Diferansiyel Denklemler ve Elektrik – Elektronik Devre Uygulamaları

Book · September 2000

2 authors:

Mehmet Tektaş
BANDIRMA ONYEDİ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ

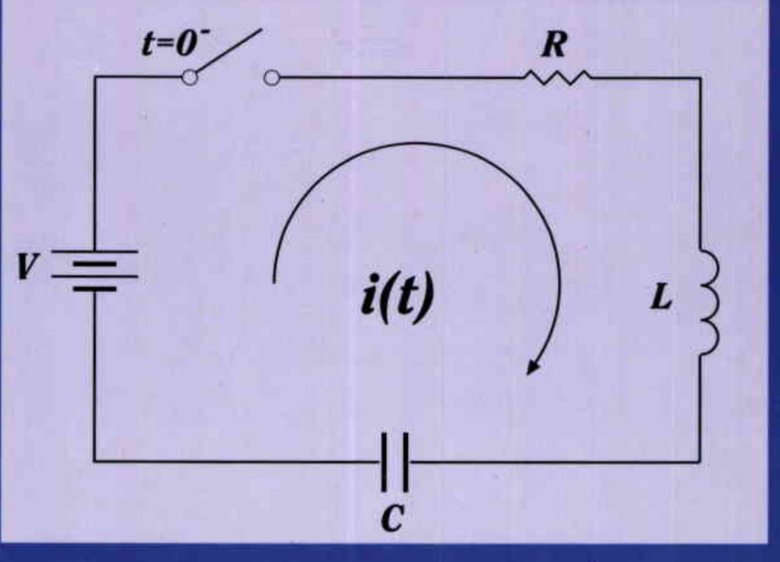
Erhan Akdogan
Yildiz Technical University

Marmara Üniversitesi Yayın No: 694
Teknik Bilimler Meslek Yüksekokulu Yayın No: 3

DİFERANSİYEL DENKLEMLER VE ELEKTRİK-ELEKTRONİK DEVRE UYGULAMALARI

Mehmet Tektaş
Erhan Akdoğan

$$f(x) = a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots\dots + a_1 y' + a_0 y$$



$$V(t) = i(t).R + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt$$

İSTANBUL, 2000

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYIN NO : 694
TEKNİK BİLİMLER MESLEK YÜKSEKOKULU YAYIN NO : 3

DİFERANSİYEL DENKLEMLER VE ELEKTRİK-ELEKTRONİK DEVRE UYGULAMALARI

DİFERANSİYEL DENKLEMLER
LAPLACE DÖNÜŞÜMLERİ
FOURİER SERİLERİ
RLC DEVRELER

Mehmet TEKTAŞ
Erhan AKDOĞAN

İstanbul, 2000

ISBN : 975-400-253-3

Marmara Üniversitesi
Döner Sermaye İşletmesi
Teknik Eğitim Fakültesi
Matbaa Biriminde Basılmıştır

ÖNSÖZ

Okulumuzun Elektrik, Elektronik, Haberleşme ve Biomedikal Cihaz Teknolojisi programlarında Elektronik I-II-III, Güç Elektroniği, Endüstriyel Elektronik, Optoelektronik ve Mekatronik gibi devre analizinin iyi bilinmesini gerektiren dersler verilmektedir. Fakat, verilen temel devre derslerinde öğrencilerin matematik düzeyi gereğince istenilen verim alınamamaktadır. Bu da konuların anlaşılabilirliği ve çözüm yollarını bulmayı kısıtlamaktadır. Bu yüzden öğrencilerimizin karşılaştığı bu sorunları aşmaları için böyle bir eser vücuda getirmeyi amaçladık.

Bu eserin temel özelliği, diferansiyel denklemler gibi matematiğin çok önemli ve bir o kadarda zor olan bir konusunu en basit şekilde öğrenciye yada okuyucuya kavratmayı amaçlamasıdır. Çok sayıda çözümlü örnek ve alıştırmalarla bu konular desteklenmiştir. Diferansiyel denklemlerin, laplace ve fourier dönüşümlerinin elektrik-elektronik devrelerine nasıl uygulandığı kısa fakat yalın ve kolay anlaşılır bir üslupla açıklanmıştır. Bu bağlamda;

Birinci bölümde "Birinci mertebeden diferansiyel denklemler ve diferansiyel denklemlere ait temel kavramlar" ele alınıp çözümlü örneklerle sunulmuştur. İkinci bölümde ise "İkinci ve daha yüksek mertebeden lineer denklemler" ve bunlara ilişkin temel kavramlar ele alınmıştır. Devre analizinde özellikle birinci ve ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemler sıklıkla kullanıldığından bu bölümde ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemler detaylı bir şekilde incelenmiş ve bu iki bölümü kapsayan elektrik-elektronik devre uygulamaları konu anlatımı ve çözümlü örneklerle desteklenmiştir.

Üçüncü bölümdeyse "Laplace Dönüşümleri" anlatılmıştır. Laplace dönüşümleri devre analizinde büyük kolaylıklar sağlamaktadır. Devre analizinde karşılaşılan karmaşık türev ve integral içeren denklemler laplace dönüşümleri yardımıyla çözülebilmektedir. Bu bölüm sonunda da elektrik-elektronik devre uygulamaları verilmiştir. Bölüm 4' te özellikle haberleşme teorisinin ana konularından olan "Fourier Serileri" incelenmiştir. Bölüm 5'te de RLC devrelerinde geçici olaylar incelenmiş ve bol sayıda çözümlü örnekle konu desteklenmiştir.

Özellikle kitabın sonundaki ekler bölümü matematik ve diğer tüm bilim dallarında kullanılan belli başlı tanım, özellik ve formül içeriği ile lisans ve lisansüstü öğrenimi yapan öğrenciler için vazgeçilmez bir kaynak niteliğindedir. Bu kitap meslek yüksekokullarının, teknik eğitim ve mühendislik fakültelerinin ilgili bölümlerinde ders kitabı olarak kullanılabilecek niteliktedir. Bu eserin hazırlanmasında bizden desteklerini esirgemeyen tüm öğretim elemanları ve öğrencilerimize sonsuz şükranlarımızı sunuyoruz.

Göstermiş olduğumuz tüm titizliğe rağmen kitapta çeşitli hatalar olabilir.Kitap hakkındaki tüm görüş ve önerilerinizi aşağıdaki e-posta adresine bildirmeniz temennisiyle...

İstanbul, Eylül 2000

Yrd. Doç. Dr. Mehmet TEKTAŞ
tektas @ marmara.edu.tr

Arş.Gör. Erhan AKDOĞAN
eakdogan @ marmara.edu.tr

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM 1

BİRİNCİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER VE TEMEL KAVRAMLAR

1.1.Giriş

Kainatın kanunları matematik dilinde yazılır. Cebir, çoğu statik problemlerin çözümünde yeterli olmasına karşın, çeşitli denklemler yardımıyla tanımlanan ve değişim içeren problemlerin çözümünde yetersiz kalır. Burada değişimden kasıt **türev'** dir. Örneğin,

$y' = \dfrac{dy}{dx}$ ifadesi **y** bağımlı değişkeninin **x** bağımsız değişkenine göre değişim oranını verir ki bu y'nin **x**'e bağlı bir fonksiyona sahip olduğunu ve **y**'nin **x**'e göre türevinin alınacağı anlamını taşır.

<u>Tanım 1.1</u>: Eğer,verilen bir denklem bilinmeyen bir fonksiyon ve onun bir veya daha çok mertebeden türevlerini içerirse bu denkleme **diferansiyel denklem** denir.

Diferansiyel denklem çalışmasında iki temel prensip amaçlanır. Bunlar:

i) Belirli bir fiziksel durumu tarif edecek diferansiyel denklemi elde etmek.
ii) Bu denklemin uygun çözümünü bulmak.

Bir diferansiyel denklemin **mertebesi** bu denklemin sahip olduğu en yüksek mertebeli türevin derecesidir.

Örneğin:

$$3y'''-2y''+y=0 \rightarrow 3.\text{mertebeden D.D.}$$

$$\frac{dy}{dx}-2xy=0 \quad \rightarrow 1.\text{mertebeden D.D.}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+x^2\frac{d^4y}{dx^4}+x^5y=\cos x \rightarrow 4.\text{mertebeden D.D.}$$

<u>Tanım 1.2:</u> Diferansiyel denklemler temelde iki gruba ayrılırlar. Eğer bir diferansiyel denklemde bağımlı değişken tek bir bağımsız değişken ile ifade ediliyorsa bu diferansiyel denkleme **Adi (bayağı) Diferansiyel Denklem,** bağımlı değişken birden fazla bağımsız değişken içeriyorsa bu diferansiyel denkleme **Kısmi Diferansiyel Denklem** adı verilir.Örneğin;

$$\frac{dy}{dx}-y=2e^x-\sin x \rightarrow 1.\ \text{Mertebeden} \quad \text{Adi D.D.}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{3\partial u}{\partial x}=0 \rightarrow 1.\ \text{Mertebeden} \quad \text{Kısmi D.D.i}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \rightarrow 2.\ \text{Mertebeden} \quad \text{Kısmi D.D.}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}-3x\frac{d^2y}{dx^2}-y=0 \rightarrow \quad 3.\ \text{Mertebeden Adi D.D.}$$

Biz bu kitapta sadece Adi Diferansiyel denklemlerden bahsedeceğimiz için Kısmi Diferansiyel Denklem hakkında şu özet tanımı vermekle yetineceğiz.

Tanım 1.3: Eğer, bir diferansiyel denklem kısmi türevleri içeriyorsa bu denkleme **kısmi diferansiyel denklem** denir. Tersine, türevleri içeren denklemlere de **Adi diferansiyel denklem** denir.

$\left(\frac{d}{dx}\right) \rightarrow$ Bu ifade, x'e göre türevi ifade eder. Diferansiyel denklemin de bir Adi diferansiyel denklem olduğunu gösterir.

$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \rightarrow$ Bu ifade, x'e göre kısmi türevi ifade eder. Diferansiyel denklemde ise kısmi diferansiyel denklemi gösterir.

Sonuç olarak, n. mertebeden bir Adi diferansiyel denklem:

$$\left.\begin{array}{l} F(x, y, y', y'', \ldots\ldots \; y^{(n)}) = 0 \\ \text{veya} \\ F\left(x, y, \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}, \ldots\ldots, \dfrac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 \end{array}\right\} \ldots (1.1)$$

şeklinde gösterilir.Buna göre,

$F(x, y, y') = 0$ veya $= f(x, y, \frac{dy}{dx})$

ifadesine **1. mertebeden Adi Diferansiyel Denklem**, F (x, y, y', y'') = 0 ifadesine **2. mertebeden Adi Diferansiyel Denklem** denir ve bu şekilde devam edilir.

F reel-değerli ve n+2 değişkenli bir fonksiyon olmak üzere,

$F(x, y, y', y'' \ldots\ldots \; y^{(n)}) = 0$ ....

n. mertebeden Adi diferansiyel denkleminin bir çözümü, I aralığı üzerinde tanımlı y=u(x) fonksiyonu olsun. Bunun anlamı, I aralığında her x için;

$F(x, y, y', y'', \ldots\ldots \; y^{(n)}) = 0$

olmasıdır. Yani, y=u(x) fonksiyon (1) nolu diferansiyel denklemi sağlar. Şimdi verilen bir çözümün verilen diferansiyel denklemin çözümü olup olmadığına ilişkin bir örnek yapalım.

Örnek 1.1: $y = 5e^{-2x}$ fonksiyonunun, y'' + 2y = 0 diferansiyel denkleminin

çözümü olduğunu gösteriniz.

Çözüm : $y' = -10\, e^{-2x}$ olur. Buna göre;

$y' + 2y = -10e^{-2x} + 10e^{-2x} = 0$ elde edilir.

Yani, $y = 5.e^{-2x}$ fonksiyonu, y''+2y = 0 diferansiyel denkleminin bir çözümüdür.

1.2 Birinci Mertebeden Diferansiyel Denklemler (Direkt Integral ile çözüm – Başlangıç Değer Problemi)

Eğer bir denklem, bir bağımsız değişken, bir bağımlı değişken ve onun türevinden oluşuyorsa bu denkleme **1. mertebeden adi diferansiyel denklem** denir ve;

$$\left.\begin{aligned} & y' = f(x,y) \\ & \text{veya} \\ & \frac{dy}{dx} = f(x,y) \\ & \text{veya} \\ & F(x,y,y') = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(1.2)}$$

şeklinde gösterilir.Eğer bir diferansiyel denklem,

$$\left.\frac{dy}{dx} = f(x)\right\} \qquad \textbf{(1.3)}$$

şeklinde ifade edilirse, bu tip diferansiyel denklemin çözümü için (1.3) nolu denklemin her iki tarafının integrali alınarak,

$$y = \int f(x)dx + c \qquad \text{(c integral sabiti – keyfi)} \qquad \textbf{(1.4)}$$

(1.3) nolu diferansiyel denklemin genel çözümü bulunur. Probleme bağlı olarak c keyfi sabitinin aldığı her bir değer için (1.3) nolu denklemin **kısmi çözümünü** buluruz. Eğer, **$G'(x)=f(x)$** alırsak;

$$y(x) = G(x) + c \qquad \textbf{(1.5)}$$

olur. Eğer **$y(x_0)=y_0$** başlangıç koşulunu bu denklemde sağlamak istersek, (x yerine x_0, y yerine y_0 yazılması), **$c=y_0-G(x_0)$** bulunur. c'nin bu değeri (1.4) nolu denklemde yerine yazılırsa, (1.3) nolu denklemin kısmi çözümünü buluruz. Bir diferansiyel denklemin başlangıç koşulları verilmezse elde edilen çözüme **genel çözüm** denir.

Eğer bir diferansiyel denklemin genel çözümü değilde problemin tipine bağlı olarak verilen kısmi çözümü istenirse, yani bir problemde bağımlı değişken ve türevlerinin bazı noktalarda değerleri biliniyorsa, bunun için başlangıç koşulu dediğimiz bir koşul denkleme ilave edilir. Bu şekildeki bir diferansiyel denklemi içeren problemlere **Başlangıç Değer Problemi,** $y(x_0)=y_0$ şeklinde verilen bu koşula ise **başlangıç koşulu** denir. Buna göre, 1. mertebeden bir başlangıç değer problemi,

$$y'=f(x) \quad , \quad y(x_0)=y_0 \qquad \textbf{(1.6)}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 1.2: $\frac{dy}{dx} = 2x$ y(1)=2 başlangıç değer problemini çözünüz.

Çözüm : $\frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow dy = 2xdx$

(her iki tarafın integrali alınarak) $\int dy = \int 2xdx$ ve buradan;

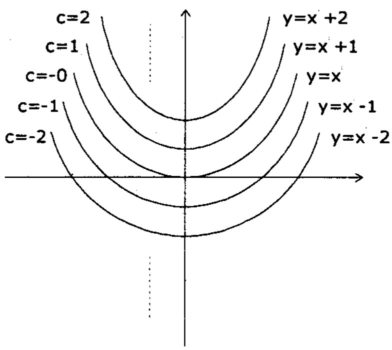
$$\Rightarrow y = x^2 + c$$

genel çözümü bulunur. Bu genel çözümde c keyfi sabitinin her bir değeri için bir kısmi çözüm bulunur. Yani, genel çözüm bir paraboller demeti iken her bir başlangıç koşulu ile (c'nin her bir değeri için) bu ailenin bir üyesi elde edilir. Buna göre:

$$y = x^2 + c,\ \ y(1) = 2 \qquad 2 = 1^2 + c \Rightarrow c = 1$$

bulunur.Böylece, **y(1)=2** başlangıç koşulu ile verilen başlangıç değer probleminin çözümü,

$y = x^2 + 1$ olarak elde edilir.



Şekil 1.1: $y=x^2+c$ genel çözümüne ait grafik (Parabol ailesi)

$\frac{dy}{dx} = f(x)$ şeklindeki birinci mertebeden özel diferansiyel denklem kolayca çözülebildiği gibi, bu yapı yüksek mertebeli diferansiyel denklemlere de genişletilebilir. Bunun için ardışık integral alınarak çözüm elde edilmeye çalışılır.

$\frac{d^2y}{dx^2} = \phi(x)$ ele alalım. Bu ifadenin integrali alınarak;

$\frac{dy}{dx} = \int \phi(x)dx + c_1$ bulunur. (c_1 keyfi sabit)

İkinci kez integral alınarak, $\int \phi(x)dx = G(x)$ dersek,

$$y = \int G(x)dx + c_1 x + c_2 \qquad \textbf{(1.7)}$$

çözümü elde edilir. Bunu basit bir örnekle açıklayalım.

Örnek 1.3: y''=2x+1 olan ve (-1,3) noktasındaki eğimi m=1/3 olan eğrinin denklemi nedir?

Çözüm : $y' = \int (2x+1)dx = x^2 + x + c_1$ olur.

Burada, $\frac{1}{3} = (-1)^2 + (-1) + c_1 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{3}$ bulunur. $c_1 = \frac{1}{3}$ değeri yerine yazılıp bu

ifadenin tekrar integrali alınarak;

$$y = \int (x^2 + x + \frac{1}{3})dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}x + c_2 \quad \text{olur.}$$

c_2 değerini bulmak için,

$$3 = \frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} + \frac{1}{3}(-1) + c_2 \quad \text{ise,}$$

$$c_2 = \frac{17}{6} \quad \text{olur.}$$

Böylece, $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{17}{6}$ istenilen çözümdür.

1.3. Çözümlerin Varlığı ve Tekliği :

Gerek bundan önceki bölümde, birinci mertebeden diferansiyel denklemlerde, gerekse bundan sonraki bölümlerde ele alacağımız yüksek mertebeden ve farklı tipteki diferansiyel denklemlerde, görülen ortak husus şudur: Her diferansiyel denklemin cebirsel çözümü olmayabilir, birden fazla çözüme sahip olabilir veya çözümü çok uzun sürebilir. Bu nedenle bir diferansiyel denklemi çözmek için zaman ayırmadan önce bu çözümün varlığını bilmek en akılcı yaklaşımdır. Yani, verilen bir başlangıç koşulunu sağlayacak denklemin bir çözümü olup olmadığını bilmek istiyoruz.

Bunun için, aşağıdaki gibi basit bir başlangıç değer problemini ele alabiliriz.

$\frac{dy}{dx} = 4\sqrt{y}, \quad y(0) = 0$ verilsin. Buna göre:

$$\int \frac{dy}{4\sqrt{y}} = \int dx \Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{y} = x \Rightarrow y(x) = 4x^2 + c \quad \text{olur.}$$

y(0)=0 başlangıç koşulu için bu denklem,

$y_1(x)=4x^2$ ve $y_2(x)=0$ olmak üzere iki farklı çözüme sahiptir.

Varlık ve teklik sorunu, matematik modelleme işlemine dayanır. Kesin başlangıç koşullarıyla davranışı tam olarak belirlenen bir fiziksel sistemle çalıştığımızı ve bizim bu sisteme ait tasarladığımız matematik modelin tek çözüme sahip olmayan bir diferansiyel denklemi içerdiğini varsayalım. Bu varsayım binaen, bir matematiksel modelin bir fiziksel sistemi tarif edip edemeyeceği sorusu ile karşı karşıya kalırız.

1.3.1. Eğim Alanları ve Çözüm Eğrileri :

y'=f(x,y) formundaki bir diferansiyel denklemin çözümlerinin davranışlarını araştırmada geometrik düşünceden faydalanabiliriz. xy – düzleminin çeşitli (x,y) noktalarında f (x,y)'nin y' değeri bir eğimi belirtir.y'=f(x,y) diferansiyel denkleminin bir çözümü, her bir (x,y) noktasında y'=f (x,y) eğimine sahip grafik ile temsil edilen türevlenebilen bir fonksiyondur.

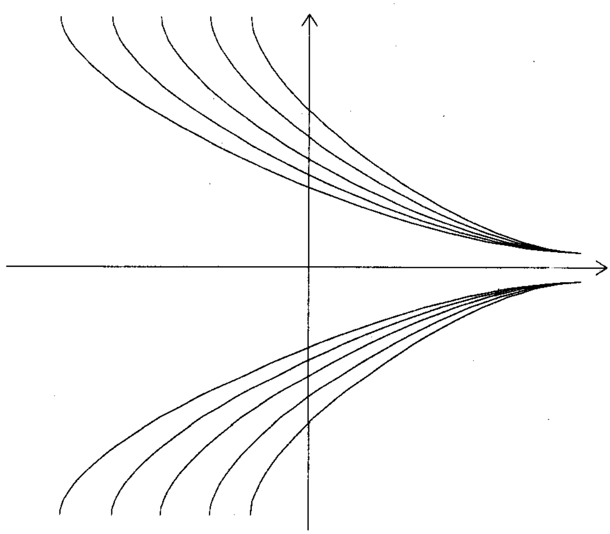
Bir diferansiyel denklemin çözümüne ait olan grafiğe o denklemin çözüm eğrisi denir. Geometrik açıdan, y'=f (x,y) diferansiyel denkleminin bir çözüm eğrisi, düzlemde herbir (x,y) noktasında teğet doğrusunun m=f (x,y) eğimine sahip olduğu bir eğridir.

Çözüm eğrisi fikri, y'=f (x,y) diferansiyel denkleminin yaklaşık çözümlerinin bulunması için grafiksel bir yöntemdir.Bunun için (x,y) noktalarının temsil edildiği bir kümenin her bir elemanı için, m=f (x,y) eğimine sahip kısa bir doğru parçası çizeriz.

İşte böyle doğru parçalarının hepsinin kümesi, y'=f (x,y) denklemi için bir eğim alanı olarak adlandırılır.Bu açıklamalara bağlı olarak aşağıdaki örneklerde diferansiyel denklemlere ait çözüm eğrilerini inceleyelim.

Örnek 1.4: y'= -y diferansiyel denklemi için bazı tipik çözümleri ve eğim alanını bulunuz?

Çözüm : y'=-y diferansiyel denkleminin çözümleri $x \to \infty$ için sıfıra yaklaşır. Bu denklemin genel çözümünün,$y=ce^{-x}$ olduğu düşünülürse eğim alanı şekil-2'deki gibidir.



Şekil 1.2: y'=-y 'nin çözüm eğrileri ve eğim alanı.

Teorem 1.1: f(x,y) fonksiyonu düzlemdeki $R=\{ (x,y) \mid |x-x_0| \le a, |y-y_0| \le b \}$ dikdörtgen bölgede sürekli olsun. Aynı zamanda, f 'nin y'ye göre kısmi türevinin de $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ aynı R bölgesinde sürekli olduğunu varsayalım. Buna göre,

$$y' = f(x,y)\ ,\quad y(x_0)=y_0$$

başlangıç değer problemi **$I=[x_0-h,x_0+h]$ ($h \leq a$)** şeklinde bir aralıkta y(x) gibi tek bir çözümü vardır.

Bu teoremin ispatını burada vermeyeceğiz fakat, bu teoremin öngördüğü y(x) tek çözümünün bulunabilmesi için Picard tarafından geliştirilen Picard İterasyon Metodunu veya diğer adıyla Ardışık Yaklaşımlar metodunu ele alacağız.

$y' = f(x,y)$, $y(x_0)=y_0$ başlangıç değer problemimizin y(x) tek çözümü

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y(t))dt \qquad \textbf{(1.8)}$$

şeklinde alalım. Şimdi Ardışık Yaklaşımlar Metodunu (Picard İterasyon Metodu) algoritmik olarak ifade edelim.

1.3.2 Picard İterasyon Metodu :

Adım 1: $y_0(x)=y_0$ sabit fonksiyonunu ele alalım.

Adım 2: $y_n(x)$ fonksiyonunun bilindiğini varsayarak,

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y_n(t))dt \qquad \textbf{(1.9)}$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

Adım 3: Tümevarım metodundan, $\{y_n(x)\}$ fonksiyonlarının dizisi aşağıdaki varsayımlara göre y(x) çözümüne yakınsar.

Örnek 1.5 : $\dfrac{dy}{dt} = f(t,y)$ denkleminin varlık ve teklik teoremini y ve t'nin tüm

değerleri için $y_1(t) = t + 2e^{-t^2}, y_2(t) = t$ diferansiyel denklemini sağladığını ve bu

diferansiyel denklemin iki çözümü olduğunu varsayalım.

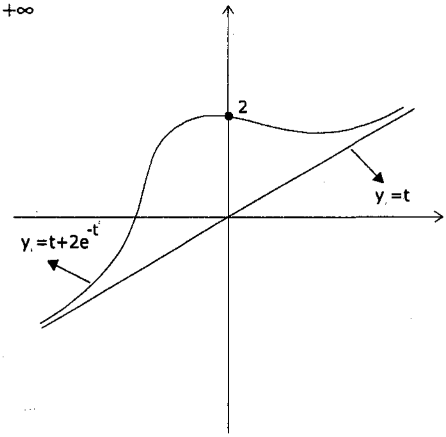
Buna göre,

a) y(0)=1 başlangıç koşulunu sağlayan y(t) çözümünün davranışını inceleyiniz.

b) $t \to -\infty$ ve $t \to +\infty$ için y(t) 'nin davranışını inceleyiniz.

Çözüm: **a)** Öncelikle y_1 ve y_2 fonksiyonlarının grafiklerini çizelim.

$t \to -\infty$ ve $t \to +\infty$



Şekil.1.3. $y_1(t) = t + 2e^{-t^2}, y_2(t) = t$ eğrileri.

Sonra, y(0)=1 olduğuna göre:

$0 = y_2(0) < y(0) < y_1(0) = 2$ yazılır. Teorem-1'den $\forall t$ için;

$y_2(t) < y(t) < y_1(t)$ elde edilir.

b) $y_1(t)$ ve $y_2(t)$'nin (a)'daki grafiklerinden de açıkça görüleceği gibi, y(t) fonksiyonu y=t eğik asimptotuna sahiptir.

1.4 Tam Diferansiyel Denklemler

Birinci mertebeden bir diferansiyel denklemin $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ veya $F(x,y,y') = 0$ şeklinde ifade edildiğini görmüştük. Bu ifadeler yaygın olarak kullanılmakla birlikte, birinci mertebeden adi diferansiyel denklem,

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \qquad \textbf{(1.10)}$$

şeklinde de ifade edilir. Böyle bir diferansiyel denklemin çözümü,

$$F(x,y) = c \qquad \textbf{(1.11)}$$

şeklinde tanımlanır. Burada, F(x,y) kapalı fonksiyon ve c keyfi bir sabittir.

Teorem 1.2: P(x,y) ve Q(x,y) fonksiyonları ve birinci mertebeden kısmi türevleri, R:{a<x<b, c<y<d} şeklinde tanımlanan bir bölgede sürekli olsunlar. Bu durumda,

$$\mathbf{P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0} \qquad \textbf{(1.10)}$$

diferansiyel denklemi R bölgesindeki her bir noktada,

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \qquad \textbf{(1.12)}$$

eşitliğini sağlıyorsa **Tam Diferansiyel Denklemdir** denir. Sonuç olarak, R üzerinde tanımlı bir F(x,y)=c fonksiyonu (1.10)'daki eşitliği sağladığında, (1.11)'de ifade edilen tam diferansiyel denklemin çözümü olur.

P(x,y) ve Q(x,y) fonksiyonları xy-düzleminde dikdörtgen şeklindeki bir R bölgesinde sürekli fonksiyonlar olup, bu fonksiyonların birinci mertebeden kısmi türevleri de aynı bölge içinde süreklidirler. Bununla birlikte,

F(x,y)=c fonksiyonunun tam diferansiyeli,

$$df(x,y) = \frac{\partial P(x,y)}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y} \cdot dy = 0 \qquad \textbf{(1.13)}$$

olup, **P(x,y)dx + Q(x,y)dy** ifadesi F(x,y) fonksiyonunun bir **tam diferansiyeli** olur.

Eğer, P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 ifadesi bir tam diferansiyel denklemse ve bu denklemin;

F(x,y)=c genel çözümü ise;

$$P(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} \text{ ve } Q(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \qquad \textbf{(1.14)}$$

yazılabilir. Bu son ifadede P'nin y'ye; Q'nun da x'e göre kısmi türevleri alınırsa;

$$\frac{\partial}{\partial y} P(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \cdot \partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} Q(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y \cdot \partial x}$$

olur. Diğer yandan,

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \cdot \partial y} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y \cdot \partial x} \qquad \textbf{(1.15)}$$

birbirine eşittir.O halde, **(1.10) ile tanımlanan** formundaki bir adi diferansiyel denklemin tam diferansiyel denklem olabilmesi için gerek ve yeter şart **(1.15)** eşitliğinden anlaşılabileceği gibi;

$$\frac{\partial}{\partial y} P(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} Q(x,y) \qquad \textbf{(1.16)}$$

olmasıdır. Tam Diferansiyel denklemlerin her zaman genel çözümü vardır ve bu çözüm aşağıdaki gibi iki farklı yolla bulunabilir.

P(x,y)dx + Q(x,y,)dy = 0 verilsin.

İlk olarak her iki yöntem için geçerli olan bu denklemin tam diferansiyel olup olmadığı incelenmelidir. Bunun için:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$ ifadesini ele alalım.

Eğer yukarıdaki eşitlik sağlanıyorsa söz konusu diferansiyel denklem Tam Diferansiyel Denklemdir. Daha sonra, F(x,y)=c çözümünü bulmak için aşağıdaki iki çözüm yönteminden birini tercih ediyoruz.

1.4.1 Birinci Çözüm Yöntemi:

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=P(x,y)$ olduğuna göre, her iki tarafın x'e göre integrali alınırsa;

$$F(x,y)=\int P(x,y)\cdot\partial x+\varphi(y) \qquad \textbf{(1.17)}$$

elde edilir. Bu **(1.17)** bağıntısının y'ye göre kısmi türevini alırsak;

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\int P(x,y)\partial x\right]+\frac{d\varphi}{dy} \qquad \textbf{(1.18)}$$

olur. Bundan sonra,

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=Q(x,y)$$

olduğu hatırlanır ve **(1.18)** nolu ifadede yerine yazılırsa;

$$Q(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left[\int P(x,y)\partial x\right]+\frac{d\varphi}{dy}$$

bulunur. Bu son ifadede gerekli işlemler yapılarak,

$$\frac{d\varphi}{dy}=\varphi(y)$$

şeklinde y'ye bağlı bir fonksiyon elde edilir. φ(y) fonksiyonunun integrali alınarak φ(y) fonksiyonu bulunur ve bu değer **(1.17)** ifadesinde yerine yazılarak, F(x,y)=c genel çözümü bulunur.

1.4.2 İkinci Çözüm Yöntemi:

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=Q(x,y)$ olduğuna göre, her iki tarafın x'e göre integrali alınırsa;

$$F(x,y)=\int Q(x,y)\cdot\partial y+\varphi(x) \qquad \textbf{(1.19)}$$

elde edilir. Bu son (19) bağıntısının x'e göre kısmi türevi alınırsa;

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\int Q(x,y)\partial y\right]+\frac{d\varphi}{dx} \qquad \textbf{(1.20)}$$

bulunur. Diğer yandan,

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = P(x,y)$ değeri (1.20) bağıntısında yerine yazılırsa;

$$P(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\int Q(x,y)\partial y\right] + \frac{d\varphi}{dx}$$

elde edilir. Bu son ifadede gerekli işlemler yapılarak,

$$\frac{d\varphi}{dx} = \varphi(x)$$

şeklinde x'e bağlı bir fonksiyon bulunur. Bu fonksiyonu bulmak için φ(x) fonksiyonunun integrali alınarak φ(x) fonksiyonu bulunmuş olur. Böylece, F(x,y)=c genel çözümü (1.19) bağıntısında φ(x) yerine yazılarak bulunur.

Örnek 1.6: $(6xy + y^3)dx + (8y^2 + 3x^2 + 3xy^2)dy = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm:

$$P(x,y) = 6xy + y^3 \rightarrow \frac{\partial}{\partial y}P(x,y) = 6x + 3y^2$$

$$Q(x,y) = 8y^2 + 3x^2 + 3xy^2 \rightarrow \frac{\partial}{\partial x}Q(x,y) = 6x + 3y^2$$

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ olduğundan bu denklem tam diferansiyel denklemdir. Şimdi, her iki yoldan F(x,y)=c genel çözümünü bulalım

1. yol: $\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y)$ 'nin x'e göre integrali alınırsa;

$$F(x,y) = \int\left(6xy + y^3\right)dx + \varphi(y)$$
$$F(x,y) = 3x^2y + y^3x + \varphi(y) \qquad \textbf{(1.21)}$$

olur.Her iki tarafın y'ye göre kısmi türevini alırsak;

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 3x^2 + 3y^2x + \frac{d\varphi}{dy}$ bulunur. Diğer yandan,

$\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y)$ olduğundan yukarıda yerine yazılırsa,

$$Q(x,y) = 3x^2 + 3y^2 + \frac{d\varphi}{dy}$$

$$8y^2 + 3x^2 + 3y^2x = 3x^2 + 3y^2x + \frac{d\varphi}{dy} \quad \textit{olur ve;}$$

$$\frac{d\varphi}{dy} = 8y^2 \quad \textit{olarak bulunur.}$$

$$\frac{d\varphi}{dy} = 8y^2 \quad ise \quad \varphi(y) = \frac{8}{3}y^3 + \text{c olur.}$$

Bu son değer **(1.21)** ifadesinde yerine yazılırsa;

$$F(x,y) = 3x^2y + y^3x + \frac{8}{3}y^3 = c \quad \text{olarak bulunur.}$$

2. yol: $\dfrac{\partial F}{\partial x} = P(x,y)$ 'nin y'ye göre integrali alınırsa;

$$F(x,y) = \int\left(8y^2 + 3x^2 + 3xy^2\right)dy + \varphi(x)$$

$$F(x,y) = \frac{8}{3}y^3 + 3x^2y + 6xy + \varphi(x) \qquad \textbf{(1.22)}$$

olur. Her iki tarafın x'e göre kısmi türevini alırsak;

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 6xy + 6y + \frac{d\varphi}{dx}$$ olur. Diğer yandan,

$\dfrac{\partial F}{\partial x} = P(x,y)$ olduğundan yukarıda yerine yazılırsa,

$$P(x,y) = 6xy + 6y + \frac{d\varphi}{dx}$$

$$6xy + y^3 = 6xy + 6y + \frac{d\varphi}{dx}$$ olur ve;

$$\frac{d\varphi}{dx} = y^3 - 6y$$ bulunur. Buradan φ(x) ise;

$$\varphi(x) = \int(y^3 - 6y)dx$$

$$\varphi(x) = y^3x - 6xy + c$$

bulunur. Bu, φ(x) değeri **(1.22)** denkleminde yerine yazıldığında,

$$F(x,y) = 3x^2y + y^3x + \frac{8}{3}y^3 = c \quad \text{olarak bulunur.}$$

Örnek 1.7 : $(1 + ye^{xy})dx + (2y + xe^{xy})dy = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $P(x,y) = 1+ye^{xy}$ ve $Q(x,y) = 2y+xe^{xy}$ olduğuna göre;

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = e^{xy} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

birbirine eşit olup bu denklem tam diferansiyel denklemdir. Bunun çözümü için yukarıdaki iki çözüm yolundan birini tercih edebiliriz.

F(x,y)=c genel çözümünü arıyoruz.

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = P(x,y) \Rightarrow F(x,y) = \int P(x,y)\partial x + \varphi(y)$$ olur. Buna göre,

$$F(x,y) = \int (1 + ye^{xy})dx + \varphi(y)$$

$$F(x,y) = x + e^{xy} + \varphi(y) \qquad \textbf{(1.23)}$$

elde edilir. F(x,y)'nin y'ye göre kısmi türevi alınırsa;

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[x + e^{xy}\right] + \frac{d\varphi}{dy}$$

ve

$$\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y)$$ yerine yazılırsa;

$$2y + xe^{xy} = xe^{xy} + \frac{d\varphi}{dy}$$

$$\frac{d\varphi}{dy} = 2y \Rightarrow d\varphi = 2ydy \Rightarrow \varphi(y) = y^2 + c$$ olarak bulunur.

Bu son değer **(1.23)** ifadesinde yerine yazılırsa;

$F(x,y) = x + e^{xy} + y^2 = c$ olarak bulunur.

Örnek 1.8: $(e^x \sin y + \tan y)dx + (e^x \cos y + x \sec^2 y)dy = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $P(x,y) = e^x \sin y + \tan y$ ve $Q(x,y) = e^x \cos y + x \sec^2 y$ veriliyor.

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = e^x \cos y + \sec^2 y = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

olduğundan bu bir Tam Diferansiyel denklemdir.F(x,y) = c çözümünü arıyoruz. Bunun için,

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)$$ ifadesinin y'ye göre integrali alınırsa;

$$F(x,y) = \int Q(x,y)\partial y + \varphi(x)$$

$$F(x,y) = \int (e^x \cos y + x\sec^2 y)\partial y + \varphi(x)$$

$$F(x,y) = e^x \sin y + x\tan y + \varphi(x) \qquad \textbf{(1.24)}$$

olur. F(x,y)'nin x'e göre kısmi türevi alınır ve $\frac{\partial F}{\partial x} = P$ değeri yerine yazılırsa;

$$e^x \sin y + \tan y = e^x \sin y + \tan y + \varphi(x)$$

olur. Buradan, $\varphi(x)$ değeri **(1.24)**'daki yerine yazılırsa;

$$F(x,y) = e^x \sin y + x \tan y = c$$ genel çözümü bulunur.

1.5 İntegral Çarpanı :

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \qquad \textbf{(1.10)}$$

şeklinde olup, tam diferansiyel olmayan denklemlerde mevcuttur. Uygun bir çarpanla bu denklemin her iki yanının çarpılması ile denklemimiz tam diferansiyel denklem halini alır. İşte, uygun çarpan olarak bahsedilen bu fonksiyona **integral çarpanı** denir. Örneğin,

$y \cdot dx - x \cdot dy = 0$ denklemi tam diferansiyel olmamasına karşın;

ile $\frac{1}{y^2}$ çarpıldığında, $\frac{y \cdot dx - x \cdot dy}{y^2} = 0$

denklemi tam diferansiyel olurken, $\frac{1}{y^2}$ çarpanına integral çarpanı denir.

İntegral çarpanı, x ve y'ye bağlı bir çarpan olup **μ(x,y)** şeklinde gösterilir. **(1.10)** ifadesinin her iki yanı $\mu(x,y)$ ile çarpılırsa;

$$\mu(x,y)\, P(x,y)dx + \mu(x,y)\, Q(x,y)dy = 0 \qquad \textbf{(1.25)}$$

tam diferansiyel olup;

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q) \qquad \textbf{(1.26)}$$

eşitliğini sağlar.Pdx+Qdy = 0 formundaki bir denklemin μ (x,y) integral çarpanının hesabı x'e veya y'ye bağlı olarak aşağıdaki tabloda gösterildiği gibidir.

Tablo-1.1: İntegral çarpanının hesabı

Durum	İntegral Çarpanı
$f(x) = \frac{1}{Q} \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right)$	$\mu(x) = e^{\int f(x)dx}$
$g(x) = \frac{1}{P} \cdot \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$	$\mu(y) = e^{\int f(y)dy}$

Örnek 1.9:

$y^2 \cdot \cos x \cdot dx + (4 + 5y \cdot \sin x)dy = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $P(x,y)=y^2 \cos x$ ve $Q(x,y)=4+5y \sin x$ olduğuna göre Tablo-1.1'deki gibi yalnızca x'e veya yalnızca y'ye bağlı bir fonksiyon olup olmadığına bakalım.

$$\frac{1}{Q} \cdot (P_y - Q_x) = \frac{1}{4 + 5y \cdot \sin x} \cdot (2y \cos x - 5y \cos x)$$
$$= \frac{-3y \cos x}{4 + 5y \sin x}$$

olarak bulunur ki; x'e bağlı olmadığından y'ye bağlı integral çarpanı bulmak gerekir. Buna göre;

$$\frac{1}{P} \cdot (Q_y - P_y) = \frac{1}{y^2 \cos x} \cdot (5y \cos x - 2y \cos x)$$
$$= \frac{3y \cos x}{y^2 \cos x} = \frac{3}{y}$$

y'ye bağlı bir fonksiyon olup, integral çarpanı:μ

$$\mu(y) = e^{\int \frac{3}{y} dy} = y^3$$

olarak bulunur. Şimdi, $\mu(y)=y^3$ ile örneğimizde verilen diferansiyel denklemin her iki yanı çarpılırsa,

$y^5 \cos x \ dx + (4y^3 + 5y^4 \sin x)dy = 0$ olur. Böylece,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 5y^4 \cos x = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

eşit olup denklemimiz tam diferansiyel denklemdir. Bu denklemin çözümü $F(x,y)=c$ şeklinde idi. Şimdi, bu genel çözümü bulalım.

$\xrightarrow{\text{x'e göre}}$ integral alınır.

$$F(x,y) = \int P(x,y)dx + \varphi(y)$$
$$F(x,y) = \int y^5 \sin x + \varphi(y) \qquad (1.27)$$
$$F(x,y) = y^5 \cdot \sin x + \varphi(y)$$

bulunur. Diğer yandan,

$\xrightarrow{\text{y'ye göre}}$ kısmi türev alınır

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 5y^4 \cdot \sin x + \frac{d\varphi}{dy}$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y)$$

olduğundan,

$$4y^3 + 5y^4 \sin x = 5y^4 \sin x + \frac{d\varphi}{dy}$$

olur. Buradan,

$$\frac{d\varphi}{dy} = 4y^3$$

ve $\varphi(y) = y^4 + c$ elde edilir. $\varphi(y) = y^4 + c$ değeri **(1.27)** ifadesinde yerine yazılırsa genel çözüm,

$$F(x,y) = y^5 \sin x + y^4 = c$$ olarak bulunur.

1.6 Değişkenlerine Ayrılabilir Diferansiyel Denklemler

Eğer bir diferansiyel denklem,

$$\frac{dx}{dy} = h(x) \cdot g(y) \qquad \textbf{(1.28)}$$

şeklinde ise bu denkleme **Ayrılabilir Diferansiyel Denklem** denir. Bu denklemin çözümü için aşağıdaki adımlar izlenir:

i) $g(y)=0$ denklemi çözülerek **(1.28)** denkleminin sabit çözümleri bulunur.

ii) **(1.28)** yeniden yazılarak;

$$\frac{dy}{g(y)} = h(x) \cdot dx \qquad \textbf{(1.29)}$$

elde edilir ve her iki tarafın integrali alınarak:

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int h(x) dx \qquad \textbf{(1.30)}$$

olur. Böylece,

$G(y) = H(x) + c$ çözümü elde edilir.

iii) **(1.28)** ve **(1.30)**'den elde edilen bütün çözümler birleştirilir.

iv) Eğer problemimiz bir başlangıç değer problemi ise başlangıç koşulları kullanılarak kısmi çözüm bulunur.

