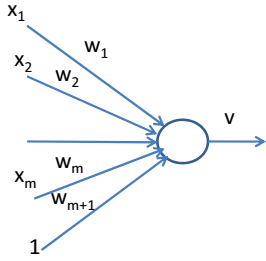


Hatırlatma

## Sinir Hücresi

McCulloch-Pitts



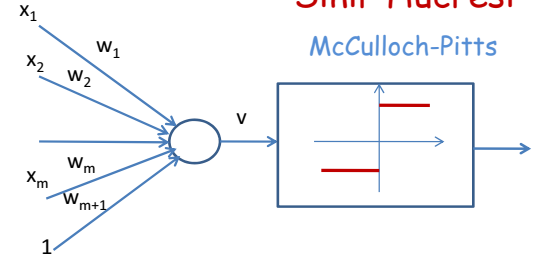
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \\ w_{m+1} \end{bmatrix} \rightarrow [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_m \ w_{m+1}]$$

1

Hatırlatma

## Sinir Hücresi

McCulloch-Pitts



$$v = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_m \ w_{m+1}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow v = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_m x_m + w_{m+1} \cdot 1$$

$$y = \varphi(v) = \begin{cases} 1 & v \geq 0 \\ -1 & v < 0 \end{cases}$$

2

Daha gerçekçi sinir hücresi modeli var mı? Hodgkin-Huxley Modeli

$$\dot{v} = \frac{1}{C_M} [I - \bar{g}_{Na} m^3 h (v - v_{Na}) - \bar{g}_K n^4 (v - v_K) - \bar{g}_l (v - v_l)]$$

$$\dot{m} = \alpha_m(v)(1 - m) - \beta_m(v)m$$

$$\dot{h} = \alpha_h(v)(1 - h) - \beta_h(v)h$$

$$\dot{n} = \alpha_n(v)(1 - n) - \beta_n(v)n$$

$$\alpha_m(v) = \frac{0.1(v + 25)}{e^{[(v+25)/10]} - 1}$$

$$\beta_m(v) = 4e^{(v/18)}$$

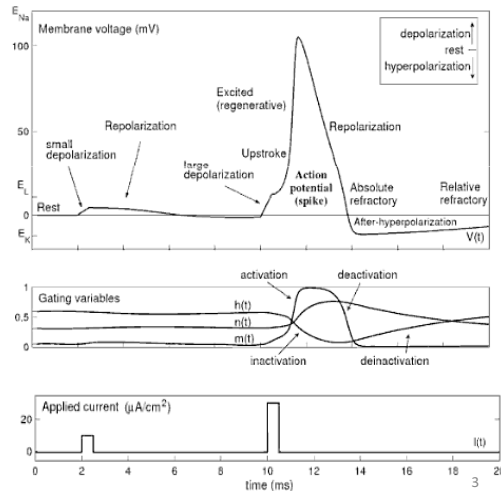
$$\alpha_h(v) = 0.07e^{(v/20)}$$

$$\beta_h(v) = \frac{1}{e^{[(v+30)/10]} - 1}$$

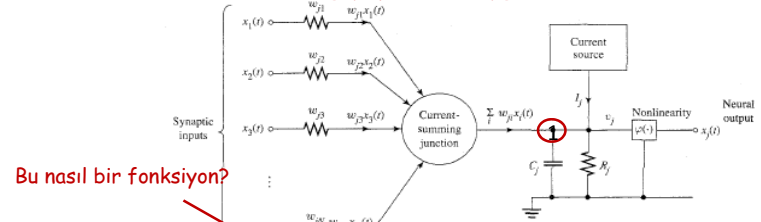
$$\alpha_n(v) = \frac{0.01(v + 10)}{e^{[(v+10)/10]} - 1}$$

$$\beta_n(v) = 0.125e^{(v/80)}$$

Bu hücre modelini kullanmak çok uygun değil, sizce neden?



Gerçekçi ve ağ yapısı için uygulanabilir hücre modeli



Bu nasıl bir fonksiyon?

1 Düğümü için KAY

Nasıl yazıldı?

$$C_j \frac{dv_j(t)}{dt} + \frac{v_j(t)}{R_j} = \sum_{i=1}^N w_{ji} x_i(t) + I_j$$

$$x_j(t) = \varphi(v_j(t)), \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Daha önce yazdığınız bir denklem takımına benziyor?

Tüm hücreler için denklemleri biraz düzenleme ile yazarsak...

