6. ÖZDEĞER ve ÖZYÖNEY

Daha önceki derslerimizden doğrusal denklem sistemlerinin (n sayıda bilinmeyenli n adet denklem takımı çözümü) sayısal çözümlerini görmüştük. Ele alınan denklem sistemlerinin çözümünde denklem katsayı dizeyinin determinantının sıfırdan farklı olduğunu varsaymıştık ve böylece tek bir çözüm elde edilmişti.

$Ax=b$

Dizey yapısındaki bir doğrusal denklem sisteminde, eğer determinant(A) ≠ 0 ise çözümün tek ve geçerli bir çözüm verdiğini, eğer determinant(A) = 0 ise çözümün önemsiz (trivial, yani x=0) olduğunu söyleriz. Bu tip bir doğrusal denklem sisteminin her zaman bir önemsiz çözüme sahip olacağıda unutulmamalıdır(yani, $x_1=0$, $x_2=0$, …, $x_n=0$).

Lineer Bağımsız Yöneyler:

$u_1,u_2,\ldots,u_n$ yöneyler olmak üzere,

$c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3 + \ldots + c_nu_n = 0$

denklemi yalnızca $c_1=0$, $c_2=0,\ldots,c_n=0$ durumunda sağlıyorsa, bu durumda u_i yöneyleri doğrusal bağımsız (linearly independent) yöneylerdir. İki yöneyin uzayda birbirinden bağımsız(doğrusal bağımsızlık) olması, bu iki yöneyin birbirine paralel olamayacağını ifade eder. Benzer şekilde 3 yöney doğrusal bağımsız ise bu üç yöneyin uzayda aynı düzlem üzerinde bulunamayacağını gösterir.

Lineer Bağımlı Yöneyler:

$u_1,u_2,\ldots,u_n$ yöneyler olmak üzere,

$c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3 + \ldots + c_nu_n = 0$

denkleminde herhangi bir veya bazı c_i sıfırdan farklı ise, bu durumda u_i yöneyleri doğrusal bağımlı (linearly dependent) yöneylerdir. $u_1,u_2,\ldots,u_n$ yöneylerinden en az bir tanesi diğerleri ile doğrusal yapıda yazılabiliyorsa bu durumda yöneyleri u_i doğrusal bağımlı yöneylerdir. Reel uzayda (R^n) $u_1,u_2,\ldots,u_m$ bir grup yöney olmak üzere ve R^n uzayında $x \in R^n$ olmak üzere, bir grup c_i skaler vardır ki, bir x yöneyi

$x=c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3 + \ldots + c_nu_n$

doğrusal kombinasyonu olarak yazılabilir. X yöneyini oluşturan u_i yöneylerine R^n uzayının temel yöneyleri denir. Bu şekilde $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_m$ sayıda yöneyde,

Eğer m>n ise yöneyler doğrusal bağımsızdır,

Eğer m=n ve determinant(X)=0 ise yöneyler doğrusal bağımlı yöneylerdir. Burada determinant(X) ile

$X=[x_1,x_2,x_3,\ldots,x_m]$ ifade edilmiştir.

Bir çok mühendislik ve fizik problemlerinde karşılaşılan problemlerin başında A-λI gibi bir dizey yapısının tekilllik durumunun incelenmesi gelir. Burada λ parametredir. Bu tür problem bir özdeğer-özvektör problemidir. Burada A nxn boyutlu kare dizeydir. X nx1 boyutlu yöney olmak üzere,

Y=Ax

yapısı, x vektörünü yine aynı uzayda Y vektörüne dönüştüren bir ifadeyi gösterir. Buradaki A dizeyine bu durumda dönüşüm dizeyi (transformation matrix) denir. Şimdide

$$Ax=\lambda x \tag{1}$$

yapısı için sıfırdan farklı bir X yöneyinin olması durumunda bu eşitliği sağlayacak λ skaler değerleri ne olur? sorusuna cevap arayalım. Bu yapıda daha önceki yapıda olduğu gibi x yöneyini λx katlı yöneyine dönüştürme işlemidir. Böyle bir ifadenin varlığı durumunda λ skaler değerine özdeğer ve bu özdeğere karşılık gelen (sağlayan) X yöneyine özyöney denir. (1) ifadesi,

$$(A-\lambda I)x=0 \tag{2}$$

yapısında yazılabilir. (2) ifadesinin çözümü (A- λI) katsayı dizeyinin

$$\det(A-\lambda I)=0 \tag{3}$$

olmasıdır. Burada A dizeyi,

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & a_{nn} \end{bmatrix},$$

ve

$$\lambda I=\begin{bmatrix} \lambda_{11} & 0 & . & 0 \\ 0 & \lambda_{22} & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & \lambda_{nn} \end{bmatrix}$$

(3) ifadesi dizey yapısında

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda_{11} & a_{12} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda_{22} & . & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & a_{nn}-\lambda_{nn} \end{vmatrix}=0 \tag{4}$$

yazılabilir.(4) ifadesi n.ci dereceden bir polinom ifade eder. Bu polinoma karekteristik polinom denir.

