/2!]\Delta^2 y_o + [n(n-1)(n-2)/3!]\Delta^3 y_o + \ldots$ (11)

şeklinde bir seri açılımı elde edilir. (11) ifadesinde verilen n değeri,

$n=(x-x_0)/h$

şeklinde seçilirse, Burada x aranan nokta ve x_0 aranan noktaya en yakın (altında veya üstünde) nokta ve h adım aralığı olur. Ara değer bulmada x_0 noktasına temel satır noktası denir ve tüm indisler bu temel satır noktasına göre düzenlenir.

Örnek:

Aşağıda verilen tablodan yararlanarak Gregory-Newton ileri yön enterpolasyon yöntemine göre x=0.7 noktasına karşılık gelen y değerini bulunuz?

x	**y**	**Δy_0**	**$\Delta^2 y_0$**	**$\Delta^3 y_0$**	**$\Delta^4 y_0$**	**$\Delta^5 y_0$**
0	16	-19	6	6	0	0
1	**-3**	**-13**	**12**	**6**	**0**	
2	-16	-1	18	6		
3	-17	17	24			
4	0	41				
5	41					

Çözüm:

n= (x-x0)/h

ifadesinden aranan nokta (x) 0.7 değeri ve buna en yakın nokta için x_0=1 değeridir (temel satır). Bu nedenle x0=1 daki fark değerleri kullanılmalıdır.

n=(0.7 – 1)/1
n= -0.3

$y_{0.3}= y_o + n\Delta y_o + [n(n-1)/2!]\Delta^2 y_o + [n(n-1)(n-2)/3!]\ \Delta^3 y_o$
$y_{0.3}= -3 + (-0.3)\ (-13) + [(-0.3)(-0.3-1)/2]\ 12 + [(-0.3)(-0.3-1)(-0.3-2)/6]\ 6$
$y_{0.3}=-3 + 3.9 + 2.34 -0.8970$
$y_{0.3}= 2.3400$

elde edilir. (Gerçekte tabloda verilen y değerleri x3-20x+16 fonksiyonun aldığı değerlerdir. Bu fonksiyonda x=0.7 değeri hesaplanırsa sonuçun 2.34 olduğu görülür.)

Burada dikkat edilmesi gereken nokta temel satır belirlendikten sonra (11) ile verilen ifade de temel satıra karşılık gelen fark değerlerinin kullanılmasıdır. Bu problemde temel satır olarak x=1 değeri kullanılmış olmasına rağmen zorunlu değildir. Temel satır olarak x=0 değeri de kullanılabilirdi. Bu durumda x=0 temel satırındaki fark değerleri kullanılmış olacaktı.

d) Gregory-Newton Geri Yön Enterpolasyon Yöntemi

İleri yön enterpolasyona benzer şekilde geri yön enterpolasyon ifadeside çıkartılabilir. Bununla birlikte, ileri yön fark operatörü Δ ile geri yön fark operatörü ∇ arasındaki ilişkiden yararlanarak geri yön enterpolasyon ifadesi elde edilebilir:

$(1+\Delta)^n = (1-\nabla)^{-n}$

ilişkisinden yararlanarak,

$$y_n= y_o + n\nabla y_o + [n(n+1)/2!]\ \nabla^2 y_o + [n(n+1)(n+2)/3!]\ \nabla^3 y_o + \ldots \qquad (12)$$

bu ifadede n değeri ileri yön enterpolasyon yöntemindeki gibi, n= (x-x0)/h şeklinde ifade edilir.

Örnek:

İleri yön enterpolasyon yönteminde verilen örneği bu kez x=4.2 noktası için geri yön enterpolasyon ifadesine göre çözersek,

x	**y**	**Δy_0**	**$\Delta^2 y_0$**	**$\Delta^3 y_0$**	**$\Delta^4 y_0$**	**$\Delta^5 y_0$**
0	16					
1	-3	-19				
2	-16	-13	6			
3	-17	-1	12	6		
4	**0**	**17**	**18**	**6**	**0**	
5	41	41	24	6	0	0

Çözüm:

temel satır olarak x0=4 secilirse, n=(4.2-4.0)/1= 0.2 ve adım aralığı h=1

$y_{0.2}= 0+(0.2)17 + [0.2(0.2 +1)/2]\ 18 + [(0.2)(0.2+1)(0.2+2)/6]6$
$y_{0.2}= 6.088$

olarak bulunur.

e. Merkezi farklarla enterpolasyon Yöntemi (Bessel fonksiyonu)

eşit aralıklı verilere uygulanabilen bir diğer enterpolasyon fonksiyonu Bessel fonksiyonudur. İleri ve geri farklarda olduğu gibi benzer işlemler bu kez merkezi fark eşitliklerinin yazılmasıyla:

$$y_n = \frac{y_0 + y_1}{2} + (n - 1/2)\delta y_{1/2} + \frac{n(n-1)}{2\,2!}(\delta^2 y_0 + \delta^2 y_1) + \frac{n(n-1/2)(n-1)}{3!}\delta^2 y_{1/2} + \ldots$$

