**LAGRANJ FONKSİYONU**

**EŞİTLİK KISITLAR**

**Tanım 1.** “ *z* = *f* (*x,y*) nin *g* (*x,y*) *=* 0 kısıtlaması altında maksimum (veya minimum) değerini

bulunuz.” biçiminde ifade edilmiş problemlere **kısıtlamalı maksimizasyon (veya**

**minimizasyon) problemleri** denir. *g* (*x,y*) *=* 0 koşuluna **problem kısıtı** denir*.*

“ *z* = *f* (*x,y*) nin *g* (*x,y*) *=* 0 kısıtlaması altında maksimum (veya minimum) değerini

bulunuz.” biçiminde ifade edilmiş bir kısıtlamalı maksimizasyon veya minimizasyon

probleminin çözümü için

*F*(*x*, *y*,) *f* (*x*, *y*) *g*(*x*, *y*)

tanımlanır.

**Tanım 2.** Yukarıda tanımlanan *F* fonksiyonuna ilgili problemin **Lagrange Fonksiyonu**, ve

fonksiyonu tanımlayan ifadedeki sembolüne **Lagrange Çarpanı** denir.

***L(X,λ)=f(X)- λg(X)*** lagranj fonksiyonu

*= 0 ve =0 denklemleri, g(X)=0 kısıtına göre f(x) in sabit noktalarını belirlemek için gerekli koşulları verir.*

*Burada*

*-*Optimum noktayı bulmak için birinci kisi türevler alınır sıfıra eşitlenir.

-Bulunan optimum noktanın pozitif(minimum) veya negatif (maksimum) olup olmadığını görmek için ,ikinci kismi türevler (hessian matrisi) değerlendirilir.

optimizasyon problemlerinde yeterliliğin sağlandığını görmek için ikinci türeve bakılır,Lagranj fonksiyonunun ikinci türevinin işareti,lagranj fonksiyonunun sınırlı hessian matrisinin işaretine bağlıdır.

*-*Karekteristik kökleri kontrol edilir veya temel minör için determinant testi uygulanır.

Tüm i ve j ler için

ve olup sınırlı hessian matrisi olarak adlandırılır.

Lagranj fonksiyonu ***L(X,λ)*** için ( ) sabit noktası ve ( ) da değerlendirilmiş sınırlı hessian matrisi verildiğinde ,

1-(2m+1) derecesinden temel majör determinantla başlayan ve nin son (n-m) adet temel minör determinantı ile başlayan almaşık bir işaret kalıbı oluşturursa maksimum noktadır .

2-(2+1) derecesinden temel minör determinantla başlayarak nin son (n-m) adet temel minör determinantı işaretini taşırsa minimum noktadır .

Bu şartlar bir ekstremum noktayı (uç noktayı) tanımlamak için yeterlidir fakat gerek değildir. Bir başka deyişle bir sabit nokta yukarıdaki şartları sağlamaksızın bir uç nokta (ekstremum nokta) olabilir.

Bu metodun dezavantajı işlem akışının hesaplama olarak pratik kararlar için uygun

olmayışıdır.



Matrisini ( ) sabit noktasında değerlendirilen matris olarak tanımlayalım.Burada bilinmeyen bir parametredir. determinantının ele alalım

= 0 polinomunun (n-m) adet gerçek kökü olan her

1- bir maksimum nokta ise negatif

2- bir minimum nokta ise pozitif olmalıdır.

Örnek Çözüm.

Min

Kısıtlar

Lagrange Fonksiyonu

 değişken sayısı

Tüm ve ler için

 olduğu için

Kısıt, yani fonksiyonunun ve ’e göre kısmi türevi alınarak elde edilir.

 değeri aşağıdaki gibi hesaplanır ;

 değerini hesaplamaya devam edebilmek için değerinin bulunması gerekiyor;

 ‘i bulalım

 için

 için sırasıyla kısmi türev alınır.

 için

Buna göre ;

 için

 için

Denklemler çözülerek değerler bulunur ;

 olduğuna göre olur.

 için;

 olduğundan, sabit noktaların minimum olması için son temel minör determinantın işaretleri olmak zorundadır. Böylece;

 için;

Değerler Hessian matrisinde yerine konur;

 nın minörü ;

 için;

 nın minörü ;

 için;

 nın minörü ;

Sonuç olarak ve ’nin minimum noktalardır. ise ne minimum ne maksimum olma koşullarını sağlayamadı. Bu durum, ’ün uç nokta olmadığı anlamına gelmez. Çünkü verilen koşullar yalnızca yeterli koşullardır.

Uç noktaları belirlemek için hem gerekli hemde yeterli başka koşullar vardır.

Polinomun köklerini kullanan diğer yeter koşulu göstermek için;

 için

 olur .Bu =2 ya da sonuçlarını verir.Her ikisinde de olduğu için =(2,2,1) minimum noktadır.

 için

 olup bir önceki durumla aynıdır.

Bu yüzden =(2,-2,1) minimum noktadır.

Sonunda için

 =(2.8,0,1.4) ün uç nokta olmadığı anlamına gelir.

EŞİTSİZLİK KISITLARI

Lagranj yönteminin genişletilmesi





ÖRNEK

Maks.Z=

KISITLAR

KISITLANMAMIŞ OPTİMUM

=-4(2=0

Türevlerinin sıfıra eşitlenmesiyle elde edilir.Bu da ()=( verir.Bu çözüm
 kısıtını ihlal ettiği için ,kısıtların bir defada bir tanesi aktif hale gelir.

 alalım.Lagranj Fonksiyonu

L( şeklindedir.

Böylece

Bu çözüm noktasını ( ) verir ve yeterli koşulla bunun bir maksimim olduğu gösterilebilir..Bu nokta diğer tüm kısıtları sağladığı için prosedir durdurulur; ( ) probleme lokal optimum çözümdür(geri kalan kısıtlar ve bir defada bir tanesi aktif hale getirildiğinde uygun olmayan çözümler verir.)Amaç değeri ise z=-25 tir.

Maks.Z= fonk. yerine 0, konulduğunda z=-25 elde edilir.

Maks.Z= fonk. yerine 2, 0 konulduğunda z=-2 elde edilir

 ve gibi iki kısıtın kesişim noktası olan ()= (2,0) uygun çözümü z=-2 amaç fonk. Verir.