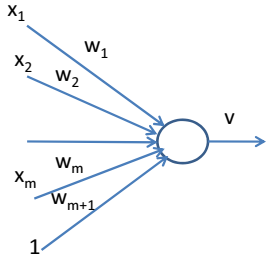


Hatırlatma

Sinir Hücresi

McCulloch-Pitts



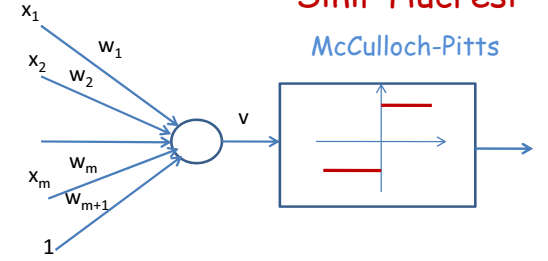
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \\ w_{m+1} \end{bmatrix} \rightarrow [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_m \ w_{m+1}]$$

1

Hatırlatma

Sinir Hücresi

McCulloch-Pitts



$$V = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_m \ w_{m+1}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \rightarrow v = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_m x_m + w_{m+1} \cdot 1$$

$$y = \phi(v) = \begin{cases} 1 & v \geq 0 \\ -1 & v < 0 \end{cases}$$

2

Daha gerçekçi sinir hücresi modeli var mı? Hodgkin-Huxley Modeli

$$\dot{v} = \frac{1}{C_M} [I - \bar{g}_{Na} m^3 h (v - v_{Na}) - \bar{g}_K n^4 (v - v_K) - \bar{g}_l (v - v_l)]$$

$$\dot{m} = \alpha_m(v)(1 - m) - \beta_m(v)m$$

$$\dot{h} = \alpha_h(v)(1 - h) - \beta_h(v)h$$

$$\dot{n} = \alpha_n(v)(1 - n) - \beta_n(v)n$$

$$\alpha_m(v) = \frac{0.1(v + 25)}{e^{[(v + 25)/10]} - 1}$$

$$\beta_m(v) = 4e^{(v/18)}$$

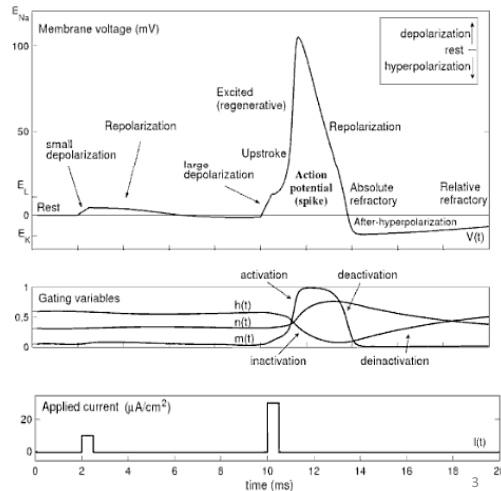
$$\alpha_h(v) = 0.07e^{(v/20)}$$

$$\beta_h(v) = \frac{1}{e^{[(v + 30)/10]} - 1}$$

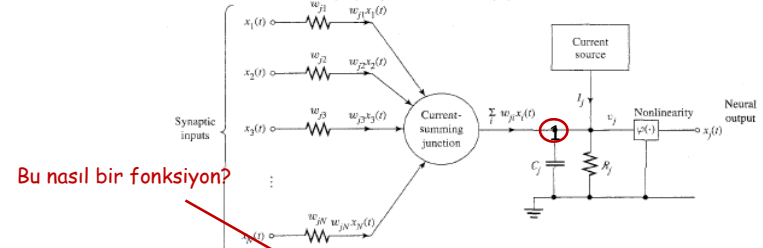
$$\alpha_n(v) = \frac{0.01(v + 10)}{e^{[(v + 10)/10]} - 1}$$

$$\beta_n(v) = 0.125e^{(v/80)}$$

Bu hücre modelini kullanmak çok uygun değil, sizce neden?



Gerçekçi ve ağ yapısı için uygulanabilir hücre modeli



Bu nasıl bir fonksiyon?

1 Düğümü için KAY

$$C_j \frac{dv_j(t)}{dt} + \frac{v_j(t)}{R_j} = \sum_{i=1}^N w_{ji} x_i(t) + I_j$$

Nasıl yazıldı?

$$x_j(t) = \phi(v_j(t)), \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Daha önce yazdığınız bir denklem takımına benziyor?

Tüm hücreler için denklemleri biraz düzenleme ile yazarsak...