$p(\lambda)=\det(A-\lambda I)$

$$p(\lambda)=(-1)^n\,(\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \dots + c_{n-2}\lambda^2 + c_{n-1}\lambda + c_n) \tag{5}$$

n. dereceden p(λ) karekteristik polinomda n adet kök bulunur. Her bir λ kök (2) ifadesinde yazıldığında bir x özyöneyi elde edilir. Özdeğer-özvektör analizi çeşitli diferansiyel denklemlerin analizinde oldukca yararlı bilgiler verir.

Örnek:

$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ dizeyinin özdeğer ve özyöneylerini bulunuz ?

Çözüm:

| A-λI | = 0

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

(λ+1)(λ+2)=0

İki özdeğer, λ_1=-1 ve λ_2=-2' dir. Her bir özdeğere karşılık gelen özvektör incelendiğinde, λ_1=-1 özdeğerine karşılık gelen x_1=[$x_{11,}$ x_{12}] özyöneyi için (2) ifadesi kullanılırsa,

(A-λ_1I)x_1=0

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = 0$$

$x_{11} + x_{12} = 0$
$-2x_{11} + (-2x_{12}) = 0$
$x_{11} =- x_{12}$

görüldüğü gibi λ_1 özdeğerine karşılık gelen yöney x_1=[$x_{11,}$ x_{12}] eşit büyüklükte fakat ters doğrultudadırlar. Yani,

$$x_1 = k_1 \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

yapısındadır. Burada k_1 keyfi bir sabittir. Aynı işlemi λ_2 özdeğeri için yaparsak karşılık gelen x_2 özyöneyi,

(A-λ_2I)x_2=0

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = 0$$

$2x_{21} + x_{22} = 0$
$-2x_{21} + (-x_{22}) = 0$
$x_{21} =-x_{22}/2$

$$x_1 = k_2 \begin{bmatrix} +1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

MATLAB uygulaması

Örnek:

```
A=[0 1; -2 -3]
A=
  0   1
 -2  -3
[x,lamda]=eig(A)
X=
  0.7071  -0.4472
  -0.7071   0.8944
lamda =
  -1   0
   0  -2
```

Burada, A dizzeyinin özdeğerleri lamda diagonal dizeyidir(λ_1=-1, λ_2=-2).Özdeğerlere karşılık gelen özvektörler ise x dizeyinin kolonlarını oluşturur. Görüldüğü gibi, özvektörler dizeyinin birinci kolonu aynı büyüklükte fakat ters işaretlidir. İkinci kolonu ise, örnek çözümde olduğu gibi ters işaretli fakat biri diğerinin iki katıdır. Burada dikkat edilmesi gereken bir nokta MATLAB' ın x_1 ve x_2 için farklı k_i katsayısı seçmiş olmasıdır. Çünkü, MATLAB eleman seçimini, elemanların kareleri toplamının 1 yapacak şekilde seçer.

Örnek:

```
A=[2 -1 1; -1 2 1; 1 -1 2]
A =
    2   -1    1
   -1    2    1
    1   -1    2
>> [x,lamda]=eig(A)

x =

   0.7071   -0.7071    0.5774
  -0.0000   -0.7071    0.5774
   0.7071   -0.0000    0.5774

lamda =

   3.0000        0        0
        0   1.0000        0
        0        0   2.0000
>>
```

Örnek:

```
A=[2 1 0 0 0 0; 1 2 1 0 0 0; 0 1 2 1 0 0; 0 0 1 2 1 0; 0 0 0 1 2 1; 0 0 0 0 1 2]
```

```
A =
    2    1    0    0    0    0
    1    2    1    0    0    0
    0    1    2    1    0    0
    0    0    1    2    1    0
    0    0    0    1    2    1
    0    0    0    0    1    2

>> [x,lamda]=eig(A)
x =
   0.2319   -0.4179   -0.5211    0.5211   -0.4179    0.2319
  -0.4179    0.5211    0.2319    0.2319   -0.5211    0.4179
   0.5211   -0.2319    0.4179   -0.4179   -0.2319    0.5211
  -0.5211   -0.2319   -0.4179   -0.4179    0.2319    0.5211
   0.4179    0.5211   -0.2319    0.2319    0.5211    0.4179
  -0.2319   -0.4179    0.5211    0.5211    0.4179    0.2319

lamda =
   0.1981         0         0         0         0         0
        0    0.7530         0         0         0         0
        0         0    1.5550         0         0         0
        0         0         0    2.4450         0         0
        0         0         0         0    3.2470         0
        0         0         0         0         0    3.8019
```

Örnek: Çok katlı yapıların deprem yükleri altında serbest salınım problemi?