Örnek 1.10 : $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-1}{x}, y(1)=2$ başlangıç değer problemini çözünüz.

Çözüm: Öncelikle $y^2-1=0$ denkleminden $y=\pm1$ sabit çözümleri bulunur. Denklem tekrar düzenlenerek,

$$\frac{dy}{y^2-1}=\frac{dx}{x}$$ olarak yazılır ve her iki tarafın integrali alınarak;

$$\int\frac{dy}{y^2-1}=\int\frac{dx}{x}$$ elde edilir. Buna göre,

$$\frac{1}{2}\cdot\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|=\ln|x|+c \tag{1.31}$$

olarak bulunur. Böylece, verilen diferansiyel denklemin çözümleri;

$$\frac{1}{2}\cdot\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|=\ln|x|+c$$
$$y=1$$
$$y=-1$$

bulunur. **(1.31)** ifadesinin çözümünde y(1)=2 başlangıç koşulları yerine yazılırsa;

$$\frac{1}{2}\cdot\ln\left|\frac{2-1}{2+1}\right|=\ln|1|+c$$
$$c=\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{1}{3}\right)$$

olarak bulunur.Sonuç olarak, $c=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{3}\right)$ değeri **(1.31)** çözümünde yerine yazılarak istenilen çözüm;

$$y=\frac{3+x^2}{3-x^2}$$ elde edilir.

Örnek 1.11 : $\frac{dy}{dt}=1+\frac{1}{y^2}$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: Sabit çözümleri bulmak için;

$$1+\frac{1}{y^2}=0\Rightarrow y\notin R$$ (Sabit çözüm yok)

olur. Denklem değişkenlerine ayrılarak;

$$\frac{dy}{1+\frac{1}{y^2}}=dt$$ elde edilir. Buna göre;

$$\int \frac{dy}{1+\frac{1}{y^2}} = \int \frac{y^2}{y^2+1} .dy = \int \left(1-\frac{1}{y^2+1}\right)\cdot dy$$

olur. Böylece istenilen çözüm:

$y - \arctan y = t + c$ olarak bulunur.

1.7 Homojen Diferansiyel Denklemler

Eğer birinci mertebeden bir diferansiyel denklem,

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \textbf{(1.32)}$$

şeklinde ise bu denkleme homojen diferansiyel denklem denir. Ayrıca, F(x,y) fonksiyonunda **x** yerine **tx**, **y** yerine de **ty** yazılarak elde edilen,

$$F(tx,ty) = t^n F(x,y)$$

fonksiyonuna **n. dereceden homojen fonksiyon** denir. Şimdi, homojen diferansiyel denklemin genel çözümünü bulalım. Bunun için;

$\frac{y}{x} = u$ dersek, $y = ux$ olur. Buradan;

$\frac{dy}{dx} = x\cdot\frac{du}{dx} + u$ elde edilir. Bu eşitlikler **(1.32)** bağıntısında yerine yazılırsa;

$$x\cdot\frac{dy}{dx} = F(u) - u$$

olur. Bu son denklem, **Bölüm (1.6)**'da anlatılan Değişkenlerine ayrılabilir diferansiyel denklem haline gelir ve genel çözüm integral yardımıyla elde edilir.

Örnek 1.12: $2xy\cdot\frac{dy}{dx} = 4x^2 + 3y^2$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: İlk olarak, denklem standart hale getirilirse,

$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^2+3y^2}{2xy} = 2\cdot\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)$ olur. $\frac{y}{x} = u$ dönüşümü yapılarak elde edilen;

$$y = ux \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u + x\cdot\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{y}{x} = u \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{1}{u}$$

eşitlikleri problemde yerine yazılırsa;

$$u + x\cdot\frac{dy}{dx} = 2\cdot\left(\frac{1}{u}\right) + \frac{3}{2}\cdot u$$

halini alır. Gerekli düzenlemeler yapılarak;

$$\frac{2\cdot u}{u^2+4}du = \frac{dx}{x}$$

elde edilir. Her iki tarafın integrali alırsak,

$$\int \frac{2u \cdot du}{u^2+4} = \int \frac{dx}{x} \text{ ve böylece;}$$

$\ln(u^2+4) = \ln|x| + c$ olur. Buna göre,

$u^2 + 4 = c \cdot |x|$

ve $u = \dfrac{y}{x}$ değeri yerine yazılırsa;

$y^2 + 4x^2 = c \cdot x^3$ genel çözüm olarak bulunur.

Örnek 1.13: $x \cdot \dfrac{dy}{dx} = y + \left(x^2 - y^2\right)^{\frac{1}{2}}$, y(1)=0 diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: Denklemin her yanı **x**'e bölünür ve düzenlemeler yapılırsa;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \left[1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

olur. Son ifadede değişkenler ayrılarak;

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{dx}{x}$$

olur ve her iki tarafın integrali alınarak;

$$\arcsin u = \ln x + c \qquad (x>0)$$

bulunur. $u = \dfrac{y}{x}$ değeri yerine yazılırsa;

$$\arcsin\left(\frac{y}{x}\right) = \ln x + c$$

genel çözümü bulunur. y(1)=0 başlangıç koşulu yerine yazılarak;

$$\arcsin\left(\frac{0}{1}\right) = \ln 1 + c \Rightarrow c = 0$$

olur. Böylece, istenilen başlangıç değer probleminin çözümü:

$y = x \cdot \sin(\ln x)$ olarak elde edilir.

1.8 Birinci Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemler

Tanım 1.4: Birinci mertebeden bir Lineer Diferansiyel Denklem,

$$\frac{dy}{dx}+p(x)\cdot y=q(x) \qquad \textbf{(1.33)}$$

şeklinde ifade edilir. Bu denklemin genel çözümü,

$$y=\frac{\int \mu(x)\cdot q(x)dx+c}{\mu(x)} \qquad \textbf{(1.34)}$$

olup, burada $\mu(x)$ integral çarpanı olarak tanımlanır ve

$$\mu(x)=e^{\int p(x)dx}$$

şeklinde x'e bağlı bir fonksiyondur. Eğer **(1.33)** denkleminde bir başlangıç koşulu verilirse, c integral sabitini bulmakta bu koşulu kullanırız.**(1.33)** nolu ifade bazen karşımıza,

$$a(x)\cdot\frac{dy}{dx}+b(x)\cdot y=c(x) \qquad \textbf{(1.35)}$$

şeklinde çıkabilir. Bu durumda, **(1.34)** ifadesinin her iki yanını a(x) ile bölersek;

$$\frac{dy}{dx}+\frac{b(x)}{a(x)}\cdot y=\frac{c(x)}{a(x)} \qquad \textbf{(1.36)}$$

elde edilir. **(1.36)** nolu ifadede;

$$\frac{b(x)}{a(x)}=p(x) \quad \text{ve} \quad \frac{c(x)}{a(x)}=q(x)$$

olarak tanımlarsak, **(1.33)** nolu ifadede tanımlanan standart denkleme döneriz. Şimdi **(1.33)** nolu denklemin genel çözümünün nasıl bulunduğunu adım adım açıklayalım.

1. Adım: **(1.33)** nolu denklemin $y'+p(x)\cdot y=q(x)$ standart formunda olup olmadığına bakıp, değilse bu forma çeviririz.

2. Adım: $\mu(x)=e^{\int p(x)dx}$ integral çarpanı bulunur.

3. Adım: **(1.34)** nolu denklemin her iki tarafını $\mu(x)$ integral çarpanı ile çarpalım.

$$e^{\int p(x)dx}\cdot\left[\frac{dy}{dx}+p(x)\cdot y\right]=e^{\int p(x)dx}\cdot q(x)$$

$$e^{\int p(x)dx}\cdot\frac{dy}{dx}+e^{\int p(x)dx}\cdot p(x)\cdot y=e^{\int p(x)dx}\cdot q(x)$$

4. Adım: **3. Adım**' daki ifadenin sol tarafı $\mu(x)\cdot y$ çarpımının diferansiyelidir. Yani,

$$d(\mu(x)\cdot y)=e^{\int p(x)dx}\cdot q(x)$$

$$d(e^{\int p(x)dx}\cdot y)=e^{\int p(x)dx}\cdot q(x) \quad \text{bulunur.}$$

5. Adım: 4. Adım' daki ifadenin her iki yanının integrali alınırsa,

$$e^{\int p(x)dx} \cdot y = \int e^{\int p(x)dx} \cdot q(x) \quad \text{olur.}$$

6. Adım: Bu adımda y genel çözümünü bulmak için **4. adım'** daki ifadede y yalnız bırakılırsa,

$$y = \frac{1}{e^{\int p(x)dx}} \cdot \left[\int e^{\int p(x)dx} \cdot q(x)\right] + c \qquad \textbf{(1.37)}$$

genel çözümü elde edilir. **(1.37)** nolu ifadede verilen genel çözümde;

$e^{\int p(x)dx} = \mu(x)$ yazarsak, **(1.34)** nolu ifadede verdiğimiz,

$$y = \frac{\int \mu(x) \cdot q(x) + c}{\mu(x)}$$

formülü, **1. mertebeden Lineer diferansiyel denklemin** genel çözümünü veren formüldür.

Örnek 1.14 : $\dfrac{y'}{\cos x} + \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} y = \cos x$, y(0)=2 diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: Öncelikle denklemimizi **(1.33)** nolu ifadedeki gibi standart forma çeviririz. Bunun için, denklemin her tarafı **cos x** ile çarpılırsa,

$$y' + \tan x \cdot y = \cos^2 x \text{, y(0)=2}$$

şekline gelir. Bundan sonra,

$$\mu(x) = e^{\int \tan x dx} = e^{-\ln(\cos x)} = e^{\ln\left(\frac{1}{\cos x}\right)} = \sec x$$

integral çarpanı olarak bulunur. $\mu(x) = \sec x$ ile verilen ilk denklemin her iki yanı çarpılırsa,

$$\sec x \cdot y' + \sec x \cdot \tan x \cdot y = \sec x \cdot \cos^2 x$$

elde edilir. Bu son ifadenin sol tarafı, $y \cdot \sec x$'in diferansiyelidir. Buna göre,

$$d(\sec x \cdot y) = \int (\sec x \cdot \cos^2 x) \cdot dx$$

$$d(\sec x \cdot y) = \int \cos \ x \cdot dx$$

ve buradan,

$$\sec x \cdot y = \sin x + c$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$y = \frac{\sin x + c}{\sec x} = (\sin x + c) \cdot \cos x \text{ genel çözümdür.}$$

y(0)=2 başlangıç koşulunu gerçekleştirmek için genel çözümde **x** yerine **0, y** yerine **2** yazarsak;

$2 = (\sin 0 + c) \cdot \cos 0 \Rightarrow c = 2$ bulunur. Bu değeri genel çözümde yerine yazarsak,

$$y = (\sin x + 2) \cdot \cos x \quad \text{elde edilir.}$$

1.9. Bernoulli Diferansiyel Denklemi

Tanım 1.5: Eğer bir diferansiyel denklem;

$$\frac{dy}{dx}+P(x)\cdot y=Q(x)\cdot y^n \qquad \textbf{(1.38)}$$

şeklinde ise bu denkleme **Bernoulli Diferansiyel Denklemi** denir. n=0 veya n=1 olması durumunda **(1.38)** denklemi Lineer diferansiyel denklem haline gelir.

(1.38) denkleminin her iki tarafını $\mathbf{y^{-n}}$ ile çarparsak;

$$y^{-n}\cdot\frac{dy}{dx}+P(x)\cdot y^{1-n}=Q(x) \qquad \textbf{(1.39)}$$

olur ve $\mathbf{u=y^{1-n}}$ dönüşümü yapılırsa;

$$\frac{du}{dx}=(1-n)\cdot y^{-n}\cdot\frac{dy}{dx}$$

elde edilir. Bu değer, **(1.39)**'de yerine yazılırsa;

$$\frac{1}{(1-n)}\cdot\frac{du}{dx}+P(x)\cdot u=Q(x)$$

veya

$$\frac{du}{dx}+(1-n)\cdot P(x)\cdot u=(1-n)\cdot Q(x)$$

haline gelir. Bu son denklem, bir lineer diferansiyel denklem olup genel çözüm daha önceden anlatıldığı gibi bulunur.

Örnek 1.15: $x\cdot\frac{dy}{dx}+6y=3xy^{4/3}$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: Öncelikle, $\frac{dy}{dx}$ yalnız bırakılırsa,

$$\frac{dy}{dx}+\frac{6}{x}\cdot y=3y^{4/3}\Rightarrow\begin{pmatrix} n=\frac{4}{3} \\ P(x)=\frac{6}{x} \\ Q(x)=3 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1.40)}$$

olur ve her iki taraf $y^{-4/3}$ ile çarpılırsa;

$$y^{-4/3}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{6}{x}\cdot y^{-1/3}=3 \qquad \textbf{(1.41)}$$

olur. Burada,

$$u=y^{1-n}=y^{1-4/3}=y^{-1/3}$$

dönüşümü yapılırsa;

$$\frac{du}{dx}=-\frac{1}{3}\cdot y^{-4/3}\cdot\frac{dy}{dx}$$

elde edilir. **(1.41)** ifadesinde bu değerler düzenlenerek yerine yazılırsa;

$$-3\cdot\frac{du}{dx}+\frac{6}{x}\cdot u=3$$

elde edilir ve son olarak her iki taraf (-3) ile bölünerek;

$$\frac{du}{dx}-\frac{2}{x}u=-1 \qquad \textbf{(1.42)}$$

lineer diferansiyel denklem elde edilir. Bu denklemin çözümü için;

$$\mu(x)=e^{\int-\frac{2}{x}dx}=\frac{1}{x^2}$$

integral çarpanı bulunup **(1.42)**'in her iki yanı ile çarpılırsa;

$$\frac{d}{dx}\cdot\left(\frac{1}{x^2}\cdot u\right)=-\frac{1}{x^2}$$

ve her iki tarafın integrali alınarak;

$$\frac{u}{x^2}=-\int\frac{1}{x^2}\cdot dx$$

buradan,

$$x^{-2}\cdot u=\frac{1}{x}+c$$

elde edilir. Sonuç olarak, $u=\frac{y}{x}$ değeri yerine yazılarak;

$$y=\frac{1}{\left(x+cx^2\right)^3}$$

genel çözümü bulunur.

Örnek 1.16: $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=\frac{3}{xy}$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: Aşağıdaki verilenler ele alınarak;

$$\left.\begin{aligned}P(x)&=\frac{1}{x}\\ Q(x)&=\frac{3}{x}\\ n&=-1\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}&u=y^{1-n}=y^{1+1}=y^2\\ &\frac{du}{dx}=2y\cdot\frac{dy}{dx}\end{aligned}$$

buradan verilen denklemin her yanı y ile çarpılırsa;

$$y\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}\cdot y^2=\frac{3}{x}$$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{1}{x}\cdot u=\frac{3}{x}\Rightarrow\frac{du}{dx}+\frac{2}{x}u=\frac{6}{x}$ olur. Bu son denklem;

$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x}dx} = x^2$ integral çarpanı ile çarpılırsa;

$x^2 \cdot \frac{du}{dx} \cdot 2x \cdot u = 6x$ ve buradan;

$\frac{d}{dx}\left(x^2 \cdot u\right) = 6x$ elde edilir. Son eşitliğin her iki yanının integrali alınarak;

$x^2 u = \int 6x dx$ buradan;

$u = \frac{3x^2 + c}{x^2}$ bulunur. $u = \frac{y}{x}$ değeri yerine yazılarak, örnekte verilen diferansiyel denklemin genel çözümü:

$$y = 3x + \frac{c}{x}$$ olarak bulunur.

1.10 Birinci Mertebeden Diferansiyel Denklemlere Ait Çözümlü Örnekler

1. $(3x^2 + 2y^2)dx + (4xy + 6y^2)dy = 0$ tam diferansiyel denklemini çözünüz?

Çözüm: $M(x,y) = 3x^2 + 2y^2 \Rightarrow My = 4y$ Denklem tam diferansiyel

$N(x,y) = 4xy + 6y^2 \Rightarrow Nx = 4y$ denklemdir.

Böyle bir denklemi iki yolla çözebiliriz.

1. Yol: $F(x,y) = c$

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx + Q(y)$$

$$F(x,y) = \int (3x^2 + 2y^2)dx + Q(y)$$

$$F(x,y) = x^3 + 2y^2x + Q(y) \qquad (*)$$

$F_y = N$ idi.

$F_y = 4xy + Q'(y)$ olur. Böylece;

$$4xy + Q'(y) = 4xy + 6y^2$$

$$Q'(y) = 6y^2$$

$$Q(y) = \int 6y^2 dy = 2y^3 + c$$

Bu değer (*) 'da yerine yazılacak olursa;

$$F(x,y) = x^3 + 2y^2x + 2y^3 + c$$

olarak bulunur.

2. Yol: $F(x,y) = \int N(x,y)dy + Q(x)$

$$F(x,y) = \int (4xy + 6y^2)dy + Q(x)$$

$$F(x,y) = 2xy^2 + 2y^3 + Q(x) \qquad (*)$$

$F_x = M$ idi.

$F_x = 2y^2 + Q'(x)$ olur.

$$2y^2 + Q'(x) = 2y^2 + 3x^2$$

$$Q'(x) = 3x^2$$

$$Q(x) = \int 3x^2 dx = x^3 + c$$

Bu değer (*) 'da yerine yazılacak olursa;

$$F(x,y) = 2xy^2 + 2y^3 + x^3 + c$$

olur.

2. $y' + y = e^{-x}$ lineer denklem sistemini çözünüz?

Çözüm: $P(x)=1$ ve $Q(x) = e^{-x} \Rightarrow M(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int 1.dx} = e^{x}$

O halde, e^{x} ile ilk denklemin her tarafını çarpalım;

$e^{x}y' + e^{x}y = e^{x}.e^{-x}$ ve $d(e^{x}.y) = 1$ olur. Son ifadenin her iki tarafının integrali alınarak;

$\int d(e^{x}.y) = \int 1.dx$ ve buradan; $e^{x}.y = x + c \Rightarrow y=\dfrac{x+c}{e^{x}}$ olur.

3. $x.\dfrac{dy}{dx} - x.y = e^{x}$ lineer denklemini çözünüz?

Çözüm: Önce $\dfrac{dy}{dx}$ 'in katsayısı 1 olmalı.

$\dfrac{dy}{dx} = y'$ olduğuna göre; $x.y' - x.y = e^{x}$

$$y' - y = \frac{e^{x}}{x} \qquad (*)$$

olur . Burada; $P(x)=-1$ ve $Q(x) = \dfrac{e^{x}}{x}$ olduğundan,

$M(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int -1.dx} = e^{-x}$ bulunur. Bu değer (*) denkleminin yanı ile çarpılırsa;

$e^{-x}.y' - e^{-x}.y = \dfrac{e^{-x}.e^{x}}{x}$ olur. Buradan;

$d(e^{-x}.y) = \dfrac{1}{x}$ olduğundan bu ifadenin her iki tarafının integrali alınırsa;

$\int d(e^{-x}.y) = \int \dfrac{1}{x}.dx$ ve sonuç olarak çözüm;

$e^{-x}.y = \ln x + c \Rightarrow y = e^{x}.(\ln x + c)$ bulunur.

4. $y' + 3y = 3x^{2}.e^{-3x}$ lineer diferansiyel denklemini çözünüz

Çözüm: $M(x) = e^{\int P(x)dx}$ idi. Soruda, $P(x)=3$ ve $Q(x) = 3x^{2}e^{-3x}$ olduğundan

$M(x) = e^{\int 3.dx} = e^{3x}$ ifadesi verilen denklemin her tarafıyla çarpılırsa;

$$e^{3x}.y + 3e^{3x}.y = e^{3x}.e^{-3x}.3x^{2}$$

ve buradan;

$$d.(e^{3x}.y) = 3x^2$$

bu son ifadenin her iki tarafının integrali alınırsa;

$\int d(e^{3x}.y) = \int 3x^2 dx \quad \Rightarrow \quad e^{3x}.y = x^3 + c$ olur.Buna göre;

$y = \dfrac{x^3 + c}{e^{3x}}$ genel çözümü elde edilir.

5. $2xyy' = x^2 + 2y^2$ homojen diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $y' = \dfrac{x^2 + 2y^2}{2xy} \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{1}{2}.\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$

$y=vx \quad \Rightarrow \quad y' = v'x + v \qquad v'x+v=\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{v}+v$

$\dfrac{y}{x}=v$ ve $\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{v}$ $\quad \dfrac{dv}{dx}.x=\dfrac{1}{2v} \quad \Rightarrow \quad 2v.dv=\dfrac{dx}{x}$

$v'=\dfrac{dv}{dx} \quad \Rightarrow \quad \int 2v.dv = \int \dfrac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad v^2=\ln x+c$

$\Rightarrow \quad \dfrac{y^2}{x^2} = \ln x + c \Rightarrow y^2=x^2.(\ln x+c) \Rightarrow y = \left(x^2(\ln x+c)\right)^{1/2}$ olur.

6. $xy^2y' = x^3 + y^3$ homojen diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $y' = \dfrac{x^3 + y^3}{xy^2} \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y}{x}$

$y=vx \quad \Rightarrow \quad y' = v'x + v \qquad v'.x + v = \left(\dfrac{1}{v}\right)^2 + v$

$\dfrac{y}{x}=v$ ve $\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{v} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dv}{dx}.x = \dfrac{1}{v^2} \quad \Rightarrow \quad v^2.dv = \dfrac{dx}{x}$

$v'=\dfrac{dv}{dx} \quad \Rightarrow \quad \int v^2.dv = \int \dfrac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{v^3}{3} = \ln x + c$

$\Rightarrow \quad \dfrac{y^3}{3x^3} = \ln x + c \Rightarrow y^3 = 3x^3(\ln x + c) \Rightarrow y = \left(3x^3(\ln x + c)\right)^{1/3}$ bulunur.

7. $\left(3x^3y + 2xy\right)dx + \left(\dfrac{3}{4}x^4 + x^2\right)dy = 0$ tam diferansiyel denklemini çözünüz?

Çözüm:

1.Yol: $F(x,y)=c$ idi. $\quad F(x,y)=\int M(x,y)dx + V(y)$

$F(x,y)=\int\left(3x^3y + 2xy\right)dx + V(y)$ integral alınarak;

$$F(x,y)=\frac{3}{4}x^4y+x^2y+V(y) \quad (*)$$

olur. $F_y=N$ ise $F_y=\frac{3}{4}x^4+x^2+V'(y)$

$$\frac{3}{4}x^4+x^2+V'(y)=\frac{3}{4}x^4+x^2 \text{ ve buradan;}$$

$V'(y)=0 \Longrightarrow V(y)=c$ olur. Bu değer (*) ifadesinde yerine yazılırsa;

$$F(x,y)=\frac{3}{4}x^4y+x^2y+c \text{ genel çözüm olarak bulunur.}$$

2.Yol: $F(x,y)=c$ idi, Buna göre;

$F(x,y)=\int N(x,y)dy+V(x)$ yazılırsa;

$F(x,y)=\int\left(\frac{3}{4}x^4+x^2\right)dy+V(x)$ olur ve burada integral alınarak;

$$F(x,y)=\frac{3}{4}x^4y+x^2y+V(x) \quad (*)$$

elde edilir. Diğer yandan, $F_x=M$ idi;

$F_x=3x^3y+2xy+V'(x)=3x^3+2xy$ olup buradan,

$V'(x)=0 \quad \Longrightarrow \quad V(x)=c$

bulunur.Böylece;

$F(x,y)=\frac{3}{4}x^4y+x^2y+c$ olarak aynı sonuç bulunur.

8. $x^2y'-2xy=6x^3$ lineer diferansiyel denklemini çözün?

Çözüm: Denklemin her iki tarafı x^2 ile bölünürse;

$y'-\frac{2}{x}y=6x$ (*) olur. Burada; $P(x)=-\frac{2}{x}$ ve $Q(x)=6x$ ise integral çarpanı;

$$M(x)=e^{\int P(x)dx}=e^{-\int\frac{2}{x}dx}=e^{-2\int\frac{1}{x}dx}=e^{-2\ln x}=e^{\ln x^{-2}}=x^{-2}=\frac{1}{x^2}$$

olarak bulunur.Bu çarpan ile (*) denkleminin her iki tarafı çarpılırsa;

$$\frac{1}{x^2}.y'-\frac{1}{x^2}.\frac{2}{x}y=\frac{1}{x^2}.6x \quad \text{elde edilir ve böylece;}$$

$$d\left(\frac{1}{x^2}.y'\right)=\frac{6}{x} \quad \Rightarrow \quad \int d\left(\frac{1}{x^2}.y\right)=\int\frac{6}{x}dx \text{ bulunur.}$$

Bu son ifadenin her iki tarafının integrali alınırsa;

$\frac{1}{x^2}.y = 6\ln x + c \Rightarrow \quad y = x^2(\ln x^6 + c)$ olarak genel çözüm elde edilir.

9. $x.\frac{dy}{dx} - y = \sqrt{x^2 + y^2}$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz?

Çözüm: $y = u.x \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{x} = u \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{y} = \frac{1}{u}$

$\frac{dy}{dx} = u + x.\frac{du}{dx}$ değerini denklemde yerine yazarsak;

$x.(u + x.\frac{du}{dx}) - u.x = \sqrt{x^2 + u^2x^2}$ ve gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$x.\frac{du}{dx} = \sqrt{1+u^2}$ olur. Bu son ifade değişkenlerine ayrılırsa;

$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{dx}{x}$ ve her iki tarafın integrali alınırsa;

$\ln\left|u + \sqrt{1+u^2}\right| = \ln|x| + c_1$ olur. Buradan; $\ln\left|\frac{u + \sqrt{1+u^2}}{x}\right| = c_1$ ise

$\frac{u + \sqrt{1+u^2}}{x} = e^{c_1}$ bulunur ve son olarak $u = \frac{y}{x}$ ve $c = e^{c_1}$ yazılarak;

$c^2x^2 - 2cy = 1$ genel çözümü elde edilir.

10. $x.\frac{dy}{dx} - y = \sqrt{x^2 + y^2}$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz?

Çözüm: $y = u.x \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{x} = u \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{y} = \frac{1}{u}$

$\frac{dy}{dx} = u + x.\frac{du}{dx}$ değerini denklemde yerine yazarsak;

$x.(u + x.\frac{du}{dx}) - u.x = \sqrt{x^2 + u^2x^2}$ ve gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$x.\frac{du}{dx} = \sqrt{1+u^2}$ olur. Bu son ifade değişkenlerine ayrılırsa;

$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{dx}{x}$ ve her iki tarafın integrali alınırsa;

$\ln\left|u + \sqrt{1+u^2}\right| = \ln|x| + c_1$ Buradan, $\ln\left|\frac{u + \sqrt{1+u^2}}{x}\right| = c_1$ ise

$$\frac{u+\sqrt{1+u^2}}{x}=e^{c}$$ bulunur ve son olarak $u=\frac{y}{x}$ ve $c=e^{c}$ yazılarak;

$$c^2x^2-2cy=1$$ genel çözümü elde edilir.

11. $y'+\frac{y}{x}=x^2.y^6$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz?

Çözüm: $P(x)=\frac{1}{x}$ ve $O(x)=x^2$, $n=6$ olduğuna göre, denklemin her tarafı y^6 ile bölünürse;

$$\frac{1}{y^6}.\frac{dx}{dy}+\frac{y^{-5}}{x}=x^2 \qquad (*)$$

olur. Bundan sonra; $v=y^{1-n}=y^{1-6}=y^{-5}$

$$\frac{dv}{dx}=-5y^{-6}.\frac{dy}{dx}$$

dönüşümü yapılıp (*) ifadesinde yerine yazılırsa;

$$-\frac{1}{5}.\frac{dv}{dx}+\frac{1}{x}.v=x^2$$ ve buradan $$\frac{dv}{dx}-\frac{5}{x}.v=-5x^2$$

lineer diferansiyel denklem haline gelir.

$$\mu(x)=e^{\int-\frac{5}{x}dx}=x^{-5}$$ integral çarpanı olduğuna göre;

$$x^5.\frac{dv}{dx}-5x^4v=-5x^{-3}$$ ifadesinden $$d(x^5.v)=-5x^{-3}$$

elde edilir. Her iki tarafın integrali alınarak;

$$x^5.v=-\frac{5}{2}x^{-2}+c$$ bulunur. $v=y^{-5}$ değeri yerine yazılarak;

$$y^5=\frac{2}{5x^3+cx^5}$$ genel çözümü bulunur.

1.11 Bölüm Sonu Alıştırmaları

1.11.1 Homojen Denklemler İle İlgili Alıştırmalar

A) Aşağıdaki diferansiyel denklemlerin genel çözümünü bulunuz.

1. $(x-y).dx-2x.dy=0$ $\qquad [x.(x-3y)^2=c]$

2. $(3y-x).dx=(x+y).dy$ $\qquad y=x+c.e^{2x.(y-4)}$

3. $(x^2-xy).y'+y^2=0$ $\qquad x.\ln y-y=c.x$

4. $(x^2-xy).dy+(x^2-xy+y^2).dx=0$ $\qquad 2x^2.\ln x+2xy-y^2=ex^2$

5. $xy^2.dy-(x^3+y^3).dx=0$ $\qquad y^3=x^3.(3\ln x+c)$

6. $2x^3y'+y^3-x^2y=0$ $\qquad x^2.y=c.(x^2+y^2)$

B) Aşağıdaki başlangıç değer formüllerini çözünüz.

7. $x-y=2xy'$, $y(1)=1$ $\qquad x.(x-3y)^2=4$

8. $3xy^2.dy=(3y^3-x^3).dx$, $y(1)=2$ $\qquad y^3=x^3.(8-\ln|x|)$

9. $(2x+y).dx=y.dy$, $y(2)=1$ $\qquad (y-2x)^2.(x+y)=27$

10. $(x^3+y^3).dx-xy^2.dy=0$, $y(1)=0$ $\qquad y^3=3x^3.\ln|x|$

1.11.2 Lineer ve Bernoulli Denklemlerle İlgili Alıştırmalar

1. $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}=4$ $\qquad y=2x+\dfrac{c}{x}$

2. $y'+\dfrac{y}{x}=3x$ $\qquad y=x^2+\dfrac{c}{x}$

3. $x.y'=4x^3-y$ $\qquad y=x^3+\dfrac{c}{x}$

4. $\dfrac{dy}{dx}+xy=2x$ $\qquad y=2+c.e-e^{\frac{x^2}{2}}$

5. $y'=x^2-x^{2y}$ $\qquad y=1+c.e^{\frac{-x^3}{3}}$

6. $y'-\dfrac{y}{x}=-\dfrac{1}{x^2}$ $\qquad y=\dfrac{1}{2}x+cx$

7. $y' = \dfrac{3 - xy}{2x^2}$	$y = \dfrac{c}{\sqrt{x}} - \dfrac{3}{x}$
8. $y' = x + \dfrac{2y}{x}$	$y = x^2.(\ln x + c)$
9. $xy' = 2y - x$	$y = x + cx^2$
10. $(x+1).y' - 2y = (x+1)^4$	$y = \dfrac{(x+1)^4}{2} + c.(x+1)^2$
11. $y' = \dfrac{2 - 4x^2 y}{x + x^3}$	$(1+x^2)^2.y = 2\ln x + x^2 + c$
12. $(x+1).y' = 2.(x + y + 1)$	$y = c.(x+1)^2 - 2.(x+1)$
13. $xy' + x^2 y + y = 0$	$y = \dfrac{c}{x.e^{\frac{x^2}{2}}}$
14. $(1+x^3).dy = (1 - 3x^2 y).dx$	$y = \dfrac{x + c}{1 + x^3}$
15. $y' + y = e^x$	$y = \dfrac{c^x}{2} + \dfrac{c}{e^x}$
16. $y' = e^{2x} + y$	$y = e^{2x} + ce^x$
17. $y' = 2y + 4.e^{2x}$	$y = (4x + c).e^{2x}$
18. $xy' - e^x + y + xy = 0$	$y = \dfrac{e^x}{2x} + \dfrac{c}{x.e^x}$
19. $y' = \dfrac{4\ln x - 2x^2 y}{x^3}$	$x^2 y = 2\ln^2 x + c$
20. $y' + y.\sin x = 3\sin x$	$y = \sin x - \cos x + ce^{-x}$
21. $y' + y = \sin x$	$y = \dfrac{1}{2}(\sin x - \cos x) + ce^{-x}$
22. $y' + 2xy = 2x.\cos(x^2)$	$y = \cos(x^2).\sin(x^2) + ce^{-x^2}$
23. $y' = 2\cos x - y$	$y = \sin x + \cos x + ce^{-x}$

24. $dx = (\sec x - y.\cot x).\dfrac{dy}{dx}$ $\qquad$ $y.\sin x = -\ln|\cos x| + c$

25. $y' - \dfrac{y}{x} = 4 \quad , \quad y(1) = 5$ $\qquad$ $x.y - 2x^2 = 3$

26. $y' + \dfrac{y}{x} = 5 \quad , \quad y(1) = 2$ $\qquad$ $y = \dfrac{5x}{2} - \dfrac{1}{2x}$

27. $y' + 5y = 3e^x \quad , \quad y(1) = 1$ $\qquad$ $y = \dfrac{e^x}{2} - \dfrac{53.3}{e^{5x}}$

28. $y' + \dfrac{y}{x} = 3x^2y^2$ $\qquad$ $x.y(c - \dfrac{3x^2}{2}) = 1$

29. $xy' + x^2y^2 + y = 0$ $\qquad$ $y = \dfrac{1}{x^2 + cx}$

30. $y' = y - xy^2.(x+2)$ $\qquad$ $y = \dfrac{1}{x^2 + c.e^{-x}}$

31. $y' + 2xy = x.e^{-x^2}y^3$ $\qquad$ $\dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{3}e^{-x^2} + c.e^{2x^2}$

BÖLÜM 2

2. YÜKSEK MERTEBEDEN LİNEER DENKLEMLER

2.1 Giriş

F(x) ve **a_i(x)**, (i=1, 2, 3, ... , n) katsayı fonksiyonları bir **I** açık aralığında sürekli olmak üzere;

$$a_n(x)\cdot\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\cdot\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\;.....\;+a_1(x)\cdot\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=F(x)\qquad (a_n\neq 0)\quad \mathbf{(2.1)}$$

denklemine **n. mertebeden lineer değişken katsayılı diferansiyel denklem** denir. Eğer, **(2.1)** denkleminde **F(x)=0** olursa **(2.1)** denklemine **n. mertebeden homojen lineer değişken katsayılı diferansiyel denklem** denir. Aksi halde **(2.1)** denklemine **n. mertebeden homojen olmayan lineer değişken katsayılı diferansiyel denklem** denir. Buna göre,

$$a_n(x)\cdot\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\cdot\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\;.....\;+a_1(x)\cdot\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=0\quad (a_n\neq 0)\qquad \mathbf{(2.2)}$$

denklemine **n. mertebeden homojen değişken katsayılı lineer diferansiyel denklem** denir. Bu denklemin genel çözümünü bulmak için, en azından, prensipte n defa integral almamız gerekir. Buradan; n tane integral sabiti **(2.2)** nolu denklemin genel çözümünde yer alır. Yani;

$$y=c_1y_1+c_2y_2+.......+c_ny_n$$

(2.2) nolu denklemin genel çözümüdür.

2.2 İkinci Mertebeden Lineer Denklemler

Tanım 2.1: $a(x)\cdot y''+b(x)\cdot y'+c(x)\cdot y=F(x)$ **(2.3)**

denklemini ele alalım. Burada; a,b,c,F: katsayı fonksiyonları I açık aralığında süreklidir ve ilaveten I'nın herbir noktasında $a(x)\neq 0$ varsayalım. **(2.3)** denkleminin her iki tarafını **a(x)** ile bölersek ve;

$$\frac{b(x)}{a(x)}=p(x),\quad \frac{c(x)}{a(x)}=q(x),\quad \frac{F(x)}{a(x)}=f(x)$$

diyecek olursak;

$$y''+p(x)\cdot y'+q(x)\cdot y=f(x)\qquad \mathbf{(2.4)}$$

denklemini elde ederiz. İşte bu denkleme ikinci mertebeden değişken katsayılı Lineer homojen olmayan diferansiyel denklem denir.

Eğer **(2.4)** denkleminde sağ tarafı 0 olarak alırsak;

$$y''+p(x)\cdot y'+q(x)\cdot y=0\qquad \mathbf{(2.5)}$$

denklemini elde ederiz ki, bu denkleme de 2. mertebeden değişken katsayılı Lineer homojen diferansiyel denklem denir.

Teorem 2.1: y_1 ve y_2 fonksiyonları;

$$y''+p(x)\cdot y'+q(x)\cdot y=0\qquad \mathbf{(2.6)}$$

ikinci dereceden değişken katsayılı homojen lineer diferansiyel denkleminin I aralığında çözümleri olsun. Bu durumda c_1 ve c_2 sabitleri için,

$$y=c_1y_1+c_2y_2$$

fonksiyonu da I aralığında **(2.6)** denkleminin çözümüdür.

İspat: $y = c_1y_1 + c_2y_2$ **(2.6)** denkleminin çözümü olduğuna göre, türevlerini alıp **(2.6)**'de yerine yazarsak çözüm olup olmadığını anlarız. Buna göre,

$$y = c_1y_1 + c_2y_2$$
$$y' = c_1y_1' + c_2y_2'$$
$$y'' = c_1y_1'' + c_2y_2''$$

değerleri **(2.6)**'da yerine yazarsak:

$$y'' + py' + qy = (c_1y_1 + c_2y_2)'' + p(c_1y_1 + c_2y_2)' + q(c_1y_1 + c_2y_2)$$
$$= c_1y_1'' + c_2y_2'' + p(c_1y_1' + c_2y_2') + q(c_1y_1 + c_2y_2)$$
$$= c_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + c_2(y_2'' + py_2' + qy_2)$$

y_1 ve y_2 çözüm olduğundan;

$$= c_1 \cdot (0) + c_2 \cdot (0) = 0$$

olur. Dolayısıyla, $y = c_1y_1 + c_2y_2$ çözümü (çözümlerin lineer kombinasyonu) keza **(2.6)** denkleminin çözümüdür.

Örnek 2.1: $y_1 = e^x$ ve $y_2 = e^{3x}$ fonksiyonlarının lineer kombinasyonunun

$y'' - 4y' + 3y = 0$ denkleminin çözümü olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Önceki teoremden;

$y = c_1y_1 + c_2y_2$ alalım. Böylece;

$$y = c_1e^x + c_2e^{3x}$$
$$y' = c_1e^x + c_2e^{3x}$$
$$y'' = c_1e^x + 9c_2e^{3x}$$

Şimdi denklemde bu türev değerlerini yerine yazarsak;

$$c_1e^x + 9c_2e^{3x} - 4c_1e^x - 12c_2e^{3x} + 3c_1e^{3x} + 3c_2e^{3x} = 0$$
$$0 = 0$$

olur. O halde, verilen denklemin çözümü;

$y(x) = c_1e^x + c_2e^{3x}$ olarak bulunur.

Teorem 2.2: Çözümlerin Varlığı ve Tekliği

Varsayalım ki p, q ve f fonksiyonları x_0 noktasını içeren bir I açık aralığında sürekli olsunlar. Ayrıca a_0 ve a_1 verilen iki sayı olsun. Buna göre;

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

ikinci derece homojen lineer diferansiyel denklem

$$y(x_0) = y_0 \text{ ve } y'(x_0) = y_1$$

başlangıç koşullarını I aralığında sağlayacak tek bir çözüme sahiptir.

Bu teoremin ispatını yapmadan, önemini vurgulamakla yetineceğiz. Bu teorem ile **(2.6)** denkleminin bir başlangıç koşuluna bağlı olarak,

$$y = c_1y_1 + c_2y_2$$

çözümünde c_1, c_2 sabitlerinin belirlenip bu tek çözümün elde edilmesini sağlar.

Örnek 2.2: $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = xe^{2x}$ fonksiyonlarının

$$y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3$$

başlangıç değer probleminin çözümü olduğuna göre, c_1, c_2 sabitlerini bulunuz.

Çözüm: $y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$ alalım. (Teorem 2.2)

Türev alırsak;

$$y' = 2c_1 e^{2x} + 2c_2 x e^{2x} + c_2 e^{2x}$$

$$y' = (2c_1 + c_2)e^{2x} + 2c_2 x e^{2x}$$

olur. Başlangıç koşullarını y' ifadesinde yerine yazıp c_1 ve c_2 değerlerini bulalım. Buna göre;

$$y(0) = 2 \Rightarrow c_1 + c_2 \cdot 0 = 2 \Rightarrow c_1 = 2$$

$$y'(0) = 3 \Rightarrow 2c_1 + c_2 = 3 \Rightarrow c_2 = -1$$

olur. O halde;

$y = 2e^{2x} - xe^{2x}$ istenilen çözümdür.

Tanım 2.2: f ve g verilen iki fonksiyon iken f ve g fonksiyonlarının **Wronskian**'ı;

$$W(f,g) = W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = f \cdot g' - f' \cdot g$$

şeklinde tanımlanan 2x2'lik determinanttır. Eğer f ve g lineer bağımlı fonksiyonlar ise

$W(f,g) = 0$, f ve g lineer bağımsız ise $W(f,g) \neq 0$ olur. Aşağıdaki teorem bunu ifade eder.

Teorem 2.3: Çözümlerin Wronskianı: $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ ikinci derece homojen lineer diferansiyel denklemini ele alalım.Varsayalım ki, y_1 ve y_2 fonksiyonları bu denklemin iki çözümü, p ve q fonksiyonları da bir I açık aralığında sürekli olsunlar.