Elde edilir. Burada

n= (x-x0)/Δx

x: enterpolasyonu aranan nokta

x0: x'e en yakın nokta (ilerisinde veya gerisinde)

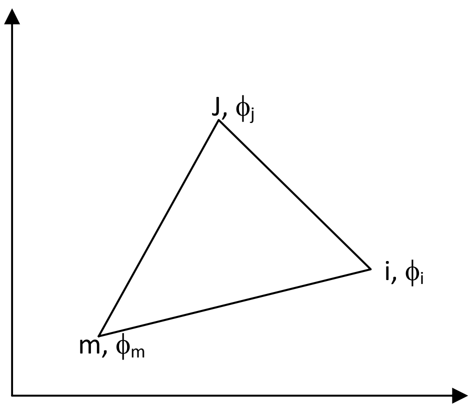
Δx: adım aralığı

Ödev:

İleri fark enterpolasyon yönteminde verilen (x,y) değerlerini kullanarak,

a) merkezi fark tablosunu oluşturunuz,
b) x=2.4 deki değeri hesaplayınız?

f-2-boyutta langrange enterpolasyon yöntemi



Şekil. 2-boyutta Langrange enterpolasyon

ϕ(x,y)= c0 + c1x + c2y şeklinde fonksiyon tanımlarsak, bu fonksiyon (i,j,m) noktalarında gözlem değerlerine eşit olmalıdır. Bu tip fonksiyonlara enterpolasyon fonksiyonu denir. Tanımlanan enterpolasyon fonksiyonu doğrusal (birinci dereceden) olduğu gibi daha yüksek dereceden de tanımlanabilir. Birinci dereceden tanımlanmakla i,j,m noktaları arasında değişimin doğrusal olduğu varsayılmış olur(doğrusal enterpolasyon da olduğu gibi). $\phi(x,y)$ fonksiyonu vektör notasyonunda,

$$\phi = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c0 \\ c1 \\ c2 \end{bmatrix} = \bar{a}\,\bar{c} \qquad (1)$$

yazılabilir. i noktası için (xi,yi) i noktasının koordinatları olmak üzere

$\phi i = c0 + c1xi + c2yi$

J noktası için (xj,yj) j noktasının koordinatları olmak üzere

$\phi j = c0 + c1xj + c2yj$

ve m noktası için (xm,ym) m noktasının koordinatları olmak üzere

$\phi m = c0 + c1xm + c2ym$

Dizey notasyonunda

$$\begin{bmatrix} 1 & xi & yi \\ 1 & xj & yj \\ 1 & xm & ym \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c0 \\ c1 \\ c2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{\mathrm{i}} \\ \phi_{\mathrm{j}} \\ \phi_{\mathrm{m}} \end{bmatrix} = \bar{A}\,c = \bar{\phi} \qquad (2)$$

Son ifadeden c çekilirse,

$c = A^{-1}\,\phi$

bu ifade (1) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\phi = \bar{a}\,\bar{c} = \bar{a}\,A^{-1}\,\bar{\phi}$$

Elde edilir. aA^{-1} ifadesine N dersek,

$$N = aA^{-1} \qquad (3)$$

$$\phi = N\,\bar{\phi} \qquad (4)$$

olur.burada N şekil fonksiyonu adını alır ve (3) ifadesinden görüldüğü gibi sadece (x,y) koordinatların bir fonksiyonudur. $\bar{\phi}$ ise (i,j,m) noktasındaki fonksiyon değeridir.

$$N = aA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix}^{-1} = [N_i\ N_j\ N_m]$$

İfadesinde

$Ni(x,y) = (ai + bi\,x + ciy)/2\Delta$

$Nj(x,y) = (aj + bj\,x + cjy)/2\Delta$

$Nm(x,y) = (am + bm\,x + cmy)/2\Delta$

Burada,

$ai=xjy_m-x_m yj$	bi=yi-ym	ci=xm-xj
$aj=x_m yj-xiy_m$	bj=ym-yi	cj=xi-xm
$a_m=xiyj-xjyi$	bm=yi-yj	cm=xj-xi

dir. Verilen bir (x,y) noktası için N şekil fonksiyonları (i,j,m) noktalarına bağlı olarak hesaplanabilir. Fonksiyonun bilinen noktalardaki değerleri ve hesaplanan şekil fonksiyonları yardımıyla istenilen (x,y) noktası için fonksiyon değeri (4) bağıntısı ile hesaplanır.

Örnek:

Tablo da verilenlere göre (x,y)=(6,5) noktasında fonksiyon F(x,y) değeri nedir?

X	7	3	11
Y	8	2	1
F(x,y)	7.4	3.2	2.5

```
n=[1  7  8; 1 3 2 ; 1 11 1];
n =
    1    7    8
    1    3    2
    1   11    1
>> n=inv(n)
n =
   -0.3654    1.5577   -0.1923
    0.0192   -0.1346    0.1154
    0.1538   -0.0769   -0.0769
>> N=[1 6 5]*n
N =
    0.5192    0.3654    0.1154
z=[7.4 3.2 2.5]
z =
    7.4000    3.2000    2.5000
>> z=z'
z =
    7.4000
    3.2000
    2.5000
>> f=N*z

f =
 5.3000
```