2. TEMEL DİZEY İŞLEMLERİ

Dizey, satır ve sütunlardan oluşan iki boyutlu dizilere denilmektedir. Dizeyler tek bir satır veya sütundan meydana gelirse buna yöney (tek boyutlu dizi) adı verilir. Bir dizey veya yöney genel olarak köşeli parantez, [] ile gösterilir. Örneğin A, N×M (burada A dizeyinin N satır ve M sütundan oluşmaktadır) boyutlarında bir dizey gösterimi:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1M} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2M} \\ . & . & . & . \\ a_{N1} & a_{N2} & . & a_{NM} \end{bmatrix}$$

A dizeyinin satır ve sütun sayıları birbirine eşit olursa "**Kare Dizey"**, farklı olursa "**Dikdörtgen Dizey**" adını alır.

ALT VE ÜST ÜÇGEN DİZEY

Dizeylerin köşegen (diyagonal) üzerindeki elemanları sıfır olan dizeye "**Alt Üçgen Dizey**", benzer şekilde köşegen altındaki elemanları sıfır olan dizeye "**Üst Üçgen Dizey**" denir. Aşağıda sırasıyla alt ve üst üçgen dizey gösterilmiştir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & . & 0 \\ a_{21} & a_{22} & . & 0 \\ . & . & . & . \\ a_{N1} & a_{N2} & . & a_{NM} \end{bmatrix} \text{(Alt üçgen dizey)}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & . & b_{1M} \\ 0 & b_{22} & . & b_{2M} \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & b_{NM} \end{bmatrix} \text{(Üst üçgen dizey)}$$

BİRİM VE KÖŞEGEN DİZEY

Birim dizey köşegen elemanları bir diğer elemanları sıfır olan dizeye denir. Köşegen dizey ise sadece köşegen üzerinde değer bulunan dizeylere denir. Aşağıda sırasıyla birim dizey ve köşegen dizey gösterilmiştir. Görüldüğü üzere Birim dizey köşegen dizeyin özel bir hali olarak görülür.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & 1 & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 1 \end{bmatrix} \text{ birim dizey,} \qquad C = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & . & 0 \\ 0 & c_{22} & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & c_{NM} \end{bmatrix} \text{Köşegen dizey}$$

BANT DİZEY

Dizey elemanlarının köşegen etrafında belirli bir düzende dizilmesinden oluşan dizeye bant dizey denir. Genel olarak kısmi türev içeren diferansiyel denklemlerin çözümlerinde karşılaşılan bir dizey yapısıdır. Aşağıda bant dizey gösterilmiştir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 & . & . & . \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \ldots & 0 & . & . \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \ldots & \ldots & 0 & . \\ . & 0 & a_{53} & a_{54} & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ . & . & 0 & a_{64} & \ldots & \ldots & a_{i-2,\,j-1} & a_{i-2,\,j} \\ . & . & . & 0 & \ldots & \ldots & a_{i-1,\,j-1} & a_{i-1,\,j} \\ . & . & . & . & 0 & a_{i,\,j-2} & a_{i,\,j-1} & a_{i,j} \end{bmatrix}$$

DEVRİK (TRANSPOZE) DİZEY

Bir dizeyin satır ve sütunlarını yer değiştirerek elde edilen dizeye o dizeyin devriği yada transpozesi denir ve $[A]^T$ ile gösterilir. Simetrik (bakışımlı) bir dizeyin devriği yine kendisine eşittir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

SİMETRİK VE ANTİSİMETRİK(ÇARPIK SİMETRİK) DİZEY

Bir dizeyin satır ve sütunları yer değiştirdiğinde(dizeyin devriği alındığında) dizey değişmiyor ise (elde edilen dizey önceki dizeye eşit ise) simetrik dizey adını alır. Şayet bir A kare dizeyin köşegen dışındaki elemanları a_{ij}=-a_{ij} ise böyle bir dizeye antisimetrik dizey denir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

KOFAKTÖR DİZEY

Bir dizeyin herhangi bir elemanının bulunduğu satır ve sütun silinerek elde edilen dizeyin işaretli determinantı o elemanın kofaktörü veya minörü olarak tanımlanır. Bu işlem dizeyin tüm elemanları için tekrarlanır ve yerlerine yazılırsa elde edilen yeni dizey Kofaktör dizeyi olarak adlandırılır.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

A dizeyinde a_{ij} A dizeyinin i.satır ve j.sütununu gösterirse, A dizeyinin kofaktör dizeyini elde etmek için,

a. a_{ij}' nin bulunduğu satır ve sütun silinir,
b. Geri kalan dizeyin işaretli determinantı hesaplanır,
c. Böylece a_{ij}’ nin kofaktörü(minörü=Mij) elde edilir. Yapılan bu işlemler aşağıdaki eşitlik ile elde edilebilir.

$$k_{i,j} = (-1)^{i+j} \times M_{i,j}$$

Kofaktör $k_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Kofaktör $k_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

dizeyin tüm elemanları için benzer işlem yapılırsa, A dizeyinin kofaktör dizeyi,

$$\text{Kofaktör(A)} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}$$

EK (ADJOİNT) DİZEY

Kofaktör dizeyinin devriğinin alınmasıyla elde edilen dizeye ek dizey denir.

$$\text{Ek Dizey (Adjoint) [A]} = \{\text{Kofaktör[A]}\}^T$$

TERS (INVERSE) DİZEY

Bir A dizeyin ek-dizeyinin A dizeyin determinantına bölünmesiyle elde edilen dizeye ters dizey denir.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adjoint}[A]}{|A|}$$

ORTOGONAL (DİK) DİZEY

Genellikle koordinat sistemleri ile ilgili eksen dönüşümlerinde kullanılan ortagonal dizey tanımlamasında, bir dizeyin ortagonal olabilmesi için dizeyin devriğinin tersine eşit olması gerekir. Diğer bir ifadeyle,

$$[A]^T = [A]^{-1}$$

ise [A] dizeyi ortogonal dizeydir.