Buna göre, aşağıdaki durumlar I aralığındaki bütün noktalarda geçerlidir.

a) Eğer y_1 ve y_2 çözüm fonksiyonları Lineer bağımlı ise, $W(y_1, y_2) = 0$

b) Eğer y_1 ve y_2 çözüm fonksiyonları Lineer bağımsız ise, $W(y_1, y_2) \neq 0$

Tanım 2.3: $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ fonksiyonları ve $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ keyfi sabitleri için,

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + \ldots\ldots + c_n y_n$$

ifadesine $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ fonksiyonlarının **lineer kombinasyonu** denir.

Tanım 2.4: Bir **I** aralığında tanımlı $\mathbf{y_1, y_2, \ldots, y_n}$ fonksiyonları ve $\mathbf{c_1, c_2, \ldots, c_n}$ keyfi sabitleri için;

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots\ldots + c_n y_n = 0$$

oluyorsa $\mathbf{y_1, y_2, \ldots, y_n}$ fonksiyonlarına **lineer bağımlı fonksiyonlar**, I aralığında lineer bağımlı olmayan fonksiyonlara da **lineer bağımsız fonksiyonlar** denir.

Teorem 2.3 ile ikinci mertebeden değişken katsayılı homojen lineer diferansiyel denklemlerin y_1 ve y_2 çözümlerinin lineer bağımlılık durumunu $w(y_1, y_2)$ ile incelemiştik. Bu teoremin n. mertebeden değişken katsayılı homojen lineer diferansiyel denklemlerin $y_1, y_2, \ldots, y_n$ çözümlerinin lineer bağımlılık durumuna ilişkin $w(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ determinantı aşağıdaki teoremde ele alınmaktadır.

Teorem 2.4: Çözümlerin Wronskianı: Varsayalım ki $y_1, y_2, ..., y_n$ fonksiyonları,

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_{n-1}(x) \cdot y' + p_n(x) \cdot y = 0$$

n. dereceden değişken katsayılı homojen lineer diferansiyel denklemin çözümleri olsunlar ve $p_1, p_2, ..., p_{n-1}, p_n$ fonksiyonları da I açık aralığında sürekli olsunlar. $y_1, y_2, ..., y_n$ fonksiyonlarının wronskian determinantı $W = W(y_1, y_2, ..., y_n)$ olsun. Bu durumda,

i)Eğer, $y_1, y_2, ..., y_n$ fonksiyonları lineer bağımlı ise, $W = 0$ olur. (I aralığında)

ii)Eğer, $y_1, y_2, ..., y_n$ fonksiyonları lineer bağımsız ise I'nın herbir noktasında $W \neq 0$ olur.

Teorem 2.5: Genel Çözümler: $y_1, y_2, ..., y_n$ fonksiyonları

$$y^n + p_1(x)y^{n-1} + ... + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \qquad \textbf{(2.7)}$$

n. mertebeden sabit katsayılı homojen lineer diferansiyel denklemin çözümleri olsun ve p_i fonksiyonları I açık aralığında sürekli olsunlar. Eğer y(x) fonksiyonu **(2.7)** denkleminin bir çözümü ise hepsi sıfır olmayan c_1, c_2, ..., c_n sabitleri için;

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + ... + c_n y_n(x)$$

I aralığında bütün x 'ler için mevcuttur.

Sonuç olarak, n. mertebeden değişken katsayılı homojen lineer diferansiyel denklemin herbir çözümü, verilen $y_1, y_2, ..., y_n$ gibi n tane lineer bağımsız çözümün,

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n$$

şeklinde tanımlanan bir lineer kombinasyonudur.Böylece;

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n$$

şeklinde tanımlanan lineer kombinasyona diferansiyel denklemin genel çözümü denir.

2.3 Homojen Olmayan Denklemler

n. mertebeden değişken katsayılı homojen olmayan bir lineer diferansiyel denklem;

$$Ly = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \quad \textbf{(2.8)}$$

şeklinde tanımlanırken, n. mertebeden değişken katsayılı homojen bir lineer diferansiyel denklem,

$$Ly = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \qquad \textbf{(2.9)}$$

şeklinde ifade edilir. Burada, Ly, y fonksiyonunun n kez diferansiyellenebilen bir fonksiyon olduğunu ifade eder. L operatörü lineer olup, **Teorem 2.1**'e göre;

$$L/c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 L(y_1) + c_2 L(y_2) \qquad (c_1, c_2 \text{ sabit})$$

özelliğine sahiptir.Varsayalım ki, y_c ve y_p, **(2.8)** homojen olmayan denklemin çözümü olsunlar. Buna göre,

$L(y_c - y_p) = Ly_c - Ly_p = f - f = 0$ olur. Böylece, $y_c=y-y_p$, **(2.9)** homojen denkleminin bir çözümü olup;

$$y = y_c + y_p$$

olarak bulunur. Teorem 2.4 (Genel Çözümler Teoremi) 'den;

$$c_1y_1 + c_2y_2 + ... + c_ny_n$$

fonksiyonları lineer bağımsız çözümleri olmak üzere;

$$y_c = c_1y_1 + c_2y_2 + ... + c_ny_n$$

şeklinde tanımlanmıştı. Burada, y_c çözümüne **(2.8)** homojen olmayan denklemin **tamamlayıcı çözümü** denir. Böylece, homojen olmayan denklemin genel çözümü y_c ile y_p çözümlerinin toplamı olur. Buna ilişkin teorem aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.6: Homojen Olmayan Denklemlerin Çözümleri: y_p, I açık aralığında,

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \qquad \textbf{(2.10)}$$

homojen olmayan denklemin kısmi çözümü olsun. Burada, p_i'ler ve f sürekli fonksiyonlardır. Bundan başka,

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \qquad \textbf{(2.11)}$$

homojen denkleminin $y_1, y_2, ..., y_n$ lineer bağımsız çözümleri olsunlar. Böylece, y, **(2.10)** denkleminin I aralığındaki herhangi bir çözümü olmak üzere, $c_1, c_2, ..., c_n$ sabitleri için;

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + ... + c_ny_n(x) + y_p(x)$$

I aralığındaki bütün x'ler için genel çözümdür.

2.4 Sabit Katsayılı Homojen Denklemler

Değişken katsayılı homojen lineer diferansiyel denklemlerin çözümü için nümerik veya sonsuz serilere dayalı yöntemler uygulanır. Halbuki, sabit katsayılı homojen lineer diferansiyel denklemlerin çözümü, homojen olmayandan farklı olarak daha basit yöntemler ile gerçekleştirilir.n. mertebeden sabit katsayılı homojen lineer diferansiyel denklem,

$$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0 \quad (a_n \neq 0) \text{ (}a_i\text{'ler reel sabitler)} \quad \textbf{(2.12)}$$

şeklinde tanımlanır. Bu denklemin bir çözümü için,

$$\frac{d^k}{dx^k}\left(e^{rx}\right) = r^k \cdot e^{rx}$$

ifadesini ele alalım. Burada, e^{rx} fonksiyonunun türevi re^{rx} ve ardışık türevleri ise r'nin katları olur. Böylece, **(2.12)** denkleminde $y = e^{rx}$ fonksiyonunun bu denklemin bir çözümü olduğu görülür.Örneğin;

$$y'' + 4y' - 5y = 0$$

denkleminde $y = e^{rx}$ ve türevlerini yerine yazarsak;

$r^2e^{rx} + 4re^{rx} - 5e^{rx} = 0$ olur. Her iki taraf e^{rx} ile bölünürse:

$r^2 + 4r - 5 = 0$ ise r = -5 ve r=1 bulunur.

$(r+5)(r-1) = 0$

O halde, $y=e^{-5x}$ ve $y=e^x$ fonksiyonları $y'' + 4y' - 5y = 0$ denkleminin iki çözümüdür.

Bu örnekten de anlaşılabileceği gibi, y=e^{rx} ve türevleri **(2.12)** denkleminde yerine yazılırsa;

$$a_n r^n \cdot e^{rx} + a_{n-1} r^{n-1} \cdot e^{rx} + ... + a_2 r^2 \cdot e^{rx} + a_1 r \cdot e^{rx} + a_0 \cdot e^{rx} = 0$$

ve buradan;

$$e^{rx} \cdot \left(a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + ... + a_2 r^2 + a_1 r + a_0\right) = 0$$

elde edilir. Böylece, r değeri,

$$a_n r^n \cdot e^{rx} + a_{n-1} r^{n-1} \cdot e^{rx} + ... + a_2 r^2 \cdot e^{rx} + a_1 r \cdot e^{rx} + a_0 \cdot e^{rx} = 0 \qquad \textbf{(2.13)}$$

denkleminin bir kökü olmak üzere y=e^{rx} fonksiyonu **(2.12)** denkleminin bir çözümüdür. Bununla birlikte,

$$a_n r^n \cdot e^{rx} + a_{n-1} r^{n-1} \cdot e^{rx} + ... + a_2 r^2 \cdot e^{rx} + a_1 r \cdot e^{rx} + a_0 \cdot e^{rx} = 0 \qquad \textbf{(2.13)}$$

denklemine **(2.12)** denkleminin **karakteristik denklemi** ve r'ye bağlı n. dereceden bu cebirsel denklemin kökleri olan r sayılarına da **(2.12)** denkleminin **karakteristik değerleri** denir.

Daha önceden de söylediğimiz gibi, **(2.12)** ile ifade edilen sabit katsayılı homojen lineer diferansiyel denklemin çözümü n. dereceden cebirsel bir denklemin çözümüne indirgenmiş olur. Cebirin esas teoremine göre, n. derece cebirsel bir denklemin en az bir, en çok n tane kökü vardır. Yani, farklı ve reel sayı olması gerekmeyen n tane köke sahiptir

Teorem 2.7: $r_1, r_2, ..., r_n$ **(2.13)** karakteristik denkleminin kökleri olsun. Bu durumda,

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + ... + c_n e^{r_n x}$$

(2.12) denkleminin bir genel çözümüdür.

Örnek 2.3: $y'' - 3y' - 10y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$ başlangıç değer problemini çözünüz.

Çözüm: Karakteristik denklem, (Teorem 2.7'den)

$$r^2 - 3r - 10 = 0$$

$$(r-5)(r+2) = 0$$

$$r_1 = 5, \quad r_2 = -2$$

bulunur. Buna göre, $y(x) = c_1 e^{5x} + c_2 e^{-2x}$ aranan çözümdür. Şimdi başlangıç koşullarını kullanıp c_1 ve c_2 sabitlerini belirlemeye çalışalım. Bunun için;

$y'(x) = 5c_1 e^{5x} - 2c_2 e^{-2x}$ alınır ve y(0)=1, y'(0)=3 başlangıç şartları yerine yazılırsa;

$$y(0) = c_1 + c_2 = 1$$

$$y'(0) = 5c_1 - 2c_2 = 3$$

bulunur ve bu denklemlerden;

$$c_1 = \frac{5}{7} \text{ ve } c_2 = \frac{2}{7}$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak,

$$y(x) = \frac{5}{7} e^{5x} + \frac{2}{y} e^{-2x}$$ istenilen çözümdür.

2.4.1 Tekrarlayan Kökler

Eğer,

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + ... + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0 \qquad \textbf{(2.14)}$$

karakteristik denklemi tekrarlayan köklere (kat köklere) sahipse, buna ait genel çözümün nasıl bulunduğunu inceleyelim.**(2.14)** denkleminde Ly=0 operatörüne bağlı olarak;

$$L = a_n \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + ... + a_2 \frac{d^2}{dx^2} + a_1 \frac{d}{dx} + a_0 \qquad \textbf{(2.15)}$$

lineer operatörünü ele alalım.

$D = \dfrac{d}{dx}$ olmak üzere; Dy=y', D^2y=y'', türev operatörleri **(2.15)** ifadesinde yerine yazılırsa:

$$L = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + ... + a_2 D^2 + a_1 D + a_0$$

olur. Bu son ifadenin sağ tarafı D değişkenine bağlı n. derece bir polinom olup D polinom operatördür. Birinci derece polinom operatör, a reel sayı olmak üzere;

$$(D-a)y = Dy - ay = y' - ay$$

olur. Bu operatörlerin değişme özelliği olup;

$$(D-a)\cdot(D-b)\cdot y = (D-b)(D-a)y$$

şeklindedir. Bunun ispatı için y'nin ikinci mertebeden diferansiyellenebilir olduğu gözönüne alınırsa;

$$\begin{aligned}(D-a)(D-b)y &= (D-a)(y'-by) \\ &= D(y'-by) - a(y'-by) \\ &= y'' - (a+b)y' + ab\cdot y \\ &= y'' - (b+a)y' + ba\cdot y \\ &= D(y'-ay) - b(y'-ay) \\ &= (D-b)(D-a)y\end{aligned}$$

olduğu görülür.**(2.14)** ile ifade edilen karakteristik denklem tekrarlayan köklere sahip olsun.r_0 ve r_1 olmak üzere **(2.14)** denkleminin iki farklı kökü olsun ve r_1, k defa tekrarlansın. Buna göre;

$$(r-r_1)^k(r-r_0) = (r-r_0)(r-r_1)^k = 0$$

olur. Benzer olarak; **(2.15)** ile ifade edilen bağıntıdaki L operatörünün kullanılmasıyla,

$$L = (D-r_1)^k(D-r_0) = (D-r_0)(D-r_1)^k$$

yazılır. Ly=0 diferansiyel denkleminin çözümleri, $y_0 = e^{r_0 x}$ ve $y_1 = e^{r_1 x}$ olduğu biliniyor. Ama, k+1 tane lineer bağımsız çözümden k-1 tanesini bulmamız gerekiyor. Bunun için,

$Ly = (D-r_0)\cdot\left[(D-r_1)^k \cdot y\right] = 0$ yazarız;

$$(D-r_1)^k \cdot y = 0 \qquad \textbf{(2.16)}$$

k. mertebeden herbir çözümü Ly=0 denkleminin de bir çözümü olacaktır. Bu nedenle, bizim problemimiz **(2.16)** ile verilen diferansiyel denklemin genel çözümünü bulmak problemine indirgenir.

$$(D-r_1)^k \cdot y = 0 \qquad \textbf{(2.17)}$$

denkleminin herbir kökünün $e^{r_1 x}$ olduğu açıktır. Buna göre, r_1'in k defa tekrarlandığı gözönüne alınırsa;

$y(x) = u(x)e^{r_1 x}$ alabiliriz.

Buna göre,

$$(D-r_1)[ue^{r_1x}]=(Du)e^{r_1x}+r_1ue^{r_1x}-r_1e^{r_1x}$$
$$=(Du)e^{r_1x}$$

olur ve böylece devam edilirse, herhangi u(x) fonksiyonu için:

$$(D-r_1)^k\cdot(ue^{r_1x}]=(D^ku)e^{r_1x}$$

elde edilir. Bundan başka, $y=ue^{r_1x}$, **(2.17)** denkleminin

$$D^ku=u^{(k)}$$

olduğunda çözümü olur. Bu ancak,

$$u(x)=c_1+c_2x+c_3x^2+....+c_kx^{k-1}$$

en çok (k-1). dereceden polinom fonksiyon olduğunda söz konusudur.

Böylece, $(D-r_1)^k\cdot y=0$ denkleminin aranan çözümü;

$$y(x)=u\cdot e^{r_1x}=(c_1+c_2x+....+c_kx^{k-1})\cdot e^{r_1x}$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 2.8: Tekrarlayan Kökler

(2.14) karakteristik denkleminin k defa tekrarlayan r kökü varsa, n. Mertebeden homojen sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemin genel çözümü:

y= $(c_1+c_2x+....+c_kx^{k-1})\cdot e^{rx}$ şeklindedir.

Örnek 2.4: $y^{IV}+6y'''+12y''+8y'=0$ denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm: Karakteristik denklem;

$r^4+6r^3+12r^2+8r=0$

$r(r^3+6r^2+12r+8)=0$ $r_1=0$, $r_2=r_3=r_4=-1$ olarak bulunur

$r\cdot(r+1)^3=0\Rightarrow$

O halde; $y(x)=c_1+(c_2+c_3x+c_4x^2)e^{-x}$.

2.4.2 Kompleks Kökler

Eğer;

$$a_nr^n+a_{n-1}r^{n-1}+....+a_2r^2+a_1r+a_0=0$$

karakteristik denklemin kompleks kökleri varsa, bu kökleri;

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

olarak bilinen Euler formülünü kullanarak inceleyebiliriz.

z=x+iy kompleks sayısını ele alırsak,

$$e^z=e^{x+iy}=e^x\cdot e^{iy}=e^x\cdot(\cos y+i\sin y)$$

olur. Kompleks değerli bir F fonksiyonu için;

$$F(x)=f(x)+i\cdot g(x)$$

yazalım. Burada, f, F'nin reel kısmı iken; g, F'nin imajiner kısmıdır. F'nin diferansiyeli alınırsa;

$F'(x)=f'(x)+i\cdot g'(x)$ olur. F(x) fonksiyonunun

$$a_ny^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+....+a_2y''+a_1y'+a_0y=0$$

denklemini sağlaması, reel ve imajiner kısımların bu denklemi sağlaması anlamını taşır.

Bizim ilgilendiğimiz fonksiyon,

$F(x) = e^{rx}$ şeklinde olup, r=a+bi olduğu düşünülürse;

$$F(x) = e^{rx} = e^{(a\mp bi)x}$$

$$r = a + bi \Rightarrow F(x) = e^{(a-bi)x} = e^{ax} \cdot e^{-bxi} = e^{ax} \cdot (\cos bx - i \sin bx)$$

olarak bulunur. Diğer yandan,

$$D_x(e^{rx}) = r \cdot e^{rx}$$

r kompleks olsa bile geçerli olur. Buna göre, r=a+bi olduğunda;

$$\begin{aligned} D_x(e^{rx}) &= D_x \cdot (e^{(a+bi)x}) \\ &= D_x(e^{ax} \cos bx) + i \cdot D_x \cdot (e^{ax} \sin bx) \\ &= (ae^{ax} \sin bx + be^{ax} \cos bx) + i(ae^{ax} \sin bx + be^{ax} \cos bx) \\ &= (a + bi)(e^{ax} \cos bx + ie^{ax} \sin bx) \\ &= re^{rx} \end{aligned}$$

Buna göre, r_1=a+bi ve r_2=a-bi kompleks kökleri için;

$$a_n y^{(n)} + ... + a_1 y' + a_0 y = 0$$

denkleminin genel çözümü:

$$\Rightarrow c_1 e^{(a+bi)x} + c_2 e^{(a-bi)x}$$

$$= c_1 e^{ax} (\cos bx + i \sin bx) + c_2 e^{ax} (\cos bx - i \sin bx)$$

c_1=c_1+c_2 ve c_2=(c_1-c_2)i olmak üzere;

$$= e^{ax} \cdot (c_1 \cos bx + c_2 \sin bx)$$ olur.

Teorem 2.9: Kompleks Kökler: Eğer,

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + ... + a_1 r + a_0 = 0$$

karakteristik denklemi $a \mp bi$ şeklinde kompleks köke sahipse;

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = 0$$

denkleminin çözümü;

$$e^{ax} \cdot (c_1 \cos bx + c_2 \sin bx)$$ şeklindedir.

Örnek 2.5: $y'' + 4y = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm:

$r^2 + 4 = 0$

$r = \mp 2i$

$y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \cos 2x$

Örnek 2.6: $y'' + 6y' + 10y = 0$, y(0)=2, y'(0)=3 denklemini çözünüz.

Çözüm: $r^2 + 6r + 10 = 0$ karakteristik denkleminden; $r_1 = 3 + i$ ve $r_2 = 3 - i$ olarak bulunur. Buna göre,

$$y(x) = e^{3x} \cdot (c_1 \cos x + c_2 \sin x)$$ olur.

Başlangıç koşulu için;

$$y'(x) = 3e^{3x} \cdot (c_1 \cos x + c_2 \sin x) + e^{3x} (-c_1 \sin x + c_2 \cos x)$$

$$y(0) = 2 \Rightarrow 2 = c_1$$

$$y'(0) = 3 \Rightarrow 3 = 3c_1 + c_2 \Rightarrow 3 = 3 \cdot 2c_1 + c_2 \Rightarrow c_2 = -3$$

bulunur. O halde; $y(x) = e^{3x} (2 \cos x - 3 \sin x)$olarak elde edilir.

2.5 Homojen Olmayan Denklemlerin Çözüm Metodları

2.5.1 Belirsiz Katsayılar Metodu

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x) \qquad \textbf{(2.18)}$$

n. mertebeden homojen olmayan sabit katsayılı lineer diferansiyel denklem olsun. Bu denklemin genel çözümü, Teorem-5'den;

$$y = y_c + y_p$$

şeklinde idi. Burada, y_c homojen kısmın çözümü ve y_p, **(2.1)** denkleminin kısmi çözümüdür.

Belirsiz katsayılar metodunda **(2.1)** denkleminin sağ tarafındaki f(x) fonksiyonuna göre çözümler aranır. Burada, f(x)'in kendisi ve türevlerinden oluşan bir fonksiyonlar kümesi ele alınır. Bu kümenin en önemli özelliği, y_c çözümünde bulunan (homojen kısmın çözümü) fonksiyonlar ile bu kümenin elemanları birbirinden farklı olacak şekilde oluşturulmasıdır. Bu oluşumu, fonksiyonların tiplerine göre detaylı bir şekilde inceleyelim.

Eğer **(2.1)**'deki denklemin sağ tarafında bulunan f(x) fonksiyonu n. dereceden polinom fonksiyon ise;

$$y_p = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \ldots + A_1 x + A_0$$

şeklinde alınır. Eğer, y_c çözümünde x'in kuvvetleri cinsinden bir terim varsa, y_p çözümü bu x'li terimi içermeyecek şekilde x'in kuvvetleriyle çarpılır. Örneğin, verilen bir diferansiyel denklem için;

$$y_c = c_1 + c_2 e^{-x} \text{ ve } f(x) = 3x^2 \text{ olsun.}$$

y_p çözümü için $3x^2$ ve türevlerini içeren bir küme seçilir. Bu kümeye **Belirsiz Katsayılar (Undetermined Coefficients)** anlamında UC diyelim.

$UC = \{x^2, x, 1\}$ alınır ve y_p çözümü;

$y_p = Ax^2 + Bx + C$ olarak seçilir. Burada, A, B, C, belirlenecek katsayılardır. Şimdi, bu y_p çözümü gerçekten doğru alınmış mıdır? Nasıl kontrol edilebilir? y_c'de x^2 ve x'li terim yok ama sabit terim vardır. y_p'de de c ile ifade edilen sabit terim var. O halde, y_p çözümü x ile çarpılarak sabit terim içermeyecek şekli alınır. Yani,

$$y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$

olarak alınır.f(x) fonksiyonu üstel, polinom ve trigonometrik fonksiyonların bir bileşkesi olduğunda ise UC kümesi probleme göre f(x) ve türevlerini içerecek şekilde seçilir.

Aşağıdaki basit örneklerde f(x)'in durumuna göre UC'nin nasıl seçileceği verilecektir. Eğer UC'deki terimleri y_c'deki terimlerle aynı değilse katsayılar yardımıyla y_p seçilir.

Örnek 2.7: $f(x) = 3x + e^{-x} \Rightarrow UC = \{x, 1, e^{-x}\}$

Örnek 2.8: $f(x) = 5x^3 - \cos 2x + e^{2x} \Rightarrow UC = \{x^3, x^2, x, 1, \cos 2x, \sin 2x, e^{2x}\}$

Örnek 2.9: $f(x) = 3xe^x + 2\sin x \Rightarrow UC = \{xe^x, e^x, \sin x, \cos x\}$

Örnek 2.10: $f(x) = -2x^2 e^{-2x} + \cos 4x \Rightarrow UC = \{x^2 e^{-2x}, xe^{-2x}, e^{-2x}, \cos 4x, \sin 4x\}$

Örneklerde de görüldüğü gibi UC ailesi seçilirken fonksiyon ve türevlerinin sahip olduğu katsayıları dikkate alınmaz. Daha sonra, y_p çözümünde bu katsayıların yerine, aşağıdaki örneklerde de görüleceği gibi belirlenmesi gereken A,B,C, ... katsayıları alınır.

Belli başlı bazı fonksiyonlar için y_p çözümünün nasıl seçileceği aşağıdaki tabloda verilmiştir.

f(x) (Sağ taraf fonksiyonu)	**UC (Belirsiz katsayılar) kümesi**	y_p
$f(x)=P_n(x)=a_nx^n+....+a_1x+a_0$	$UC=\{x^n,x^{n-1},....,x^3,x^2,x,1\}$	$y_p=x^\alpha(A_nx^n+...+A_1x+A_0)$
$f(x)=a\cos kx+b\sin kx$	$UC=\{\cos kx,\sin kx\}$	$y_p=x^\alpha(A\cos kx+B\sin kx)$
$f(x)=e^{rx}(a\cos kx+b\sin kx)$	$UC=\{e^{rx}\cos kx,e^{rx}\sin kx\}$	$y_p=x^\alpha(Ae^{rx}\cos kx+Be^{rx}\sin kx)$
$f(x)=P_n(x)e^{rx}$	$UC=\{x^ne^{rx},x^{n-1}e^{rx},...,xe^{rx},e^{rx}\}$	$y_p=x^\alpha e^{rx}(A_nx^n+...+A_1x+A_0)$
$f(x)=P_n(x)(a\cos kx+b\sin kx)$	$UC=\left\{\begin{matrix} x^n\cos kx,x^n\sin kx, \\ x^{n-1}\cos kx,x^{n-1}\sin kx, \\ .....,x\cos kx,x\sin kx, \\ \cos kx,\sin kx \end{matrix}\right\}$	$y_p=x^\alpha\begin{pmatrix} A_nx^n+A_{n-1}x^{n-1}+.. \\ .+A_1x+A_0 \end{pmatrix}\cos x+x^\alpha\begin{pmatrix} B_nx^n+B_{n-1}x^{n-1}+... \\ +B_1x+B_0 \end{pmatrix}\sin x$

Yukarıdaki tabloda α, y_c ile y_p'de aynı terimin olmaması için y_p'nin çarpıldığı x'li terimin derecesidir.

Örnek 2.11: $y''+y=2x^3+5$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: Karakteristik denklem;

$$r^2+1=0\Rightarrow r^2=-1\Rightarrow r=\mp i$$

ve

$y_C=C_1\cos x+C_2\sin x$ olur. $f(x)=2x^3+5$ fonksiyonu ve türevlerinden oluşan UC kümesi ;

$$UC=\{x^3,x^2,x,1\}$$

bulunur ve buna göre y_p çözümü;

$y_p=Ax^3+Bx^2+Cx+D$ alınır. y_p'nin türevleri alınırsa;

$$y'_p=3Ax^2+2Bx+C$$

$$y''_p=6Ax+2B$$

olur. Bu değerleri denklemde yerine yazıp A,B,C,D katsayıları polinomların eşitliğinden belirlenir. Buna göre,

$$6Ax+2B+Ax^3+Bx^2+Cx+D=2x^3+5$$

$$Ax^3+Bx^2+(6A+C)x+(2B+D)=2x^3+5$$

$$6A+C=0\Rightarrow C=-6A$$

$$A=2\quad\Rightarrow C=-12 \text{ ve } B=0 \text{ ise}$$

$$2B+D=5\Rightarrow d=5-2B=5-2\cdot0=5\Rightarrow D=5$$

bulunur. Böylece denklemimizin genel çözümü,

$y=y_C+y_p=c_1\cos x+c_2\sin x+2x^3-12x$ elde edilir.

Örnek 2.12: $y^{(3)} - y'' = 3e^x + 2x - 4$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: Karakteristik denklemden;

$$r^3 - r^2 = 0 \text{ ve } r^2(r-1) = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 0 \text{ ve } r_3 = 1$$

olur. Buna göre, homojen kısmın çözümü:

$$y_c = c_1 + c_2 x + c_3 e^x \quad \text{bulunur.}$$

UC ailesi ise;

$UC = \{e^x, x, 1\}$ olur. Burada, y_c ile UC arasındaki çakışmaları engellemek için x^2 ile UC'nin ilgili terimleri çarpılırsa;

$$y_p = Axe^x + Bx^3 + Cx^2$$

ve türevleri:

$$y_p' = Axe^x + Ae^x + 3Bx^2 + 2Cx$$

$$y_p'' = Axe^x + 2Ae^x + 6Bx + 2C$$

$$y_p''' = Axe^x + 3Ae^x + 6B$$

olarak bulunur. Bu değerler örnek problemde yerine yazılırsa;

$$(Axe^x + 3Ae^x + 6B) - (Axe^x + 2Ae^x + 6Bx + 2C) = 3e^x + 2x - 4$$

ve gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$A \cdot e^x + 6Bx + 6B - 2C = 3e^x + 2x - 4$$

olur. Buradan;

$$A = 3, \quad 6B = 2 \Rightarrow B = \frac{1}{3} \text{ ve } 6B - 2C = -4$$

ve $6B - 2C = -4$'den C=3 bulunur. Böylece, denklemimizin genel çözümü:

$$y = y_c + y_p = c_1 + c_2 + c_3 e^x + 3xe^x + \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 \text{ elde edilir.}$$

Örnek 2.13: $y'' + 4y' + 5y = 3e^{2x}\sin x$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $r^2 + 4r + 5 = 0$ karakteristik denkleminden;

$r_1 = 2 + i$ ve $r_2 = 2 - i$ olur. Böylece,

$$y_c = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$$

bulunur. UC ailesi ise $e^{2x}\sin x$ ve türevlerinden;

$UC = \{e^{2x}\sin x, e^{2x}\cos x\}$ olur.

Buradan y_c ile UC çakıştığından UC'nin her iki terimini de x ile çarparsak;

$$y_p = Axe^{2x}\sin x + Bxe^{2x}\cos x = e^{2x}(Ax\sin x + Bx\cos x)$$

elde edilir. y_p'nin türevleri alınırsa;

$$y_p' = 2e^{2x}(Ax\sin x + Bx\cos x) + [x(A\cos x - B\sin x) + A\sin x + B\cos x]e^{2x}$$

$$y_p'' = 4e^{2x}(Ax\sin x + Bx\cos x) + (Ax\cos x - Bx\sin x + A\sin x + B\cos x)4e^{2x}$$

$$+ e^{2x}(-Ax\sin x - Bx\cos x + A\cos x - B\sin x + A\cos x - B\sin x)$$

elde edilir. Bu ifadeler denklemde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$xe^{2x}\sin x(16A - 8B) + xe^{2x}\cos x(8A + 16B) + e^{2x}\sin x(8A - 2B) + e^{2x}\cos x(2A + 8B) = 3e^{2x}\sin x$ olur. Bu son eşitlikten;

$$16A-8B=0 \Rightarrow B=2A$$
$$8A+16B=0$$
$$8A-2B=3$$
$$2A+8B=0$$
$$y=y_c+y_p=c_1e^{2x}\cos x+c_2e^{2x}\sin x+Axe^{2x}\cos x+Bxe^{2x}\sin x \quad \text{olur.}$$

2.5.2 Mertebelerin İndirgenmesi Metodu

Sabit katsayılı homojen lineer diferansiyel denklemlerin çözümü için belirsiz katsayılar metodunu ele almıştık. Böyle bir yaklaşım değişken katsayılı homojen lineer diferansiyel denklemlerde mevcut değildir. Bununla birlikte, böyle denklemlerin bir çözümü bulunabilir. Örneğin,

$$x^2y''-3xy'+4y=0 \qquad \textbf{(2.19)}$$

denklemini ele alalım. Böyle bir denklemin türevleri içeren bir yapıda olması nedeniyle $y_1=x^r$ şeklinde bir çözüm seçebiliriz. Bu çözümü problemimizde yerine yazarsak;

$$x^2\cdot r(r-1)\cdot x^{r-2}-3xrx^{r-1}+4x^r=0$$

ve gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$x^r\cdot[r\cdot(r-1)-3r+4]=0$$

ve buradan;

$$r^2-4r+4=0 \Rightarrow (r-2)^2=0 \Rightarrow r=2$$

bulunur. Böyle, $y_1=x^2$, **(2.19)** denkleminin bir çözümü iken ikinci çözümü bulmamıza izin vermez. Böylece denklemin genel çözümü bulunamaz.

Bu bölümde, yukarıdaki örnekte bulamadığımız $y_2(x)$ lineer bağımsız ikinci çözümünü bulmak için mertebelerin indirgenmesi metodunu ele alacağız. Bununla birlikte, bu metodun uygulanması 2. mertebeden daha büyük mertebedeki diferansiyel denklemler için oldukça zordur. Bunun için,

$$y''+p(x)\cdot y'+q(x)y=0 \qquad \textbf{(2.20)}$$

ikinci mertebeden değişken katsayılı homojen lineer diferansiyel denklemini ele alalım. Burada, p(x) ve q(x) fonksiyonları bir I açık aralığında sürekli fonksiyonlardır.**(2.20)** denkleminin $y_1(x)$ çözümünün bilindiğini varsayalım. Buna göre, **(2.20)** denkleminin ikinci lineer bağımsız çözümü olan $y_2(x)$ fonksiyonunu bulalım. Bizim bu metodla amacımız böyle bir ikinci çözümü bulabilmektir.Buna göre,

$$V(x)=\frac{y_2(x)}{y_1(x)} \qquad \textbf{(2.21)}$$

eşitliğinde V(x) biliniyorsa;

$$y_2(x)=V(x)\cdot y_1(x) \qquad \textbf{(2.22)}$$

olur. Bu çözüm, **(2.20)** denkleminde yerine yazmak için y_1' ve y_2'' türevleri;

$$\left.\begin{aligned} y_2'&=v\cdot y_1'+y_1\cdot v' \\ y_2''&=v\cdot y_1''+2v'\cdot y'+v''\cdot y_1 \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(2.23)}$$

alınır ve denklemde yerine yazılırsa;

$$[v\cdot y_1''+2v'\cdot y_1'+v''y_1]+p\cdot[v\cdot y_1'+y_1\cdot v']+qvy_1=0 \qquad \textbf{(2.24)}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılarak;

$$v\cdot\left[y_1''+p\cdot y_1'+qy_1\right]+v''y_1+2v'y_1'+pv'y_1=0 \quad \textbf{(2.25)}$$

elde edilir. **(2.25)**'deki;

$$y_1''+py_1'+qy_1$$

ifadesi **(2.20)** denkleminin bir çözümü olduğundan sıfıra eşit olur.

Böylece, **(2.25)**'deki denklem;

$$y_1\cdot v''+\left(2y_1'+py_1\right)\cdot v'=0 \quad \textbf{(2.26)}$$

şekline gelir. **(2.26)** ifadesinde $u=v'$ yazarsak ve y_1'in I'da asla sıfır olamayacağını varsayarsak;

$$u'+\left(2\cdot\frac{y_1'}{y_1}+p(x)\right)\cdot u=0 \quad \textbf{(2.27)}$$

denklemi 1. mertebeden lineer diferansiyel denklem olur. Böyle bir denklemin integral çarpanı,

$$\mu(x)=e^{\int\left(2\frac{y_1'}{y_1}+p(x)\right)dx}=e^{\left(2\cdot\ln|y_1|+\int p(x)dx\right)}$$

ve buradan;

$\mu(x)=y_1^2e^{\int p(x)dx}$ bulunur. Böylece, **(2.27)**'daki denklemden;

$u\cdot y_1^2\cdot e^{\int p(x)dx}=C$ ve buradan;

$$v'=u=\frac{C}{y_1^2}\cdot e^{-\int p(x)dx}$$

elde edilir. v'yi bulmak için bu son denklemin her iki yanının integrali alınırsa;

$$v=\frac{y_2}{y_1}=C\cdot\int\frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}dx+K$$

bulunur. Özel olarak, K=0 ve C=1 için;

$$y_2=y_1\int\frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}dx \quad \textbf{(2.28)}$$

olarak elde edilir. Buna göre, **(2.28)** ifadesi **(2.20)**'deki 2. mertebeden değişken katsayılı lineer homojen diferansiyel denklemin $y_1(x)\neq 0$ çözümü bilindiğinde, $y_2(x)$ ikinci lineer bağımsız çözümü bulmamızı sağlayan formüldür.Şimdi de, yukarıdaki formül ile bulunan ikinci çözümü ve şartlarını özetleyen aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 2.10: Mertebelerin İndirgenmesi: Eğer $y_1(x)$ fonksiyonu;

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

ikinci mertebeden değişken katsayılı lineer homojen olmayan diferansiyel denklemin bir çözümü olsun. Ayrıca, p(x) ve q(x) fonksiyonları bir I açık aralığında sürekli iken $y_1(x)$ fonksiyonu da bu aralıkta sıfır olmasın. Bu durumda, I aralığındaki $y_2(x)$ ikinci lineer bağımsız çözümü;

$$y_2(x)=y_1(x)\cdot\int\frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}dx \quad \textbf{(2.29)}$$

formülü ile bulunur.

Örnek 2.14: Konunun başında ele aldığımız;

$x^2y'' - 2xy' + 4y = 0$ diferansiyel denklemini çözelim.

Çözüm: Öncelikle **(2.28)**'deki formülü uygulamak için verilen denklem standart hale getirilirse;

$$y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = 0$$

olur. Ayrıca $y_1(x)=x^2$ olarak bulunmuştu. Buna göre;

$$y_2(x) = x^2 \cdot \int \frac{e^{-\int -\frac{3}{x}dx}}{(x^2)^2}dx$$

ifadesinden;

$$y_2(x) = x^2 \cdot \int \frac{1}{x}dx = x^2 \cdot \ln|x|$$

olur. Buna göre,

$$x^2 \cdot y'' - 3xy' + 4y = 0$$

denkleminin genel çözümü;

$$y(x) = c_1x^2 + c_2x^2 \ln x \qquad ,(x>0)$$

olarak bulunur.Bazen, $y_2(x)$ çözümünü bulmak için;

$$y_2 = v \cdot y_1$$

dönüşümü uygulanır ve denklemde türevleriyle direkt olarak yerine yazılır. Yani, yukarıdaki örnek tekrar ele alınırsa;

$$y_2 = v \cdot y_1 = x^2v \quad \text{ve buradan;}$$

$$y_2' = 2xv + v' \cdot x^2$$

$$y_2'' = 2xv' + 2v + 2xv' + v'' \cdot x^2 = x^2v'' + 4xv' + 2v$$

değerleri denklemde yerine yazılırsa;

$$(x^4v'' + 4x^3v' + 2x^2v) - 4(2x^3v + x^4v') + 4 \cdot x^2v = 0$$

olur ve böylece;

$$v' = u \quad \text{dersek;}$$

$$u' + \left(\frac{4}{x} - \frac{3}{x}\right) \cdot u = 0$$

$$u' + \left(\frac{1}{x}\right) \cdot u = 0$$

1. mertebeden lineer diferansiyel denklem haline gelir. Buradan;

$$M(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx} = x$$

olup;

$$x \cdot u' + u = 0$$

$$D_x(x \cdot u) = 0$$

olup, integral alınırsa;

$$x \cdot u = c$$

$$x \cdot v' = c$$

$$v' = \frac{c}{x}$$

olur. Böylece, $v = c \cdot \ln x$ olarak bulunur. Buradan, $y_2 = v \cdot y_1$'de $v = c \cdot \ln x$ ve $y_1 = x^2$ değerleri yerine yazılırsa;

$y_2(x) = c \cdot x^2 \cdot \ln x$ olur. c=1 için; $y_2(x) = x^2 \cdot \ln x$

ve genel çözüm;

$y(x) = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln x$ (x>0) olarak bulunur.

2.6 Cauchy Euler Denklemi

n. mertebeden Couchy-Euler denklemi;

$$a_n x^n \cdot y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} \cdot y^{(n-1)} + ... + a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = 0 \qquad \textbf{(2.30)}$$

şeklinde tanımlanır. Burada, a_0, a_1, ... , a_n sabit katsayılar olup $a_n \neq 0$ 'dır. Bazen, bu denkleme türevin mertebesi ile x'in derecesi aynı olduğu için eşboyutlu denklem de denir. **(2.30)** denkleminde $y=x^r$ dönüşümü yapar ve sonucu x^r ile bölersek:

$$a_n r(r-1)(r-2)...(r-n+1) + ... + a_2 r(r-1) + a_1 r + a_0 = 0 \qquad \textbf{(2.31)}$$

n. dereceden polinom denklemini elde ederiz. Böyle bir denklemin r_1, r_2, r_3, ..., r_n olmak üzere n tane farklı kökü olup, n tane lineer bağımsız çözüme ulaşırız ki **(2.30)** denkleminin x>0 için genel çözümü;

$$y(x) = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2} + ... + c_n x^{r_n} ..... \qquad \textbf{(2.32)}$$

olarak bulunur. x<0 için x^r bütün r'ler için tanımlı değildir.

Şimdi, ikinci mertebeden Cauchy-Euler denklemini ele alalım. Buna göre;

$$x^2 y'' + p_0 x y' + q_0 y = 0 \qquad \textbf{(2.33)}$$

olarak tanımlanır ve $y=x^2$ dönüşümü yapılırsa;

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0 \qquad \textbf{(2.34)}$$

(2.31) denklemi yukarıdaki gibi olur. Bu ikinci derece denklemin köklerinin durumu aşağıdaki gibidir. **(2.34)** denkleminin diskriminantı:

$$r_{1,2} = \frac{-(p_0 - 1) \mp \sqrt{(p_0 - 1)^2 - 4q_0}}{2} \qquad \textbf{(2.35)}$$

olduğuna göre üç durum söz konusudur.

i) İki farklı kök: ($r_1 \neq r_2$)

r_1 ve r_2 farklı ise **(2.33)** denkleminin genel çözümü;

$$y(x) = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2} + ... \qquad \textbf{(2.36)}$$

ii) Eşit kökler: ($r_1 = r_2$)

Bu durumda, $y_1 = x^{r_1}$ olur ve $r_1 = -\frac{1}{2}(p_0 - 1)$ 'dir. Buna göre, mertebenin indirgenmesi teoreminden;

$$\left(e^{-\int \frac{p_0}{x}dx}\right) = e^{-p_0 \ln x} = x^{-p_0}$$ olduğundan ikinci çözüm;

$$y_2 = x^{r_1} \cdot \int \frac{x^{-p_0}}{x^{-(p_0-1)}} dx$$

$$y_2 = x^{r_1} \cdot \int \frac{1}{x} dx = x^{r_1} \ln x$$

elde edilir ve x>0 için genel çözüm;

$$y(x) = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2} \cdot \ln x \qquad \textbf{(2.37)}$$

olarak bulunur.

iii) Kompleks eşlenik kökler: (r_1=a+bi ve r_2=a-bi)
Burada,;

$$x^{(a \mp bi)} = e^{(a \mp bi)\ln x} = e^{a \ln x} e^{\mp i(b \ln x)}$$

$$= x^a \left[\cos(b \ln x) \mp i \sin(b \ln x)\right]$$

olup **(2.33)** denkleminin genel çözümü:

$$y(x) = c_1 x^a \cos(b \ln x) + c_2 x^a \sin(b \ln x) \qquad \textbf{(2.38)}$$

olarak elde edilir.