Deprem yükleri altında çok katlı binaların serbest enine salınımlarını gösteren diferansiyel denklem (hareket denklemi) sönüm terimi ihmal edilecek olursa,

m x'' + kx = 0 [frekans ortamında bu ifadenin özdeşi, $(k\text{-}w^2)x(w)=0$]

burada m kütle (yapının kütlesi), x'' zamana göre yerdeğiştirme (x)' in ikinci mertebeden türevi (ivme) ve k yapının stifness(sıkılık) değeridir. Çok katlı bir yapı için bu terimler dizey yapısındadır. i.ci kat'a etkiyen kuvvet

$k(x_i-x_{i-1}) + k(x_{i+1}-x_i)=k(x_{i+1} -2x_i + x_{i-1})$

ile tanımlanır. n katlı bir yapı gözönüne alınırsa, her bir katın kütlesi m ve sıkılık değeri k (kN/m). Bu durumda diferansiyel denklemi,

$$x''=-\frac{k}{m}x=ax$$

Burada a,

$$a = \frac{k}{m}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & 1 & -2 & 1 & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

yapısındadır.

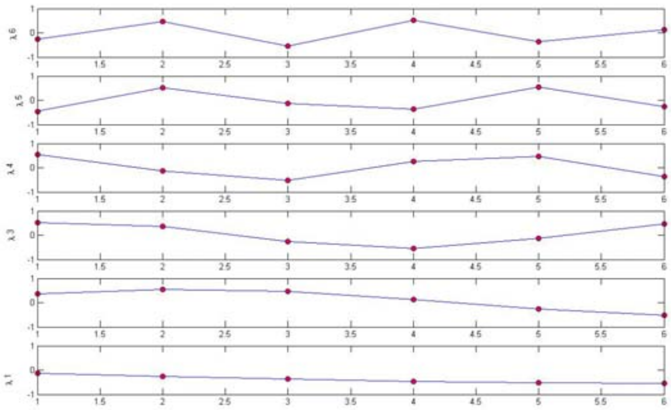
Şimdi n=6 katlı bir yapı ve m=1250 ton ve katlar arası k=10000 kN/n oldugunu varsayarsak,
k/m=10000/1250 = 8
olur. Bu durumda

$$a = \begin{bmatrix} -16 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -16 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -16 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -16 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & -16 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & -8 \end{bmatrix}$$

```
A=[-16 8 0 0 0 0; 8 -16 8 0 0 0; 0 8 -16  8 0 0; 0 0 8 -16 8 0; 0 0 0 8 -16 8 ; 0 0 0 0  8 -8 ]
A =
  -16    8    0    0    0    0
    8  -16    8    0    0    0
    0    8  -16    8    0    0
    0    0    8  -16    8    0
    0    0    0    8  -16    8
    0    0    0    0    8   -8

>> [x,lamda]=eig(A)
x =
  -0.2578   -0.4565    0.5507    0.5187    0.3678   -0.1327
   0.4565    0.5187   -0.1327    0.3678    0.5507   -0.2578
  -0.5507   -0.1327   -0.5187   -0.2578    0.4565   -0.3678
   0.5187   -0.3678    0.2578   -0.5507    0.1327   -0.4565
  -0.3678    0.5507    0.4565   -0.1327   -0.2578   -0.5187
   0.1327   -0.2578   -0.3678    0.4565   -0.5187   -0.5507

lamda =
 -30.1673         0         0         0         0         0
        0  -25.0890         0         0         0         0
        0         0  -17.9286         0         0         0
        0         0         0  -10.3263         0         0
        0         0         0         0   -4.0238         0
        0         0         0         0         0   -0.4649
```



Elde edilen özdeğerler bu problem için yapının doğal titreşim frekanslarını vermektedir. Benzer şekilde özvektörler ise her bir titreşim frekansına karşılık gelen genlikleri verir. Örneğin, λ_1=0.4649

Özdeğerine (yapının sönümsüz titreşim frekansı) karşılık gelen özvektör x' in birinci kolonunda yeralmakta ve şekildeki en alt kısmı oluşturmaktadır. Yapı λ_1 frekansında titreşirken birinci katın yerdeğiştirme genliği(statik durum noktasına göre) -0.2578, ikinci katın genliği 0.4565 ve bu şekilde 6. katın yerdeğiştirme genliği 0.1327' dir.