DİZEYLERDE TOPLAMA VE ÇIKARMA

Dizeylerde toplama ve çıkarma işlemini, aynı boyuttaki iki dizeyde karşılıklı gelen elemanların toplanması ve çıkarılması ile elde edilir. Dizeylerde toplama ve çıkarma işlemine örnek:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{bmatrix}, \; A - B = \begin{bmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & a_{13}-b_{13} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & a_{23}-b_{23} \\ a_{31}-b_{31} & a_{32}-b_{32} & a_{33}-b_{33} \end{bmatrix}$$

DİZEYLERDE ÇARPMA

İki dizeyin birbiriyle çarpılabilmesi için, birinci dizeyin satır elemanları ile ikinci dizeyin sütun elemanlarının çarpılarak elde edilir. $[A_{i,j}]$ ve $[B_{m,n}]$ gibi iki dizeyin çarpılabilmesi için j=m olmalıdır.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3\times 3} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} \end{bmatrix}$$

NORMAL DİZEY

NxN boyutunda bir kare dizeyi,A için

$$A(A^{-T}) = (A^{-T})A$$

ise A dizeyine normal dizey denir.

HERMİTİYEN DİZEY

Bir A kare dizeyinde A^T=A ise A dizeyine Hermitiyen dizey denir. Yani Hermitiyen dizeyde $a_{ij}=a_{ji}$ dir. Bu nedenle Hermitiyen dizeyin köşegen elemanları reeldir. Bu tür dizeylerin özdeğerleri de reeldir.

TERS HERMİTİYEN DİZEY

A kare dizeyi için $(A^T)=-A$ oluyorsa A dizeyine ters hermitiyen dizey denir. Bu tür dizeylerin asal köşegen elemanları ya sıfır yada sadece sanal kısımları sıfırdan farklıdır. Elemanları arasında $a_{ij}=-a_{ji}$ ilişkisi vardır.

DİZEY İZİ

Bir dizeyin asal köşegeni üzerindeki elemanların toplamına dizeyin izi denir.

DİZEY RANKI

Bir dizeyin rankı, bu dizeyin tekil olmayan en büyük minörü olarak tanımlanır. Bir başka ifadeyle, A gibi kare bir dizeyde determinantı sıfırdan farklı en büyük alt kare dizey boyutu A dizeyinin rankına eşittir denir. Dolayısıyla A dizeyinin en büyük rankı dizeyin boyutuna eşittir. Rankı dizeyin boyutuna eşit olmaması durumunda dizeyin tekil dizey(singular) olduğu söylenir.

DİZEY ÖZDEĞER VE ÖZYÖNEYİ

A dizeyi NxN boyutlarında bir kare dizey ise,

$$P(\lambda)=| A - \lambda I |$$

eşitliğini sağlayan λ değerlerine, A dizeyinin özdeğerleri veya karekteristik değerleri (eigenvector) denir (eigen Almanca da öz anlamına gelir). $P(\lambda)$, A dizeyinin karekteristik polinomu ve her bir λ özdeğerden elde edilen yöneye de A dizeyinin Özyöneyi (karekteristik yöneyi) denir.

DİZEY DETERMİNATI

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & . & 0 \\ a_{21} & a_{22} & . & 0 \\ . & . & . & . \\ a_{N1} & a_{N2} & . & a_{NN} \end{bmatrix}$$

NxN boyutlu bir A kare dizeyin determinantı, dizeyin her satırından ve her sütunundan sadece birer tane olmak üzere alınabilecek N elemanın çarpımı ile elde edilen ve kolon numaraları dikkate alınarak saptanan işaretlere göre, toplamlarından elde edilen değere A dizeyinin determinantı denir. Bir kare dizeyin determinantının hesaplanması için birden fazla yöntem geliştirilmiştir. Küçük boyutlu dizeyler için Laplace veya Cramer açılımı tercih edilirken büyük boyutlu dizeylerin determinatının hesaplanmasında Gauss, Chio yöntemi kullanılabilir. Determinant hesaplanmasında Laplace açılım teorisinden yararlanılırsa, Belirli bir j sütünu boyunca

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

veya belirli bir i sütunu boyunca

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

bağıntıları kullanılabilir. Bir kare dizeye ait determinantın hesaplanmasında Gauss yok etme (eleminasyon) yönteminin kullanılması durumunda kare dizey önce bir üçgen (alt veya üst üçgen) dizeye indirgenir. Daha sonra üçgen dizeye indirgenen dizeyin asal köşegeni üzerindeki elemanların çarpımı ile determinant elde edilmiş olur.