Örnek 2.15: $4x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulalım.

Çözüm: y=x^r dönüşümünden;

$$4r(r-1) + 2r - 2 = 0$$

$$(r-1)\left(r + \frac{3}{4}\right) = 0$$ ise $r_1 = 1$ ve $r_2 = -\frac{3}{4}$ bulunur.

Böylece genel çözüm:

$$y(x) = c_1 x + c_2 x^{-\frac{3}{4}}$$ olarak bulunur.

Örnek 2.16: $x^2 y'' - 3xy' + 5y = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: $r(r-1) - 3r + 5 = 0$ ve $r^2 - 4r + 5 = 0$ denkleminden;

$r_1 = 2 + i$ ve $r_2 = 2 - i$ bulunur. Buna göre;

$$y(x) = c_1 \frac{\cos(\ln x)}{x} + c_2 \frac{\sin(\ln x)}{x}$$ olur.

Sonuç olarak, n>2 durumunda **(2.31)** denkleminin köklerinin farklı olmadığını varsayalım. Bu durumda, x=e^t dönüşümü yapılarak **(2.30)** denkleminde yerine yazılır ve istenen çözümler elde edilir. Şöyle ki;

$x = e^t$ ise $t = \ln x$ olur. Buradan;

$$\frac{dx}{dt} = e^t \quad \text{ve} \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} = e^{-t} = \frac{1}{e^t}$$ bulunur.

Şimdi bu durumu açıklamak için aşağıdaki örneğimizi ele alalım.

Örnek 2.17: $x^3\dfrac{d^3y}{dx^3}+6x^2\dfrac{d^2y}{dy^2}+7x\dfrac{dy}{dx}+y=0$ diferansiyel denkleminin çözümünü bulalım.

Çözüm: Öncelikle, $x=e^t$ dönüşümü yapalım. Buradan,

$\dfrac{dx}{dt}=e^t=x$ olur. Böylece;

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{e^t}\cdot\frac{dy}{dt}=\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dt}$$

ve

$$x\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt} \tag{2.39}$$

bulunur. Benzer şekilde;

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2}&=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dt}\right)\\&=\frac{1}{x}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)+\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)\\&=\frac{1}{x}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dt}{dx}-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{dy}{dt}\\&=\frac{1}{x^2}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{dy}{dt}\end{aligned}$$

ve buradan;

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{dy}{dt}\right)$ olur. Sonuç olarak;

$$x^2\cdot\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt} \tag{2.40}$$

bulunur. Bu şekilde devam edilerek;

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt} \tag{2.41}$$

olduğu görülür. **(2.39)**, **(2.40)** ve **(2.41)**'deki bu değerleri verilen örnek problemde yerine yazarsak;

$$\left(\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\cdot\frac{dy}{dt}\right)+6\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)+7\frac{dy}{dt}+y=0$$

olur. Yani;

$\dfrac{d^3y}{dt^3}+3\dfrac{d^2y}{dt^2}+3\cdot\dfrac{dy}{dt}+y=0$ bulunur. Bu son denklemin karakteristik denklemi,

$$r^3+3r^2+3r+1=0$$

$$(r+1)^3=0$$

eşitliğinden $r=-1$ küp kat kök elde edilir. $x=e^t$ ve $t=\ln x$ olduğuna göre t cinsinden örnekte verilen denklemin genel çözümü;

$$y(x)=c_1e^{-t}+c_2t\cdot e^{-t}+c_3t^2\cdot e^{-t}=\frac{c_1}{x}+c_2\frac{\ln x}{x}+c_3\frac{(\ln x)^2}{x}$$

olarak bulunur.

2.7 İndirgenebilir İkinci Mertebe Denklemler

İkinci mertebeden bir diferansiyel denklem;

$$F(x,y,y',y'')=0 \qquad \textbf{(2.42)}$$

şeklinde ifade edildiğini biliyoruz. Eğer bağımlı değişken y veya bağımsız değişken x'den herhangi biri bu denklemden aşağıda açıklanacağı gibi çıkartılırsa, bir değişken dönüşümü yardımıyla ikinci derece denklemimiz birinci derece denklem haline gelir.

I- Eğer, y bağımlı değişkeni çıkarılırsa **(2.42)** denklemi;

$$F(x,y',y'')=0 \qquad \textbf{(2.43)}$$

şekline gelir ve sonra;

$$p=y'=\frac{dy}{dx},\ y''=\frac{dp}{dx} \qquad \textbf{(2.44)}$$

dönüşümü yapılarak p'ye bağlı;

$$F\left(x,p,\frac{dp}{dx}\right)=0 \qquad \textbf{(2.45)}$$

birinci mertebe denklemini elde ederiz. $(p=p(x))$

Eğer, **(2.45)** denkleminin genel çözümü;

$$p=p(x,c_1) \qquad \textbf{(2.46)}$$

olarak alınırsa **(2.43)** denkleminin genel çözümü;

$$y(x)=\int y'(x)dx=\int p\cdot dx=\int p(x,c_1)dx+c_2 \qquad \textbf{(2.47)}$$

integral yardımıyla bulunur. Burada, c_1 ve c_2 gibi iki sabitin olması y'' 'den y 'ye ulaşmak için iki kez integral alınmasından kaynaklanır.

Örnek 2.18: $x\cdot y''+2\cdot y'=6x$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $p=y'$ ve $p'=y''$ dönüşümleri yardımıyla;

$$x\cdot p'+2p=6x \text{ veya } x\cdot\frac{dp}{dx}+2p=6x$$

olur. Bu son eşitliğin her iki yanı x ile bölünürse;

$$\frac{dp}{dx}+\frac{2}{x}p=6$$

elde edilir ki, bu birinci mertebeden lineer diferansiyel denklemdir. İntegral çarpanı;

$$M(x)=e^{\int\frac{2}{x}dx}=e^{\ln x^2}=x^2$$

olup, son eşitliğin her tarafı çarpılırsa;

$x^2\dfrac{dp}{dx}+2xp=6x^2$ olur. Buradan; sol taraf x^2p'nin diferansiyeli ise;

$D_x(x^2p)=6x^2$ ve her iki tarafın integrali alınarak;

$$x^2p=\int 6x^2dx$$

$$p=\frac{2x^3+c_1}{x^2}=2x+\frac{c_1}{x^2}$$

bulunur. $p=\dfrac{dy}{dx}$ olduğuna göre;

$\frac{dy}{dx} = 2x + \frac{c_1}{x^2} \Rightarrow dy = \left(2x + \frac{c_1}{x^2}\right)dx$ ve her iki tarafın integrali tekrar alınarak;

$\int dy = \int \left(2x + \frac{c_1}{x^2}\right)dx$ bulunur. Böylece,

$y(x) = x^2 - \frac{c_1}{x} + c_2$ istenilen genel çözümdür.

II- Eğer, x bağımsız değişkeni çıkarılırsa **(2.42)** denklemi;

$F(y, y', y'') = 0$ şeklini alır. Buna göre; **(2.48)**

$p = y'(x)$ dersek, $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$ **(2.49)**

bulunur. **(2.49)**'deki dönüşümler **(2.48)**'de yerine yazılırsa;

$$F\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0 \qquad \textbf{(2.50)}$$

birinci derece denklemi elde edilir. $[p = p(y)]$

(2.50)'deki denklemin genel çözümü:

$p = p(y, c_1)$

şeklinde ise ikinci mertebeden diferansiyel denklemin genel çözümü integral alınarak;

$x(y) = \int \frac{dx}{dy}dy = \int \frac{1}{p}dy = \int \frac{dy}{p(y, c_1)} + c_2$ şeklinde bulunur.

Örnek 2.19: $y \cdot y'' = (y')^2$ denklemini çözünüz.

Çözüm: $y' = p$ ve $y'' = p\frac{dp}{dy}$ dönüşümleri verilen denklemde yerine yazılırsa;

$y \cdot p \cdot \frac{dp}{dy} = p^2$ olur. Bu son denklem ayrılabilir diferansiyel denklem olup;

$\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}$ yazılır ve her iki tarafın integrali alınırsa;

$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{dy}{y}$ ve buradan;

$\ln p = \ln y + c$ (y>0 ve p>0)

olur. Böylece,

$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p} = \frac{1}{c_1 y}$ elde edilir. Bu son eşitlikten;

$c_1 \cdot dx = \frac{dy}{y}$ olup her iki tarafın integrali alınırsa;

$\int c_1 dx = \int \frac{dy}{y}$

$c_1 x = \ln y + c_2$

elde edilir. Sonuç olarak, verilen örnekteki denklemin genel çözümü;

$y(x) = e^{c_1 x - c_2}$ bulunur.

2.8 Parametrelerin Değişimi Metodu

Belirsiz katsayılar metodu, n. mertebeden sabit katsayılı homojen olmayan diferansiyel denklemlerin çözülmesinde etkili bir metod olmasına karşın, yeterli değildir. Çünkü değişken katsayılı homojen olmayan diferansiyel denklemler veya sağ taraftaki fonksiyonun $\tan x$ gibi kendisi veya türevlerinin içinden çıkılamayacak kadar bir yapıya sahip olduğu sabit katsayılı homojen diferansiyel denklemin çözümünde bu metodu kullanamayız. Bunun için, Lagrange Metodu veya Parametrelerin Değişimi olarak adlandırılan bu metodu ele alıyoruz. Bunun için;

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x) \qquad \textbf{(2.51)}$$

n. mertebeden homojen olmayan değişken katsayılı lineer diferansiyel denklemini ele alalım. Burada, $p_i(x)$ bir I açık aralığında sürekli fonksiyonlardır.

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0 \qquad \textbf{(2.52)}$$

n. mertebeden değişken katsayılı homojen denkleminin çözümü, n lineer bağımsız çözümden oluşan;

$$y_c = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n \qquad \textbf{(2.53)}$$

ile verilir.Burada $c_1, c_2, \dots, c_n$ sabitleri yerine x'e bağlı $u_1, u_2, \dots, u_n$ fonksiyonlarını yazarsak;

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) + \dots + u_n(x)y_n(x) \qquad \textbf{(2.54)}$$

(2.51) denkleminin kısmi çözümü olarak alınabilir. Böyle bir kısmi çözümün genel anlamda bu metotla nasıl bulunacağını öncelikle;

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad \textbf{(2.55)}$$

2. mertebeden değişken katsayılı homojen olmayan diferansiyel denklemde ele alalım. (Burada, p ve q fonksiyonları bir I açık aralığında süreklidirler.) Daha sonra, bu yöntemi **(2.51)** ile verilen n. mertebeden homojen olmayan diferansiyel denklemlerin çözümüne genelleştirelim.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad \textbf{(2.56)}$$

2. mertebeden homojen denklemin çözümü;

$$y_c = c_1y_1 + c_2y_2 \qquad \textbf{(2.57)}$$

olduğuna göre, $u_1(x)$ ve $u_2(x)$ fonksiyonları için;

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2 \qquad \textbf{(2.58)}$$

(2.55) denkleminin kısmi çözümü olduğunu varsayalım ve $u_1(x)$ ile $u_2(x)$ fonksiyonlarını bulmaya çalışalım.**(2.58)** ile verilen bağıntı **(2.55)** denkleminin kısmi çözümü olduğuna göre **(2.58)** ifadesi ve türevleri alarak **(2.55)**'de yerine yazalım. Buna göre;

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2$$

$$y_p' = u_1'y_1 + u_1y_1' + u_2'y_2 + u_2y_2'$$

$$y_p'' = (u_1y_1' + u_2y_2') + (u_1'y_1 + u_2'y_2)$$

olur. y_p' 'deki ikinci toplamın sıfır olduğunu kabul ediyoruz. Yani,

$$u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0 \qquad \textbf{(2.59)}$$

Bu bizim ikinci varsayımımızdır. Buradan;

$$y_p' = u_1y_1' + u_2y_2'' \qquad \textbf{(2.60)}$$

olduğuna göre;

$$y_p'' = u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2'y_2' + u_2y_2'' = u_1'y_1' + u_2'y_2' + u_1y_1'' + u_2y_2'' \qquad \textbf{(2.61)}$$

bulunur.Bundan başka, y_1 ve y_2 çözümleri;

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad \textbf{(2.62)}$$

homojen denklemini sağladığına göre; **(2.62)** denklemi;

$$y_i'' = -py_i' - qu_i \qquad (i = 1{,}2) \qquad \textbf{(2.63)}$$

yazılabilir. **(2.60)**'daki y_p'' türevinden;

$$y_p'' = (u_1'y_1' + u_2'y_2') - p(u_1y_i + u_2y_2') - q(u_1y_1 + u_2y_2)$$

$$y_p'' = u_1'y_1' + u_2'y_2' - py_p' - qy_p \qquad \textbf{(2.64)}$$

olarak bulunur.Buna göre, **(2.55)** denkleminde **(2.64)** bağıntısı yerine yazılırsa;

$$u_1'y_1' + u_2'y_2' - py_p' - qy_p + py_p' + qy_p = f(x)$$

$$u_1'y_1' + u_2'y_2' = f(x) \qquad \textbf{(2.65)}$$

elde edilir. Sonuç olarak; **(2.59)** ve **(2.65)** ile verilen bağıntılar tekrar ele alınarak;

$$\left.\begin{aligned} u_1'y_1 + u_2'y_2 &= 0 \\ u_1'y_1' + u_2'y_2' &= f(x) \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(2.66)}$$

u_1' ve u_2' 'ye bağlı bir lineer denklem sistemi ortaya çıkar.

Bu sistemin katsayılar determinantı;

$$W(x) = W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$ ile hesaplanıp u_1' ve u_2' türevleri

$$u_1' = \frac{W_1(x)\,f(x)}{W(x)}$$

$$u_2' = \frac{W_2(x)\,f(x)}{W(x)}$$

şeklinde bulunur. Burada, $W_1(x)$ve $W_2(x)$ Cramer kuralından;

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix} \quad \text{ve} \quad W_2(x) = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}$$

olarak hesaplanır. Böylece, u_1' ve u_2' çözümleri bulunarak her ikisinin integrali alınarak u_1 ve u_2 fonksiyonları bulunur. Buna göre, **(2.55)** denkleminin kısmi çözümü olan;

$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$ olarak bulunur. Bu yaklaşımı **(2.51)** ile verilen n. mertebeden değişken katsayılı homojen olmayan diferansiyel denkleme uygulayalım.Buna göre;

$$\left.\begin{array}{l} u_1' y_1 + u_2' y_2 + \dots\dots + u_n' y_n = 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' + \dots\dots + u_n' y_n' = 0 \\ \dots\dots \\ u_1' y_1^{(n-1)} + u_2' y_2^{(n-2)} + \dots + u_n' y_n^{(n-1)} = f(x) \end{array}\right\} \qquad \textbf{(2.67)}$$

n bilinmeyenli $(u_1', u_2', \dots, u_n')$ n denklemden oluşan bir lineer denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin katsayılar determinantı;

$$W = W(x) = W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \qquad \textbf{(2.68)}$$

ile hesaplanır.Cramer kuralı yardımıyla;

$$u_i' = \frac{W_i(x) f(x)}{W(x)} \quad (i = 1,2,\dots,n) \qquad \textbf{(2.69)}$$

hesaplanır ve sonuçta integral yardımıyla;

$$u_i(x) = \int \frac{W_i(x) f(x)}{W(x)} dx \quad (i = 1,2,\dots\dots,n) \qquad \textbf{(2.70)}$$

elde edilir. Sonuç olarak, **(2.54)** denkleminde bu $u_i(x)$ değerleri yerine yazılarak **(2.51)** denkleminin kısmi çözümü olan parametrelerin değişimi formülü;

$$y_p(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i(x) \int \frac{W_i(x) f(x)}{W(x)} dx \qquad \textbf{(2.71)}$$

olarak bulunur.Eğer, **(2.51)** denkleminde n=2 durumu için parametrelerin değişimi formülü yardımıyla;

$$y_p(x) = -y_1(x) \int \frac{y_2(x) f(x)}{W(x)} dx + y_2(x) \int \frac{y_1(x) f(x)}{W(x)} dx \qquad \textbf{(2.72)}$$

ikinci mertebeden değişken katsayılı homojen olmayan diferansiyel denklemin kısmi çözümü bulunur ve genel çözüm;

$$y = y_c + y_p \qquad \textbf{(2.73)}$$

olarak elde edilir.

Örnek 2.20: $y'' + y = \tan x$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: Karakteristik denklemden;

$r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r = \mp i$ ve böylece

$y_c = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ olur.

(2.66) ile verilen sistemi elde etmek için $y_1=\cos x$, $y_2=\sin x$ olduğu düşünülürse;

$$u_1'(\cos x)+u_2'(\sin x)=0$$
$$u_1'(-\sin x)+u_2'(\cos x)=\tan x$$

olarak bulunur. u_1' ve u_2' bilinmeyenlerine göre bu 2 bilinmeyenli 2 denklem sistemin çözümünden;

$$u_1'=-\sin x\tan x=\cos x-\sec x$$
$$u_2'=\cos x\tan x=\sin x$$

bulunur. Buradan, u_1 ve u_2 değerlerini bulmak için integral alınarak;

$$u_1=\int(\cos x-\sec x)dx=\sin x-\ln|\sec x+\tan x|$$
$$u_2=\int\sin x\,dx=-\cos x$$

elde edilir. Böylece;

$$y_p=u_1y_1+u_2y_2 \quad \text{ise} \quad y_p=(\sin x-\ln|\sec x+\tan x|)(\cos x)+(-\cos x)(\sin x)$$
$$y_p=-\cos x\cdot\ln|\sec x+\tan x| \quad \text{olur.}$$

Örnek 2.21: $y''+y'-20y=6x^2-7x+3$ diferansiyel denklemini çözünüz?

Çözüm: $y''+y'-20y=0 \quad\Longrightarrow\quad r^2+r-20=0$

$(r+5)(r-4)=0$ ve $r_1=4$, $r_2=-5$ bulunur. Böylece, homojen kısmın çözümü;

$y_h=c_1e^{4x}+c_2e^{-5x}$ olur.Sağ taraf çözümü için UC ailesi;

$$uc=\{x^2,x,1\} \implies y_p=Ax^2+Bx+C$$
$$\implies y_p'=2Ax+B$$
$$\implies y_p''=2A \quad \text{olur.}$$

Bu değerler ilk denklemde y , y' , y'' yerine yazılırsa;

$$2A+2Ax+B-20Ax^2-20Bx-20C=6x^2-7x+3$$
$$-20Ax^2+(2A-20B).x+2A+B-20C=6x^2-7x+3$$

$-20A=6 \implies A=-\frac{3}{10}$ olur. $\quad 2A-20B=-7 \implies \frac{2A+7}{20}=B$

$$\implies \frac{2.\left(-\frac{3}{10}\right)+7}{20}=B \quad \text{ve} \implies B=\frac{8}{25}$$ bulunur. A ve B değerleri ;

$2A+B-20C=3$ denkleminde yerine yazılırsa;

$2.\left(-\frac{3}{10}\right)+\frac{8}{25}-20C=3 \implies \frac{-60+32-300}{2000}=C \implies C=-\frac{41}{250}$ olur.

Böylece ;

$$y_{genel}=y_h+y_p=c_1e^{4x}+c_2e^{-5x}-\frac{3}{10}x^2+\frac{8}{25}x-\frac{41}{250} \quad \text{olarak bulunur.}$$

Örnek 2.22: $y'' - 2y' - 8y = 3e^{x} + 2\cos x$ diferansiyel denklemini çözünüz?

Çözüm: $y'' - 2y' - 8y = 0 \Rightarrow r^{2} - 2r - 8 = 0$

$(r-4)(r+2)=0$ ise $r_1=4$, $r_2=-2$ bulunur. Buna göre, homojen kısmın çözümü;

$$y_h = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-2x} \quad \text{olur.}$$

Şimdi de sağ taraf çözümü için UC ailesini belirleyelim.

$uc=\{e^{x}, \cos x, \sin x\}$ ise $\Rightarrow y_p = Ae^{x} + B\cos x + C\sin x$

$\Rightarrow y_p' = Ae^{x} - B\sin x + C\cos x$

$\Rightarrow y_p'' = Ae^{x} - B\cos x - C\sin x$ olur.

Bu değerler ilk denklemde y , y' , y'' yerine yazılırsa;

$$Ae^{x} - B\cos x - C\sin x - 2Ae^{x} + 2B\sin x - 2C\cos x - 8Ae^{x} - 8B\cos x - 8C\sin x = 3e^{x} + 2\cos x$$

$$-9Ae^{x} - (-9B-2C)\cos x + (2B-9C)\sin x = 3e^{x} + 2\cos x$$

elde edilir. Buradan A,B ve C katsayıları;

$-9A=3 \Rightarrow A=-\frac{1}{3}$ ve

$2/ \quad -9B-2C=2$

$9/ \quad 2B-9C=0$

$-85C=4 \Rightarrow C=-\frac{4}{85} \Rightarrow B=-\frac{18}{85}$

bulunur. Bu değerler genel çözümde yerine yazılarak;

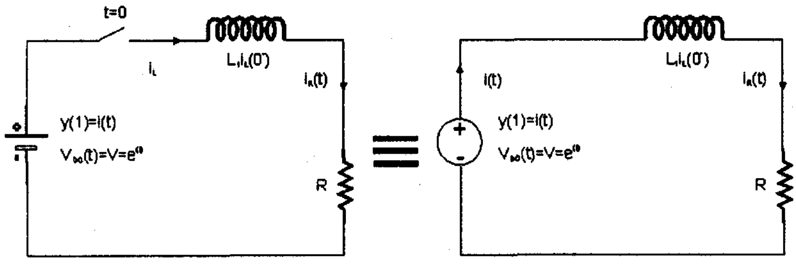
$$y_{genel} = y_h + y_p = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{3}e^{x} - \frac{18}{85}\cos x - \frac{4}{85}\sin x$$

olarak bulunur.

2.9 Elektrik-Elektronik Devre Uygulamaları

1) Aşağıda verilen ilk koşulsuz dinamik devrede anahtar uzun süre açık kalmış ve **t=0** anında anahtar kapatılmıştır.

a) Devreye ilişkin diferansiyel denklemi bulunuz.
b) $i(0^+)$ ve $i'(0^+)$ başlangıç koşullarını bulunuz.
c) $i(t)$'ye ilişkin tam çözümü bul ve çiz.
d) Devrenin kararlılığını inceleyiniz.
e) Öz ve zorlanmış çözümleri bulunuz.
f) Geçici ve sürekli hal çözümlerini bulunuz.
g) Devrenin zaman sabiti (τ_0) ve ömrünü bulunuz. ($t_{öm}$=tg)



a) Diferansiyel denklemler t=0 anı için yazılır.

$$V(t) = V_L(t) + V_R(t) \qquad V(t) = L\frac{di}{dt} + R \cdot i_R(t) \qquad i_L = i_R = i(t)$$

$$L\frac{di}{dt} + R \cdot i(t) = V(t) = V \cdot U(t)$$

$$L \cdot i'(t) + R \cdot i(t) = V \cdot U(t)$$

b) $i(0^-)$ devreden yararlanılarak belirlenir.

$$i(0^+) = i(0^-) = 0$$

$$i'(0^+) \rightarrow i'(t) = \frac{V}{L}U(t) - \frac{R}{L}i(t) \qquad i'(0^+) = \frac{V}{L}$$

c) Homojenin Genel Çözümü: $(= y_{hg}(t))$

$$\Delta s : sL + R \qquad L\left(s + \frac{R}{L}\right) = 0 \qquad s = -R/L = \tau_1$$

$$i_{hg}(t) = K_1 e^{-\frac{R}{L}t}$$

* Öz Çözüm

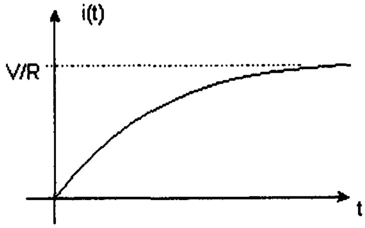
$$i_o(t) = A \qquad i_o(t) = 0 \qquad L \cdot 0 + V \cdot A = V \Rightarrow A = V/R \Rightarrow i_o(t) = V/R$$

* **Genel Çözüm:** $i(t) = K_1 e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V}{R}$

$$i(o^+) = K_1 + \frac{V}{R} = 0 \Rightarrow K_1 = -\frac{V}{R}$$

* **Tam Çözüm:**

$$i(t) = \left(-\frac{V}{R}e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V}{R}\right)\cdot U(t)$$



d) $R_e\{s_1\} = T_1 = -\frac{R}{L} < 0$ asimptotik kararlı.

e) $i_{öz}(t) = 0$ ilk koşul 0 olduğu için.

$$i_Z(t) = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-R/Lt}\right)\cdot U(t)$$

f) **Geçici hal çözüm:** $i_{gn}(t) = \frac{V}{R}\cdot U(t)$

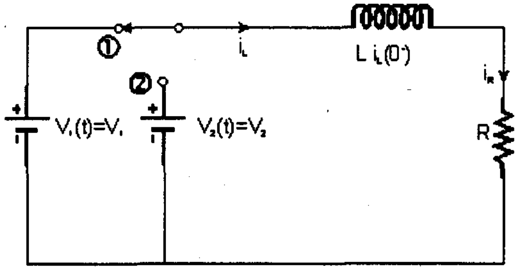
$$i_{gn}(t) = \frac{V}{R}\cdot U(t)$$

g) $T_0 = \frac{1}{|R_e\{s_1\}|} = \frac{1}{|T_1|} = \frac{1}{\left|-\frac{R}{L}\right|} = \frac{L}{R}$

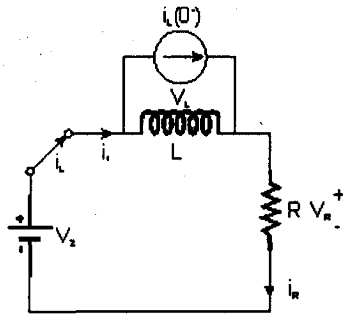
$$t_{gn} = t_{öm} = 5T_0 = 5\frac{L}{R}$$

2) Aşağıda verilen devrede anahtar uzun süre "1" konumunda kalmış ve t=0 anında "2" konumuna getirilmiştir.

a) Devreye ilişkin diferansiyel denklemi bulunuz.
b) $i(0^-)$, $i(0^+)$, $i'(0^+)$ başlangıç koşullarını bulunuz.
c) i(t) akımına ilişkin tam çözümü bulunuz.
d) Devrenin kararlılığını inceleyiniz.
e) $i_{öz}$=? $i_Z(t)$=?
f) i_{gn}=? i_{sn}=?
g) T_0=? (Devrenin zaman sabiti)



Çözüm:

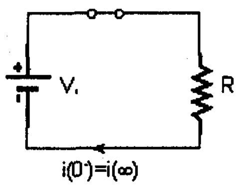


a) $V_L(t)+V_R(t)=V_2(t)$

$$L\frac{d}{dt}\left[i_L(t)-i_L(0^-)\right]+R\cdot i_R(t)=V_2(t)=V_2\cdot U(t)$$

$$L\frac{di_L(t)}{dt}+R\cdot i_R(t)=V_2\cdot U(t)$$

b) Anahtarın "1" konumunda olduğu durumdaki eşdeğer devre;



$$i(0^-)=\frac{V_1}{R}$$

$$i(0^-)=i(0^+)=\frac{V_1}{R}$$

$$i'(t)=\frac{1}{L}\cdot\left[V_2U_2(t)-R\cdot i(t)\right]$$

$$i'(0^+)=\frac{1}{L}\left[V_2-R\cdot i(0^+)\right]=\frac{V_2}{L}-\frac{R}{L}i(0^+)$$

$$i'(0^+)=\frac{V_2-V_1}{L}$$

c) Homojen kısmın Genel Çözümü

$$SL+R=0\Rightarrow S=-\frac{R}{L} \qquad i_{hg}(t)=K_1e^{-\frac{R}{L}t}$$

Öz Çözüm

$$i_ö(t)=A \qquad y'_ö(t)=0 \qquad L\cdot i_ö(t)+R\cdot A=V_2U(t)$$

$$R\cdot A=V_2\Rightarrow A=V_2/R$$

$$i_ö(t)=V_2/R$$

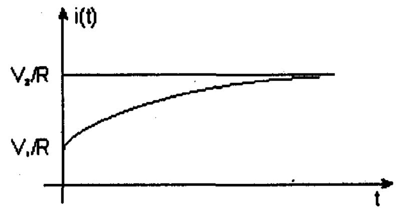
Tam Çözüm:

$$i(t) = i_{hg}(t) + i_o(t) = K_1 e^{-\frac{e}{L}t} + \frac{V_2}{R}$$

$$i(0^+) = K_1 \cdot 1 + \frac{V_2}{R} = \frac{V_1}{R} \Rightarrow K_1 = \frac{1}{R}(V_1 - V_2)$$

$$i(t) = \left[\frac{1}{R}(V_1 - V_2)\cdot e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V_2}{R}\right]\cdot U(t)$$

$$i(t) = \left[\left(i(0^-) - \frac{V}{R}\right)e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V_2}{R}\right]\cdot U(t)$$



d) $R_e\{S_1\} < 0$ asimptotik kararlı

$$R_e\{S_1\} = \tau_1 = -\frac{R}{L} < 0 \quad \text{veya} \quad \lim_{t\to\infty}\left|i_{hg}(t)\right| = 0$$

e) $i_{öz}(t) = \boxed{i(0^-)\cdot e^{-\frac{R}{L}t}\cdot U(t) \quad \Rightarrow}$ Bağımsız gerilim kaynakları sıfırlandı ($V_2=0$)

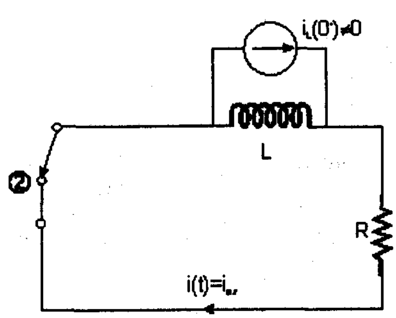
e(t)=0 $x(0^-)\neq 0$

Zorlanmış Çözüm: $e(t)\neq 0$, $i(0^-)=0$

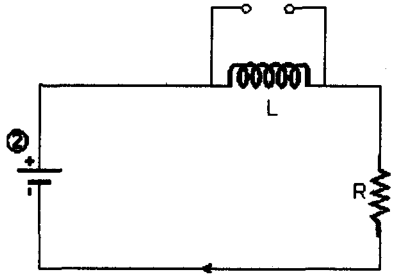
$$i_z(t) = \frac{V_2}{R}\left(-e^{-\frac{R}{L}t} + 1\right)U(t)$$

2. YOL:

Öz Çözüm:



Zorlanmış Çözüm:



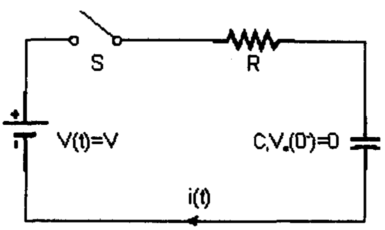
$i(t) = i_{öz}(t) + i_z(t) = \text{Tam Çözüm}$

f) $i_{gh}(t) = \dfrac{V_1 - V_2}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$

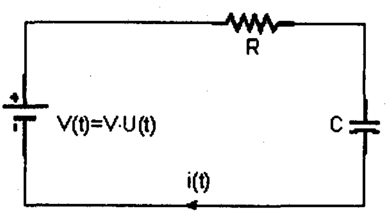
g) $\tau_0 = \dfrac{L}{R}$

3) Aşağıda verilen ilk koşulsuz devrede anahtar t=0 anında kapatılmıştır.

a) i(t) 'nin diferansiyel denklem formülünü bulunuz.
b) $i(0^+)$, $i'(0^-)$, hesaplayınız.
c) Tam çözümü bulunuz.
d) $V(t) = V \cdot f(t)$ ise $i_s(t)$ hesaplayınız.
e) $V(t) = V \cdot f(t)$ ise $f(t)$'yi bulunuz.
f) Tüm fonksiyonları çiziniz.
g) Devrenin zaman sabitini bulunuz. (τ_0)



Çözüm



a) $V_R(t) + V_C(t) = V \cdot U(t)$

$$i(t) \cdot R + \frac{1}{C}\int_{0^-}^{t} i(t) + V(0^-) = V \cdot U(t)$$

$$R_i'(t) + \frac{1}{C} i(t) = V \cdot f(t)$$

Eşdeğer Devre

b) $i(0^-)=0 \quad [A]$

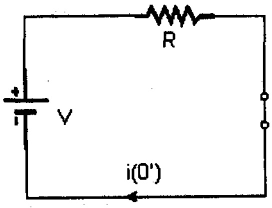
$$\int_{0^-}^{0^+} \rightarrow R\left(i(0^+)-i(0^-)\right)+\frac{1}{C}\cdot 0=V\cdot 1$$

$$R\cdot i(0^+)=V \Rightarrow i(0^+)=\frac{V}{R}$$

$$R\cdot i'(0^+)+\frac{1}{C}\cdot i(0^+)=V\cdot 0$$

$$i'(0^+)=-\frac{V}{R^2C}$$

2. Yol: $i(0^+)$ anında eşdeğer devre:



$$i(0^+)=\frac{V}{R}$$

c) * Homojen kısmın genel çözümü:

$$\Delta S=Rs+\frac{1}{C} \qquad s_1=-\frac{1}{RC}$$

$$i_{hg}(t)=K_1\cdot e^{-\frac{1}{RC}} \quad [A]$$

* Özel çözüm:

$$i_{ö}(t)=0 \qquad i'_{ö}(t)=0$$

* Genel çözüm:

$$i(t)=K_1 e^{-\frac{1}{RC}t} \quad \text{ve} \quad i(0^+)=K_1=\frac{V}{R}$$

$$i(t)=\frac{V}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}\cdot U(t)$$

Not:

$$y_\rho(t)\xrightarrow{\frac{d}{dt}} y\cdot U(t)\xrightarrow{\frac{d}{dt}} y_\delta(t)$$

$$y_\delta(t)\rightarrow y\cdot U(t)\rightarrow y_\rho(t)$$

d)

$$i\cdot u(t)=i(t)=\frac{V}{R}\cdot e^{-\frac{1}{RC}t}\cdot U(t)$$

$$i_s(t)=\frac{d}{dt}\cdot\left[i_u(t)\right]=-\frac{V}{R^2C}e^{-\frac{1}{RC}t}U(t)$$

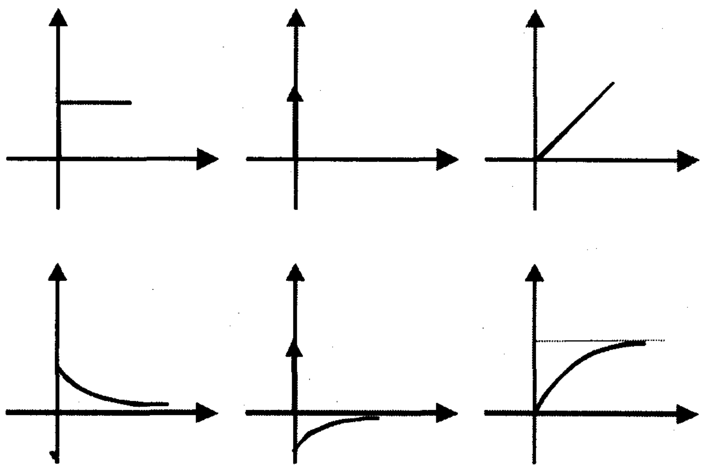
$$i_s(t)=\frac{V}{R}\delta(t)-\frac{V}{R^2C}e^{-\frac{1}{RC}t}U(t)$$

e)

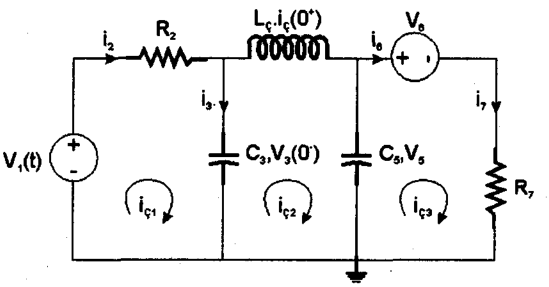
$$i_g(t)=\int_{0^+}^{t} i_u(\tau)d\tau = \int_{0^-}^{t} \frac{V}{R} e^{-\frac{1}{RC}\tau} U(t)\, d\tau$$

$$i_g(t) = -VC(e^{-\frac{1}{RC}t}-1)\, U(t)$$

f)



2.9.1 Çevre Akımları Yöntemiyle Diferansiyel Denklemlerin Elde Edilmesi Ve Çözümü



1. Adım: Bağımsız gerilim denklemleri yazılır.

$$n_b = n_e - n_d + 1 = 7 - 5 + 1 = 3$$

n_e = eleman sayısı
n_d = düğüm sayısı

$$Ç_1 \Rightarrow -V_1(t)+V_2(t)+V_3(t)=0$$

$$-V_3+V_4+V_5=0$$

$$-V_5+V_6+V_7=0$$

2. Adım: Bağımsız gerilim denklemleri eleman akımları cinsinden yazılır.

Ç1: $$-V_1 + R_2 i_2 + \frac{1}{C_3}\int_{0^-}^{t} i_3(\tau)d\tau + V_3(0^-) = 0$$

Ç2: $$-\left[\frac{1}{C_3}\cdot\int_{0^-}^{t} i_s(\tau)d\tau + V_3(0^-)\right] + L_ç\frac{di_ç}{dt} + \left[\frac{1}{C_5}\int_{0^-}^{t} i_5(\tau)d\tau + V_5(0^-)\right] = 0$$

Ç3: $$-\left[\frac{1}{C_5}\int_{0^-}^{t} i_5(\tau)d\tau + V_5(0^-)\right] + V_6 + R_7 i_7 = 0$$

3. Adım: Eleman akımları çevre akımları cinsinden yazılır.

Ç1: $$-V_1 + R_2 i_{Ç1} + \frac{1}{C_3}\left[\int_{0^-}^{t} (i_{Ç1} - i_{Ç2})d\tau\right] + V_3(0^-) = 0$$

Ç2: $$-\frac{1}{C_3}\left[\int_{0^-}^{t} (i_{Ç1} - i_{Ç2})d\tau\right] - V_3(0^-) + L_Ç\frac{di_{Ç2}}{dt} + \frac{1}{C_5}\left[\int_{0^-}^{t} (i_{Ç2} - i_{Ç3})d\tau\right] + V_5(0^-) = 0$$

Ç3: $$-\frac{1}{C_5}\left[\int_{0^-}^{t} (i_{Ç2} - i_{Ç3})d\tau\right] - V_5(0^-) + V_6 + R_7 i_{Ç3} = 0$$

4. Adım: Denklemlerde bilinenler eşitliğin sağına, bilinmeyenler soluna çekilerek 3. adımda düzenlenir.

Ç1: $$R_2 i_{Ç1} + \frac{1}{C_3}\int_{0^-}^{t} i_{Ç1}(\tau)d\tau - \frac{1}{C_3}\int i_{Ç2}(\tau)d\tau = V_1 - V_3(0^-)$$

Ç2: $$-\frac{1}{C_3}\int_{0^-}^{t} i_{Ç1}(\tau)d\tau + L_Ç\frac{di_{Ç2}}{dt} + \left(\frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_5}\right)\int_{0^-}^{t} i_{Ç2}(\tau)d\tau - \frac{1}{C_5}\int_{0^-}^{t} i_{Ç3}(\tau)d\tau$$

$$= V_3(0^-) - V_5(0^-)$$

Ç3: $$-\frac{1}{C_5}\int_{0^-}^{t} i_{Ç2}(\tau)d\tau + \frac{1}{C_5}\int_{0^-}^{t} i_{Ç3}(\tau)d\tau + R_7 i_{Ç3} = -V_6 + V_5(0^-)$$

5. Adım: İntegro diferansiyel denklemlerin her iki yanının türevleri alınır.

C1: $$R_2 i_{Ç1}' + \frac{1}{C_3} i_{Ç1} - \frac{1}{C_3} i_{Ç2} = V_1'$$

C2: $$-\frac{1}{C_3} i_{Ç1} + L_4 i_{Ç2}'' + \left(\frac{1}{C_3}+\frac{1}{C_5}\right) i_{Ç2} - \frac{1}{C_5} i_{Ç3} = 0$$

Ç3: $$-\frac{1}{C_5} i_{Ç2} + \frac{1}{C_5} i_{Ç3} + R_7 i_{Ç3}' = -V_6'$$

6. Adım: Türev operatöründen yararlanılarak diferansiyel denklemler cebirsel denklemlere dönüştürülür ve bu denklem sisteminden bilinmeyen çevre akımları bulunur.

$$\frac{d}{dt} \rightarrow s \;,\; \frac{d^2}{dt^2} \rightarrow s^2 \;\ldots\ldots\; \frac{d^n}{dt^n} \rightarrow s^n$$

Ç1: $$\left(R_2 s + \frac{1}{C_3}\right) i_{Ç1} - \frac{1}{C_3} i_{Ç3} = sV_1$$

Ç2: $$-\frac{1}{C_3} i_{Ç1} + \left(L_Ç s^2 + \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_5}\right) i_{Ç2} - \frac{1}{C_5} i_{Ç3} = 0$$

Ç3: $$-\frac{1}{C_5} i_{Ç2} + \left(R_7 s + \frac{1}{C_5}\right) i_{Ç3} = -sV_6$$

$$\begin{bmatrix} \left(R_2 s + \frac{1}{C_3}\right) & -\frac{1}{C_3} & 0 \\ -\frac{1}{C_3} & L_Ç s^2 \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_5} & -\frac{1}{C_5} \\ 0 & -\frac{1}{C_3 s} & \left(R_7 s + \frac{1}{C_5}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{Ç1} \\ i_{Ç2} \\ i_{Ç3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sV_1 \\ 0 \\ -sV_6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} R_2 + \frac{1}{sC_3} & -\frac{1}{C_3 s} & 0 \\ -\frac{1}{C_3 s} & L_Ç s + \frac{1}{sC_3} + \frac{1}{sC_5} & -\frac{1}{sC_5} \\ 0 & -\frac{1}{sC_5} & R_7 + \frac{1}{sC_5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{Ç1} \\ i_{Ç2} \\ i_{Ç3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \\ -V_6 \end{bmatrix}$$

7. Adım: $i_{Ç1}, i_{Ç2}, i_{Ç3}$ denklemlerinde $s \rightarrow \frac{d}{dt}$, $s^2 \rightarrow \frac{d^2}{dt^2}$, ... , $s^n \rightarrow \frac{d^n}{dt^n}$ konarak herbir bilinmeyen çevre akımına ilişkin diferansiyel denklemler elde edilir ve bu diferansiyel denklemler çözülür.