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \vdots \\ \dot{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_2 C_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{R_n C_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n1} & w_{n2} & \dots & w_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi(v_1) \\ \phi(v_2) \\ \vdots \\ \phi(v_n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix}$$

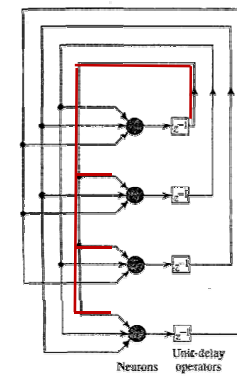
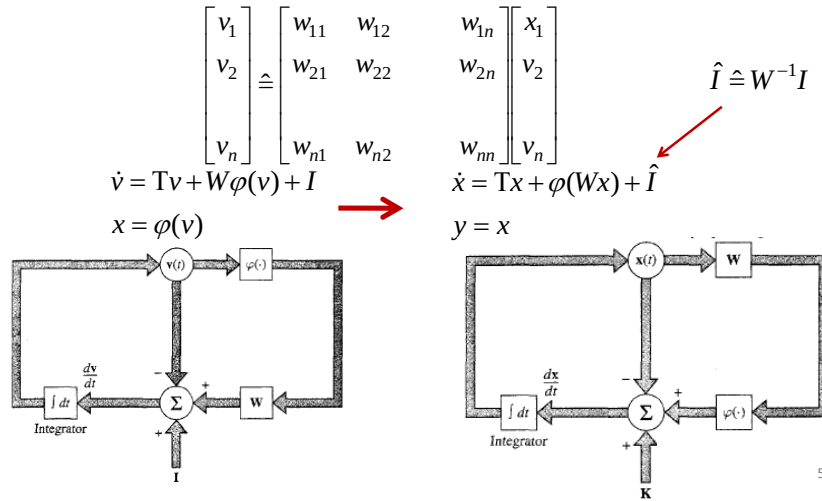
Durum Denklemleri

4

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad \text{Durum değişkenleri} \quad x \quad v \quad \dot{v} = Tv + W\varphi(v) + I$$

$$y = Cx \quad \text{Girişler} \quad u \quad I \quad \text{Çıkışlar} \quad y \quad x \quad x = \varphi(v)$$

Bir lineer dönüşüm ile denklemler biraz daha farklı yazılabilir....



Hopfield Ağı

Ayrık zaman

Sürekli zaman

$$x' = \varphi(Wx + I) \quad W^T = W \quad C\dot{x} = -Rx + W\varphi(x) + I$$

$$E(x) = -\frac{1}{2}x^T Wx - x^T I \quad E(x) = -\frac{1}{2}x^T Wx + (\hat{R}^T \int_0^x \varphi^{-1}(x) dx)$$

$$\varphi(v) = \begin{cases} 1 & v > 0 \\ -1 & v < 0 \end{cases}$$

$$\varphi(v) = \tanh\left(\frac{av}{2}\right) = \frac{1 - e^{-av}}{1 + e^{-av}}$$

Dinamik sistemin kalıcı çözümünü incelemek için özellikle denge noktalarının kararlılığına bakacağız

Denge noktasının kararlılığı $\rightarrow$ Lyapunov Anlamında kararlılık

Lineer olmayan sistemin kararlılığı $\rightarrow$ Tam Kararlılık

COMPLETE STABILITY OF A NONLINEAR CONTROL SYSTEM*

By J. P. LaSALLE

RIAS, BALTIMORE

Communicated by S. Lefschetz, February 19, 1962

Lur'e initiated the study of the asymptotic stability of an automatic control (closed loop) system with only one nonlinear element. The differential equations of the control system are of the form

$$\dot{x} = Ax + f(\sigma) \quad (1)$$

$$\dot{\sigma} = c'x - rf(\sigma),$$

where x is an n -vector, σ is a scalar (a real number), A is an $n \times n$ constant matrix, b and c are constant n -vectors (the prime is used to denote transpose), and r is a real number. The function $f(\sigma)$ is real-valued, continuous for all σ , and

$$\sigma f(\sigma) > 0 \quad \text{for } \sigma \neq 0. \quad (2)$$

In his study of the stability of such a control system, Lur'e used a Liapunov function of the form

$$V(x, \sigma) = x'Bx + \int_0^\sigma f(s)ds, \quad (3)$$

where B is positive definite ($B > 0$). He then gave conditions on the parameters of the system that reduce $\dot{V}$ to the form

$$\dot{V} = -x'Cx - [d'x + \sqrt{r}f(\sigma)]^2, \quad (4)$$

Soru: Sürekli zaman sistemi için denge noktalarını nasıl buluruz?

