1. **HATA VE HATA TÜRLERİ**

Sayısal hatalar, matematiksel işlemler ve değerlerin yaklaşık kullanımlarından ortaya çıkan farklar olarak tanımlanabilir. Bu hataların bir kısmı kullanıcıların kendisinden, bir kısmı bilgisayarda kullanılan yazılımlardan ve bir kısmı da bilgisayarların doğal olarak sayıları belirli bir uzunlukta depolayabilme, yuvarlatma ve kesmelerinden kaynaklanır.

Örneğin bir deneyde ölçülen veya gözlenen değer, belirli bir hassasiyette gözlenir. Yani, belirli bir ondalıktan sonra gelecek sayılar bilinemez. Gözlemlenen değer, noktadan sonra dört basamaklı ise beşinci basamak için bir şey söylenemez. Bu şekilde gözlemlenen veya ölçülen değerlerin binlerce aritmetik işlemin bulunduğu bir algoritmada kullanılacağı varsayılırsa, her bir işlemden sonra, sonucun daha az doğru olduğu kanısına varabiliriz. Farklı bir örnek vermek gerekirse,

Π= 3,141592653589793...

$\sqrt{2}$= 1,1414128...

2/3=0,666666666...

gibi ondalık haneleri sonsuza uzanan sayılar aritmetik işlemlerde kullanıldığında yapılan hataların daha açık olacağı görülür. Hatalara hesaplayıcılar yönünden bakıldığında, farklı bir durumla karşılaşılır. Bilindiği gibi hesaplayıcılar, bir devreden akımın geçip geçmemesi esasına göre, iki tabanlı sayı sistemine göre çalışır. Aritmetik işlemlerde verilen tüm on tabanlı sayılar hesaplayıcılarda önce iki tabanlı sayılara dönüştürülür daha sonra işlenir. Şayet verilen sayı bir tam sayı ise, bütün tamsayıların iki tabanlı karşılığı olduğundan ve her iki sayıda tamsayı olduğundan iki sayı arasında bir fark oluşmaz. Şayet verilen sayı reel sayı ise ondalık kısmının iki tabanında tam karşılığının olup olmadığı araştırılmalıdır. Örneğin,

$(0.125)_{10} = (0.001)_2$

durumunda olduğu gibi (0.125) sayısının iki tabanlı karşılığı (0.001) olduğu halde (0.1) reel sayısının iki tabanında tam olarak ifade edilmesi mümkün değildir. Gözlemlenen veya ölçülen değerlerin hesaplayıcılar içerisinde sınırlı bir hafızada tutulur. Bu nedenle, sayılar iki tabanında ancak belirli uzunlukta ifade edilebilmektedir. Örneğin, reel sayılar için normal hassasiyette 32 bitlik bir yer ayrılan hesaplayıcıda 7 ondalık basamağa, cift hassasiyette ise 64 bitlik yer ayrılır ve buda yaklaşık 15 ondalık basamağa karşılık gelir. Bu nedenle değerler için hesaplayıcılardaki ayrılan yerler veri tipine göre değişmektedir. Buda farklı bir türde hataya neden olabilmektedir.

Kesme ve yuvarlatma hataları, verilerin sayısal işlemlere girmesinden kaynaklanan hatalardır. Sonsuz terimli bir seriyi uygun şekilde keserek sayısal sonuçlar elde edilir. Belirli terimden sonra gelen terimlerin ihmal edilmesi kesme hatası olarak bilinir. Burada yapılan hata atılan terimlerin toplamı kadar olur. Örneğin;

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Radyan cinsinden verilen bir x açısının sinüsünün hesaplanmasında kullanılır. Bu sonsuz serinin tüm terimlerinin hesaplanması mümkün değildir ve hesaplamada belirli bir terim işleme alınarak sin(x) için yaklaşık bir değer elde edilir. Bu hesaplamada ihmal edilen terimlerin toplamı yapılan kesme hatasına eşit olur.

1.1. Mutlak Hata

Doğru olarak kabul edilen bir büyüklüğün değeri (analitik olarak bilinen) ile sayısal hesaplamalar sırasında elde edilen değer arasındaki fark mutlak hata olarak tanımlanır:

$\varepsilon_{mutlak} = | f_{gerçek} - f_{hesaplanan} |$

1.2. Bağıl Hata

Mutlak hatanın gerçek değere bölünmesiyle elde edilen hatadır. Fakat her problem için gerçek değeri bilme olanağı olmadığı için bağıl hata genel olarak mutlak hatanın yaklaşık değere bölünmesiyle elde edilir.

$\varepsilon_{bağıl} = \varepsilon_{mutlak}/f_{gerçek} = \varepsilon_{mutlak}/f_{yaklaşık}$

1.3. Yaklaşım Hatası

Gerçek değeri bilinmeyen fakat yaklaşık olarak hesaplanabilen değerlerin ne kadar hata ile birbirlerine yakın bulunduklarını tanımlayan hata türüdür. Genellikle bir yinelemede (iterasyon) her adımda bir önceki adım sonuçu ile olan bağıl hatası olarak da tanımlanır.

$\varepsilon_{yaklaşım} = (f_{yeni} - f_{eski}) / f_{yeni}$

bağıl hata ve yaklaşım hatası 100 ile çarpılarak çoğu zaman hata yüzdesi olarak gösterilir. Yüzde değerlerin negatif çıkmaması için farklar mutlak değer olarak alınabilir.

Örnek-1

e^x fonksiyonunun seri açılımı

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^3}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

ile verilmektedir. x=0.5 değeri için $e^{0.5}$=1.648721271 olduğu bilindiğine göre seri açılımından yararlanarak ilk iki ve üç terim alarak bağıl ve yaklaşım hata yüzdelerini bulunuz?