4) Aşağıda verilen devrede anahtar uzun süre 1 konumunda kalmış, t=0 anında 2 konumuna getirilmiştir.

a) Devreden yararlanarak

$$i_L(0^-) = i_L(\infty), i_C(0^-) = i_C(\infty)$$
$$V_C(0^-) = V_C(\infty)$$

başlangıç koşullarını bulunuz.

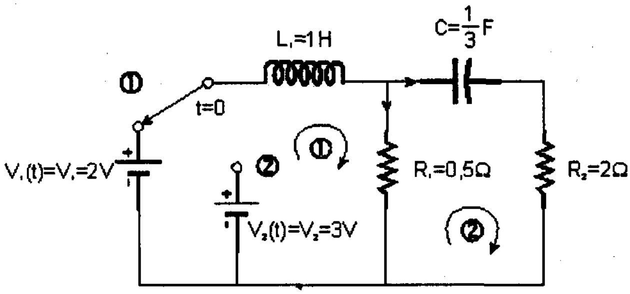
b) Devreden yararlanarak bunların $i(0^+)$, $i_C(0^+)$, $V_C(0^+)$ bulunuz.

c) $i_{\c{C}1}$ ve $i_{\c{C}2}$ akımlarına ilişkin tam çözümleri çevre akımları yöntemiyle bulunuz.

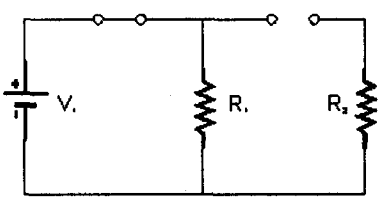
d) Akımların değişimini çiziniz.

e) Geçici ve sürekli hal çözümlerini bulunuz.

f) Devrenin zaman sabitini bulunuz.



Çözüm: a) Sürekli halde, DC şartlarda devrenin eşdeğeri "1" konumunda:



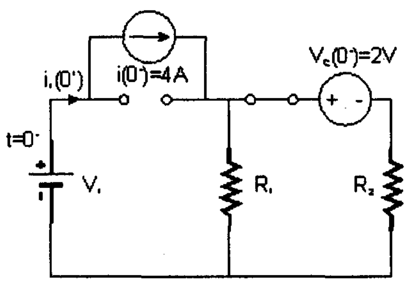
Not: DC şartlarda kondansatör açık devre, endüktans kısa devre olur.

$$i_L(0^-) = \frac{V_1}{R_1} = \frac{2}{0,5} = 4A = i\ (\infty)$$

$$i_c(0^-) = i_C(\infty) = 0$$

$$V_C(0^-) = V_C(\infty) = 2V$$

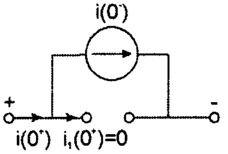
b)



$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 4A$$

$$V_C(0^+) = V_C(0^-) = 2V$$

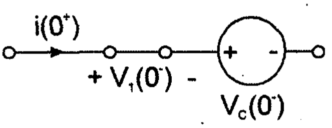
Not: ① $t=0^{+}$ anında endüktansın eşdeğeri:



$$i_1(0^{+}) = i(0^{-})$$

Bir devrede değişimi impuls ve/veya türevleri biçiminde kaynaklar olmaması koşuluyla endüktans içinden geçen akım ani olarak değişmez veya ani değişmelere karşı endüktans **açık** devredir.

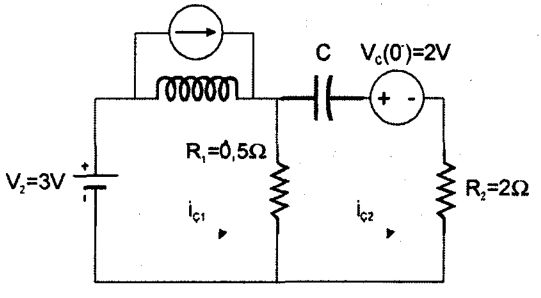
② $t=0^{+}$ anında kapasitenin eşdeğeri:



$$V(0^{+}) = V(0^{-})$$

Bir devrede değişimi impuls ve/veya türevleri biçiminde kaynaklar olmaması koşuluyla kapasite uçlarındaki gerilim ani olarak değişmez veya ani değişimlere göre kapasite **kısa** devredir.

c)



t=0 anında devre

1. Adım: Bağımsız gerilim denklemleri yazılır.

$$n_b = n_e - n_d + 1 = 5 - 4 + 1 = 2$$

$$Ç1: \; -V_2 + V_L + V_{R1} = 0$$
$$Ç2: \; -V_{R1} + V_C + V_{R2} = 0$$

2. Adım: Bağımsız gerilim denklemleri akımlar cinsinden yazılır.

$$Ç1: \quad -V_2 + L\frac{di_L}{dt} + R_1 i_{R1} = 0$$

$$Ç2: \quad -R_1 i_{R1} + \frac{1}{C}\int_{0^-}^{t} i_C(\tau)d\tau + V_C(0^{-}) + R_2 i_2 = 0$$

3. Adım: Eleman akımları çevre akımları cinsinden yazılır.

$$\text{Ç1:} \quad -V_2 + L\frac{di_{Ç1}}{dt} + R_1(i_{Ç1} - i_{Ç2}) = 0$$

$$\text{Ç2:} \quad -R_1(i_{Ç1} - i_{Ç2}) + \frac{1}{C}\int_{0^-}^{t} i_{Ç2}(\tau)d\tau + V_C(0^-) + R_2 i_{Ç2} = 0$$

4. Adım:

$$L\frac{di_{Ç1}}{dt} + R_1(i_{Ç1} - i_{Ç2}) = V_2$$

$$-R_1 i_{Ç1} + (R_1 + R_2)i_{Ç2} + \frac{1}{C}\int_{0^-}^{t} i_C(\tau)d\tau = -V_C(0^-)$$

5. Adım:

$$\text{Ç1:} \quad L_1 i_{Ç1}' + R_1 i_{Ç1} - R_1 i_{Ç2} = V_2$$

$$\text{Ç2:} \quad -R_1 i_{Ç1}' + (R_1 + R_2)i_{Ç2}' + \frac{1}{C} i_{Ç2} = 0$$

6. Adım:

$$(L_1 s + R_1)i_{Ç1} - R_1 i_{Ç2} = V_2$$

$$-R_1 + s\, i_{Ç1} + \left[(R_1 + R_2)s + \frac{1}{C}\right] i_{Ç2} = 0$$

$$\begin{bmatrix} Ls + R_1 & -R_1 \\ -R_1 s & (R_1 + R_2)s + \frac{1}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{Ç1} \\ i_{Ç2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$i_{Ç1} = \frac{\Delta i_{Ç1}}{\Delta s} \Rightarrow \Delta s = (sL + R_1)\left[(R_1 + R_2)s + \frac{1}{C}\right] - R_1^2 s$$

$\Delta s = 2{,}5s^2 + 4s + 1{,}5 = 2{,}5(s + 0{,}6)(s + 1)$ bulunur.

$$\Delta i_{Ç1} = \begin{vmatrix} V_2 & -R_1 \\ 0 & (R_1 + R_2)s + \frac{1}{C} \end{vmatrix} = \left[(R_1 + R_2)C + \frac{1}{C}\right] V_2$$

$$\Delta i_{Ç2} = \begin{vmatrix} sL + R_1 & V_2 \\ -R_1 s & 0 \end{vmatrix} = sR_1 V_2$$

$$\text{Ç1:} \quad \left[L(R_1 + R_2)s^2 + \left(\frac{L}{C} + R_1 R_2\right)s + \frac{R_1}{C}\right] i_{Ç1} = (R_1 + R_2)sV_2 + \frac{1}{C}V_2$$

$$\text{Ç2:} \quad R_1 s V_2$$

7.Adım:

$$\text{Ç1:}\quad \left[L(R_1+R_2)i_{Ç1}'' + \left(\frac{L}{C}+R_1R_2\right)i_{Ç1}' + \frac{R_1}{C}i_{Ç1}\right] = (R_1+R_2)V_2' + \frac{V_2}{C}$$

$$\text{Ç2:}\quad \left[L(R_1+R_2)i_{Ç2}'' + \left(\frac{L}{C}+R_1R_2\right)i_{Ç1}' + \frac{R_1}{C}i_{Ç1}\right] = R_1V_2'$$

8.Adım:

$$\text{Ç1:}\quad 2{,}5i_{Ç1}'' + 4i_{Ç1}' + 1{,}5i_{Ç1} = 7{,}5\delta(t) + 9U(t)$$

$$\text{Ç2:}\quad 2{,}5i_{Ç2}'' + 4i_{Ç2}' + 1{,}5i_{Ç1} = 1{,}5\delta(t)$$

*** Homojenin Genel Çözümü**

$$i_{Ç1hg}(t) = \left(K_1e^{-0{,}6t} + K_2e^{-t}\right)U(t)$$
$$i_{Ç2hg}(t) = \left(K_3e^{-0{,}6t} + K_4e^{-t}\right)U(t)$$

*** Özel Çözüm**

$$i_{Ç1Ö} = i_{Ç1Ö2} + i_{Ç1Ö2}$$

$$i_{Ç1Ö1} = 0 \qquad i_{Ç1Ö2} = A \qquad i_{Ç1Ö2}' = 0 \qquad i_{Ç1Ö2}'' = 0 \qquad A = 0$$

$$i_{Ç1Ö=0+0=0} \qquad i_{Ç2Ö} = 0$$

*** Genel Çözüm**

$$\text{Ç1:}\quad i_{Ç1}(t) = \left(K_1e^{-0{,}6t} + K_2e^{-t} + 6\right)U(t)$$
$$i_{Ç2}(t) = \left(K_3e^{-0{,}6t} + K_4e^{-t}\right)U(t)$$

*** Tam Çözüm**

$$i_{Ç1}(0^+) = i_L(0^+) = 4A$$
$$i_{Ç2}(0^+) = i_C(0^+) = 0A$$

5. Adımda yerine konursa (t=0^+)

$$\text{Ç1:}\quad i_{Ç1}'(t) + \frac{1}{2}i_{Ç1}(t) - \frac{1}{2}i_{Ç2}(t) = 3U(t)$$

$$i_{Ç1}'(0^+) + \frac{1}{2}i_{Ç1}(0^+) - \frac{1}{2}i_{Ç2}(0^+) = 3U(t)$$

$$i_{Ç1}'(0^+) = 3 - \frac{1}{2}\cdot 4 = 1 \text{ A/s}$$

$$\text{Ç2:}\quad -\frac{1}{2}i_{Ç1}'(t) + \frac{5}{2}i_{Ç2}'(t) + 3i_{Ç2}(t)$$

t=0$^+$ için $\Rightarrow i_{Ç2}'(0^+) = 0{,}2$ A/s

* $i_{Ç1}(0^+) = K_1 + K_2 + 6 = i_L(0^+) = 4 \qquad K_1 + K_2 = -2$

$$i_{Ç1}'(t) = \left(-0{,}6K_1e^{-0{,}6t} - K_2e^{-t}\right)U(t) + \left[K_1e^{-0{,}6t} + K_e e^{-t} + 6\right]\delta(t)$$

$$i_{Ç1}'(t) = -0{,}6K_1 - K_2 + 0 = 1 \qquad -0{,}6K_1 - K_2 = 1$$

$$K_1 = -\frac{5}{2} \qquad K_2 = \frac{1}{2}$$

$$i_{Ç1}(t) = \left(-\frac{5}{2}e^{-0{,}6t} + \frac{1}{2}e^{-t} + 6\right)U(t) \qquad [A]$$

Ç2: $i_{Ç2}(0^+) = K_3 + K_4 = i_C(0^+) = 0 \Rightarrow K_3 + K_4 = 0$

$$i_{Ç2}'(t) = \left[\left(-0{,}6K_3e^{-0{,}6t} + K_4e^{-t}\right)\right]U(t) + \left(K_3e^{-0{,}6} - K_4e^{-t}\right)\delta(t)$$

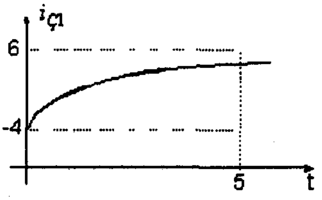
$$i_{Ç2}'(0^+) = -0{,}6K_3 - K_4 = 0{,}2$$

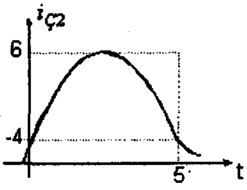
$$-0{,}6K_3 - K_4 = 0{,}2$$

$$K_3 = \frac{1}{2} \qquad K_4 = -\frac{1}{2}$$

$$i_{Ç2}(t) = \left(\frac{1}{2}e^{-0{,}6t} - \frac{1}{2}e^{-t}\right)U(t) \qquad [A]$$

d)





e) Ç1: $i_{Ç1gh}(t) = \left(-\frac{5}{2}e^{-0{,}6t} + \frac{1}{2}e^{-t}\right)\cdot U(t) \qquad [A]$

$i_{Ç1sh}(t) = 6U(t) \qquad [A]$

Ç2: $i_{Ç2gh}(t) = \left(\frac{1}{2}e^{-0{,}0t} - \frac{1}{2}e^{-t}\right)U(t) \qquad [A]$

$i_{Ç2sh}(t) = 0$

f) $\tau_0 = \frac{1}{|-0{,}6|} = \frac{5}{3} \qquad [s]$

2.10 Bölüm Sonu Alıştırmaları

A) Aşağıdaki denklemlerin genel çözümünü bulunuz:

1. $y'' - 4y = 0$
2. $2y'' - 3y' = 0$
3. $y''3y' - 10y = 0$
4. $2y'' - 7y' + 3y = 0$
5. $y'' + 6y' + 9y = 0$
6. $y'' + 5y' + 5y = 0$
7. $4y'' - 12y' + 9y = 0$
8. $y'' - 6y' + 13y = 0$
9. $y'' + 8y' + 25y = 0$
10. $5y^{(4)} + 3y^{(3)} = 0$
11. $y^{(4)} - 8y^{(3)} + 16y'' = 0,$
12. $y^{(4)} - 3y^{(3)} + 3y'' - y' = 0$
13. $9y^{(3)} + 12y'' + 4y' = 0$
14. $y^{(4)} + y'' - 4y = 0$
15. $y^{(4)} - 8y''+''16y = 0$
16. $y^{(4)} + 18y'' + 81y = 0$
17. $6y^{(4)} + 11y'' + 4y = 0$
18. $y^{(4)} = 16y$
19. $y^{(3)} + y'' - y' - y = 0$
20. $y^{(4)} + 2y^{(3)} + 3y'' + 2y' + y = 0$

B) Aşağıda verilen başlangıç değer problemlerini çözünüz.

21. $y'' - 4y' + 3y = 0; y(0) = 7, y'(0) = 11$
22. $9y'' + 6y' + 4y = 0; y(0) = 3, y'(0) = 4$
23. $y'' - 6y' + 25y = 0; y(0) = 3, y'(0) = 1$
24. $2y^{(3)} - 3y'' - 2y' = 0; y(0) = 1, y'(0) = -1, y''(0) = 3$
25. $3y^{(3)} + 2y'' = 0; y(0) = -1, y'(0) = 0, y''(0) = 1$
26. $y^{(3)} + 10y'' - 25y' = 0; y(0) = 3, y'(0) = 4, y''(0) = 5$

C) Aşağıda örneklerde denklemi ve bir çözümü verilen diferansiyel denklemlerin ikinci lineer bağımsız çözümlerini bulunuz.

27. $x^2y'' + 3xy' + y = 0, y_1 = 1/x$
28. $4x^2y'' + y = 0, y_1 = \sqrt{x}$
29. $xy'' + (x-1)y' - y = 0, y_1 = e^{-x}$
30. $xy'' - 2(x+1)y' + 4y = 0, y_1 = e^{2x}$
31. $(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = 0, y_1 = x$
32. $x^2y'' - 2xy' + (x^2+2)y = 0, y_1 = x\cos x$

33. $xy'' - y' + 4x^3 y = 0, y_1 = \cos x^2$

34. $(x + x^2)y'' - (2x + 1)y' + 2y = 0, y_1 = x^2$

35. $x^4 - x^2 y'' - (3x^3 - x)y' + 8y = 0, y_1 = x^4$

D) Aşağıdaki örneklerde bir denklemi ve bir çözümü verilen denklemlerin y_2 çözümünü $y_2=vy_1$ dönüşümü yardımıyla bulunuz.

36. $4y'' - 4y' + y = 0, y_1 = e^{x/2}$

37. $xy'' - 3y' = 0, y_1 = 1$

38. $x^2 y'' + xy' - 9y = 0, y_1 = x^3$

39. $(x+1)y'' - (x+2)y' + y = 0; y_1 = e^x$

40. $x^2 y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0; y_1 = x$

41. $(1 + x^3)y'' - 3x^2 y' + 3xy = 0; y_1 = x$

42. $x^2 y'' - 4xy' + (x^2 + 6)y = 0; y_1 = x^2 \sin x$

E) Aşağıdaki eşitliklerin Euler-Caushy denklemlerinin genel çözümünü bulunuz.

43. $x^2 y'' + xy' = 0$

44. $x^2 y'' + xy' - y = 0$

45. $x^2 y'' + 2xy' - 12y = 0$

46. $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$

47. $4x^2 y'' + 8xy' - 3y = 0$

48. $9x^2 y'' + 3xy' - 8y = 0$

49. $x^2 y'' - xy' + 2y = 0$

50. $x^2 y'' + 7xy' + 25y = 0$

51. $2x^2 y'' + 5y = 0$

F) Aşağıdaki problemlerde ikinci mertebe indirgenebilir denklemlerin genel çözümünü bulunuz

52. $xy'' = y'$

53. $yy'' + (y')^2 = 0$

54. $2x^2 y'' + 5y = 0$

55. $y'' + 4y = 0$

56. $xy'' + y' = 4x$

57. $y'' = (y')^2$

58. $x^2 y'' + 3xy' = 2$

59. $yy'' + (y')^2 = yy'$

60. $y'' = (x + y')^2$

61. $y'' = 2y(y')^3$

62. $y^3 y'' = 1$

63. $y'' = 2yy'$

64. $yy'' = 3(y')^2$

G) Parametrelerin değişimi metodunu kullanarak verilen diferansiyel denklemlerin parçasal çözümünü bulunuz.

65. $y'' + 3y' + 2y = 4e^x$
66. $y'' - 2y' - 8y = 3e^{-2x}$
67. $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}$
68. $y'' - 4y = \sinh 2x$
69. $y'' + 4y = \cos 3x$
70. $y'' + 9y = \sin 3x$
71. $y'' + 9y = 2\sec 3x$
72. $y'' + y = \operatorname{cosec}^2 x$
73. $y'' + 4y = \sin^2 x$
74. $y'' - 4y = xe^x$
75. $y'' - 2y' + y = x^{-2}e^x$
76. $x^2y'' - 4xy' + 6y = x^3$
77. $x^2y'' - 3xy' + 4y = x^4$
78. $4x^2y'' - 4xy' + 3y = 8x^{4/3}$
79. $x^2y'' + xy' + y = \ln x$
80. $y^{(3)} - y'' - 2y' = x^2$
81. $y^{(3)} + 3y'' + 3y' + y = e^{-x}$
82. $y^{(3)} + 4y' = \cot 2x$

H) Aşağıdaki denklemlerin kısmi çözümlerini bulunuz.

83. $y'' - y = x^{-2}e^x$
84. $y'' + y = x^{1/2}$
85. $y'' + 4y = \exp(-x^2)$
86. $y^{(3)} + y'' + y' + y = 1/x$
87. $y^{(3)} - y'' = \ln x$
88. $y^{(4)} - y = \tanh x$
89. Tam çözümü $y_c = c_1x + c_2x^{-1} + c_3x^{-2}$ şeklinde verilen aşağıdaki denklemin parçasal çözümünü bulunuz. $x^{(3)}y^{(3)} + 5x^2y'' + 2xy' - 2y = x^4$
90. Tam çözümü $y_c = c_1x^{1/2} + c_2x^{1/3} + c_3x^{1/4}$ şeklinde verilen aşağıdaki denklemin parçasal çözümünü bulunuz. $24x^3y^{(3)} + 46x^2y'' + 7xy' - y = 24x^3$

BÖLÜM 3

LAPLACE DÖNÜŞÜMLERİ

3.1 Laplace Dönüşümü: Laplace dönüşümü, integral alma işlemine dayanan bir yöntemdir. Bu dönüşümler kullanılarak bir diferansiyel denklem bir cebirsel denkleme dönüştürülür ve elde edilen problem integral teknikleriyle önceki halinden çok daha kolay çözülebilir. Laplace dönüşümlerinin en yaygın kullanıldığı alanlar;

- Elektrik-elektronik devre uygulamaları
- Fiziksel sistemlerin çözümü

olarak açıklanabilir.

Tanım 3.1: $t \geq 0$ için tanımlı bir f(t) fonksiyonunu ele alalım. f 'nin Laplace dönüşümü:

$$\ell\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot f(t)dt \;........ \qquad \textbf{(3.1)}$$

şeklinde tanımlanır. Bu Laplace dönüşümü has olmayan integralin yakınsak olduğu bütün s değerleri için tanımlıdır.

(3.1) deki has olmayan integral t integral değişkenine ilaveten s parametresine bağlıdır. Bundan dolayı **(3.1)**'deki integralin yakınsak olması, s'ye bağlı F(s) fonksiyonuna yakınsaması anlamındadır.

Şimdi, belli başlı f(t) fonksiyonları için $\ell\{f(t)\}$ dönüşümünü s'nin değerlerine bağlı olarak hesaplayalım.

Örnek 3.1: $f(t) = 1$ ise $\ell\{f(t)\} = ?$ $\quad (t \geq 0)$

Çözüm : $\ell\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}dt = \left(-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty\right) = \lim\limits_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{3}e^{-bs} + \frac{1}{s}\right)$

$$\ell\{1\} = \frac{1}{s} \qquad (s > 0)\;........ \qquad \textbf{(3.2)}$$

Örnek 3.2: $f(t) = e^{at}$, $t \geq 0$ için $\quad \ell\{\mathrm{f(t)}\} = ?$

Çözüm : $\ell\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-st} \cdot e^{at}dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt = \left(-\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a}\Big|_0^\infty\right)$

$= \lim\limits_{b\to\infty}\left(-\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a}\Big|_0^b\right)$ Burada, s-a>0 için $t \to \infty$ iken $e^{-(s-a)t} \to 0$ olur. Böylece,

$$\ell\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}, \; (s > a) \qquad \textbf{(3.3)}$$

bulunur. $s \leq a$ için yukarıdaki has olmayan integral yakınsak olur.

Örnek 3.3: Varsayalım ki $f(t) = t^n$, $t \geq 0$ ve $n \in 0^+$ olsun. Buna göre,

$$\ell\{f(t)\} = \ell\{t^n\} = ?$$

Çözüm : $\ell\{t^n\} = \int_0^\infty e^{-st} \cdot t^n dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} t^n dt$

kısmi integral yardımıyla;

$$\left.\begin{aligned} t^n &= u \Rightarrow n \cdot t^{n-1} = dt = du \\ e^{-st}dt &= dv \Rightarrow -\frac{1}{s}e^{-st} = v \end{aligned}\right\} = \lim_{b\to\infty}\left(\underbrace{-\frac{1}{8}t^n e^{-st}\Big|_0^b}_{0} + \underbrace{\frac{n}{s}\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st} t^{n-1} dt}_{\ell\{t^{n-1}\}} \right)$$

$\boxed{\lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} \cdot t^{n-1} dt = \ell\{t^{n-1}\}}$ elde edilir. Buna göre;

$$\ell\{t^n\} = \frac{n}{s} \cdot \ell\{t^{n-1}\} \quad , \quad s > 0$$

elde edilir. Bu eşitlikten, n>1 için;

$$\ell\{t^{n-1}\} = \frac{n-1}{s} \cdot \ell\{t^{n-2}\}$$

bulunur. $\ell\{t^{n-1}\}$ değeri $\ell\{t^n\}$ 'de yerine yazılırsa;

$$\ell\{t^n\} = \frac{n(n-1)}{s^2} \cdot \ell\{t^{n-2}\}$$

olur. Bu şekilde devam edilirse;

$$\ell\{t^n\} = \frac{n(n-1)(n-2) \ldots\ldots \cdot 2 \cdot 1}{s^n} \cdot \ell\{t^0\}$$

ve

$\ell\{t^0\} = \ell\{1\} = \frac{1}{s}$ değeri son eşitlikte yerine yazılırsa;

$$\ell\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \,, \quad s > 0 \qquad \textbf{(3.4)}$$

olarak elde edilir.Buna göre;

$$\ell\{t\} = \frac{1}{s^2}$$

$$\ell\{t^2\} = \frac{2}{s^3}$$

$$\ell\{t^3\} = \frac{6}{s^4}$$

olduğu görülür. Laplace dönüşümü bir lineer dönüşümdür. Aşağıdaki teorem Laplace dönüşümünün lineerliği ile ilgilidir.

Teorem 3.1: a ve b sabit sayılar olmak üzere;

$$\ell\{a\cdot f(t)+b\cdot g(t)\}=a\cdot\ell\{f(t)\}+b\cdot\ell\{g(t)\} \qquad \textbf{(3.5)}$$

özelliği her s için geçerlidir.

İspat: Laplace dönüşümünün tanımından;

$$\begin{aligned}\ell\{a\cdot f(t)+b\cdot g(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st}\cdot[a\cdot f(t)+b\cdot g(t)]dt\\ &= \lim_{\alpha\to\infty}\int_0^{\alpha} e^{-st}\cdot[a\cdot f(t)+b\cdot g(t)]dt\\ &= a\left(\lim_{\alpha\to\infty}\int_0^{\alpha} e^{-st}\cdot f(t)dt\right)+b\left(\lim_{\alpha\to\infty}\int_0^{\alpha} e^{-st}\cdot g(t)dt\right)\\ &= a\cdot\ell\{f(t)\}+b\cdot\ell\{g(t)\}\end{aligned}$$

olarak bulunur.

3.2. Gamma Fonksiyonu

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dt \qquad (x>0) \qquad \textbf{(3.6)}$$

fonksiyonuna gamma fonksiyonu denir. Burada, has olmayan integral x>0 için yakınsaktır.

x' in bazı değerleri için $\Gamma(x)$ fonksiyonunun değerlerini bulalım.

$$\Gamma(1)=\int_0^{\infty} e^{-t}\cdot dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-t}dt=\lim_{b\to\infty}\left(-e^{-t}\Big|_0^b\right)=1 \qquad \textbf{(3.7)}$$

şimdi de;

$\Gamma(x+1)=\lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-t}t^{x}dt$ değerini bulalım.Kısmi integral yardımıyla;

$$\left.\begin{aligned}t^x=u &\Rightarrow x\cdot t^{x-1}dt=du\\ e^{-t}dt=dv &\Rightarrow -e^{-t}=v\end{aligned}\right\}\quad \Gamma(x+1)=\lim_{b\to\infty}\left[-e^{-t}\cdot t^x+x\int_0^{b} e^{-t}\cdot t^{x-1}dt\right]$$

$$=\underbrace{\lim_{b\to\infty}\left(-e^{-t}t^x\right)}_{0}+x\cdot\underbrace{\lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-t}t^{x-1}dt}_{\Gamma(x)}$$

$$\boxed{\Gamma(x+1)=x\cdot\Gamma(x)} \qquad \textbf{(3.8)}$$

bulunur. **(3.8)** eşitliğinden:

$$\Gamma(2)=1\cdot\Gamma(1)=1!$$
$$\Gamma(3)=2\cdot\Gamma(2)=2\cdot 1!=2!$$
$$\Gamma(4)=3\cdot\Gamma(3)=3\cdot 2!=3!$$

ve bu şekilde devam edilerek;

$$\Gamma(n+1)=n! \qquad n\geq 0 \text{ olur.} \qquad \textbf{(3.9)}$$

$\Gamma(x)$ fonksiyonunun önemli bir özelliği $x=\frac{1}{2}$ değeri için ortaya çıkar. Buna göre, $u^2=t$ dönüşümü yapılırsa;

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty e^{-t}t^{-1/2}dt=2\cdot\int_0^\infty e^{-u^2}\cdot du=\sqrt{\pi} \qquad \textbf{(3.10)}$$

ve buradan;

$$\int_0^\infty e^{-U^2}du=\frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad \textbf{(3.11)}$$

bulunur.Gamma fonksiyonun diğer özelliklerine burada değinilmeyecektir. Sadece, bu anlatılan bilgiler bizim için yeterli olacaktır.Şimdi, **Örnek** 3.3'deki t^n fonksiyonunun Laplace dönüşümünü $\Gamma(x)$ fonksiyonu kullanarak bulalım.

$$\ell\{t^n)=\int_0^\infty e^{-st}t^n dt$$

olduğunu biliyoruz. Eğer, $u=st$ dönüşümü yapılırsa, $t=\frac{u}{s}$ ve $dt=\frac{du}{s}$ olur. Bu değerler, $\ell\{t^n\}$ eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$\ell\{t^n\}=\frac{1}{s^{n+1}}\cdot\int_0^\infty e^{-u}u^n du=\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} \qquad \textbf{(3.12)}$$

olarak bulunur. s>0 için $u=s\cdot t>0$ olduğundan ve $\Gamma(n+1)=n!$ olduğundan;

$$\ell\{t^n\}=\frac{n!}{s^{n+1}},\ s>0 \qquad \textbf{(3.13)}$$

olarak bulunur.

Şimdi hem Teorem-1; hem de $\Gamma(x)$ fonksiyonunun özelliğini kullanacağımız basit bir örnek yapalım.

Örnek 3.4: $\ell\{5t^2+2t^{\frac{3}{2}}\}=?$

Çözüm : Teorem 3.1'den;

$$\ell\{5t^2+2t^{\frac{3}{2}}\}=5\cdot\ell\{t^2\}+2\cdot\ell\{t^{\frac{3}{2}}\}$$ yazarız ve **(3.12)** ile **(3.13)** nolu denklemlerden

$$\ell\{5t^2+2t^{\frac{3}{2}}\}=5\frac{2}{s^2}+2\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{s^{5/2}}$$

elde edilir. $\Gamma(x)$ fonksiyonunun özelliklerinden;

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$$

olduğuna göre;

$$\ell\{5t^2+2t^{3/2}\}=\frac{10}{s^3}\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\pi}{s^5}}$$ bulunur.

Örnek 3.5: $\ell\{\sinh at\}=?$

Çözüm : $\sinh at=\dfrac{e^{at}-e^{-at}}{2}$ (a>0) olduğuna göre;

$$\ell\{\sinh at\}=\ell\left\{\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\right\}$$ yazılır ve Teorem-1'den;

$$=\frac{1}{2}\cdot\ell\{e^{at}\}-\frac{1}{2}\cdot\ell\{e^{-at}\}$$

bulunur. Örnek3.2'den $\ell\{e^{at}\}=\dfrac{1}{s-a}$ ve $\ell\{e^{-at}\}=\dfrac{1}{s+a}$ değerleri yerine yazılırsa;

$$\ell\{\sinh at\}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s+a}\right)$$

$$\boxed{\ell\{\sinh at\}=\frac{a}{s^2-a^2}\ ,\qquad s>a>0} \tag{3.14}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde,

$$\cosh at=\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}$$ ifadesinden;

$$\boxed{\ell\{\cosh at\}=\frac{s}{s^2-a^2}\ ,\qquad s>a>0} \tag{3.15}$$

olduğu açıktır.

Örnek 3.6: $\ell\{\cos at\}=?$ $\qquad \ell\{\sin at\}=?$

Çözüm : Bu değerlerden $\sin at$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü hem Teorem-1'i kullanarak, hem de $\ell\{f(t)\}$ tanımından bulalım.

1.yol: $\sin at=\dfrac{e^{iat}-e^{-iat}}{2}$ olduğuna göre;

$$\ell\{\sin at\}=\ell\left\{\frac{e^{iat}-e^{-iat}}{2}\right\}$$

yazılır ve Teorem-1 uygulanırsa;

$$\ell\{\sin at\}=\frac{1}{2}\ell\{e^{iat}\}-\frac{1}{2}\ell\{e^{-iat}\}$$

olur. Örnek-2 uygulanarak $\ell\{e^{iat}\}=\dfrac{1}{s-ia}$ ve $\ell\{e^{-iat}\}=\dfrac{1}{s+ia}$ değerleri son eşitlikte yerine yazılırsa;

$$\ell\{\sin at\}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{s-ia}-\frac{1}{s+ia}\right)$$

$$\ell\{\sin at\} = \frac{a}{s^2 + a^2} \quad , \quad s > \mathrm{Re}(ia) = 0 \qquad \textbf{(3.16)}$$

olarak bulunur.

2.yol: $\ell\{\sin at\} = \int_0^\infty e^{-st} \sin at \cdot dt$ (t>0)

$= \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} \sin at \cdot dt$ yazılır ve kısmi integral uygularsak;

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\frac{e^{-st}}{s^2+a^2} \cdot \left(s \cdot \sin at + a \cdot \cos at \right|_0^b \right]$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\frac{e^{-st}}{s^2+a^2} - \frac{e^{-sb}}{s^2+a^2} (s \cdot \sin ab + a \cdot \cos ab) \right]$$

$$\ell\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2} \quad , \quad s > 0$$

olarak bulunur. Benzer şekilde;

$$\ell\{\cos at\} = \frac{s}{s^2 + a^2} \quad , \quad s>0 \qquad \textbf{(3.17)}$$

olarak bulunur.

Örnek 3.7: $\ell\left\{4e^{-2t} + 3\sin^2 t - 5\cos^2 t + t^3\right\} = ?$

Çözüm : Teorem-3.1'den;

$$\ell\left\{4e^{-2t} + 3\sin^2 t - 5\cos^2 t + t^3\right\} = 4\ell\{e^{-2t}\} + \frac{3}{2}\ell\{1\} - \frac{3}{4}\ell\{\cos 4t\} - \frac{5}{2}\ell\{1\} - \frac{5}{2}\ell\{\cos 2t\} + \ell\{t^3\}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sin^2 t &= \frac{1}{2}(1-\cos 2t) \\ \sin^2 2t &= \frac{1}{2}(1-\cos 4t) \\ \cos^2 t &= \frac{1}{2}(1+\cos 2t) \end{aligned}}$$

olur ve yandaki özdeşlikler ve (3.17)'den;

$$= 4 \cdot \frac{1}{s+2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s} - \frac{3}{4} \cdot \frac{s}{s^2+16} - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{s} - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{5}{2} \cdot \frac{s}{s^2+4} + \frac{6}{s^4}$$

$$= \frac{4}{s+2} - \frac{1}{s} + \frac{3}{4} \cdot \frac{s}{s^2+16} - \frac{5}{2} \cdot \frac{s}{s^2+4} + \frac{6}{s^4}$$

olarak bulunur.

3.3Ters Laplace Dönüşümleri

Eğer F(s), f(t) sürekli fonksiyonunun dönüşümü olarak yazılabiliyorsa; f(t) tek türlü belirlidir. Bunu varlık ve teklik teoreminde ele alacağız. Bu açıklamadan sonra;Ters Laplace dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 3.2: Eğer $F(s)=\ell\{f(t)\}$ ise f(t) fonksiyonuna F(s)'ninTers Laplace dönüşümü denir ve;

$$f(t)=\ell^{-1}\{F(s)\} \tag{3.18}$$

şeklinde gösterilir.

Şimdiye kadar verdiğimiz örneklerde, belli başlı fonksiyonların Laplace dönüşümlerini vermiştik. Şimdi de birkaç örnekteTers Laplace dönüşümünü inceleyip, bunları bir tablo halinde sunalım.

Örnekler:

1) $\ell\{t\}=\dfrac{1}{s}\Rightarrow \ell^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\right\}=t$

2) $\ell\{e^{3t}\}=\dfrac{1}{s-3}\Rightarrow \ell^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-3}\right\}=e^{3t}$

3) $\ell\{\sin 2t\}=\dfrac{2}{s^2+4}\Rightarrow \ell^{-1}\left\{\dfrac{2}{s^2+4}\right\}=\sin 2t$

4) $\ell\{\cos 3t\}=\dfrac{s}{s^2+9}\Rightarrow \ell^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+9}\right\}=\cos 3t$

Tablo 3.1: Laplace Dönüşüm Tablosu

No	$f(t)=\ell^{-1}(F(s))$	$F(s)=\ell(f(t))$
1	1	$\dfrac{1}{s},\quad s>0$
2	e^{at}	$\dfrac{1}{s-a},\quad s>a$
3	$\sin(at)$	$\dfrac{a}{s^2+a^2},\quad s>0$
4	$\cos(at)$	$\dfrac{s}{s^2+a^2},\quad s>0$
5	$e^{\alpha t}\cdot\sin(at)$	$\dfrac{a}{(s-\alpha)^2+a^2},\quad s>\lvert\alpha\rvert$
6	$e^{\alpha t}\cdot\cos(at)$	$\dfrac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+a^2},\quad s>\lvert\alpha\rvert$
7	$t^n,\ n\geq 0$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}},\quad s>0$
8	$t^p,\ p>1$	$\dfrac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}},\quad s>0$

9	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2},\ s>\lvert a\rvert$
10	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2},\ s>\lvert a\rvert$
11	$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s},\ s>0$
12	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}},\ s>a$
13	$f(ct)$	$-F\left(\frac{s}{c}\right)$
14	$e^{bt}\cdot f(t)$	$F(s-b)$
15	$t\sin(at)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
16	$t\cos(at)$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
17	$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s)-s^{n-1}f(0)-........-f^{(n-1)}(0)$

Tanım 3.3: $f(1)$ fonksiyonunu ele alalım ve sonlu bir $a \le t \le b$ aralığında sonlu sayıda alt aralığa bölelim. Bu sonlu aralıkların her birinde;

a) f fonksiyonu bu alt aralıkların iç bölgelerinde sürekli ise
b) t, bu aralıkların uç noktalarından her birine yaklaşırken f(t) limiti sonlu

özelliklerine sahip ise f fonksiyonu $a \le t \le b$ aralığında **parçalı süreklidir** denir.

Tanım 3.4: $a \le t \le b$ aralığında tanımlı bir $f(t)$ fonksiyonunu ele alalım. $a < t_0 < b$ şartına uyan bir t_0 noktası için;

$$\lim_{t\to t_0^+} f(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} f(t_0+\varepsilon) \quad \textbf{(3.19)}$$

$$\lim_{t\to t_0^-} f(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} f(t_0-\varepsilon) \quad \textbf{(3.20)}$$

limitlerine sırasıyla f(t) fonksiyonunun t_0 noktasındaki **sağdan ve soldan limiti** denir ve bazen $f(t_0+)$, $f(t_0-)$ olarak da gösterilir.

Tanım 3.5: $f: A \subset R \to R, \forall t \in A, t \ne t_0, t_0 \in A$ olmak üzere; $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa, ε, $|t-t_0| < \delta$ iken $|f(t)-f(t_0)| < \varepsilon$ kalıyorsa f fonksiyonu $t=t_0$ noktasında, noktasal süreklidir denir ve;

$\lim_{t\to t_0} f(t) = f(t_0)$ olarak gösterilir.

Not: Bu tanımdan da anlaşılacağı gibi, bir f(t) fonksiyonu $t = t_0$ noktasında aşağıdaki durumlarda süreksiz olur ve bu süreksizliğe **sıçrama (atlama) süreksizliği** denir. Bu durumlar;

i) $\lim_{t \to t_0} f(t)$ yoksa [**(3.19)** ve **(3.20)** birbirine eşit değilse]

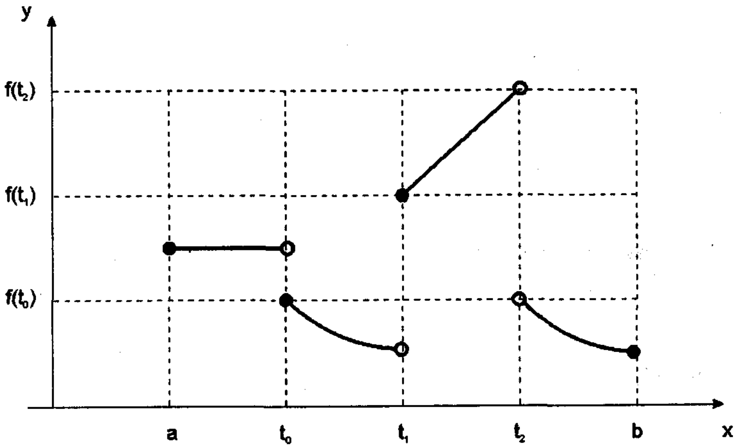
ii) $f(t_0)$ yoksa (f(t) fonksiyonu t_0 noktasında tanımsızsa)

iii) **(i)** ve **(ii)** mevcut, fakat birbirine eşit değilse

şeklinde özetlenir. Bunlara ilaveten, f(t) fonksiyonunun t_0 noktasındaki sıçraması;

$$f(t_0^+) - f(t_0^-) \qquad \textbf{(3.21)}$$

olarak tanımlanır. Aşağıdaki şekilde parçalı sürekli bir fonksiyonun grafiği verilmiş ve belirtilen noktalarda sıçrama değerleri verilmiştir. (Şekil.3.1).