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \vdots \\ \dot{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_2 C_2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_n C_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n1} & w_{n2} & \dots & w_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(v_1) \\ \varphi(v_2) \\ \vdots \\ \varphi(v_n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix}$$

Durum Denklemleri

4

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad \text{Durum de\u011fi\u015fenleri} \quad \dot{v} = Tv + W\varphi(v) + I$$

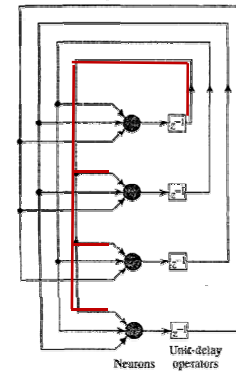
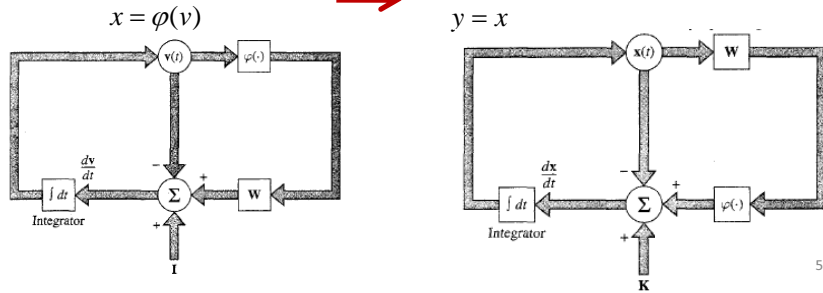
$$y = Cx \quad \text{Giri\u015fler} \quad u \quad I \quad \text{\u00c7ıkı\u015flar} \quad y \quad x \quad x = \varphi(v)$$

Bir lineer d\u00f6n\u00fc\u015fm ile denklemler biraz daha farklı yazılabilir....

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \\ \vdots & \vdots \\ w_{n1} & w_{n2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\dot{v} = Tv + W\varphi(v) + I \quad \hat{I} \triangleq W^{-1}I$$

$$\dot{x} = Tx + \varphi(Wx) + \hat{I}$$



## Hopfield A\u011fı

Ayrık zaman

$$x' = \varphi(Wx + I)$$

S\u00fcrekli zaman

$$C\dot{x} = -Rx + W\varphi(x) + I$$

$$E(x) = -\frac{1}{2}x^T Wx - x^T I \quad E(x) = -\frac{1}{2}x^T Wx + \underbrace{(\hat{R}^T \int_0^x \varphi^{-1}(x) dx)}_0$$

$$\varphi(v) = \begin{cases} 1 & v > 0 \\ -1 & v < 0 \end{cases}$$

$$\varphi(v) = \tanh\left(\frac{av}{2}\right) = \frac{1 - e^{-av}}{1 + e^{-av}}$$

$$\int_0^x \varphi^{-1}(x) dx$$

Dinamik sistemin kalıcı \u00e7\u00f6z\u00fcm\u00fcn\u00fc incelemek i\u00e7in \u00f6zellikle denge noktalarının kararlılı\u011fına bakaca\u011fız

Denge noktasının kararlılı\u011fı  $\rightarrow$  Lyapunov Anlamında kararlılık

Lineer olmayan sistemin kararlılı\u011fı  $\rightarrow$  Tam Kararlılık

### COMPLETE STABILITY OF A NONLINEAR CONTROL SYSTEM\*

BY J. P. LASALLE

RIAS, BALTIMORE

Communicated by S. Lefschetz, February 19, 1962

Lur'e<sup>1</sup> initiated the study of the asymptotic stability of an automatic control (closed loop) system with only one nonlinear element. The differential equations of the control system are of the form

$$\dot{x} = Ax + f(\sigma) \quad (1)$$

$$\dot{\sigma} = c'x - rf(\sigma),$$

where  $x$  is an  $n$ -vector,  $\sigma$  is a scalar (a real number),  $A$  is an  $n \times n$  constant matrix,  $b$  and  $c$  are constant  $n$ -vectors (the prime is used to denote transpose), and  $r$  is a real number. The function  $f(\sigma)$  is real-valued, continuous for all  $\sigma$ , and

$$\sigma f(\sigma) > 0 \quad \text{for } \sigma \neq 0. \quad (2)$$

In his study of the stability of such a control system, Lur'e used a Liapunov function of the form

$$V(x, \sigma) = x'Bx + \int_0^\sigma f(s) ds, \quad (3)$$

where  $B$  is positive definite ( $B > 0$ ). He then gave conditions on the parameters of the system that reduce  $\dot{V}$  to the form

$$\dot{V} = -x'Cx - [d'x + \sqrt{r}f(\sigma)]^2, \quad (4)$$

Soru: S\u00fcrekli zaman sistemi i\u00e7in denge noktalarını nasıl buluruz?