Cevap-1

x = 0.5 değeri için

ilk iki terim alındığında e^x= 1.50

ilk üç terim alındığında e^x= 1.75

hesaplamada yapılan bağıl ve yaklaşım hata yüzdeleri sırasıyla,

$$\varepsilon_{bağıl} = \frac{e^{0.5} - 0.5}{e^{0.5}} x100 = \frac{|1.6487212271 - 1.75|}{1.648721271} x100 = \frac{0.10127872}{1.648712171} x100 = 6.1428$$

$$\varepsilon_{yaklaşım} = \frac{1.75 - 1.5}{1.75} x100 = \frac{|0.25|}{1.75} x100 = \frac{0.25}{1.75} x100 = 14.2857$$

Örnek-2

F(x) = $-0.2x^4-0.15x^3-0.5x^2-0.25x+1.2$ fonksiyonu Taylor seri açılımından yararlanarak x=1 değerinin n=1, 2, 3 ve 4 terimleri için hesaplayınız her bir hesaplamadaki bağıl hataları gösteriniz?

Cevap-2

F(x) fonksiyonun x=x+a daki değerinin hesaplanmasında Taylor seri açılımı:

$$F(x+a) = F(x) + \frac{a}{1!}\frac{dF(x)}{dx} + \frac{a^2}{2!}\frac{d^2F(x)}{dx^2} + \frac{a^3}{3!}\frac{d^3F(x)}{dx^3} + \cdots \frac{a^n}{n!}\frac{d^nF(x)}{dx^n}$$

F(1) fonksiyonun gerçek değeri

F(1)= 0.2

x=0 ve a=1 alınırsa, Taylor seri açılımında

n=1 için

F(x+a)=F(x)=1.2 ve bağıl hata,

$$\varepsilon_{bağıl} = \frac{|0.2-1.2|}{0.2}x100 = 500\ \%$$

n=2 için

F(x+a)=F(x)+aF'(x)= 0.95 ve bağıl hata,

$$\varepsilon_{bağıl} = \frac{|0.2-0.95|}{0.2}x100 = 375\ \%$$

n=3 için

F(x+a)=F(x)+aF'(x)+a^2F''(x)/2= 0.45 ve bağıl hata,

$$\varepsilon_{bağıl} = \frac{|0.2-0.45|}{0.2}x100 = 110\ \%$$

n=4 için

F(x+a)=F(x)+aF'(x)+a^{2}F''(x)/2+ a^{3}F''(x)/6= 0.3 ve bağıl hata,

$\varepsilon_{\text{bağıl}} = \frac{|0.2-0.3|}{0.2} x100 = 50\,\%$

Bu problemde her bir adımda (yani n=1, 2, 3 ve 4 değerleri için) yaklaşım hatası da hesaplanabilir.

Örnek 3. Matlab uygulaması

```
% JFM224 Sayýsal Analiz ve Programlama III Dersi uygulama
% Konu: Hata Analizi
%
% Program f(x)=exp(x) fonksiyon deðerini dx=0.5 adým aralýðý için
% Taylor serisinin ilk bir, iki ve üç terimi kullanarak yaklaþýk
% deðeri, baðýl ve yaklaþým hatalarýný hesaplar.
%
% Yazan : Dr.Unal Dikmen,2007 Subat
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
fclose('all'); clear; clc
% format long
 f = 'exp(dx)';
 x = 0.0;
dx = 0.5 ;
% exp(x) fonksiyonun x=0.5 için gercek deðeri
 g = eval(f,dx) ;
% Taylor acýlýmý:
%                  2        3            n
% f(x+dx)=f(x)+dxf'(x)+( dx/2!)f''(x)+dx/6)f'''(x)...+...(dx/n!)fn(x)
% Seri açýlýmýnda ilk üç terim için fonksiyonun yaklaþýk deðerleri
f1t = 'exp(x)' ;
f2t = 'exp(x) + 0.5*exp(x)';
f3t = 'exp(x) + 0.5*exp(x) + (0.125)*exp(x)' ;
ft1 = eval(f1t,x);
ft2 = eval(f2t,x);
ft3 = eval(f3t,x);
%yuzde olarak bagýl hatalar
re1 = 100.*(g-ft1)/g ;
re2 = 100.*(g-ft2)/g ;
re3 = 100.*(g-ft3)/g ;
% yuzde olarak yaklaþým hatalarý
ye21 = 100.*(ft2-ft1)/ft2 ;
ye32 = 100.*(ft3-ft2)/ft3 ;
```

```
% sonucların ekrana aktarılması
clc
disp(' Fonksiyon = exp(x) ')
disp(sprintf(' x=0.5 için gerçek deðeri = %15.12f\n',g));
disp(sprintf(' Taylor serisinin ilk terim yaklaþýk degeri = %5.4f',ft1));
disp(sprintf(' Taylor serisinin iki terim yaklaþýk degeri = %5.4f',ft2));
disp(sprintf(' Taylor serisinin üç terim yaklaþýk degeri  = %5.4f\n',ft3));
%
disp('Bağıl Hataları :')
disp(' ')
disp(sprintf(' 1 terim yaklaþýmýndaki baðýl hata yüzdesi  = %4.2f',re1));
disp(sprintf(' 2 terim yaklaþýmýndaki baðýl hata yüzdesi  = %4.2f',re2));
disp(sprintf(' 3 terim yaklaþýmýndaki baðýl hata yüzdesi  = %4.2f\n',re3));
%
disp('Yaklaşım Hataları:')
disp(' ')
disp(sprintf(' iki terim hesaplamada yaklaþým hata yüzdesi= %4.2f',ye21));
disp(sprintf(' üç terim hesaplamada yaklaþým hata yüzdesi = %4.2f',ye32));
```