$$\dot{x} = f(x)$$

$$0 = f(x_d)$$

Soru: Ayrık zaman sistemi için denge noktalarını nasıl buluruz?

$$x' = f(x)$$

$$x_d = f(x_d)$$

Sürekli Zaman Hopfield Ağına Kararlılık Analizi

Lyapunov'un 2. yöntemi

Hatırlatma

Tanım: Lyapunov Fonksiyonu

$$V(x) > 0, \quad \forall x \in B_r(x_d)$$

$$V(x) \text{ Lyapunov Fonksiyonudur} \Leftrightarrow V(x) \in C^1$$

$$V(x_d) = 0$$

Teorem: $V(x)$ Lyapunov Fonksiyonu olmak üzere, x_d denge noktasının kararlı olması için yeter koşul $\forall x \in B_r$ için $V(x) \leq 0$ olmasıdır.

Enerji Fonksiyonunu Lyapunov Fonksiyonu olarak seçebilir miyiz?

$$E(x) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ji} x_i x_j + \sum_{j=1}^n \frac{1}{R_j} \int_0^{x_j} \varphi^{-1}(x) dx - \sum_{j=1}^n I_j x_j$$

Sizce koşulları sağlıyor mu?

Buradaki büyüklükler nasıl değerler alıyor?

$$C_j \dot{v}_j = -\frac{v_j}{R_j} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n w_{ji} \varphi_i(v_i) + I_j, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_j(t) = \varphi_j(v_j(t)) \quad \leftarrow \text{Dikkat!!!}$$

Türevine de bakalım.....

Ancak türev çözümler boyunca olan türev

9

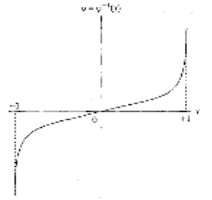
$$E(x) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ji} x_i x_j + \sum_{j=1}^n \frac{1}{R_j} \int_0^{x_j} \varphi^{-1}(x) dx - \sum_{j=1}^n I_j x_j$$

$$\frac{dE}{dt} = -\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n w_{ji} x_i \dot{x}_j + \sum_{j=1}^n \frac{1}{R_j} v_j \dot{x}_j - \sum_{j=1}^n I_j \dot{x}_j$$

$$\frac{dE}{dt} = -\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n w_{ji} x_i - \frac{v_j}{R_j} + I_j \right) \frac{dx_j}{dt}$$

$$C_j \dot{v}_j = -\frac{v_j}{R_j} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n w_{ji} \varphi_i(v_i) + I_j, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\frac{dE}{dt} = -\sum_{j=1}^n C_j \left(\frac{dv_j}{dt} \right) \frac{dx_j}{dt} \quad \begin{matrix} v_j(t) = \varphi^{-1}(x_j(t)) \\ \frac{dv_j(t)}{dt} = \frac{d(\varphi^{-1}(x_j(t)))}{dx_j} \frac{dx_j}{dt} \end{matrix}$$



$$\frac{dE}{dt} = -\sum_{j=1}^n C_j \left(\frac{dx_j}{dt} \right)^2 \frac{d(\varphi^{-1}(x_j(t)))}{dx_j} \leq 0, \quad \forall x_j$$

Monoton artan fonksiyon
Tam kararlı, neden?

Ayrık Zaman Hopfield Ağının Kararlılık Analizi

Dinamik Sistem:

$$x_j(k+1) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n w_{ji} x_i(k) + I_j\right) \quad \varphi(v(k)) = \begin{cases} 1 & v(k) > 0 \\ 1 & v(k) = 0, \quad x(k) = 1 \\ -1 & v(k) = 0, \quad x(k) = -1 \\ -1 & v(k) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 & w_{12} & \dots & w_{1n} \\ w_{21} & 0 & \dots & w_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n1} & w_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} \right)$$

$$x' = \varphi(Wx + I)$$

$$E(x) = -\frac{1}{2} x^T W x - x^T I$$

Dinamik sistemin
çalışması bu yapıdadır.