$$\dot{x} = f(x)$$

$$0 = f(x_d)$$

Soru: Ayrık zaman sistemi i\u00e7in denge noktalarını nasıl buluruz?

$$x' = f(x)$$

$$x_d = f(x_d)$$

S\u00fcrekli Zaman Hopfield A\u011fının Kararlılık Analizi

Lyapunov'un 2. y\u00f6ntemi

Hatırlatma

Tanım: Lyapunov Fonksiyonu

$$V(x) > 0, \quad \forall x \in B_r(x_d)$$

$$V(x) \text{ Lyapunov Fonksiyonudur} \Leftrightarrow V(x) \in C^1$$

$$V(x_d) = 0$$

Teorem:  $V(x)$  Lyapunov Fonksiyonu olmak \u00fczere,  $x_d$  denge noktasının kararlı olması i\u00e7in yeter ko\u015ful  $\forall x \in B_r$  i\u00e7in  $V(x) \leq 0$  olmasıdır.

Enerji Fonksiyonunu Lyapunov Fonksiyonu olarak seçebilir miyiz?

$$E(x) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ji} x_i x_j + \sum_{j=1}^n \frac{1}{R_j} \int_0^{x_j} \varphi^{-1}(x) dx - \sum_{j=1}^n I_j x_j$$

Sizce koşulları sağlıyor mu?

Buradaki büyüklükler nasıl değerler alıyor?

$$C_j \dot{v}_j = -\frac{v_j}{R_j} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n w_{ji} \varphi_i(v_i) + I_j, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_j(t) = \varphi_j(v_j(t)) \quad \leftarrow \text{Dikkat!!!}$$

Türevine de bakalım.....

Ancak türev çözümler boyunca olan türev

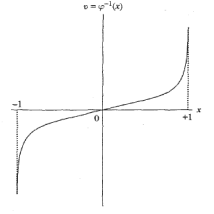
$$E(x) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ji} x_i x_j + \sum_{j=1}^n \frac{1}{R_j} \int_0^{x_j} \varphi^{-1}(x) dx - \sum_{j=1}^n I_j x_j$$

$$\frac{dE}{dt} = -\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n w_{ji} x_i \dot{x}_j + \sum_{j=1}^n \frac{1}{R_j} v_j \dot{x}_j - \sum_{j=1}^n I_j \dot{x}_j$$

$$\frac{dE}{dt} = -\sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n w_{ji} x_i - \frac{v_j}{R_j} + I_j \right) \frac{dx_j}{dt}$$

$$C_j \dot{v}_j = -\frac{v_j}{R_j} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n w_{ji} \varphi_i(v_i) + I_j, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\frac{dE}{dt} = -\sum_{j=1}^n C_j \left( \frac{dv_j}{dt} \right) \frac{dx_j}{dt} \quad \begin{matrix} v_j(t) = \varphi^{-1}(x_j(t)) \\ \frac{dv_j(t)}{dt} = \frac{d(\varphi^{-1}(x_j(t)))}{dx_j} \frac{dx_j}{dt} \end{matrix}$$



$$\frac{dE}{dt} = -\sum_{j=1}^n C_j \left( \frac{dx_j}{dt} \right)^2 \frac{d(\varphi^{-1}(x_j(t)))}{dx_j} \leq 0, \quad \forall x_j$$

Monoton artan fonksiyon  
Tam kararlı, neden?

### Ayrık Zaman Hopfield Ağının Kararlılık Analizi

Dinamik Sistem:

$$x_j(k+1) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n w_{ji} x_i(k) + I_j\right) \quad \varphi(v(k)) = \begin{cases} 1 & v(k) > 0 \\ 1 & v(k) = 0, \quad x(k) = 1 \\ -1 & v(k) = 0, \quad x(k) = -1 \\ -1 & v(k) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = \varphi\left( \begin{bmatrix} 0 & w_{12} & \dots & w_{1n} \\ w_{21} & 0 & \dots & w_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n1} & w_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} \right)$$

$$x' = \varphi(Wx + I)$$

$$E(x) = -\frac{1}{2} x^T W x - x^T I$$

Dinamik sistemin çalışması bu yapıdadır.