Şekil 3.1: Parçalı sürekli bir fonksiyonda sıçrama değerleri

Buna göre;

t_0 noktasındaki sıçrama; $f(t_0^-) - f(t_0^+)$

t_1 noktasındaki sıçrama; $f(t_1^-) - f(t_1^+)$

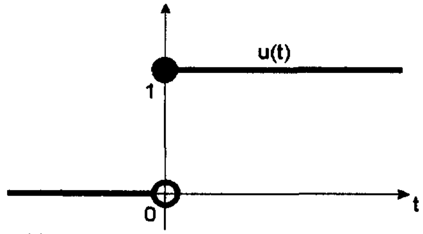
t_2 noktasındaki sıçrama; $f(t_2^-) - f(t_2^+)$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.6: Parçalı sürekli fonksiyonların en bilinen örneği;

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases} \qquad \textbf{(3.22)}$$

olarak tanımlanan birim basamak fonksiyonudur. Bu fonksiyonun grafiği;



Şekil 3.2 . Birim basamak fonksiyonu [u(t)]

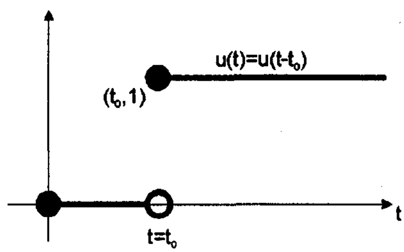
şeklindedir. u(t) fonksiyonunun Laplace dönüşümü;

$$\ell\{u(t)\} = \ell\{1\} = \frac{1}{s}, \quad s > 0 \qquad \textbf{(3.23)}$$

sadece $u(t) = 1$ $(t \geq 0)$ için tanımlıdır.Genelleştirecek olursak;

$$u(t) = u(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ 1, & t \geq t_0 \end{cases} \qquad \textbf{(3.24)}$$

birim basamak fonksiyonu t=t_0 noktasında sıçrama değerine sahiptir ve grafiği aşağıdaki gibidir.(Şekil.3.3)



Şekil 3.3: t=t_0 noktasında u(t) birim basamak fonksiyonunun sıçraması

Örnek 3.8 : $\ell\{u(t - t_0)\} = ?$ $(t > t_0)$

Çözüm : t>t_0 için u(t-t_0)=1 olduğundan;

$$\ell\{u(t - t_0)\} = \int_0^\infty e^{-st} \cdot u(t - t_0)dt = \int_0^\infty e^{-st} \cdot 1 \cdot dt$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left(-\frac{e^{-st}}{s} \Big|_{t_0}^{b} \right) = \frac{e^{t_0 s}}{s}$$ (s>0, t_0>0) olarak bulunur.

Tanım 3.7: t>t_0 için tanımlı f(t) fonksiyonunu ele alalım. α sabit sayısı ve t_0, M pozitif sabitleri için;

$$|f(t)| \leq M.e^{\alpha t}, \quad t \geq t_o \qquad \textbf{(3.24)}$$

oluyorsa f fonksiyonuna **üstel mertebeli fonksiyon** denir. Burada, $t \to \infty$ için $f(t) \to \infty$ olduğu aşikardır.

Teorem 3.2: Laplace Dönüşümünün Varlığı:

f(t) fonksiyonu $t \to \infty$ için üstel mertebeli bir fonksiyon ve t>0 için parçalı sürekli olsun. Bu durumda, f(t)' nin Laplace dönüşümü:

$$\ell\{f(t)\} = F(s)$$

mevcuttur. Yani, bu f(t) parçalı sürekli fonksiyonu **(3.24)** şartını sağlanırsa, F(s), bütün s>α için mevcuttur.

İspat : İlk olarak **(3.24)** formülünde $t_0=0$ alalım. Bu durumda, $|f(t)|$ parçalı sürekli fonksiyonu $[0,t_0]$ aralığında sınırlıdır. $|f(t)| \leq M$ olacak şekilde $0 \leq t \leq t_0$ için f(t) üstten sınırlıdır. $t \geq 0$ için $e^{\alpha t} \geq 1$ olduğundan $|f(t)| \leq M \cdot e^{\alpha t}$ her $t \geq 0$ için doğrudur. Mutlak yakınsak bir integral yakınsak olduğundan;

$$\int_0^{\infty} \left|e^{-st} \cdot f(t)\right| dt$$

integralinin s>α için mevcut olduğunu göstermemiz ispat için yeterli olacaktır.

Buna göre;

$$\int_0^{\infty} \left|e^{-st} \cdot f(t)\right| dt = \lim_{b \to \infty} \int_0^{b} \left|e^{-st} \cdot f(t)\right| dt$$

olduğundan f(t) değeri yerine **(3.24)**'deki eşitsizlikten;

$$\int_0^{b} \left|e^{-st} \cdot f(t)\right| dt \leq \int_0^{b} \left|e^{-st} \cdot Me^{\alpha t}\right| dt = M\int_0^{b} e^{-(s-\alpha)t} dt \leq M\int_0^{\infty} e^{-(s-\alpha)t} dt = \frac{M}{s-\alpha},\ (s>\alpha)$$

yazılırsa, teorem ispatlanmış olur. Bununla birlikte, $s > \alpha$ için;

$$|F(s)| \leq \int_0^{\infty} \left|e^{-st} \cdot f(t)\right| dt \leq \frac{M}{s-c} \qquad \textbf{(3.25)}$$

olduğu görülür. $s \to \infty$ için **(3.25)** eşitsizliğinin limiti alınırsa; aşağıdaki sonuç ortaya çıkar.

Sonuç : Varsayalım ki, f(t) fonksiyonu parçalı sürekli ve üstel mertebeli bir fonksiyon olsun. Bu durumda;

$$\lim_{s \to \infty} F(s) = 0 \quad \text{olur.} \qquad \textbf{(3.26)}$$

Teorem 3.3: Ters Laplace **Dönüşümünün Tekliği**

f(t) ve g(t) fonksiyonları Teorem-2 ile verilen sürekli ve üstel mertebeli iki fonksiyon olsunlar. Ayrıca, f(t) ve g(t)' nin Laplace dönüşümleri mevcut ve sırasıyla F(s), G(s) olsun. Eğer, bütün $s>\alpha$ değerleri için F(s)=G(s) ise f(t)=g(t) olup f ve g her ikisi de süreklidir.

3.4 Başlangıç Değer Problemlerinin Dönüşümü

Sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemlerin çözümünde Laplace dönüşümünün nasıl olacağı ve bu türevlerin, integrallerin dönüşümünün nasıl yapılacağı bu bölümde ele alınacaktır. Öncelikle,

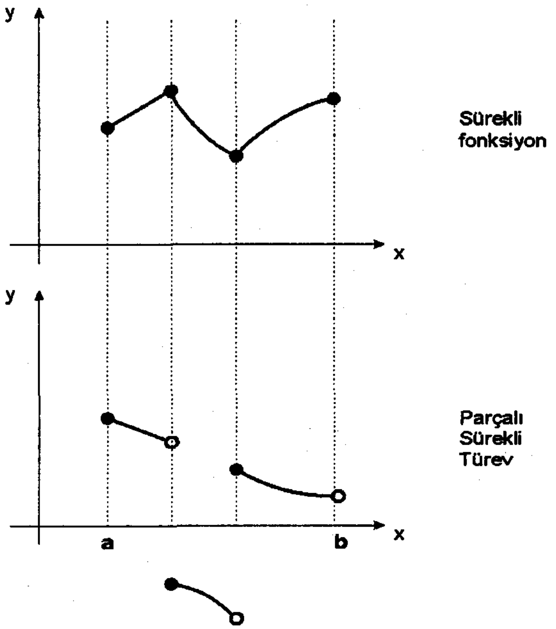
$$a\cdot y''(t)+b\cdot y'(t)+c\cdot y(t)=f(t),\ y(0)=y_0,\ y'(0)=y_1 \qquad \textbf{(3.27)}$$

sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Laplace dönüşümünün lineerliğinden **(3.27)**'deki denklemi;

$$a\cdot \ell\{y''(t)\}+b\cdot \ell\{y'(t)\}+c\cdot \ell\{y(t)\}=\ell\{f(t)\} \qquad \textbf{(3.28)}$$

denklemine dönüştürülür. Burada, $\ell\{y''(t)\}$ ve $\ell\{y'(t)\}$ türevleri bilinmediğinden bunların nasıl bulunacağı aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Tanım 3.8 : f(t) fonksiyonu bir [a,b] aralığında parçalı sürekli ve bu aralığın bazı noktaları dışında bu aralıkta diferansiyellenebilir ise $f'(t)$ fonksiyonu [a,b] aralığında parçalı sürekli olur. Bu durumdaki f(t) fonksiyonuna parçalı düzgün (pürüzsüz = smooth) denir. Aşağıdaki grafikte f fonksiyonunun grafiği üzerindeki bazı köşe noktalarında f' türev fonksiyonunun süreksizliği gösterilmiştir. (Şekil.3.4).



Şekil 3.4. f' 'nün f 'in grafiğine göre süreksizlik grafiği

Teorem 3.4: Türevlerin Dönüşümü

Varsayalım ki, $t \geq 0$ için $f(t)$ fonksiyonu sürekli ve parçalı düzgün (pürüzsüz) ve üstel mertebeli bir fonksiyon olsun. Yani, M, α, t_0 pozitif sayıları için;

$$|f(t)| \leq M \cdot e^{\alpha t} \qquad (t \geq t_0) \text{ olsun. O halde;}$$

$$\ell\{f'(t)\} = s \cdot \ell\{f(t)\} - f(0) = s \cdot F(s) - f(0) \tag{3.29}$$

olarak bulunur.Bu teoremin ispatı için tanımda;

$$\ell\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} \cdot f'(t)\,dt$$ yazılır ve kısmi integral yardımıyla;

$$\boxed{\begin{aligned} u &= e^{-st} \\ du &= se^{-st}dt \\ dv &= f'(t)dt \\ v &= f(t) \end{aligned}} \qquad = \left(e^{-st} \cdot f(t) \Big|_0^\infty \right) + s \cdot \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

olarak bulunur. Burada, $t \to \infty$ için $e^{-st} \cdot f(t)$ değeri $(s > \alpha)$ iken 0'a yaklaşırken t=0 için f(0) olur. $\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$ değeri F(s) olduğuna göre;

$$\ell\{f'(t)\} = -f(0) + s \cdot F(s)$$

veya

$$\ell\{f'(t)\} = s \cdot F(s) - f(0)$$

bulunur. **(3.28)** nolu denklemde $L\{y''(t)\}$ ile ifade edilen 2. mertebeden türevin Laplace dönüşüm değerini yine yukarıdaki mantığa benzer olarak aşağıdaki gibi elde edebiliriz.

Varsayalım ki, $g(t) = f'(t)$ Teorem 3.4'deki hipotezleri sağlasın. Buna göre;

$$\ell\{f''(t)\} = \ell\{g'(t)\} = s \cdot \ell\{g(t)\} - g(0)$$

yazılır ve $\ell\{g(t)\}$ yerine $\ell\{f'(t)\}$ değeri yazılırsa;

$$= s \cdot \ell\{f'(t)\} - f'(0)$$

$$= s \cdot [s \cdot \ell\{f(t)\} - f(0)] - f'(0)$$

$$= s^2 \cdot \ell\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$$

bulunur. $\ell\{f(t)\} = F(s)$ değeri yerine yazılarak;

$$\ell\{f''(t)\} = s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0) - f'(0) \tag{3.30}$$

olarak elde edilir.Eğer bu şekilde devam edilirse aşağıdaki sonuca ulaşırız.

Sonuç : Varsayalım ki, $f, f', f'', \ldots\ldots, f^{(n-1)}$ türev fonksiyonları $t \geq 0$ için sürekli ve parçalı düzgün olsun. Ayrıca, bu fonksiyonların herbiri üstel mertebeden olsunlar. Buna göre;

$$\ell\{f^{(n)}(t)\} = s^n \cdot \ell\{f(t)\} - s^{n-1} \cdot f(0) - s^{n-2} \cdot f'(0) - \ldots\ldots - f^{(n-1)}(0)$$

$$= s^n \cdot F(s) - s^{n-1} f(0) - \ldots\ldots - s \cdot f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \tag{3.31}$$

sonucu elde edilir.

Örnek 3.9: $y'' - y' - 12y = 0, \; y(0) = 1, \; y'(0) = -2$ başlangıç değer problemini çözünüz.

Çözüm : Laplace dönüşümünün lineerliği kullanılırsa;

$$\ell\{y''(t)\} - \ell\{y'(t)\} - 12 \cdot \ell\{y(t)\} = \ell\{0\} \qquad (*)$$

yazılır ve türev değerleri yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
\ell\{y''(t)\} &= s^2 \cdot \ell\{y(t)\} - s \cdot y(0) - y'(0) \\
\ell\{y''(t)\} &= s^2 \cdot y(s) - s \cdot y(0) - y'(0) \\
\ell\{y''(t)\} &= s^2 \cdot y(s) - s + 2 \\
\ell\{y'(t)\} &= s \cdot \ell\{y(t)\} - y(0) \\
&= s \cdot y(s) - 1
\end{aligned}$$

bulunur. Bu değerler, (*) ifadesinde yazılırsa;

$$\begin{aligned}
& s^2 \cdot y(s) - s + 2 - s \cdot y(s) + 1 - 12 \cdot y(s) = 0 \\
& y(s) \cdot \left[s^2 - s - 12\right] = s - 3 \\
& y(s) = \frac{s-3}{s^2 - s - 12} = \frac{s-3}{(s-4)(s-3)}
\end{aligned}$$

olur. Kısmi kesirler yönteminden;

$$\frac{s-3}{s^2 - s - 12} = \frac{A}{s-4} + \frac{B}{s+3}$$

$$s - 3 = A(s+3) + B(s-4) \Rightarrow A = \frac{1}{7}, \; B = \frac{6}{7} \text{ bulunur.}$$

Böylece;

$$y(s) = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{s-4} + \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{s+3}$$

$$\ell^{-1}\{y(s)\} = \frac{1}{7} \cdot \ell^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\} + \frac{6}{7} \cdot \ell^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}$$

$$\boxed{y(t)=\frac{1}{7}\cdot e^{4t}+\frac{6}{7}\cdot e^{-3t}}$$ olarak bulunur.

Örnek 3.10: $y''+4y'+13y=\sin 2t,\ y(0)=2,\ y'(0)=1$ başlangıç değer problemini çözünüz.

Çözüm : İlk olarak, Laplace dönüşümü uygulanırsa;

$$\ell\{y''(t)\}+4\,\ell\{y'(t)\}+13\,\ell\{y(t)\}=\ell\{\sin 2t\}$$

ve türev dönüşümleri;

$$\begin{aligned}\ell\{y''(t)\}&=s^2\cdot\ell\{y(t)\}-s\cdot y(0)-y'(0))\\&=s^2\cdot y(s)-2s-1\\ \ell\{y'(t)\}&=s\cdot\ell\{y(t)\}-y(0)\\&=s\cdot y(s)-2\end{aligned}$$

bulunur. Bu değerler, Laplace dönüşümünde yazılırsa;

$$s^2y(s)-2s-1+4s\cdot y(s)-8+13\cdot y(s)=\frac{2}{s^2+4}$$

ve $y(s)$ yalnız bırakılırsa;

$$y(s)=\frac{2s+9+\dfrac{2}{s^2+4}}{s^2+4s+13}$$

gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$y(s)=\frac{2s+9}{s^2+4s+13}+\frac{2}{(s^2+4)(s^2+4s+13)}$$

$$y(s)=2\cdot\frac{(s+2)}{s^2+4s+13}+\frac{5}{s^2+4s+13}+\frac{2}{(s^2+4)(s^2+4s+13)}$$

$$\frac{s+2}{(s+2)^2+9}=\ell\{e^{-2t}\cos 3t\}$$ olur. Diğer yandan;

$$\frac{5}{s^2+4s+13}=\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{(s+2)^2+9}=\frac{5}{3}\cdot\ell\{e^{-2t}\sin 3t\}$$

bulunur. Ayrıca,

$$\frac{2}{(s^2+4)(s^2+4s+13)}=\frac{As+B}{s^2+4}+\frac{Bs+D}{s^2+4s+13}$$

eşitliğinden;

$$A=-\frac{8}{145},\ B=\frac{18}{145},\ C=\frac{8}{145},\ D=\frac{14}{145}$$

bulunur. Bu değerler yerine yazılırsa;

$$\frac{2}{\left(s^2+4\right)\left(s^2+4s+13\right)}=-\frac{8}{145}\ell\{\cos 2t\}+\frac{9}{145}\ell\{\sin 2t\}+\frac{8}{145}\ell\{e^{-2t}\cos 3t\}-\frac{2}{435}\ell\{e^{-2t}\sin 3t\}$$

$$\frac{\left(\frac{8}{145}s+\frac{14}{145}\right)}{s^2+4s+13}=\frac{8}{145}\cdot\frac{(s+2)}{(s+2)^2+9}-\frac{2}{145}\cdot\frac{3}{(s+2)^2+9}$$
$$=\frac{8}{145}\cdot\ell\{e^{-2t}\cdot\cos 3t\}-\frac{2}{435}\cdot\ell\{e^{-2t}\cdot\sin 3t\}$$

elde edilir. Sonuç olarak;

$$y(s)=2\ell\{e^{-2t}\cos 3t\}+\frac{5}{3}\ell\{e^{-2t}\sin 3t\}-\frac{8}{145}\ell\{\cos 2t\}+\frac{9}{145}\ell\{\sin 2t\}$$
$$+\frac{8}{145}\ell\{e^{-2t}\cos 3t\}-\frac{2}{435}\ell\{e^{-2t}\sin 3t\}$$

olarak bulunur. O halde, y(t)'yi bulmak için $\ell^{-1}\{y(s)\}=y(t)$ kullanılarak;

$y(t)=\frac{1}{145}\left(9\sin 2t-8\cos 2t+298e^{-2t}\cos 3t-241e^{-2t}\sin 3t\right)$ sonucu bulunur.

Örnek 3.11 : $\ell\{t^2e^{at}\}=\frac{2}{(s-a)^3}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm : Eğer, $f(t)=t^2a^{at}\Rightarrow f(0)=0$ ve $f'(t)=2te^{at}+at^2e^{at}$ olur. Bununla birlikte;

$$\ell\{f'(t)\}=\ell\{2te^{at}+at^2e^{at}=s\cdot\ell\{f(t)\}-f(0)$$

yazılır ve ℓ' nin lineerlik özelliğinden;

$$\ell\{f'(t)\}=2\cdot\ell\{te^{at}\}+a\cdot\ell\{t^2e^{at}\}=s\cdot\ell\{t^2e^{at}\}\qquad(*)$$

bulunur. $\ell\{te^{at}\}$ değerini bulmak için aynı mantıkla;

$f(t)=te^{at}$ alınırsa; $f(0)=0$ ve $f'(t)=e^{at}+ate^{at}$

$$\ell\{f'(t)\}=\ell\{e^{at}+ate^{at}\}=s\cdot\ell\{f(t)\}-f(0)=s\cdot\ell\{te^{at}\}$$

$$\ell\{e^{at}\}+a\cdot\ell\{te^{at}\}=s\cdot\ell\{te^{at}\}$$

$$\ell\{e^{at}\}=(s-a)\,\ell\{te^{at}\}$$

$\frac{1}{(s-a)^2}=\ell\{te^{at}\}$ bulunur. $\ell\{te^{at}\}$ değeri (*) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$2\cdot\ell\{te^{at}\}=(s-a)\,\ell\{t^2e^{at}\}$$

$2\cdot\frac{1}{(s-a)^2}=(s-a)\;\ell\{t^2e^{at}\}$ ve böylece;

$$\ell\{t^2 e^{at}\} = \frac{2}{(s-a)^3}, \quad s > a \qquad \text{olarak bulunur.}$$

Teorem 3.5: İntegrallerin Dönüşümü

Eğer, f(t) fonksiyonu $t \geq 0$ için parçalı sürekli ve $|f(t)| \leq M \cdot e^{\alpha}, t \geq t_0$ koşulunu sağlayan üstel mertebeden bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$\ell\left\{\int_0^t f(r)\,dr\right\} = \frac{1}{s} \cdot \ell\{f(t)\} = \frac{F(s)}{s}, \quad (s > \alpha) \tag{3.32}$$

tersine;

$$\ell^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(r)dr \qquad \text{olur.} \tag{3.33}$$

İspat : $f(t)$ parçalı sürekli olduğundan, analizin temel teoreminden;

$$g(t) = \int_0^t f(r)\,dr$$

süreklidir ve $g'(t) = f(t)$ olup f süreklidir. Böylece, $t \geq 0$ için $g(t)$ sürekli ve parçalı düzgündür.Bundan sonra,

$$|g(t)| \leq \int_0^t |f(r)| \cdot dr \leq M \cdot \int_0^t e^{\alpha r} \cdot dr = \frac{M}{\alpha} \cdot \left(e^{\alpha t} - 1\right) < \frac{M}{\alpha} \cdot e^{\alpha t}$$

olup $g(t)$ üstel mertebedendir. $g(t)$ için türev dönüşümü kullanılarak;

$$\ell\{f(t)\} = \ell\{g'(t)\} = s \cdot \ell\{g(t)\} - g(0)$$

bulunur ve $g(0) = 0$ yerine yazılarak;

$$\ell\left\{\int_0^t f(r)\ dr\right\} = \ell\{g(t)\} = \frac{\ell\{f(t)\}}{s} \quad \text{elde edilir.}$$

Teorem 3.6 : Eğer, $s > \alpha$ için $F(s) = \ell\{f(t)\}$ ise

$$\ell\left\{e^{at} \cdot f(t)\right\}, \quad s > a + c \ \text{ için mevcuttur, ve}$$

$$\ell\left\{e^{at} f(t)\right\} = F(s-a) \tag{3.34}$$

tersine;

$$\ell^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at} \cdot f(t) \qquad \text{olur.} \tag{3.35}$$

İspat : Laplace dönüşümü tanımında;

$$\begin{aligned} F(s-a) &= \int_0^\infty e^{-(s-a)t} \cdot f(t)\,dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} \cdot \left[e^{at} f(t)\right] dt \\ &= \ell\left\{e^{at} f(t)\right\} \end{aligned}$$

elde edilir. ℓ^{-1} operatörü uygulanarak;

$$\ell^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at} \cdot f(t) \text{ bulunur.}$$

Sonuç : Bu teoremin bir sonucu olarak e^{at} ile çarpılan t' ye bağlı fonksiyonların Laplace dönüşümü bulunurken s yerine s-a yazılır. Bunu aşağıdaki tablo ile aşağıdaki gibi verebiliriz.

Tablo 3.2. - $e^{at} \cdot f(t)$ şeklindeki bazı fonksiyonların Laplace dönüşümleri.

$f(t) = \ell^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \ell\{f(t)\}$
$e^{at} \cdot t^n$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s > a$
$e^{at} \cdot \cos kt$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2 + k^2}, \quad s > a$
$e^{at} \cdot \sin kt$	$\dfrac{k}{(s-a)^2 + k^2}, \quad s > a$

3.5. Konvolüsyon

Tanım 3.9 : $t \geq 0$ için tanımlı olan f ve g parçalı sürekli fonksiyonlarının konvolüsyonu:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau \qquad \textbf{(3.36)}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.7 : Konvolüsyon Özelliği; varsayalım ki, f(t) ve g(t) fonksiyonları $t \geq 0$ için parçalı sürekli ve $|f(t)|$ ile $|g(t)|$ fonksiyonları da $t \to \infty$ için $M\, e^{\alpha t}$ ile sınırlı olsunlar. Bu durumda, $f(t) * g(t)$ konvolüsyonunun Laplace dönüşümü $s > \alpha$ için mevcuttur ve;

$$\ell\{f(t) * g(t)\} = \ell\{f(t)\} \cdot \ell\{g(t)\} \qquad \textbf{(3.37)}$$

tersine;

$$\ell\{F(s) \cdot G(s)\} = f(t) * g(t) \qquad \textbf{(3.38)}$$

özelliği geçerlidir.

Teorem 3.8: Dönüşümlerin Diferansiyeli

f(t), $t \geq 0$ için parçalı sürekli ve $|f(t)| \leq M\, e^{\alpha t}$ koşuluna uyan üstel mertebeli bir fonksiyon olsun. Buna göre,

$$\ell\{-t \cdot f(t)\} = F'(s)\ , \quad (s > \alpha) \qquad \textbf{(3.39)}$$

veya

$$f(t) = \ell^{-1}\{F(s)\} = -\frac{1}{t^2} \cdot \ell^{-1}\{F'(s)\} \qquad \textbf{(3.40)}$$

ve

$$\ell\{t^n \cdot f(t)\} = (-1)^n \cdot F^{(n)}(s) \quad (n = 1,2,.....) \text{ olur.} \qquad \textbf{(3.41)}$$

Örnek 3.12: $\ell\{t^2 \cdot \cos at\} = ?$

Çözüm: Formül **(3.41)** uygulanarak;

$$\ell\{t^2 \cdot \cos at\} = (-1)^2 \cdot \frac{d^2}{ds^2} \cdot \left[\frac{s}{s^2 + a^2}\right]$$

$$= \frac{d}{ds}\left[\frac{a^2 s^2}{\left(s^2 + a^2\right)^2}\right]$$

$$= \frac{2s \cdot \left(s^2 - 3a^2\right)}{\left(s^2 + a^2\right)^3}$$

bulunur.

Örnek 3.13: $\ell^{-1}\left\{\arctan\frac{1}{s}\right\} = ?$

Çözüm: Formül **(3.40)** uygulanarak;

$$\ell^{-1}\left\{\arctan\left(\frac{1}{s}\right)\right\} = -\frac{1}{t} \cdot \ell^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\arctan\left(\frac{1}{s}\right)\right\}$$

$$= -\frac{1}{t} \cdot \ell^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{s^2}}{1+\left(\frac{1}{s}\right)^2}\right\}$$

$$= -\frac{1}{t} \cdot \ell^{-1}\left\{\frac{-1}{s^2+1}\right\} = -\frac{1}{t}(-\sin t) = \frac{\sin t}{t}$$

bulunur.

Teorem 3.9: Dönüşümlerin İntegrasyonu:

Varsayalım ki, f(t) fonksiyonu $t \geq 0$ için parçalı sürekli ve $|f(t)| \leq M e^{\alpha t}$ şartını sağlayan üstel mertebeli bir fonksiyon olsun. Ayrıca, f(t) fonksiyonu için;

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(t)}{t} \quad \text{limiti var ve sonlu olsun. Bu durumda;} \qquad \textbf{(3.42)}$$

$$\ell\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(r) \cdot dr \ , \quad (s > \alpha) \quad \text{ve benzer olarak;} \qquad \textbf{(3.43)}$$

$$f(t) = \ell^{-1}\{F(s)\} = t \cdot \ell^{-1}\{\int_s^\infty F(r) \cdot dr\} \qquad \text{olur.} \qquad \textbf{(3.44)}$$

Örnek 3.14: $\ell\left\{\frac{\sinh t}{t}\right\} = ?$

Çözüm: Öncelikle **(3.42)**'deki limite bakarsak;

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\sinh t}{t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{e^t - e^{-t}}{2t} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

L' hospital kuralından;

$\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\sinh t}{t}=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}=1$ limit mevcuttur. O halde; **(3.43)** nolu eşitlikten;

$f(t)=\sinh t$ alınırsa;

$$\ell\left\{\frac{\sinh t}{t}\right\}=\int_s^\infty \ell\{\sinh t\}\cdot dr=\int_s^\infty \frac{dr}{r^2-1}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\int_s^\infty\left(\frac{1}{r-1}-\frac{1}{r+1}\right)dr$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\ln\left(\frac{r-1}{r+1}\right)\Big|_s^\infty\right)$$

olur. Böylece;

$$\ell\left\{\frac{\sinh t}{t}\right\}=\frac{1}{2}\cdot\ln\left|\frac{s+1}{s-1}\right| \quad \text{bulunur.}$$

Örnek 3.15: $\ell^{-1}\left\{\dfrac{4s}{(s^2+4)^2}\right\}=?$

Çözüm: **(3.44)** nolu formül kullanılarak;

$$\ell^{-1}\left\{\frac{4s}{(s^2+4)^2}\right\}=t\cdot\ell^{-1}\left\{\int_0^\infty\frac{4r\cdot dr}{(r^2+4^2)^2}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} r^2+4&=u\\ 2rdr&=du\end{aligned}\right\}\quad \int\frac{2rdr}{(r^2+4)^2}=\int\frac{du}{u^2}$$

$$=-\frac{1}{u}$$

$$=-\frac{1}{r^2+4}$$

$$=t\cdot\ell^{-1}\left\{\left(-\frac{2}{r^2+4}\Big|_s^\infty\right)\right\}$$

$$=t\cdot\ell^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}$$

$$=t\cdot\sin 2t$$

olarak bulunur.

3.6. Periyodik ve Parçalı Sürekli Zorlayıcı Fonksiyonlar

Elektrik veya mekanik sistemlerin matematik modelleri incelendiğinde ortaya harici kuvvetlerin çıktığı ve bu modellerin süreksiz fonksiyonları içerdiği görülür. Bunun en basit örneği, on-off fonksiyon olarak da adlandırılan ve Heaviside tarafından geliştirilen birim basamak fonksiyonudur. Formülü ise;

$$U_{t_0}(t)=U(t-t_0)=\begin{cases}0, & \text{eğer } t<t_0\\ 1, & \text{eğer } t\ge t_0\end{cases}$$

ile verilmişti. Ayrıca,

$\ell\{u(t-t_0)\} = \dfrac{e^{-t_0 s}}{s}$ idi. $\ell\{u(t)\} = \dfrac{1}{s}$ iken bağımsız değişkende t yerine t-t_0 yazılarak aşağıdaki özelliklere sahip fonksiyonlar için dönüşüm yapılır.

Teorem 3.11: Eğer, $\ell\{f(t)\} = F(s),\ s > \alpha$ için mevcut ise;

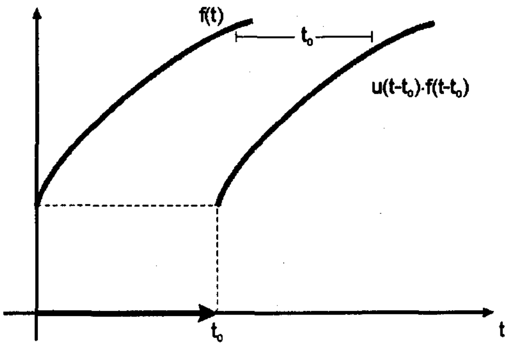
$$\ell\{u(t-t_0)\cdot f(t-t_0)\} = e^{-t_0 s}\cdot F(s) \quad \text{ve} \tag{3.45}$$

$$\ell^{-1}\{e^{-t_0 s}\cdot F(s)\} = u(t-t_0)\cdot f(t-t_0) \quad (s > \alpha + t_0) \tag{3.46}$$

elde edilir.Burada,

$$u(t-t_0)\cdot f(t-t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ f(t-t_0), & t \geq t_0 \end{cases} \tag{3.47}$$

olarak elde edilir. Böylece, Teorem 3.11' in sonucu olarak şunu söyleyebiliriz: $\ell^{-1}\left\{e^{-t_0 s}\cdot F(s)\right\}$ fonksiyonunun $t \geq t_0$ için grafiği, f(t) fonksiyonunun grafiği t_0 birim kadar sola kaydırılarak çizilir. Aşağıdaki şekilde bu taslak bir trafikte verilmiştir.(Şekil.3.5)



Şekil 3.5: f(t) 'nin t_0 birim sağa kaydırılması.

3.7.Impulse Fonksiyonları: Dirac Fonksiyon

Fiziksel problemlerin çoğu küçük bir zaman periyodunda büyük niceliklerin ortaya çıktığı impulse (itici, zorlayıcı) davranışa sahiptir. Bu problemlerin çoğu diferansiyel denklemlerde karşımıza çıkar. Burada, $g(t)$ homojen olmayan terim $[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$ gibi çok küçük bir aralıkta çok büyük iken aksi durumlarda sıfır olur. $g(t)$'nin toplam impulse'ı (itici gücü);

$$I(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} g(t)dt \tag{3.48}$$

0 şeklinde bir integralle tanımlanır. Bundan başka;

$$g(t)=d_\varepsilon(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\varepsilon} & , -\varepsilon<t<\varepsilon \\ 0 & , \text{Aksi halde}\end{cases} \qquad (3.49)$$

şeklinde bir parçalı fonksiyon ile de tanımlanır. Burada, ε çok küçük bir değere sahip olup, $I(\varepsilon)=1$'dir. Buna göre,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I(\varepsilon)=1 \quad \text{iken} \qquad (3.50)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} d_\varepsilon(t)=0 \ , \quad (t\neq 0) \qquad (3.51)$$

olur. Bunlara bağlı olarak;

$$\begin{cases}\delta(t)=0 & t\neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\cdot dt=1\end{cases} \qquad (3.52)$$

fonksiyonuna **Dirac-Delta fonksiyonu** denir.Eğer, $\ell(\delta)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\ell(d_\varepsilon(t))$ denirse;

$$\ell(\delta)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon s}\cdot\left(e^{s\varepsilon}-e^{-s\varepsilon}\right)=1 \qquad (3.53)$$

olur. Daha genel olarak;

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-_0)\cdot f(t)dt=f(t_0) \quad \text{olur.} \qquad (3.54)$$

Not: $H_3(t)$=Heaviside fonksiyonu olup $U_3(t)$ olarak da gösterilir.

$f(t)$ Laplace dönüşümüne sahip bir fonksiyon olsun.

$$\ell(H_c(t)\cdot f(t-c))=e^{-cs}\cdot\ell\{f(t)\}$$

ve

$$\ell\{H_c(t)\cdot f(t)\}=e^{-cs}\cdot\ell\{f(t+c)\}$$

veya

$$\ell^{-1}\{e^{-cs}\cdot F(s)\}=H_c(t)\cdot\ell^{-1}(F)\cdot(t-c) \text{ olur.}$$

Örnek 3.16: $y''+3y'+2y=2\delta(t-3)$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$ başlangıç değer problemini çözelim.

Çözüm: Öncelikle denkleme Laplace dönüşümü uygulanırsa;

$$\ell(y'')+3\ell(y')+2\ell(y)=2\ell\{\delta(t-3)\}$$

$$s^2y(s)-s\cdot y(0)-y'(0)+3\cdot(s\cdot y(s)-y(0))+2\cdot y(s)=2e^{-3s}$$

ve gerekli düzenlemeler yapılıp $y(s)$ yalnız bırakılırsa;

$$y(s)=\frac{1+2e^{-3s}}{s^2-2s+5} \text{ olur.}$$

Bu son ifadeyeTers Laplace uygulanarak;

$$y(t)=\ell^{-1}\{y(s)\}=\ell^{-1}\left\{\frac{1+2e^{-3s}}{s^2-2s+5}\right\}$$

$$y(t)=\frac{1}{2}e^{t}\cdot\sin 2t+H_3(t)\cdot e^{t-3}\cdot\sin 2(t-3) \text{ bulunur.}$$

3.8. Laplace Dönüşümü İle Devre Çözümü

Bir elektrik yada elektronik devresinde geçici olayların oluşması için R direnç elemanıyla birlikte bir endüktans veya bir kapasite bulunmak zorundadır. Devre çözümü için endüktans ve kapasite elemanlarının ilk koşullarının olup olmadığı da gözönüne alınmalıdır. R, L ve C elemanlarının Laplace transformasyonu ile devre çözümünde nasıl kullanıldığını inceleyelim.

R (direnç) elemanı: Lineer bir R (direnç) elemanı için gerilim;

$V(t)=R\cdot i(t)$ 'dir. V(t) 'nin Laplace dönüşümü alınarak;

$\ell\{V(t)\}=R\cdot\ell\{i(t)\}=V(s)=R\cdot I(s)$ 'dir.

L (endüktans) elemanı: Bir L endüktansının uçlarında indüklenen gerilim:

$V(t)=L\cdot\dfrac{di(t)}{dt}$ 'dir.

$$\ell\{V(t)\}=L\cdot\ell\left\{\frac{di(t)}{dt}\right\}$$

$$V(s)=L\cdot\left(sI(s)-I(0^+)\right)$$

$I(0^+)$ endüktansın başlangıçta yani t=0 anında uçlarından çıkan akımdır. Eğer $I(0^+)=0$ ise V(s);

$$V(s)=sL\cdot I(s)$$

C (kapasite) elemanı: Kapasite uçlarından akan akım;

$i(t)=C\dfrac{dV(t)}{dt}$ 'dir. Laplace dönüşümü:

$$\ell\{i(t)\}=C\cdot\ell\left\{\frac{dV(t)}{dt}\right\}=C\cdot\left[sV(s)-V(0^+)\right]$$

$V(0^+)$ kapasitenin t=0 anında uçlarında mevcut bulunan gerilimdir. $V(0^+)=0$ ise

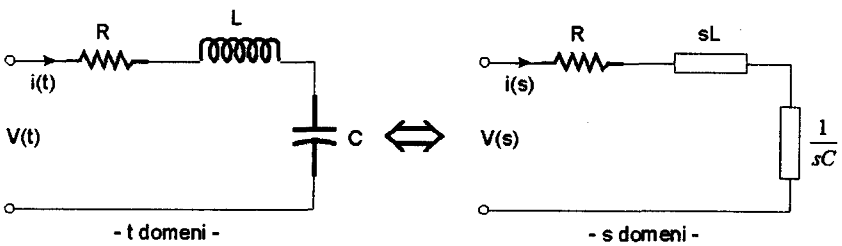
$V(s)=\frac{1}{sC}I(s)$ olur.

Bir devrenin analizi sırasında Laplace dönüşümü kullanılacaksa L ve C elemanlarının yerine sL ve $\frac{1}{sC}$ empendans değerleri yazılır. R direnç elemanı aynen bırakılır ve bir direnç devresiymiş gibi çözüm yapılabilir.(Tablo.3.3)

Tablo 3.3 t düzleminden s düzlemine geçiş tablosu

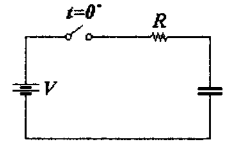
t domeni	**s domeni**
V(t)	V(s)
I(t)	I(s)
R	R
L	sL
C	$\frac{1}{sC}$
$\frac{d}{dt}$	s
$\int dt$	$\frac{1}{s}$

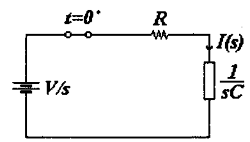
Şekildeki devrenin s domeni karşılığını bulunuz.

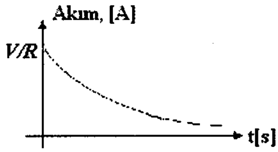


3.9. Laplace Dönüşümü ile Elektrik-Elektronik Devre Uygulamaları:

Örnek 3.17: Şekildeki devrede $t=0^+$ anında s anahtarı kapatılıyor. Anahtarın kapanmasıyla devrede oluşan i(t) akımının denklemini Laplace yöntemi ile bulunuz. (Anahtar kapatıldığında C kondansatörü yüksüz durumdadır)







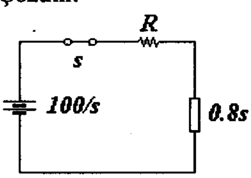
$$\text{Empedans} = Z(s) = R + \frac{1}{sC} = \frac{R\left(s + \frac{1}{RC}\right)}{s}$$

$$I(s) = \frac{V(s)}{Z(s)} = \frac{V}{R\left(s + \frac{1}{RC}\right)} = \frac{V}{R}\left(\frac{1}{s + \frac{1}{RC}}\right)$$

$$i(t) = \ell^{-1}\{I(s)\} = \frac{V}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

Örnek 3.18: Seri bağlı bir R-L devresinde R=40Ω, L=0,8 H'dir. V gerilimi 100V'dur. t=0^+ anında S anahtarı kapatılıyor. Devreden geçen akımı (i(t)) bulunuz.

Çözüm:



Şekilde, devrenin s domeni eşdeğeri görülmektedir. $V(s) = \frac{100}{s}$ ve $Z(s) = 40 + 0{,}8s$ olur.

$$I(s) = \frac{V(s)}{Z(s)} = \frac{100}{s(40 + 0{,}8s)} = \frac{125}{s(s + 50)}$$

$$I(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s + 50} = \frac{125}{s(s + 50)}$$

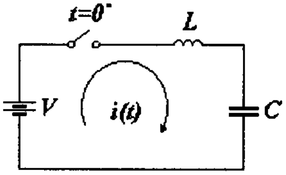
$$s = 0 \Rightarrow K_1 = \frac{125}{(s + 50)} = \frac{125}{50} = 2{,}5$$

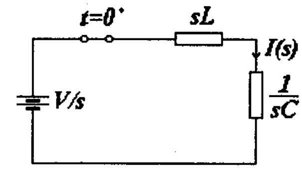
$$s = -50 \Rightarrow K_2 = \frac{125}{s(s + 50)} \cdot (s + 50) = -\frac{125}{50} = -2{,}5$$

$$I(s) = \frac{2{,}5}{s} - \frac{2{,}5}{s + 50}$$

$$i(t) = \ell^{-1}\{I(s)\} = 2{,}5 - 2{,}5e^{-50t} \qquad [A]$$

Örnek 3.19: Şekil 3-a 'daki LC devresinde t=0^+ anında anahtar kapatılıyor. $i(t)$ akımı ile kondansatör uçlarında oluşan gerilimi bulunuz. (C kondansatörü başta yüksüzdür.)





Seri LC devresi t=0$^+$ anında devrenin s domeni eşdeğeri

Çözüm:

$$I(s)=\frac{V(s)}{Z(s)}=\frac{V/S}{sL+\dfrac{1}{sC}}=\frac{V/S}{\dfrac{1+s^2LC}{sC}}=\frac{VC}{LC\left(s^2+\dfrac{1}{LC}\right)}=\frac{V/L}{s^2+\dfrac{1}{LC}}$$

$$=\frac{V/L}{s^2+\left(\sqrt{(LC)-1}\right)}=\frac{V}{L}\cdot\frac{\sin\sqrt{1/LC}\,t}{\sqrt{1/LC}}$$

Hatırlatma: $\ell^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2\omega^2}\right\}=\dfrac{1}{\omega}\sin\omega t$

Hatırlatmadaki fonksiyona göre son bulduğumuz eşitliği düzenleyerek;

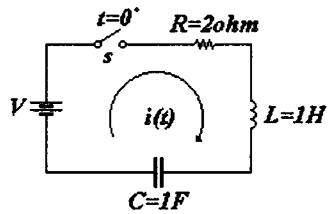
$$I(s)=\frac{V/L}{s^2+\left(\sqrt{(LC)^{-1}}\right)^2}$$

$$i(t)=\ell^{-1}\{I(s)\}=\frac{V}{L\sqrt{(1/LC)}}\sin\sqrt{1/LCt} \qquad [A]$$

$$V_C(t)=\frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt=\frac{V}{LC\sqrt{1/LC}}\int_0^t \sin\sqrt{1/LCt}\,dt$$

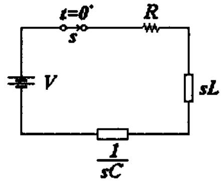
$$V_C(t)=\frac{V}{LC\sqrt{1/LC}}\left(1-\cos\sqrt{1/LCt}\right) \qquad [V]$$

Örnek 3.20: Şekil' deki RLC devresinde t=0$^+$ anında anahtar kapatılıyor. Anahtarın kapatılmasıyla oluşan i(t) akımını bulunuz. (Başlangıçta C yüksüzdür.)