Ayrık zaman modeli, her anda değişen durum sayısına bağlı olarak farklı şekillerde ele alınır: senkron $\rightarrow$ paralel
asenkron $\rightarrow$ seri

11

Sürekli zamanda enerji fonksiyonunun çözümler boyunca olan türevine bakmıştık, şimdi ayrık zamandayız türev yerine ne ele alınacak?

$$E(x(k+1)) - E(x(k)) \triangleq \Delta E(x)$$

Asenkron Çalışma: n bileşenden sadece biri değişiyor. Bu durumda $x(k+1) - x(k) \triangleq \Delta x$ 'nin nasıl değiştiğine dikkat edelim

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_j(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \varphi(v(k)) \\ x_n(k) \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad x_j(k+1) - x_j(k) \triangleq \Delta x_j$$

$$E(x) = -\frac{1}{2} x^T W x - x^T I$$

$$\Delta E(x) = -\frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n w_{ji} x_i(k) + \sum_{p=1}^n w_{pj} x_p(k) \right] \Delta x_j - w_{jj} \Delta x_j^2 - I_j \Delta x_j$$

12

$$W^T = W$$

$$\Delta E(x) = - \left[\sum_{i=1}^n w_{ji} x_i(k) + I_j \right] \Delta x_j - w_{jj} \Delta x_j^2$$

$$x_j(k+1) = \varphi \left(\sum_{i=1}^n w_{ji} x_i(k) + I_j \right) \quad \varphi(v(k)) = \begin{cases} 1 & v(k) > 0 \\ 1 & v(k) = 0, \quad x(k) = 1 \\ -1 & v(k) = 0, \quad x(k) = -1 \\ -1 & v(k) < 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \left[\sum_{i=1}^n w_{ji} x_i(k) + I_j \right] \Delta x_j \geq 0$$

$$\rightarrow \begin{aligned} \Delta E(x) &\leq 0, & w_{jj} &\geq 0 \\ \Delta E(x) &= 0, & \Delta x &= 0 \end{aligned}$$

Asenkron çalışan ayırık Hopfield'de tam kararlı

13

Hopfield ağını kullanacağımız uygulamalar

- Amaç:** 1) Durum uzayındaki dinamik davranışı sonlu sayıdaki kararlı denge noktası ile belirlenen fiziksel sistem, çağrışımlı bellek olarak tasarlanabilir.
2) Aynı sistem, bir optimizasyon problemine ilişkin amaç ölçütünü azaltacak şekilde tasarlanabilir.

- Yapılan:** 1) Bellekte saklanacak örüntüler dinamik sistemin kararlı denge noktalarına karşılık düşecek şekilde tam kararlı dinamik sistem tasarlanıyor.

$$x^{(k)} \Big|_{k=1}^P \equiv x_d^{(k)} \Big|_{k=1}^P$$

- 2) Kısıtlı optimizasyon problemi Lagrange çarpanları yöntemi ile kısıtsız optimizasyon problemine dönüştürülür:

$$\min_{\substack{g(x) \geq 0 \\ h(x) = 0}} f(x) \rightarrow \min F(x) = f(x) + \lambda_\alpha \|f_\alpha(g(x))\| + \lambda_\beta \|f_\beta(h(x))\|$$

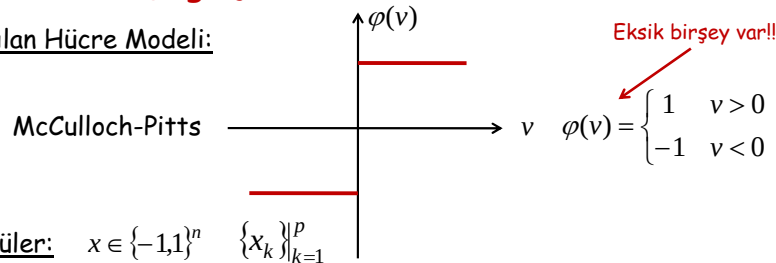
Optimizasyon probleminin amaç ölçütü, Hopfield ağına ilişkin "Enerji Fonksiyonuna" denk alınır $F(x) = E(x)$

Hopfield ağına ilişkin parametreler, W, I, R, C belirlenerek dinamik sistem tasarlanır.