Ayrık zaman modeli, her anda değişen durum sayısına bağlı olarak farklı şekillerde ele alınır: senkron  $\rightarrow$  paralel, asenkron  $\rightarrow$  seri

Sürekli zamanda enerji fonksiyonunun çözümler boyunca olan türevine bakmıştık, şimdi ayrık zamandayız türev yerine ne ele alınacak?

$$E(x(k+1)) - E(x(k)) \triangleq \Delta E(x)$$

**Asenkron Çalışma:** n bileşenden sadece biri değişiyor. Bu durumda  $x(k+1) - x(k) \triangleq \Delta x$ 'nin nasıl değiştiğine dikkat edelim

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad x_j(k+1) - x_j(k) \triangleq \Delta x_j$$

$$E(x) = -\frac{1}{2} x^T W x - x^T I$$

$$\Delta E(x) = -\frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^n w_{ji} x_i(k) + \sum_{p=1}^n w_{pj} x_p(k) \right] \Delta x_j - w_{jj} \Delta x_j^2 - I_j \Delta x_j$$

$$W^T = W$$

$$\Delta E(x) = -\left[\sum_{i=1}^n w_{ji}x_i(k) + I_j\right]\Delta x_j - w_{jj}\Delta x_j^2$$

$$x_j(k+1) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n w_{ji}x_i(k) + I_j\right) \quad \varphi(v(k)) = \begin{cases} 1 & v(k) > 0 \\ 1 & v(k) = 0, \quad x(k) = 1 \\ -1 & v(k) = 0, \quad x(k) = -1 \\ -1 & v(k) < 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \left[\sum_{i=1}^n w_{ji}x_i(k) + I_j\right]\Delta x_j \geq 0$$

$$\rightarrow \begin{aligned} \Delta E(x) &\leq 0, & w_{jj} &\geq 0 \\ \Delta E(x) &= 0, & \Delta x &= 0 \end{aligned}$$

Asenkron çalışan ayırık Hopfield'de tam kararlı

13

## Hopfield ağını kullanacağımız uygulamalar

- Amaç:** 1) Durum uzayındaki dinamik davranışı sonlu sayıdaki kararlı denge noktası ile belirlenen fiziksel sistem, çağrışımlı bellek olarak tasarlanabilir.  
2) Aynı sistem, bir optimizasyon problemine ilişkin amaç ölçütünü azaltacak şekilde tasarlanabilir.

- Yapılan:** 1) Bellekte saklanacak örüntüler dinamik sistemin kararlı denge noktalarına karşılık düşecek şekilde tam kararlı dinamik sistem tasarlanıyor.

$$x^{(k)} \Big|_{k=1}^P \equiv x_d^{(k)} \Big|_{k=1}^P$$

- 2) Kısıtlı optimizasyon problemi Lagrange çarpanları yöntemi ile kısıtsız optimizasyon problemine dönüştürülür:

$$\min_{\substack{g(x) \geq 0 \\ h(x) = 0}} f(x) \rightarrow \min F(x) = f(x) + \lambda_\alpha \|f_\alpha(g(x))\| + \lambda_\beta \|f_\beta(h(x))\|$$

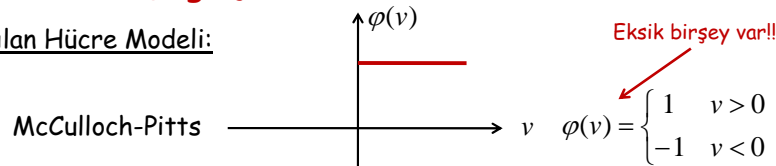
Optimizasyon probleminin amaç ölçütü, Hopfield ağına ilişkin "Enerji Fonksiyonuna" denk alınır  $F(x) = E(x)$

Hopfield ağına ilişkin parametreler,  $W, I, R, C$  belirlenerek dinamik sistem tasarlanır.