RLC devresi

Çözüm:



Anahtar kapatıldığında devrenin s domeni eşdeğeri.

$$V(s)=\frac{V}{S} \quad , \; Z(s)=R+sL+\frac{1}{sC}=\frac{s^2LC+3CR+1}{sC}$$

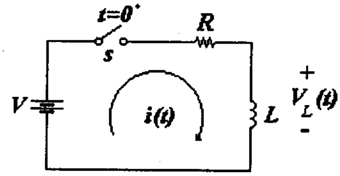
$$I(s)=\frac{VC}{s^2LC+sCR+1}=\frac{V}{s^2+2s+1}=\frac{V}{(s+1)^2}$$

$$i(t)=\ell^{-1}\{I(s)\}=V\,t\,e^{-t} \qquad [A]$$

Örnek 3.21: Şekildeki seri RL devresinde R=1 ohm, L=1 H, V=12 V'dur. $t=0^+$ anında anahtar kapatılıyor.

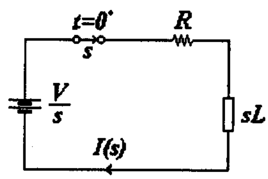
a) Devreden akan i(t) akımını, R ve L elemanları üzerindeki gerilim düşümünü hesaplayınız ve zamanla değişimlerini çiziniz.

b) t=1 sn. olduğunda akımın değerini bulunuz.



Seri RL devresi

Çözüm:



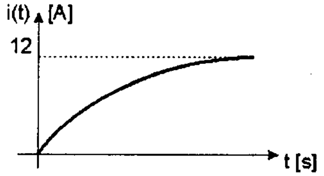
$t=0^+$ anında devrenin s domeni eşdeğeri

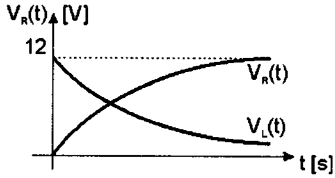
a) $$I(s)=\frac{V(s)}{Z(s)}=\frac{V/S}{R+sL}=\frac{12}{s(s+1)}=\frac{12}{s+1}$$

$$i(t)=\ell^{-1}\{I(s)\}=12-12e^{-t}=12\left(1-e^{-t}\right)$$

$$V_R(t)=R\cdot i(t)=12\left(1-e^{-t}\right) \qquad [V]$$

$$V_L(t)=V-V_R(t)=12-\left(12-12e^{-t}\right)=12e^{-t} \qquad [V]$$

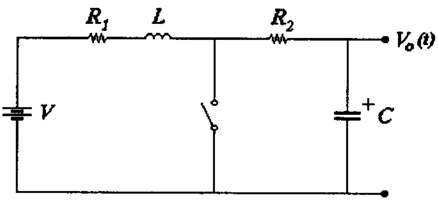




t=+∞⇒i(t)=12A

Örnek 3.22: Şekildeki devrede kararlı hal durumu için anahtar yeteri kadar uzun süre kapalı kalıyor. t=0 anında anahtar açılıyor. $V_0(t)$ ifadesini bulunuz ve t=0,1s için hesaplayınız.

V=40V
$R_1=20\Omega$
$R_2=4\Omega$
L=1H
C=0,0125F



Çözüm: t=0 anında anahtar açıldığında basamak fonksiyonu oluşur. Bu yüzden V(s)=V/s olur. Başlangıçta kapasitenin uçlarındaki gerilim sıfırdır. Bundan dolayı $q(0^+)=0$'dır. Başlangıçta endüktans üzerinden akan akım $i_L(0^+)=V/R_1$'dir.

t=0 anında $R=R_1+R_2$

$$V(s)=(1/sC)\left[I(s)+q(0^+)\right]+L\left[I(s)-i_L(0^+)\right]+R\,I(s)$$

$$V/s=(1/sC)I(s)+L\,s\,I(s)-VL/R_1+R\,I(s)$$

$$\frac{V}{s}+\frac{VL}{R_1}=I(s)\left(\frac{1+RCs+LCs^2}{sC}\right)$$

$$I(s)=\frac{V(Ls+R_1)}{R_1L\left[s^2+(R/L)s+(1/LC)\right]}$$

$$V_O(s)=I(s)(1/Cs)=\frac{V(Ls+R_1)}{R_1LCs\left[s^2+(R/L)s+(1/LC)\right]}$$

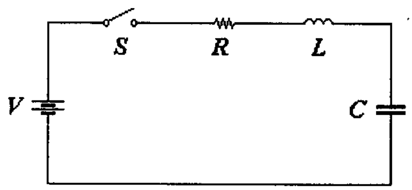
Eleman değerlerini yerine koyarsak;

$$V_O(s)=\frac{40(s+20)}{(20)(1)(0{,}0125)s(s^2+24s+80)}=\frac{160(s+20)}{s(s^2+24s+80)}$$

$$V_O(s)=\frac{160(s+20)}{s(s+20)(s+4)}=\frac{160}{s(s+4)}$$

$\ell^{-1}\{V_O(s)\}=V_O(t)=40\left(1-e^{-4t}\right)$ ve $t=0{,}1s \Rightarrow V_O(0{,}1)=13{,}19V$ bulunur.

Örnek 3.23: Şekildeki devrede t=0 anında anahtar kapatılıyor. Geçici hal için R' nin etkisi ihmal ediliyor. $V=100\ V_{dc}$ ise kapasite uçlarında meydana gelen maksimum. gerilimi hesaplayınız.



Seri RLC devresi

Çözüm: Başlangıçta kapasite uçlarındaki gerilim sıfırdır.

$$Z(s)=\frac{1}{sC}+sL=\frac{1+LCs^2}{sC} \quad \text{ve} \quad V(s)=\frac{V}{s}$$

$$I(s)=\frac{V(s)}{Z(s)}=\frac{VC}{1+LCs^2}=\frac{V}{L\left[s^2+(1/LC)\right]}$$

Laplace dönüşüm tablosundan:

$$V_C(t)=\frac{V\left\{1-\cos\left[t/(LC)^{1/2}\right]\right\}}{LC(1/LC)}=V\left\{1-\cos\left[t/(LC)^{1/2}\right]\right\}$$

$$\frac{dV_C(t)}{dt}=\frac{V\sin\left[t/(LC)^{1/2}\right]}{(LC)^{1/2}}$$

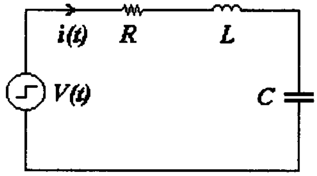
$$\sin\left[t/(LC)^{1/2}\right]=0$$

$$\frac{t}{(LC)^{1/2}}=\pi$$

$$t=\pi(LC)^{1/2}$$

$$V_C(t)=V(1-\cos\pi)=V(1+1)=2\cdot V=200 \text{ V}$$

Örnek 3.24: Şekildeki devrenin girişine basamak fonksiyonu uygulanıyor. Akım dalga şeklinin asla negatife geçmemesi isteniyor. Bu şartlar için R'nin minimum değeri ne olmalıdır?



$$L=10^{-3}H$$
$$C=10^{-6}F$$

Çözüm:

$$Z(s)=\frac{1}{Cs}+Ls+R$$
$$=\frac{L}{S}\left(s^2+\frac{Rs}{L}+\frac{1}{LC}\right)$$

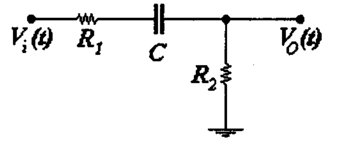
$$I(s)=\frac{V(s)}{Z(s)}$$
$$=\frac{V/L}{s^2+(R/L)s+1/LC}$$

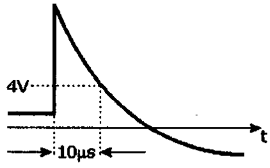
Laplace dönüşüm tablosundan I(s)'ninTers Laplace dönüşümü alınarak;

$$F(s)=\frac{1}{s^2+2as+b^2} \quad \text{ve} \quad b^2=a^2 \text{ alalım.}$$

$$a=\frac{R}{2L}\ ;\ b=\frac{1}{LC} \quad \text{ise} \qquad R=\left(\frac{4L}{C}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{4\cdot 10^{-3}}{10^{-6}}\right)^{\frac{1}{2}}=63.2 \text{ ohm}$$

Örnek 3.25: Şekildeki devrenin girişine 100 Volt genlikli basamak fonksiyonu uygulanıyor. Çıkışta tepe değeri 20 Volt ve 10 µs'de 4V genlik elde etmek istiyoruz. R_1=100 ohm olduğuna göre; R_2 ve C'nin değerini hesaplayınız.





Çözüm:

$$Z(s)=R_1+R_2+1/Cs$$
$$=\frac{(R_1+R_2)Cs+1}{Cs}$$
$$V_i(s)=V/s$$
$$I(s)=\frac{V_i(s)}{Z(s)}=\frac{VCs}{s[(R_1+R_2)Cs+1]}$$
$$=\frac{VC}{(R_1+R_2)Cs+1}$$

$$V_O(s)=I(s)R_2=\frac{VCR_2}{(R_1+R_2)Cs+1}=\frac{VR_2}{R_1+R_2}\left[\frac{1}{s+\frac{1}{(R_1+R_2)C}}\right]$$

Laplace dönüşüm tablosundan;

$$V_O(t)=\frac{VR_2\exp\left[\frac{-t}{(R_1+R_2)C}\right]}{R_1+R_2}$$

başlangıçta birim basamak girişi için kapasitenin kısa devre olduğunu biliyoruz. Bu yüzden:

$$\frac{V_O}{V_i}=\frac{R_2}{R_1+R_2}=\frac{20V}{100V}=0{,}2 \qquad R_2=25\Omega$$

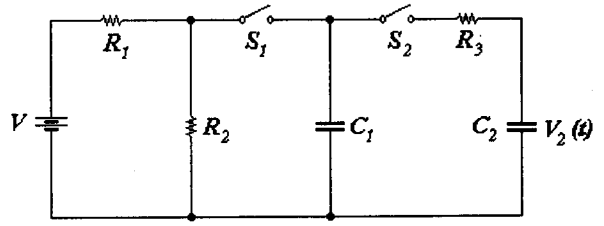
t=10µs, R_1=100Ω, R_2=25Ω, V=100V ve V_O(t)=4V

$$4 = \frac{100 \cdot 25}{125} \exp\left(\frac{-10^{-5}}{125C}\right)$$

$$0{,}2 = \exp\frac{-10^{-5}}{125C} \quad \text{ise} \quad \ln(0{,}2) = \frac{-10^{-5}}{125C} \quad \text{ve} \quad \ln(5) = \frac{10^{-5}}{125C}$$

$$C = 4{,}97 \cdot 10^{-8} = 49{,}7 \ \text{nF}$$

Örnek 3.26: Şekildeki devrede başlangıçta S_1 anahtarı kapalı, S_2 anahtarı açıktır. Kararlı hale gelene kadar anahtar bu durumda kalıyor. t=0 anında S_1 anahtarı açılıyor ve S_2 anahtarı kapatılıyor. Kararlı halde C_2 uçlarındaki gerilimi hesaplayınız.



$R_1 = 10k$ $\quad V = 30V_{dc}$

$R_2 = 20k$ $\quad C_1 = 10\mu F$

$R_3 = 10k$ $\quad C_2 = 20\mu F$

Çözüm: Önce S_1 açık olacağından C_1 kapasitesi şarj olur. Uçlarındaki gerilim:

$$V_{C1} = \frac{R_2(V)}{R_1 + R_2} = \frac{20 \cdot 10^3 (30)}{10 \cdot 10^3 + 20 \cdot 10^3} = 20 \ \text{V}_{dc}$$

S_1 anahtarı açık, S_2 anahtarı kapalı iken toplam kapasite:

$$C_T = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 6{,}67\mu F \quad \text{olarak bulunur.}$$

S_2 anahtarı kapatılmadan önce C_1 şarj olur. Uçlarındaki yük:

$$q_1(0^+) = C_1 V = (10^{-5})(20) = 20 \cdot 10^{-5} \ \text{coulombs}$$

S_1 anahtarının açılması, S_2 anahtarının kapatılmasından sonra devre eşitliği şu şekilde olur:

$$\frac{1}{(C_1 s)[I(s) + q_1(0^+)]} + \frac{1}{(C_2 s)[I(s) + q_2(0^+)]} + R_3 I(s) = 0$$

$$I(s)\left(\frac{1}{C_1 s} + \frac{1}{C_2 s} + R_3\right) + \frac{1}{(C_1 s)(-20 \cdot 10^{-5})} = 0$$

$$\frac{20}{s} = I(s)\left[\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)\frac{1}{s} + R_3\right]$$

$$I(s) = \frac{20}{R_3}\left[\frac{1}{s + 1/R_3 C_T}\right]$$

$V_2(s) = I(s)(1/C_2 s)$ ve Laplace dönüşüm tablosundan:

$$V_2(t)=(20/R_3C_2)\left\{R_3C_T\left[1-\exp\left(\frac{-t}{R_3C_T}\right)\right]\right\}$$

$$=[(20C_T)/C_2]\left[1-\exp\left(\frac{-t}{R_3C_T}\right)\right]$$

$t=\infty \quad V_F=V_2(\infty)=\dfrac{20(6{,}67\cdot 10^{-6})}{20\cdot 10^{-6}}=6{,}67$ Volt olarak bulunur.

3.10. Bölüm Sonu Alıştırmaları

3.10.1 Aşağıdaki her bir diferansiyel denklemi Laplace dönüşümü kullanarak çözünüz.

1. $y'-3y=0$	$y(0)=1$	$y=e^{3t}$
2. $2y'+y=1$	$y(0)=3$	$y=1+2e^{-\frac{t}{2}}$
3. $4y'-2y=t$	$y(0)=0$	$y=-1-\frac{t}{2}+e^{\frac{t}{2}}$
4. $y'+5y=e^{2t}$	$y(0)=2$	$y=\left(\frac{1}{7}\right)(e^{2t}+13e^{-5})$
5. $3y'-2y=t^2$	$y(0)=3$	$y=\left(\frac{21}{4}\right)e^{\frac{2t}{3}}-\frac{9}{4}-\left(\frac{3}{2}\right)t-\left(\frac{1}{2}\right)t^2$
6. $y'-3y=\sin t$	$y(0)=0$	
7. $y'+2y=\cos 2t$	$y(0)=0$	$y=\left(\frac{3}{2}\right)e^{-2t}-\frac{1}{2}\sin 2t$
8. $4y'-y=3t^3$	$y(0)=0$	$y=1152e^{\frac{t}{4}}-1152-288t-36t^2-3t^3$
9. $y''+2y'-3y=0$	$y(0)=0$, $y'(0)=2$	$y=\left(\frac{1}{2}\right)e^{t}-\left(\frac{1}{2}\right)e^{-3t}$
10. $y''+y'+y=1$	$y(0)=0$, $y'(0)=0$	
11. $y''+3y'=3$	$y(0)=1$, $y'(0)=2$	$y=\frac{4}{3}+t-\left(\frac{1}{3}\right)e^{-3t}$
12. $y''+2y=2$	$y(0)=0$, $y'(0)=3$	
13. $2y''+y=4t$	$y(0)=3$, $y'(0)=0$	
14. $y''+y'+5y=t$	$y(0)=1$, $y'(0)=2$	
15. $y''+4y'+3y=t$	$y(0)=2$, $y'(0)=2$	
16. $y''+4y'=2t^3$	$y(0)=0$, $y'(0)=0$	$y=2t^3-3t+\left(\frac{3}{2}\right)\sin 2t$
17. $3y''+y'=\sin t$	$y(0)=2$, $y'(0)=3$	
18. $2y''+y'+2y=3$	$y(0)=2$, $y'(0)=1$	$y=4e^{-\frac{t}{2}}-3t+4$

19. $y'' - 2y' + y = e^t$ $\quad y(0) = 0\ ,\ y'(0) = 0 \quad y = \left(\frac{1}{2}\right)t^2 e^{2t}$

20. $2y'' + 32y = \cos 2t$ $\quad y(0) = 0\ ,\ y'(0) = 1$

21. $y'' + 2y' + 3y = te^t$ $\quad y(0) = 0\ ,\ y'(0) = 0$

22. $3y'' + 2y' - y = \sin 3t$ $\quad y(0) = 0\ ,\ y'(0) = 0$

3.10.2 Aşağıdaki fonksiyonların Laplace dönüşümünü bulunuz.

1. $f(t) = 6$ .... $\frac{6}{s}$
2. $f(t) = t^2$ .... $\frac{2}{s^3}$
3. $f(t) = t$ .... $\frac{1}{s^2}$
4. $f(t) = 2t^2$ .... $\frac{4}{s^3}$
5. $f(t) = \cos 5t$ .... $\frac{s}{s^2 + 25}$
6. $f(t) = e^t.\sin t$ .... $\frac{1}{s^2 - 2s + 2}$

3.9.3 Verilen başlangıç koşullarına göre aşağıdaki türevleri içeren her bir terimin Laplace dönüşümünü yapınız.

7. $y' + 2y$ .... $y(0) = 1$ .... $s\ell(y) - 1 + \ell(y)$
8. $3y' + 2y$ .... $y(0) = 3$ .... $3sL(y) - 9 + 2L(y)$
9. $y' - 4y$ .... $y(0) = 0$ .... $sL(y) - 4L(y)$
10. $5y' - 3y$ .... $y(0) = 2$ .... $5sL(y) - 1 - 3L(y)$
11. $y'' - 3y' - y$ .... $y(0) = 1\ ,\ y'(0) = 3$ .... $s^2L(y) + 3sL(y) - L(y) - s - 6$
12. $y'' - y' + 2y$ .... $y(0) = 1\ ,\ y'(0) = 0$ .... $s^2L(y) - sL(y) + 2L(y) - s + 1$
13. $2y'' + 3y' + y$ .... $y(0) = 2\ ,\ y'(0) = 3$ .... $2s^2L(y) + sL(y) + L(y) - 4s - 12$
14. $3y'' - y' + 2y$ .... $y(0) = 2\ ,\ y'(0) = 1$ .... $3s^2L(y) - sL(y) + 2L(y) - 6s - 1$

BÖLÜM 4

FOURİER SERİLERİ

4.1 Giriş: Kuvvet serisi yaklaşımı sürekli fonksiyonlarda kullanılırken elektrik devre uygulamalarındaki kare dalga biçimindeki süreksiz fonksiyonlarda bu yaklaşım kullanılamaz. İşte bu ve benzeri süreksiz fonksiyonlarda kuvvet serisi yerine FOURİER serisi yaklaşımı kullanılır. Genellikle elektrik ve elektronik devrelerde karşımıza çıkan FOURİER serileri ile ilgili tanımlamalar ve uygulamalı örnekler bu bölümde incelenecektir.

Tanım 4.1: $A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cdot \cos(nx) + B_n \cdot \sin(nx))$ **(4.1)**

serisine **FOURİER Serisi** denir. Bu serinin toplamı sonlu ise seriye yakınsak, aksi halde ıraksaktır, denir.

Tanım 4.2:

$$F_n(x) = a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \ldots\ldots + (a_n \cos nx + b_n \sin x) \quad \textbf{(4.2)}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona **FOURİER Polinomu** denir ve

$$F_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \quad \textbf{(4.3)}$$

şeklinde gösterilir. Burada; a_0, a_i, b_i (i=1,2, ... , n) sabitlerine de **FOURİER Katsayıları** denir.

Tanım 4.3: $f : A \subset R \rightarrow R$ fonksiyonu verildiğinde $\forall x \in A$ için;

$$f(x+T) = f(x) \quad \textbf{(4.4)}$$

eşitliğini sağlayan en az bir tane T reel sayısı varsa f fonksiyonuna **Periyodik Fonksiyon**, T değerine fonksiyonun periyodu, T'nin en küçük değerine de esas periyod denir.**(4.3)** veya **(4.4)** ile verilen FOURİER polinomları 2π periyotlu fonksiyonlardır. Ayrıca, $f(x) = \sin x$ fonksiyonu tek fonksiyon olup, grafiği orijine simetrik iken, $f(x) = \cos x$ fonksiyonu çift fonksiyon olup grafiği oy-eksenine göre simetriktir.

FOURİER katsayılarının hesabında karşımıza çıkacak bazı trigonometrik integralleri çözmek için;

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha x) \cdot \cos(\beta x) &= \frac{1}{2} \cdot [\sin(a+b)x + \sin(a-b)x] \\
\cos(\alpha x) \cdot \cos(\beta x) &= \frac{1}{2} \cdot [\cos(a+b)x + \cos(a-b)x] \\
\sin(\alpha x) \cdot \sin(\beta x) &= \frac{1}{2} \cdot [\cos(a-b)x - \cos(a+b)x]
\end{aligned} \quad \textbf{(4.5)}$$

trigonometrik özdeşliklerinden yararlanılarak;

i) $\beta > 0$ için;

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\beta x)dx = 0 \ , \ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\beta x)dx = 0 \qquad (4.6)$$

ii) $\alpha = \beta$ için;

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(\alpha x)\cdot\cos(\beta x)dx = 0 \qquad (4.7)$$

iii) $\alpha \neq \beta$ için;

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\alpha x)\cos(\beta x)dx = 0 \text{ ve } \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\alpha x)\sin(\beta x)dx = 0 \qquad (4.8)$$

iv) $\beta \geq 1$ için;

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(\beta x)dx = \pi \text{ ve } \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(\beta x)dx = \pi \qquad (4.9)$$

Bu formüller kullanılarak aşağıdaki teorem ile verilen sonuçlar anlaşılabilir.

Teorem 4.1:

$$F_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

FOURİER serisindeki a_0, a_k, b_k, FOURİER katsayıları;

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(x)dx \qquad (4.10)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(x)\cos(kx)dx \ , \quad 1 \leq k \leq n \qquad (4.11)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(x)\sin(kx)dx \ , \quad 1 \leq k \leq n \qquad (4.12)$$

olarak bulunur.Teorem 4.1'in yardımıyla şimdi FOURİER serisini 2π periyotlu fonksiyonlar ile birleştirerek yeniden tanımlayalım.

Tanım 4.4: f(x) fonksiyonu $[-\pi,\pi]$ aralığında integrallenebilir 2π periyodlu bir fonksiyon olsun. Buna göre,

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \ , \quad n \geq 1 \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \ , \quad n \geq 1 \end{aligned}\right\} \qquad (4.13)$$

olmak üzere,

$$a_0+\sum\left(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right)$$

trigonometrik serisine f(x) fonksiyonunun **FOURİER Serisi** denir ve

$$f(x)\sim a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right) \qquad \textbf{(4.14)}$$

şeklinde gösterilir. "~" işareti f(x) fonksiyonunun trigonometrik fonksiyonlardan oluşan bir sonsuz seri cinsinden ifade edilmesi anlamında olup, yaklaşık olarak eşittir denir.

FOURİER serisi ile ilgili örneklere geçmeden önce 2π periyotlu fonksiyonlar için tanımladığımız FOURİER serisi tanımını son olarak 2L periyotlu bütün fonksiyonlara genişleteceğiz. Ayrıca, fonksiyonların durumu ele alınacaktır. Bunun için, f(x) fonksiyonunun [-L,L] aralığında tanımlı ve integrallenebilir olduğunu varsayalım.

$$F(x)=f\left(\frac{Lx}{\pi}\right) \text{ alalım.}$$

F(x) fonksiyonu [-π,π]'de tanımlı ve integrallenebilir olsun. Buna göre, F(x)'in FOURİER serisi;

$$F(x)=f\left(\frac{Lx}{\pi}\right)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right)$$

olur. Burada, $t=\dfrac{Lx}{\pi}$ dönüşümü yapalım. Bu varsayımlara bağlı olarak aşağıdaki tanımı verebiliriz.

Tanım 4.5: f(x) fonksiyonu [-L,L] aralığında tanımlı ve integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Buna göre f(x)'in FOURİER serisi;

$$f(t)\sim a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\right) \qquad \textbf{(4.15)}$$

olur. Burada, $n\geq 1$ için;

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{Lx}{\pi}\right)\cdot\cos nx\,dx=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \qquad \textbf{(4.16)}$$

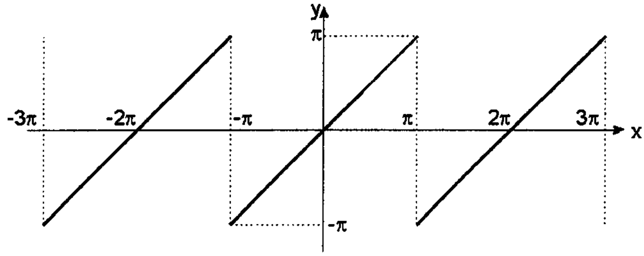
$$a_n=\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{Lx}{\pi}\right)\cdot\cos nx\,dx=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \qquad \textbf{(4.17)}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{Lx}{\pi}\right)\cdot\sin nx\,dx=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cdot\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \qquad \textbf{(4.18)}$$

olarak verilir.

Örnek 4.1: $f(x)=x$ fonksiyonunu $-n\leq x\leq n$ aralığında FOURİER serisine açınız.

Çözüm: $f(x)=x$ tek fonksiyon olduğu için $a_0=0=a_n$ olacaktır. Bu nedenle sadece b_n katsayılarını hesaplayacağız. Bu fonksiyonun 2π periyodlu grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 4.1: f(x)=x fonksiyonunun 2π periyodlu grafiği.

$n \geq 1$ için;

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left[-x \cdot \frac{\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$b_n = -\frac{2}{n} \cdot \cos(n\pi) = \frac{2}{n} \cdot (-1)^{n+1}$$

ve böylece;

$$f(x) \sim 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots\dots\right) \quad \text{olur.}$$

Örnek 4.2: $f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \leq x \leq 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$ fonksiyonunu FOURİER serisine açınız.

Çözüm: L=2 olduğuna göre, **(4.16)**, **(4.17)** ve **(4.18)** nolu formüller kullanılarak a_0, a_n, b_n katsayılarını bulalım. Buna göre;

$$a_0 = \frac{1}{4}\int_0^2 x \cdot dx = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_0^2 x \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \cdot \left((-1)^n - 1\right)$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_0^2 x \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = -\frac{2\cos(n\pi)}{n\pi} = \frac{2}{n\pi} \cdot (-1)^{n+1}$$

olarak bulunur. Bu katsayılar seride yerine yazılırsa;

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) + \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]$$

4.2 FOURİER Sinüs ve FOURİER Kosinüs Serileri

y=f(x) fonksiyonunun tek veya çift olmasına göre a_0, a_n, b_n katsayılarının bazıları hesaplanmaz. Bununla ilgili teorem aşağıda verilmiştir.

Teorem 4.2: f(x) fonksiyonu [-π,π] aralığında tanımlı ve integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda;

i) Eğer f(x) çift fonksiyonsa; (∀x için f(x)=f(-x))

$$b_n = 0 \ , \quad (n \geq 1)$$

ve **(4.19)**

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \ , \quad (n \geq 0)$$

ii) Eğer f(x) tek fonksiyonsa; (∀x için -f(-x)=f(x))

$$a_n = 0 \ , \quad (n \geq 1)$$

ve **(4.20)**

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cdot\sin(nx)dx \ , \quad (n \geq 0)$$

olur.

Bu teorem bize sadece [0,π] aralığında tanımlı fonksiyonların FOURİER serisini bulmamıza yardımcı olur. Ayrıca, [-π,π] aralığında tanımlı olan fonksiyonların [0,π] aralığındaki FOURİER serisini bulmamızı sağlar.

Bu nedenle, f(x) fonksiyonu [0,π] aralığında tanımlı ve integrallenebilir bir fonksiyon iken;

$$f_1(x) = \begin{cases} -f(-x), & -\pi \leq x \leq 0 \\ f(x), & 0 \leq x \leq \pi \end{cases} \qquad \textbf{(4.21)}$$

ve

$$f_1(x) = \begin{cases} f(-x), & -\pi \leq x \leq 0 \\ f(x), & 0 \leq x \leq \pi \end{cases} \qquad \textbf{(4.22)}$$

tanımlayalım. Burada, $f_1(x)$ tek, $f_2(x)$ çift fonksiyon olup $f_1(x)$'e f(x)'in tek genişlemesi; $f_2(x)$'e f(x)'in çift genişlemesi denir.

Tanım 4.6: $f_1(x)$ ve $f_2(x)$ fonksiyonları f(x)'in; yukarıda tanımlandığı gibi sırasıyla tek ve çift genişlemesi olsun.Bu durumda;

i) **$f_1(x)$ fonksiyonunun FOURİER serisine <u>FOURİER Sinüs</u> serisi** denir ve;

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(nx) \qquad \textbf{(4.23)}$$

şeklinde gösterilir. Burada,

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cdot\sin(nx)dx \qquad \textbf{(4.24)}$$

ii) $f_2(x)$ fonksiyonunun FOURİER serisi, **FOURİER Kosinüs** serisi olarak adlandırılır ve;

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(nx) \qquad \textbf{(4.25)}$$

şeklinde gösterilir. Burada,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cdot\cos(nx)dx \qquad \textbf{(4.26)}$$

ve

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cdot\cos(nx)dx \quad , \quad (n \geq 1) \qquad \textbf{(4.27)}$$

4.2.1 2L- Periyodlu Fonksiyonların FOURİER Sinüs ve FOURİER Kosinüs Serileri

$f(x)$ fonksiyonu [-L,L] aralığında tanımlı ve integrallenebilen bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

i) Eğer f(x) çift fonksiyon ise;

$$b_n = 0 \quad , \quad (n \geq 1)$$

ve

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^{L} f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \qquad \textbf{(4.28)}$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^{L} f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \qquad \textbf{(4.29)}$$

ve

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad \textbf{(4.30)}$$

olur.

ii) Eğer f(x) tek fonksiyon ise;

$$a_n = 0 \quad , \quad (n \geq 0)$$

ve

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^{L} f(x)\cdot\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \qquad \textbf{(4.31)}$$

iken;

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{olur.}$$

4.3 FOURİER Serisinde İşlemler

Burada ele alacağımız bütün fonksiyonların [-π,π] aralığında tanımlı 2π periyodlu fonksiyonlar olduğunu varsayalım. Daha sonra, herhangi bir [a,b] aralığına bu varsayımları genişletebiliriz.

f(x), 2π periyodlu parçalı sürekli bir fonksiyon olsun. Buna göre;

$$F(x)=\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt \tag{4.32}$$

fonksiyonu süreklidir ve sadece $F(\pi)=F(-\pi)=0$ iken 2π periyodludur. Kolayca görülebilir ki f(x) parçalı düzgün (pürüzsüz) ise F(x)'de parçalı düzgün (pürüzsüz) olur. Şimdi, f(x) ile F(x)'in FOURİER katsayıları arasında bir bağıntı olup olmadığını inceleyelim. Bunun için, A_n ve B_n , F(x) 'in FOURİER katsayıları olsun.

Böylece,

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cdot\cos(nx)dx \tag{4.33}$$

alınır ve kısmi integrasyon uygulanırsa;

$$A_n=\underbrace{\frac{1}{n\pi}\cdot\left[F(x)\cdot\sin(nx)\right]\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{0}-\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F'(x)\cdot\sin(nx)dx \tag{4.34}$$

bulunur. A_n'in ilk terimi 0 ve $F'(x)=f(x)$ ise;

$$A_n=-\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F'(x)\cdot\sin(nx)dx=-\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin(nx)dx \tag{4.35}$$

elde edilir. Benzer şekilde;

$$B_n=\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos(nx)dx \tag{4.36}$$

ve;

$$A_0=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cdot f(x)dx \tag{4.37}$$

bulunur.

Teorem 4.3 FOURİER Serisinin İntegrasyonu

$f(x)$ parçalı sürekli ve 2π periyodlu bir fonksiyon ve a_0=0 olsun. Eğer;

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cdot\cos(nx)+b_n\cdot\sin(nx)) \tag{4.38}$$

ise

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot dt \sim A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\cdot (a_n \cdot \sin(nx) - b_n \cos(nx)) \quad \textbf{(4.39)}$$

olur. F(x) sürekli olduğundan, $x \in [-\pi, \pi]$ için; FOURİER serisinin yakınsaklığı teoreminden;

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\cdot (a_n \cdot \sin(nx) - b_n \cdot \cos(nx)) \quad \textbf{(4.40)}$$

olur. Bu teoremin anlaşılması için aşağıdaki örneği inceleyelim.

Örnek 4.3:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le \pi \\ -1, & -\pi \le x < 0 \end{cases}$$ fonksiyonunu ele alalım.

Bu fonksiyonun FOURİER serisi,

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots\dots\right)$$ olur. $x \in [-\pi, \pi]$ için;

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = |x| - \pi$$ ve buradan;

$$|x| - \pi \sim A_0 + \frac{4}{\pi}\left(-\cos x - \frac{\cos 3x}{9} - \frac{\cos 5x}{25}\right)$$ bulunur. Böylece;

$$A_0 = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \cdot f(x)dx = -\frac{\pi}{2}$$ olduğuna göre;

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \dots\dots\right)$$ olarak bulunur.

Şimdi de f(x) fonksiyonu $a_0 \neq 0$ olacak şekilde parçalı sürekli ve 2π-periyodlu bir fonksiyon olsun. Buna göre,

$$h(x) = f(x) - a_0 \quad \textbf{(4.41)}$$

alalım. Açıktır ki, $h(x)$ parçalı sürekli periyodik bir fonksiyondur ve;

$$\int_{-\pi}^{\pi} h(x)dx = 0 \quad \textbf{(4.42)}$$

koşulunu sağlar. Bununla birlikte;

$$\int_{x}^{y} f(t)dt = \int_{-\pi}^{y} f(t)dt - \int_{-\pi}^{x} f(t)dt = \int_{-\pi}^{y} f(t)dt - \int_{-\pi}^{x} f(t)dt + \int_{x}^{y} a_0\, dt \quad \textbf{(4.43)}$$

elde edilir. Burada, 2π-periyodlu parçalı sürekli bir fonksiyonun terim terim integrali söz konusudur. Bununla ilgili teorem şudur:

Teorem 4.4: $f(x)$, 2π periyodlu parçalı sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda, herhangi x,y için;

$$\int_x^y f(t)dt \tag{4.44}$$

integrali f(x) 'in FOURİER serisinin terim terim integrali alınarak belirlenebilir.

Örnek 4.4: Örnek 4.1'i ele alalım.

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \ldots\ldots\right)$$

bulunmuştur. Buna göre;

$$\int_0^{\pi/2} |x|\, dx = \frac{\pi^2}{4} - \frac{4}{\pi}\left(1 - \frac{1}{27} + \frac{1}{5^3} - \ldots\ldots\right) \text{ olur.}$$

Buraya kadar bir fonksiyonun FOURİER serisi ve o fonksiyonun integrali arasındaki ilişkiyi inceledik. Benzer bir ilişki türev için de geçerlidir. Aşağıdaki teorem buna aittir.

Teorem 4.5: $f(x)$, 2π periyodlu sürekli ve parçalı düzgün (pürüzsüz) olsun. Herhangi bir $x \in [-\pi, \pi]$ için;

$$\frac{f'(x^+) + f'(x^-)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(-a_n \cdot \sin(nx) + b_n \cdot \cos(nx)\right) \tag{4.45}$$

bulunur. Bir başka deyişle, $f(x)$ fonksiyonunun FOURİER serisinin terim terim diferansiyeli alınarak elde edilir.

4.4 FOURİER Dönüşümünün Elektrik-Elektronik Devrelerde Uygulanması

Sinüzoidal olmayan akım yada gerilim periyodik ise sonsuz sayıda sinüzoidal bileşenden oluşur.

$$i(t) = i(t+T) \Rightarrow \text{periyodik} \tag{4.46}$$

$$i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} I_{nm} \sin(n\omega t + \varphi_n) \tag{4.47}$$

$$i(t) = I_{0m} \sin\varphi_0 + I_{1m}\sin(\omega t + \varphi_1) + I_{2m}\sin(2\omega t + \varphi_2) + \ldots\ldots + I_{nm}\sin(n\omega t + \varphi_n) + \ldots..$$

$$W = 2\pi f = 2\pi / T$$

n. harmonik: $i_n = I_{nm}\sin(n\omega t + \varphi_n) = I_{nm}\sin\varphi_n \cos n\omega t + I_{nm}\cos\varphi_n \sin n\omega t$ **(4.48)**

$$i_n = A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t \tag{4.49}$$

$$A_n = I_{nm}\sin\varphi_n,\ B_n = I_{nm}\cos\varphi_n \tag{4.50}$$

$$I_{nm} = \sqrt{A_n^2 + B_n^2},\ \varphi_n = A_n / B_n \tag{4.51}$$

n=0 için: $i_0 = A_0$ (sabit terim – doğru bileşen)

$$i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} I_{nm} \sin(n\omega t + \varphi_n) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t) \qquad \textbf{(4.52)}$$

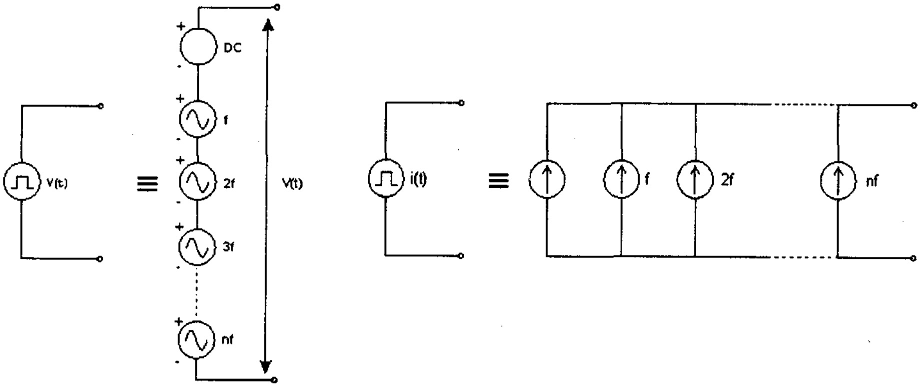
$$= A_0 + (A_1 \cos\omega t + B_1 \sin\omega t) + (A_2 \cos\omega t + B_2 \sin\omega t) + \ldots + (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t)$$

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)dt \Rightarrow \qquad \textbf{(4.53)}$$

işaretin ortalama değeri
(=DC bileşen)
(DC ampermetreyle ölçülen değer)

$$A_n = \frac{2}{T}\int_0^T i(t)\cos n\omega t dt$$

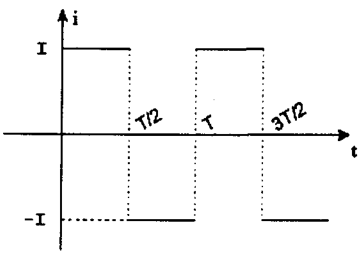
$$B_n = \frac{2}{T}\int_0^T i(t)\sin n\omega t dt \qquad \textbf{(4.54)}$$



Şekil 4.2: Periyodik gerilim ve akım kaynağının FOURİER dönüşümü

4.5 FOURİER Dönüşümleriyle Elektrik-Elektronik Devre Çözümleri İle İlgili Uygulamalar

1)



Şekildeki akımın harmoniklerini bulunuz.

Çözüm:

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)dt = 0$$

$$A_n = \frac{2}{T}\int_0^T i(t)\cos n\omega t dt = 0$$

$$B_n = \frac{2}{T}\int_0^T i(t)\sin n\omega t dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} I \sin n\omega t + \frac{2}{T}\int_{T/2}^{T} -(I)\sin n\omega t dt$$

$$= \frac{4I}{T}\int_0^{T/2} \sin n\omega t dt = -\frac{2T}{T}\frac{1}{n\frac{2\pi}{T}}\left|\cos n\omega t\right|_0^{T/2} + \frac{2I}{T}\cdot\frac{1}{n\frac{2\pi}{T}}\left|\cos n\omega t\right|_T^{T/2}$$

$$= -\frac{T}{2n\pi}\cdot\left(\cos n\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2} - \cos 0\right) + \frac{T}{n\pi}(\cos n2\pi - \cos n\pi)$$

$$= \frac{I}{n\pi}(1 - \cos n\pi - \cos n\pi + 1) = \frac{2I}{n\pi}(1 - \cos n\pi)$$

$n = 2,4,6,....$ (çift) $\rightarrow B_n = 0$

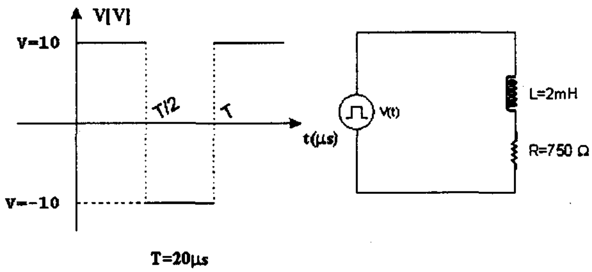
$n = 1,3,5,....$ (tek)

$$\rightarrow B_n = \frac{4I}{n\pi} \quad i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \omega t = \frac{4I}{\pi}\left(\sin \omega t - \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + ...\right)$$

- Bu işaret tek harmonikleri içermektedir.
- Harmonik sayısı artarken genlik küçülmektedir.