14

Ayrık Zaman Hopfield Ağı ile Çağrışımlı Bellek Tasarımı

Kullanılan Hücre Modeli:



Örüntüler: $x \in \{-1, 1\}^n \quad \{x_k\}_{k=1}^P$

1. Aşama: Belleğin Oluşturulması

n boyutlu, p tane veriden yararlanarak belleği oluşturmak için ağırlıklar belirlenmeli

$$w_{ji} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^p x_i^{(k)} x_j^{(k)}, \quad i \neq j$$

- Her nöronun çıkışı diğer nöronların girişine bağlı
- kendisine geribesleme yok
- ağırlık matrisi simetrik

15

Ağırlıklar önceden hesaplanabilir veya

$$w_{ji}(k+1) = \alpha w_{ji}(k) + (1-\alpha)x_i(k)x_j(k), \quad 0 < \alpha < 1 \text{ ile belirlenebilir.}$$

2. Aşama: Anımsama

$$\text{Dinamik yapı: } x(k+1) = \varphi(v(k)) = \varphi(Wx(k))$$

Verilen bir ilk koşul için durumlar dinamik yapı gereği senkron veya asenkron yenilenir Neye karşılık düşüyor?

Tüm nöronlar için $x(k+1) = x(k)$ olduğunda bellekte saklanan örüntülerden birine karşılık düşen bir kararlı düğüm noktasına erişilir.

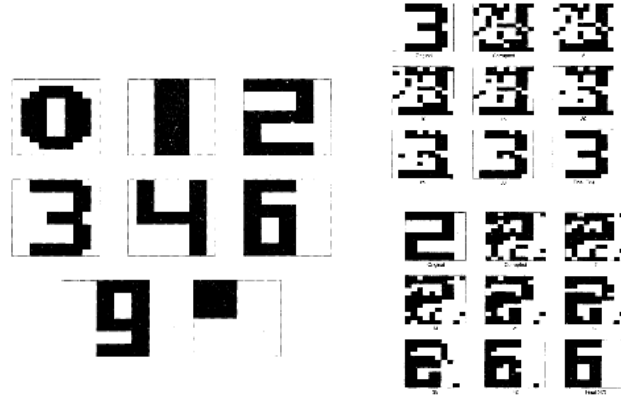
Örnek:

$$\{x_k\}_{k=1}^P = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

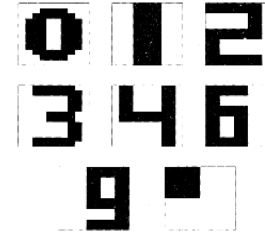
16

Bazı Sorular

- Gerçekten de belirlenen ağırlıklar ile istenilen kararlı denge noktalarına erişmemizi sağlayacak dinamik sistem yaratıldı mı?
- Eğer evet ise, bir bozulmuş veya eksik örüntü ile başlayarak bu örüntünün bellekteki aslına erişilebilir mi?
- Herhangi bir ilk ilk koşul ile başlanıldığında ağıla ilişkin dinamik hangi kararlı durum çözümünü verecek ?
- Küçük hata ile kaç örüntü belleğe yerleştirilebilir?



17



18

Hopfield Ağı yakınsıyor, ama nereye?

$$x_j(k+1) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n w_{ji}x_i(k) + I_j\right)$$

$$x_j^d = \varphi\left(\sum_{i=1}^n w_{ji}x_i^d + I_j\right)$$

Ağırlıkları yerleştirelim: $x_j^d = \varphi\left(\frac{1}{n} \sum_{j \neq i} \sum_{k=1}^p x_i^{(k)} x_j^{(k)} x_i^d + I_j\right)$

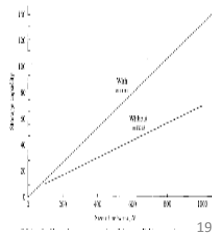
$$= \varphi\left(\frac{1}{n} x_i^d \sum_{j \neq i} (x_i^d)^2 + \frac{1}{n} \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq p} x_i^{(k)} x_j^{(k)} x_i^d + I_j\right)$$

$$x_j^d = \varphi\left(\frac{n-1}{n} x_j^d + \delta_j^d\right)$$

n büyük ise

$$x_j^d = \varphi(x_j^d + \delta_j^d)$$

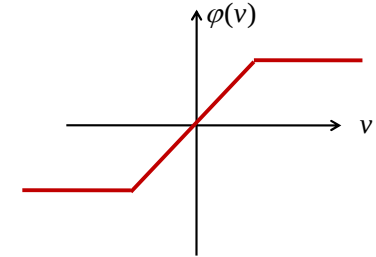
p > 0.38n ise bellek anlamsızlaşıyor



19

Sürekli Zaman Hopfield Ağı ile Çağrışımlı Bellek Tasarımı

$$\dot{x}_i(t) = \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^n w_{ij} \varphi(x_j) + I_i$$



Ayrık zaman Hopfield ağındaki gibi ağırlıklar belirlenir ve diferansiyel Denklem takımı çözülür.

20