14

## Ayrık Zaman Hopfield Ağı ile Çağrışımlı Bellek Tasarımı

Kullanılan Hücre Modeli:



Örüntüler:  $x \in \{-1, 1\}^n \quad \{x_k\}_{k=1}^P$

1. Aşama: Belleğin Oluşturulması

$n$  boyutlu,  $p$  tane veriden yararlanarak belleği oluşturmak için ağırlıklar belirlenmeli

$$w_{ji} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^p x_i^{(k)} x_j^{(k)}, \quad i \neq j$$

- Her nöronun çıkışı diğer nöronların girişine bağlı
- kendisine geribesleme yok
- ağırlık matrisi simetrik

15

Ağırlıklar önceden hesaplanabilir veya

$$w_{ji}(k+1) = \alpha w_{ji}(k) + (1-\alpha)x_i(k)x_j(k), \quad 0 < \alpha < 1 \quad \text{ile belirlenebilir.}$$

2. Aşama: Anımsama

$$\text{Dinamik yapı: } x(k+1) = \varphi(v(k)) = \varphi(Wx(k))$$

Verilen bir ilk koşul için durumlar dinamik yapı gereği senkron veya asenkron yenilenir  $\rightarrow$  Neye karşılık düşüyor?

Tüm nöronlar için  $x(k+1) = x(k)$  olduğunda bellekte saklanan örüntülerden birine karşılık düşen bir kararlı düğüm noktasına erişilir.

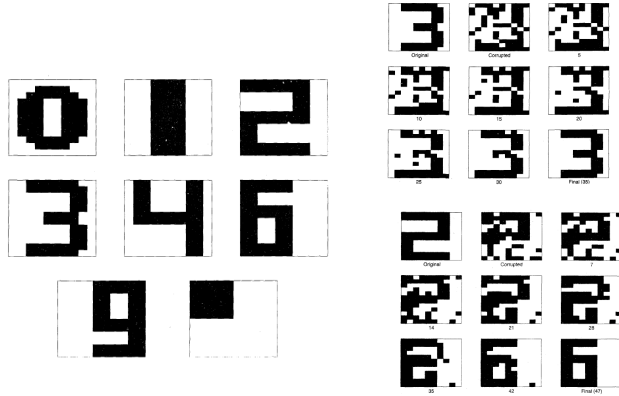
Örnek:

$$\{x_k\}_{k=1}^P = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

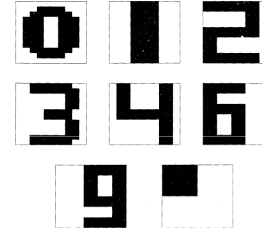
16

### Bazı Sorular

- Gerçekten de belirlenen ağırlıklar ile istenilen kararlı denge noktalarına erişmemizi sağlayacak dinamik sistem yaratıldı mı?
- Eğer evet ise, bir bozulmuş veya eksik örüntü ile başlayarak bu örüntünün bellekteki aslına erişilebilir mi?
- Herhangi bir ilk koşul ile başlanıldığında ağa ilişkin dinamik hangi kararlı durum çözümünü verecek ?
- Küçük hata ile kaç örüntü belleğe yerleştirilebilir?



17



18

### Hopfield Ağı yakınsıyor, ama nereye?

$$x_j(k+1) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n w_{ji}x_i(k) + I_j\right)$$

$$x_j^d = \varphi\left(\sum_{i=1}^n w_{ji}x_i^d + I_j\right)$$

Ağırlıkları yerleştirelim:  $x_j^d = \varphi\left(\frac{1}{n} \sum_{j \neq i} \sum_{k=1}^p x_i^{(k)} x_j^{(k)} x_i^d + I_j\right)$

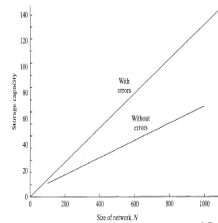
$$= \varphi\left(\frac{1}{n} x_i^d \sum_{j \neq i} (x_i^d)^2 + \frac{1}{n} \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq p} x_i^{(k)} x_j^{(k)} x_i^d + I_j\right)$$

$$x_j^d = \varphi\left(\frac{n-1}{n} x_j^d + \delta_j^d\right)$$

n büyük ise

$$x_j^d = \varphi(x_j^d + \delta_j^d)$$

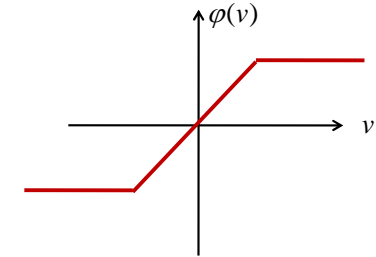
p > 0.38n ise bellek anlamsızlaşıyor



19

### Sürekli Zaman Hopfield Ağı ile Çağrışımlı Bellek Tasarımı

$$\dot{x}_i(t) = \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^n w_{ij} \varphi(x_j) + I_i$$



Ayrık zaman Hopfield ağındaki gibi ağırlıklar belirlenir ve diferansiyel Denklem takımı çözülür.

20