2) Şekildeki devrede direncin üzerindeki gerilimi hesaplayınız. Frekansa göre değişimini yaklaşık olarak çiziniz. (6. harmonikten sonrası gözönüne alınmayacaktır)

Çözüm:

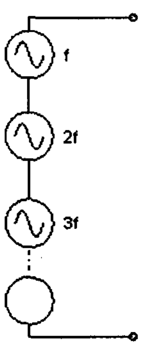


$$A_0 = 0 \text{ ve } A_n = 0 \text{ iken } B_n = \frac{2}{T}\int_0^T V \sin n\omega t dt = \frac{2V}{n\pi}(1 - \cos n\pi)$$

$$V(t) = \frac{4V}{\pi}\left(\sin \omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + ...\right)$$

$$= \frac{40}{\pi}\left(\sin \omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + ...\right)$$

n=çift ise $B_n = 0$ n=tek ise $B_n = \frac{4V}{n\pi}$



$Z_1 = R + j\omega L$ $\quad |Z_1| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \cong 978{,}4\Omega$

$\varphi_1 = \arctan \frac{\omega L}{R} \Rightarrow \varphi = 39.95°$

$Z_3 = R + j3\omega L$ $\quad |Z_3| = \sqrt{R^2 + (3\omega L)^2} \cong 2028{,}6\Omega$ $\quad \varphi_3 = 65.3°$

$Z_5 = R + j5\omega L$ $\quad |Z_3| = \sqrt{R^2 + (5\omega L)^2} \cong 3229{,}8\Omega$ $\quad \varphi_5 = 76.5°$

$$I_{1m} = \frac{V_{1m}}{|Z_1|} = \frac{401\pi}{978{,}4} = 13mA \qquad I_{3m} = \frac{V_{3m}}{|Z_3|} = \frac{4013\pi}{2028{,}6} \cong 2mA \qquad I_{5m} = \frac{V_{5m}}{|Z_5|} = \frac{4015\pi}{3229{,}8} \cong 0{,}78mA$$

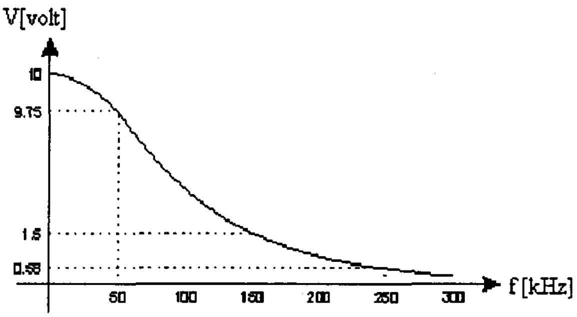
$$i(t) = i_1(t) + i_3(t) + i_5(t) + ...$$

$$i(t) = I_1 m \sin(\omega t - \varphi_1) + I_{3m} \sin(3\omega t - \varphi_3) + I_{5m} \sin(5\omega t - \varphi_5)$$

$$V_R(t) = R \cdot i(t) = 750\{13\sin(\omega t - 40°) + 2\sin(3\omega t - 68°) + 0{,}78\sin(5\omega t - 76°) + ...\} \; [mV]$$

$$V_R(t) = 9{,}75\sin(\omega t - 40°) + 1{,}5\sin(3\omega t - 68°) + 0{,}58\sin(5\omega t - 76°) + 10V$$

$$t = \frac{1}{20 \cdot 10^{-6}} = 5 \cdot 10^4 \text{ Hz} = 50 \text{ kHz}$$



4.6.Bölüm Sonu Alıştırmaları

A) Aşağıdaki periyodik fonksiyonların tanımlandıkları aralıklarda FOURİER serilerini bulunuz.

1 $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ 0 & 1 < t < 2p \end{cases}$

2 $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ 0 & 1 < t < 2 \\ -1 & 2 < t < 3 \\ 0 & 3 < t < 4 \end{cases}$

3 $f(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t \leq 1 \\ t - 1 & 1 \leq t < 2 \end{cases}$

4 $f(t) = 2 - t \qquad 0 < t < 2$

5 $\underline{f(t) = t - t^2} \qquad -1 < t < 1$

6 $f(t) = 1 + |t| \qquad -p \leq t \leq p$

7 $f(t)=\begin{cases}0 & -1 < t<0 \\ 1+ t^2 & 0 < t<1\end{cases}$

8 $f(t)=\begin{cases}1 & 0 <t <1 \\ 2 & 1 <t <3\end{cases}$

9 $f(t)=\begin{cases}0 & -1 <t <2p \\ 1+ t^2 & 0 <t < 1\end{cases}$

10 $f(t)=t^4 \quad -\Pi \leq t\leq \Pi$

11 $f(t)=e^{kt} \quad 0 < t< 2p$

12 $f(t)=\cosh t \quad -1 \leq t\leq 1$

13 $f(t)=\sinh t \quad -1 < t< 1$

14 $f(t)=\cosh t \quad 0 < 1< \Pi$

15 $f(t)\sin t \quad 0 \leq t\leq 1$

16 $f(t)=(1-t^2) \quad -1\leq t \leq 1$

17 $f(t)=\begin{cases}\cos t & -\Pi \leq t \leq 0 \\ \cos 2t & 0 \leq t \leq \frac{\Pi}{2}\end{cases}$

18 $f(t)=\begin{cases}\sin t & -\Pi \leq t \leq 0 \\ t- 2t^3 +t^4 & 0 \leq t \leq 1\end{cases}$

19 $f(t)=\begin{cases}0 & -\Pi \leq t \leq 0 \\ t^3(2-t)^2 & 0 \leq t \leq 2\end{cases}$

B) Aşağıdaki periyodları verilen ve gösterilen aralıkta tanımlanmış olan fonksiyonların FOURİER serisi açılımlarını bulunuz. Her birinde fonksiyonun eğrisini çizerek tek veya çift olduğunu belirtiniz.

a) $f(x)=\begin{cases}2, & -\pi < x < 2 \\ -2, & 0 < x < \pi\end{cases}$ Periyod 2π

b) $f(x)=1 \quad , -2<x<2$ Periyod 4

c) $f(x)=\begin{cases}0, & -2<x<0 \\ 2, & 0<x<4\end{cases}$ Periyod 6

d) $f(x)=\begin{cases}0, & -1<x<0 \\ x, & 0<x<1\end{cases}$ Periyod 2

e) $f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi < x < 0 \\ x, & 0 < x < \pi \end{cases}$ Periyod 2π

f) $f(x) = \begin{cases} 3, & 0 < x < 4 \\ -3, & 4 < x < 8 \end{cases}$ Periyod 8

g) $f(x) = 4x - x^2, 0 < x < 4$ Periyod 4

h) $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 2\pi/3 \\ 0, & 2\pi/3 < x < 4\pi/3 \\ -1, & 4\pi/3 < x < 2\pi \end{cases}$ Periyod 2π

C) Belirtilen aralıklarda tanımlanmış fonksiyonları istediği şekilde FOURİER sinus veya FOURİER kosinüs serisine açınız.

a) $f(x) = 5 \quad , \ 0 < x < 3$ sinüs serisi

b) $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < x < \pi \end{cases}$ kosinüs serisi

c) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 5 \\ 0, & 5 < x < 10 \end{cases}$ sinüs serisi

d) $f(x) = 2 \quad , \ 0 < x < 1$ kosinüs serisi

e) $f(x) = 4x - x^2, \ 0 < x < 4$ sinüs serisi

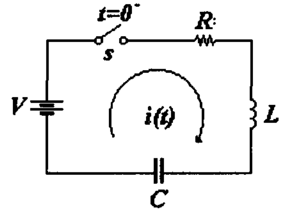
f) $f(x) = \begin{cases} -1, & 0 < x < 2 \\ 1, & 2 < x < 4 \end{cases}$ kosinüs serisi

BÖLÜM 5

RLC DEVRELERDE GEÇİCİ HAL ÇÖZÜMLERİ

5.1. Seri RLC Devreleri

RLC devreleri ikinci dereceden diferansiyel eşitliğe sahip devrelerdir. Şekil 5.1' deki devrede t=0 anında anahtar kapatılıyor. Bu devrede R, L ve C elemanları üzerinde düşen toplam gerilim devreye uygulanan gerilime eşittir.



Şekil 5.1: Seri RLC

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = V \qquad \textbf{(5.1)}$$

$$q = \int i dt$$

$$R\frac{di}{dt} + L\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{i}{C} = 0 \quad \text{yada;}$$

$$Li'' + Ri' + \left(\frac{1}{C}\right)i = 0 \qquad \textbf{(5.2)}$$

Diferansiyel denklemin çözümü için karakteristik denklem $Lr^2 + Rr + C = 0$
Denklemin kökleri:

$$r = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4LC}}{2L}$$

$$= -\frac{R}{2L} \mp \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

$$a^2 = \frac{R^2}{4L^2} \qquad \text{ve} \qquad \omega_n^{\ 2} = \frac{1}{LC}$$

DC kaynakla Sürülen RLC Devrenin rezonans frekansı	$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{LC}}$	A89

Bizim köklerimiz şu hale gelmiş olur.

$$m = -a \pm \sqrt{a^2 - \omega_n^{\ 2}} \quad \text{yada} \quad m = -a \pm j\omega_d$$

Burada , $\omega_d^{\,2} = \omega_n^{\,2} - a^2$ ' dir. Burada 3 çeşit durum karşımıza çıkar.
DC kaynakla sürülen RLC devre: 2.derece diferansiyel eşitlik

Tablo 5.1

Yardımcı Eşitliğin Kökleri	**Çözüm Çeşidi**	
Gerçek kök yok	Eksik sönümlü (=underdamped)	$a < \omega_n$
	Sönümlü değil (Seri LC devresi)	$a=0$
Reel, eşit	Kritik Sönümlü	$a = \omega_n$
Reel, eşit değil	Aşırı sönümlü (=Over damped)	$a > \omega_n$

5.1.1 DC kaynakla sürülen seri RLC devresi, $a < \omega_n$:

R yeterince küçük $a < \omega_n$ karakteristik denklemin kökleri gerçel değildir. Devreden akan akım;

$$i = e^{-at} \quad (\omega_d t + k_2 \cos\omega_d t \quad)$$

$t = 0$ anında $i = 0$ 'dır. $k_2 = 0$ alırsak;

$$i = k_1 e^{-at} \sin\omega_d t$$

Her iki yanın türevini alarak;

$$\frac{di}{dt} = k_1\omega_d e^{-at}\cos\omega_d t - ak_1 e^{-at}\sin\omega_d t$$

$t = 0$ anında kapasite kısa devre gibi davranır, R' nın uçlarında gerilim düşümü olmaz. Uygulanan V gerilimi L endüktansının uçlarında görülür.

$V = L\dfrac{di}{dt}$ ise buradan $\dfrac{di}{dt} = V\!/\!L$ ve böylece; $k_1 = \dfrac{V}{\omega_d L}$ olur.

Tablo.5.2.

Eksik sönümlü RLC devresinde	$i = \dfrac{E}{\omega_d L} e^{-at} \sin\omega_d t$	A91
Eksik sönümlü RLC devresinde	$\omega_d = \sqrt{\omega_n^{\,2} - a^2} = \sqrt{\omega_n^{\,2} - \dfrac{R^2}{4L^2}}$	A 92

Seri RLC eksik sönümlü (=underdamped) devrede genlik zamanda eksponansiyel olarak azalır.

Örnek 5.1: Seri bir RLC devresinde $t = 0$ anında anahtar kapatılıyor. Akımın (i) ani değerini $R = 225\Omega$, $L = 1.5H$, $C = 4{,}7\mu F$ ve $V = 75{,}4$ volt için bulunuz.

Çözüm:

$$LC = 1{,}5\left(4{,}75\times10^{-6}\right) = 7{,}13\times10^{-6}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{7{,}13.10^{-6}}} = 375 \quad \text{rad/s}$$

$$a = \frac{R}{2L} = \frac{225}{2.(1{,}5)} = 75 \quad \text{rad/s}$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_n^2 - a^2} = \sqrt{(375)^2 - (75)^2} = 367 \quad \text{rad/s}$$

$$i = \frac{\omega}{\omega_d L} e^{-at} \sin \omega_d t = \frac{75.4}{367(2,5)} e^{-75t} \sin 367t \quad [A]$$

$$= 137 e^{-75t} \sin 367t \quad mA$$

5.1.2 Seri LC devresi:

$R = 0$ olduğunda $a = 0$ ve $\omega_d = \omega_n$ ' dir. A91 nolu eşitlik şu hale gelir:

Seri LC devre	$i = \frac{V}{\omega_n L} \sin \omega_n t$	A90

Bu LC devrede akım, genliği $\frac{V}{\omega_n L}$ olan bir sinüsoidal dalgadır.

Örnek 5.2: Örnek 5.1'de R yerine 0 ohm koyarak i akımını hesaplayalım.

Çözüm: $\omega_n = 375 Hz$ olarak hesaplanmıştı.

$$\frac{V}{\omega_n L} = \frac{75.4}{375(1,5)} = 0,134 \quad A$$

$i = 134 \sin 375t \quad [mA]$ bulunur.

5.1.3 Aşırı sönümlü (=overdamped), DC kaynaklı RLC devre: $a > \omega_n$

Eğer R direnç değeri yeterince büyükse $a > \omega_n$'dır. Karakteristik denklem kökleri farklı ve reeldir.

$$r_1 = -a + j\omega_d \quad \text{ve} \quad r_2 = -a - j\omega_d$$

Burada akım;

$$i = k_1 e^{m_1 t} + k_2 e^{m_2 t} \quad \textbf{(5.3)}$$

$i(0) = 0$ ise

$$k_1 + k_2 = 0 \quad \textbf{(5.4)}$$

(5.3) nolu eşitliğin türevi alınırsa,

$$\frac{di}{dt} = m_1 k_1 e^{m_1 t} + m_2 k_2 e^{m_2 t}$$

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{di}{dt} = \frac{V}{L} \text{'dir.}$$

$$\frac{V}{L} = m_1 k_1 + m_2 k_2 \quad \textbf{(5.5)}$$

(5.4) ve (5.5) nolu denklemler kullanılarak

$$k_1 = \frac{V}{(m_1 - m_2)L} \quad \text{ve} \quad k_2 = -\frac{V}{(m_1 - m_2)L}$$

$$m_1 - m_2 = -a + j\omega_d + a + j\omega_d = 2j\omega_d$$

Aşırı sönümlü =overdamped RLC circuit	$i=\frac{V}{2j\omega_d L}\left[e^{(-a+j\omega_d)t}-e^{(-a-j\omega_d)t}\right]$	A93

Örnek 5.3: Örnek 5.1 ve Örnek 5.2 'deki devrede $R=2550$ ohm olarak akımın ani değerini hesaplayınız.

Çözüm:

$$a=\frac{R}{2L}=\frac{2550}{2(1{,}5)}=850 \quad \text{rad/s}$$

$\omega_n=375$ rad/s olarak bulunmuştu.

$$\omega_d=\sqrt{375^2-850^2}=j763 \quad \text{rad/s}$$

$$-a-j\omega_d=-87{,}0$$

$$-a+j\omega_d=-1613$$

A93 nolu eşitlikten;

$$i=\frac{75.4}{2(-763)(1{,}5)}\left(e^{-1613t}-e^{-87t}\right)$$

$$=32{,}9\left(e^{-87{,}0t}-e^{-1613t}\right)$$

5.1.4 Eksik sönümlü (=underdamped), AC kaynaklı RLC devre:

Daha önce DC kaynakla sürülen RLC devreyi incelemiştik. Şimdi $V\sin\omega t$ değerine sahip bir AC gerilim kaynağıyla sürülen seri RLC devreyi inceleyelim.

$t=0$ anında anahtar kapatıldığında devre denklemi şu şekilde yazılabilir;

$$Ri+L\frac{di}{dt}+\frac{q}{C}=V\sin\omega t \qquad \textbf{(5.6)}$$

$$q=\int idt$$

$$R\frac{di}{dt}+L\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{i}{C}=\omega V\cos\omega t$$

yada

$$Li''+Ri'+\left(\frac{1}{C}\right)i=\omega V\cos\omega t \qquad \textbf{(5.7)}$$

Tamamlayıcı fonksiyon DC bölüm için hesaplanmıştı.
Burada da aynı şekilde

$$i_c=e^{-at}\left(k_1\sin\omega_d t+k_2\cos\omega_d t\right)$$

Parçasal integral i_p bir sinüs ve bir kosinüs terimlerine sahip olacaktır.

$$i_p=A\sin\omega t+B\cos\omega t$$

Birinci ve ikinci türevler alınarak;

$$i'=\omega A\cos\omega t-\omega B\sin\omega t$$

$$i''=-\omega^2 A\sin\omega t-\omega^2 B\cos\omega t$$

i' ve i'' (5.7) nolu eşitlikte yerine konarak;

$$-L\omega^2 A\sin\omega t - L\omega^2 B\cos\omega t - R\omega B\sin\omega t + R\omega A\cos\omega t + \frac{A}{C}\sin\omega t + \frac{B}{C}\cos\omega t = \omega V\cos\omega t$$

sinüs terimlerinin katsayıları toplamı 0'a eşittir. Yani

$$-L\omega^2 A - R\omega B + \frac{A}{C} = 0$$

$$-RB = A\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = AX \qquad \textbf{(5.8)}$$

Burada X devrenin reaktansıdır. Kosinüslü sayıların katsayıları toplamı;

$$-L\omega^2 B + R\omega A + \frac{B}{C} = \omega V$$

yada

$$RA - V = B\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = BX$$

$$A = \frac{-RV}{R^2 + X^2} = \frac{RV}{Z^2}$$

Burada Z devrenin empedansıdır.

$$B = -\frac{VX}{R^2 + X^2} = -\frac{VX}{Z^2}$$

Böylece parçasal integral;

$$i_p = -\frac{RV}{Z^2}\sin\omega t - \frac{VX}{Z^2}\cos\omega t = -\frac{V}{Z^2}(R\sin\omega t - X\cos\omega t)$$

$$R = Z\cos\phi \quad \text{ve} \quad X = Z\sin\phi$$

$\phi =$ faz açısı

Böylece

$$R\sin\omega t - X\cos\omega t = Z\sin\omega t\cos\phi - Z\cos\omega t\sin\phi$$
$$= Z\sin(\omega t - \phi)$$

Hatırlatma: $\sin(\alpha \mp \beta) = \sin\alpha\cos\beta \mp \cos\alpha\sin\beta$

Buradan $\quad i_p = I_{max}\sin(\omega t - \phi)$

Toplam akım $\quad i = i_p + i_c$ 'dir.

geçici hal kararlı hal

RLC devre için kararlı hal Akımı, AC kaynak	$i_{ss} = \frac{V}{Z}\sin(\omega t - \phi)$	A100

Örnek 5.4: Verilen eleman değerleri için seri RLC devresinden akan akımın kararlı hal cevabını bulun. $R = 345\Omega$, $L = 0{,}726H$, $C = 41{,}4\mu F$, $V = 155\sin 285t$

Çözüm: A94 ve A95 nolu denklemlerden

$$X_L = \omega L = 285(0{,}720) = 207\Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{285(41{,}4\times10^{-6})} = 84{,}8\Omega$$

Toplam reaktans;

$$X = X_L - X_C = 207 - 84{,}8 = 122\Omega$$

Eşitlik A97'den Z empedans değeri bulunur;

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{345^2 + 122^2} = 366\Omega$$

ϕ faz açısı eşitlik A98'den;

$$\phi = \tan^{-1}\frac{X}{R} = \tan^{-1}\frac{122}{345} = 19{,}5°$$

Kararlı hal akımı;

$$i_{ss} = \frac{E}{Z}\sin(\omega t - \phi) = \frac{155}{366}\sin(285t - 1935°)$$
$$= 0{,}423\sin(285t - 19{,}5°) \qquad [A]$$

5.1.5 Rezonans

Seri RLC devresinde empedans $Z = 0$ olduğu zaman akım maksimum olacaktır. Bu X reaktans değeri 0 'a eşit olduğu zaman gerçekleşecektir.

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$$

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} \qquad \text{yada} \qquad \omega_n$$

Rezonans Frekansı	$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_n$	A89

Örnek 5.5: Örnek 5.4' teki devrenin rezonans frekansını bulun ve bu frekans değerinde kararlı hal akım cevabını yazınız

Çözüm:

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0{,}726(41{,}4\times10^{-6})}} = 182 \text{ rad/s}$$

$$X_L = X_C \quad \Rightarrow \quad X = 0 \;,\; Z = R \text{ ve } \phi = 0$$

$$I_{\max} = \frac{155}{345} = \frac{V}{Z} = 0{,}448A$$

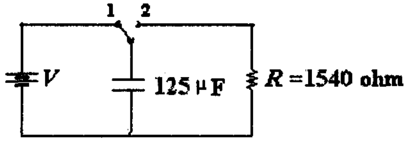
$$i_{ss} = 448\sin 182t \qquad [A]$$

5.2 Laplace Dönüşümü ve Nümerik Metodlar Kullanarak Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri

Bu bölümde DC ve AC kaynakla sürülen anahtarlamalı devrelerin Laplace dönüşümü yardımıyla çözümünü inceleyeceğiz.

5.2.1 DC kaynakla sürülen seri RC devresi:

Örnek 5.6: Şekil 5.6'daki RC devresindeki anahtar $t = 0$ anında 1 konumundan 2 konumuna geçiyor. Devreden akan i akımını bulunuz. (Başlangıçta C kapasitesinin yüksüz olduğu kabul edilecektir)



Şekil 5.6

Çözüm: $$Ri+\frac{1}{C}\int_0^t idt-Vs=0$$

Değerler yerine konup denklem yeniden düzenlenirse;

$$1540i+\frac{1}{125\times10^{-6}}\int_0^t idt=115$$

Laplace dönüşümü uygulanarak;

$$1540L[i]+8000\frac{L[i]}{s}=\frac{115}{s}$$

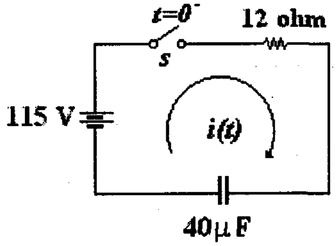
$$L[i]\left(1540+\frac{8000}{s}\right)=\frac{115}{s}$$

$$L[i]=\frac{0{,}0747}{s+5{,}19}$$

Ters Laplace dönüşümü uygulanarak;

$$i=0{,}0747e^{-5.19t}$$

Örnek 5.7: Şekildeki devrede başlangıçta kapasite üzerinde 35 V gerilim vardır. $t=0$ anında anahtar kapatılıyor. Devreden akan akımı bulunuz.



Şekil 5.7

Çözüm: Devre denklemi;

$$Ri+\frac{1}{C}\int_0^t idt-Vs-Vc(0^-)=0$$

Eleman Değerleri yerine konarak;

$$12i+\frac{1}{40\times10^{-6}}\int_0^t idt=150$$

Laplace dönüşümü uygulanarak;

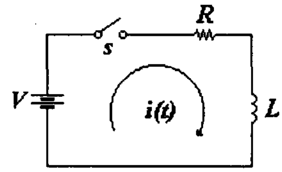
$$12L[i]+25000\frac{L[i]}{s}=\frac{12{,}5}{s+2080}$$

Ters Laplace dönüşümü uygulanarak;

$$i=12{,}5e^{-2080t}$$

5.2.2 DC Kaynakla Sürülen RL Devresi

Örnek 5.8: Başlangıçta L endüktansının uçlarından gösterilen yönde 1A akım akmaktadır. $t=0$ anında anahtar kapatılıyor. Devreden akan akımı bulunuz. R=12 ohm, L=4 H, V=24 volt



Şekil 5.8

Çözüm:

$$V = Ri + L\frac{di}{dt}$$
$$24 = 12i + 4i'$$
$$6 = 3i + i'$$

Laplace dönüşümü uygularsak;

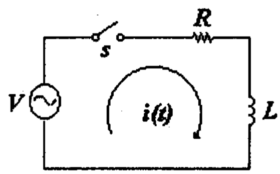
$$\frac{6}{s} = 3\ell[i] + s\ell[i] - i(0^-)$$
$$\ell[i] = \frac{6}{s(s+3)} + \frac{1}{s+3}$$

Ters Laplace dönüşümü uygulanarak;

$$i = 2\left(1 - e^{-3t}\right) + e^{-3t}$$
$$i = 2 - e^{-3t} \quad [A]$$

5.2.3 AC Kaynakla Sürülen RL Devresi

Örnek 5.9: Şekildeki devrede t = 0 anında anahtar kapatılıyor. Devreden geçen akımı bulunuz ve şeklini çiziniz. R=4 ohm, L=0.02 H, V=80 sin400t volt (Devrede ilk koşullar 0'dır.)



Şekil 5.9

Çözüm:

$$Ri + L\frac{di}{dt} = V$$
$$4i + 0{,}02\frac{di}{dt} = 80\sin 400t$$

Laplace dönüşümü uygulanırsa;

$$4\ell[i] + 0{,}02[s\ell[i] - i(0)] = \frac{80.400}{s^2 + (400)^2}$$

$i[0] = 0$ 'dır.

$$\ell[i](0{,}02s + 4) = \frac{32000}{s^2 + (400)^2}$$

$$\ell[i]=\frac{32000}{\left[s^2+(400)^2\right](0{,}02s+4)}=\frac{1600.10^3}{\left[s^2+(400)^2\right](s+200)}$$
$$=\frac{1600.10^3}{(s-j400)(s+j400)(s+200)}$$

Denklem kısmi kesirlere ayrılarak;

$$\frac{1600.10^3}{(s-j400)(s+j400)(s+200)}=\frac{A}{(s-j400)}+\frac{B}{(s+j400)}+\frac{C}{(s+200)}$$

Denklemin her iki tarafı $(s-j400)$ ile çarpılırsa;

$$\frac{1600.10^3}{(s+j400)(s+200)}=A+\frac{B(s-j400)}{(s+j400)}+\frac{C(s-j400)}{(s+200)}$$

A katsayısını bulmak için $s=j.400$ konur.

$$A=\frac{1600\times10^3}{(j400+j400)(j400+200)}=2(-2-j)$$

B ve C benzer şekilde hesaplanırsa $B=2(-2+j)$ ve $C=8$ bulunur.

$$\ell[y]=\frac{2(-2-j)}{s-j400}+\frac{2(-2+j)}{s+j400}+\frac{8}{s+200}$$

$$\ell[i]=\frac{2(-2-j)(s+j400)}{(s-j400)(s+j400)}+\frac{2(-2+j)(s-j400)}{(s+j400)(s-j400)}+\frac{8}{s+200}$$

$$\ell[i]=\frac{1600-8s}{s^2+(400)^2}+\frac{8}{s+200}=4\frac{400}{s^2+(400)^2}-8\frac{s}{s^2+(400)^2}+8\frac{1}{s+200}$$

Ters Laplace dönüşüm alınarak;

$$i=4\sin 400t-8\cos 400t+8e^{-200t}$$

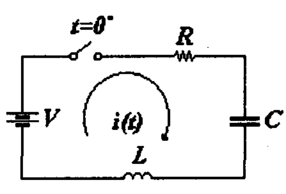
İlk iki terim $I\sin(400t+0)$ formuna dönüştürülürse;

$$I=\sqrt{4^2+8^2}=8{,}94 \quad \text{ve} \quad \theta=\tan^{-1}\left(-\tfrac{8}{4}\right)=-63{,}4°=-1{,}107 \text{ rad.}$$

$$i=8{,}94\sin(400t-1{,}107)+8e^{-200t}$$

5.2.4 DC Kaynakla Sürülen RLC Devresi:

Örnek 5.10: $t=0$ anında anahtar kapatılıyor. Devreden akan akımı bulunuz. (Başlangıçta kapasite yüksüzdür.)



Şekil 5.10

Çözüm: 1. Devrenin diferansiyel eşitliği:

$$Ri+L\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}\int_0^t idt=V$$

2. Eleman değerleri yerine konarak Laplace dönüşümü yapılır:

$$225\ell[i]+1{,}5\{s\ell[i]-i(0)\}+\frac{10^6\,\ell[i]}{4{,}75s}=\frac{75{,}4}{s}$$

3. $i(0)=0$ 'dır. (Kapasite ve endüktansın ilk koşulları 0 alduğundan.)

$$\ell[i]=\frac{50.3}{s^2+150s+140000}$$

4. Laplace dönüşümü için paydalı düzenlersek

$$\begin{aligned}s^2+150s+140000&=\left(s^2+150s+5625\right)+140000-5625\\&=(s+75)^2-(-134000)\\&=(s+75)^2-j^2(367)^2\\&=(s+75+j367)(s+75-j367)\end{aligned}$$

$$\ell[i]=\frac{50.3}{(s+75+j367)(s+75-j367)}$$

Denklemi kısmi kesirlere ayırırsak;

$$\frac{50.3}{(s+75+j367)(s+75-j367)}=\frac{A}{(s+75+j367)}+\frac{B}{(s+75-j367)}$$

$$\frac{50.3}{(s+75-j367)}=A+\frac{(s+75+j367)}{s+75-j367}$$

$s=-75-j367$ konarak;

$$A=\frac{50.3}{-75-j367+75-j367}=\frac{50.3}{-j374}=j0{,}0685$$

Benzer şekilde $B=-j.0{,}0625$ olarak hesaplanır.

$$\begin{aligned}\ell[i]&=\frac{j0{,}0685}{s+75+j367}-\frac{j0{,}0685}{s+75-j367}\\&=\frac{j0{,}0685(s+75-j367)-j0{,}0685(s+75+j367)}{(s+75+j367)(s+75-j367)}\\&=\frac{-j^2 50.4}{s^2+150s+140000}=0{,}137\frac{36}{(s+75)^2(367)^2}\end{aligned}$$

Hatırlatma: $\ell\left[e^{-at}\sin bt\right]=\dfrac{b}{(s+a)^2+b^2}$ dönüşümü kullanılarak;

$i=137e^{-75t}\sin 367t$ [mA] bulunur.

KAYNAKLAR

1. Calter, P., Technical Mathematics with Calculus. 2.ed. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1990.
2. Ascher, Uri., Mattheij, M., Russel, R.D. Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differantial Equations. Prentice Hall, 1988.
3. Kahaner, D., Moler, C., Nash S., Numerical Methods and Software. Prentice-Hall, Englewood Cliffs. NJ, 1989.
4. Danby J. M. A. Computing Applications to Differantial Equations. Reston Publishing Company, 1985.
5. Dernek N., Dernek A. Diferansiyel Denklemler. Deniz Yayınevi, İstanbul, 1995.
6. Aydın M., Gökmen G., Kuryel B., Gündüz G. Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları E.Ü. Mühendislik Fakültesi Ders Kitapları Yayınları No:14., 1990.
7. Aktaş Z., Öncül H., Ural S. Sayısal Çözümleme Cilt I. ODTÜ yayınları, 1981.
8. İkiz F., Püskülcü H., Eren Ş. İstatistiğe Giriş 4. Baskı. Barış Yayınları, 1996.
9. Eralp Y. F. Geçici Olaylar ve Laplace Transformasyonu. Güven – Arı Kitapevi, 1978.
10. Kolman, B., Denlinger, C. G., Applied Calculus, HBJ,Inc., LA, 1989.
11. Haberman, R., Elementary Applied Partial Differantial Equations. Prentice-Hall, Englewood Cliffs. NJ, 1987.

Ek.1. Diferansiyel, Hesap, İntegral, Cebir, Diferansiyel, Denklemler, Geometri, Trigonometri, Olasılık ve İstatistik alanlarında kullanılan temel özellikler, bağıntılar ve formüller.

Kitabımıza ek olarak hazırlanan bu bölümde, gerek kitapta yer alan konular ve gerekse diğer bilim dallarında yer alan belli başlı tanımlar, özellikler, özet bilgiler ve formüller verilmiştir. Bu ek bölümde Analiz, Cebir, Geometri, Diferansiyel, İntegral, Diferansiyel Denklemler, Analitik Geometri,Trigonometri,Logaritma, Fonksiyonlar ve benzeri Matematik dallarındaki temel tanımlar, özellikler, özet bilgiler ve formüllerin yanısıra Mühendisliğin her branşında kullanılan temel bilgiler, Olasılık ve İstatistik dallarına ait 546 adet tanım,özellik,özet bilgi ve formülden oluşmuştur.

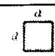
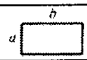
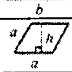
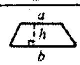
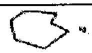
CEBİRSEL KURALLAR	**1**	**Değişme Özelliği**	Toplama	a + b = b + a
	2		Çarpma	a.b = b.a
	3	**Birleşme Özelliği**	Toplama	a + (b + c) = (a + b) + c = (a + c) + b
	4		Çarpma	a.(b.c) = (a.b).c =(a.c).b = a.b.c
	5	**Dağılma Özelliği**		a.(b +c) =a.b + a.c
İŞARET KURALLARI	**6**	**Toplama ve Çıkarma**		a + (- b) = a – (+ b) = a – b
	7			a + (+ b) = a – (- b) = a + b
	8	**Çarpma**		(+ a).(+ b) = (- a).(- b) = a.b
	9			(+ a).(- b) = (- a).(+b) = - (+ a).(+ b) = - a.b
	10	**Bölme**		$\frac{+a}{+b}=\frac{-a}{-b}=-\frac{-a}{+b}=-\frac{+a}{-b}=\frac{a}{b}$
	11			$\frac{+a}{-b}=\frac{-a}{+b}=\frac{-a}{-b}=-\frac{a}{b}$
YÜZDELİKLER	**12**			Miktar = Temel x Oran
	13			$\text{Yüzde Değişim}=\frac{\text{Yeni Değer - Esas Değer}}{\text{Esas Değer}}\times\%100$
	14			$\text{YüzdeHata}=\frac{\text{Ölçülen Değer - Bilinen Değer}}{\text{Bilinen Değer}}\times\%100$
	15			$\text{A'nın Yüzdekarışımı}=\frac{\text{A'nın Miktarı}}{\text{Karışım Miktarı}}\times\%100$
	16			$\text{YüzdeEtki}=\frac{\text{Çıkış}}{\text{Giriş}}\times\%100$

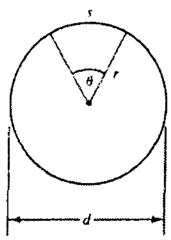
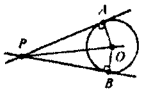
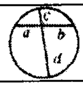
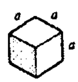
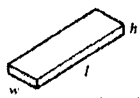
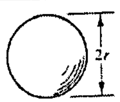
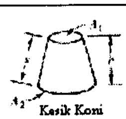
İKİLİ SAYILAR	17	En büyük n bit ikili sayı		$2^n - 1$
İKİLİ SAYILAR	18	Toplama		$0 + 0 = 0$ $0 + 1 = 1$ $1 + 0 = 1$ $1 + 1 = 0$ eldeli toplama
İKİLİ SAYILAR	19	Çıkarma		$0 - 0 = 0$ $0 - 1 = 1$ eldeli çıkarma $1 - 0 = 1$ $1 - 1 = 0$ $10 - 1 = 1$
İKİLİ SAYILAR	20	Çıkarma		A-B=A+(-B)
İKİLİ SAYILAR	21	Çarpma		$0 \times 0 = 0$ $0 \times 1 = 0$ $1 \times 0 = 0$ $1 \times 1 = 1$
	22	Bölme		$0 \div 0$ tanımsız $1 \div 0$ tanımsız $0 \div 1 = 0$ $1 \div 1 = 1$
İKİLİ SAYILAR	23	Ters alma	N bit x sayısının birinci tersi	$(2^n - 1) - x$
İKİLİ SAYILAR	24	Ters alma	N bit x sayısının birinci tersi	Bir sayının birinci tersi 1' lerin 0, 0' ların 1 yapılmasıyla elde edilir.
İKİLİ SAYILAR	25	Ters alma	N bit x sayısının ikinci tersi	$(2^n - x)$
İKİLİ SAYILAR	26	Ters alma	N bit x sayısının ikinci tersi	Bir sayının ikinci tersi, birinci tersinin alınıp bulunan sayıya 1 ilave edilmesiyle elde edilir
İKİLİ SAYILAR	27	Negatif ikili sayılar		Eğer M pozitif ikili bir sayı ise –M, M sayısının ikinci tersidir.
ÜSLER	28	Tanım		$a^n = a * a * a * ....a$ n adet a çarpımı
ÜSLER	29	Üs Alma Kuralları	Çarpım	$(x^a) * (x^b) = x^{a+b}$
ÜSLER	30	Üs Alma Kuralları	Bölme	$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$
ÜSLER	31	Üs Alma Kuralları	Kuvvet	$(x^a)^b = x^{ab} = (x^b)^a$
ÜSLER	32	Üs Alma Kuralları	Çarpımın kuvveti	$(xy)^n = x^n * y^n$
ÜSLER	33	Üs Alma Kuralları	Bölümün kuvveti	$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$
ÜSLER	34	Üs Alma Kuralları	0. üs	$x^0 = 1$
ÜSLER	35	Üs Alma Kuralları	Negatif üs	$x^{-a} = \frac{1}{x^a}$
ÜSLER	36	Kesirli üsler		$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$
ÜSLER	37	Kesirli üsler		$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

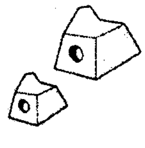
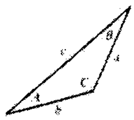
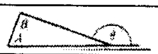
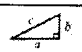
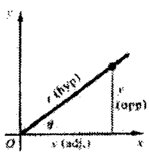
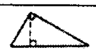
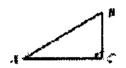
KÖKLER	38	Kök kuralları	Çarpımın kökü	$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$
	39		Bölümün kökü	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
	40		Kuvvetin kökü	$\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m$
ÖZEL ÇARPANLAR VE ÇARPIMLAR	41	İki terimliler	İki kare farkı	$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
	42		İki küp toplamı	$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
	43		İki küp farkı	$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
	44	Üç terimliler	Çarpanlara ayırma testi	Eğer b^2-4ac tam kare ise ax^2+bx+c çarpanlarına ayrılabilir
	45		Eğer a=1	$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$
	46		Genel ikinci derece üç terimli	$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$
	47		Tam kare üç terimliler	$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$
	48			$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$
	49	Gruplayarak çarpanlarına ayırma		$ac+ad+bc+bd=(a+b)(c+d)$
KESİRLER	50	Sadeleştirme		$\frac{ad}{bd}=\frac{a}{b}$
	51	Çarpma		$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$
	52	Bölme		$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$
	53	Toplama ve çıkarma	Aynı paydalar	$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{b}=\frac{a\pm c}{b}$
	54		Farklı Paydalar	$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}\pm\frac{bc}{bd}=\frac{ad\pm bc}{bd}$
ORANTI	55	a:b=c:d orantısında	İçler çarpımı dışlar çarpımına eşittir	$ad=bc$
	56		Dışlar kendi arasında yer değiştirebilir	$d:b=c:a$
	57		İçler kendi arasında yer değiştirebilir	$a:c=b:d$
	58		İçler ile dışlar yerdeğiştirebilir	$b:a=d:c$
	59	Orta orantılı	Orantı	$a:b=b:c$
			Geometrik ortalama	$b=\pm\sqrt{ac}$
DEĞİŞİM	60	k= Orantı katsayısı	Doğru	y α x yada $y=kx$
	61		Ters	y α $\frac{1}{x}$ yada $y=\frac{k}{x}$
	62		Bileşik	y α xw yada y = kxw

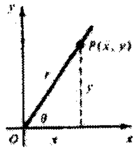
LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ	63	Cebirsel Çözüm	$a_1x+b_1y=c_1$ $a_2x+b_2y=c_2$		$x=\dfrac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}$ ve $y=\dfrac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$ — burada $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$
	64		$a_1x+b_1y+c_1z=k_1$ $a_2x+b_2y+c_2z=k_2$ $a_3x+b_3y+c_3z=k_3$		$x=\dfrac{b_2c_3k_1+b_1c_2k_3+b_3c_1k_2-b_2c_1k_3-b_3c_2k_1-b_1c_3k_2}{a_1b_2c_3+a_3b_1c_2+a_2b_3c_1-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3}$ $y=\dfrac{a_1c_3k_2+a_3c_2k_1+a_2c_1k_3-a_3c_1k_2-a_1c_2k_3-a_2c_3k_1}{a_1b_2c_3+a_3b_1c_2+a_2b_3c_1-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3}$ $z=\dfrac{a_1b_2k_3+a_3b_1k_2+a_2b_3k_1-a_3b_2k_1-a_1b_3k_2-a_2b_1k_3}{a_1b_2c_3+a_3b_1c_2+a_2b_3c_1-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3}$
	65	Determinantlar	Bir Determinantın Değeri	İkinci Derece	$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$
	66			Üçüncü derce	$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1b_2c_3+a_3b_1c_2+a_2b_3c_1-(a_3b_2c_1+a_1b_3c_2+a_2b_1c_3)$
	67			Minörler	Determinantta b elemanının işaretli minörü $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ ise $-\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}$
	68				Bir determinantın değerinin bulmak için; 1. Herhangi bir satır veya sütun seçilip işaretli minörü hesaplanır.. 2. Bu satır veya sütundaki her bir eleman ile o elemanın işaretli minörü çarpılır. 3. Bu çarpımlar toplanarak determinantın değeri bulunur.
	69		Cramer Kuralı		Herhangi bir değişkenin çözümü, paydası katsayılar determinantı, payı ise o değişkenin bulunduğu sütuna sabitler vektörü konularak elde edilen determinantın, hesaplanması ile edilen kesrin değeridir.
	70			İki denklem	$x=\dfrac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b \end{vmatrix}}$ ve $y=\dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b \end{vmatrix}}$
	71			Üç denklem	$x=\dfrac{\begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\Lambda}$ $y=\dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & k_1 & c_1 \\ a_2 & k_2 & c_2 \\ a_3 & k_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\Lambda}$ $z=\dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & k_2 \\ a_3 & b_3 & k_3 \end{vmatrix}}{\Lambda}$ Burada ; $\Lambda=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

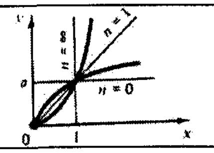
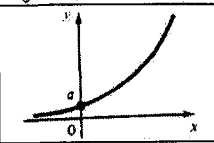
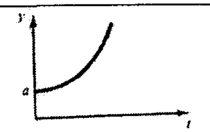
LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ	72	Determinantın Özellikleri	Sıfır satır veya sütun	Bir satırın (veya sütun) bütün elemanları 0 ise determinant değeri 0' dır.
	73		Eşit satırlar veya sütunlar	Eğer iki satır (veya sütun) eşitse determinant değeri 0' dır.
	74		Temel köşegen altındaki sıfırlar	Eğer temel köşegen altındaki elemanların hepsi sıfırsa determinantın değeri köşegen üzerindeki elemanların çarpımına eşittir.
	75		Satırlar ile sütunların yerdeğiştirmesi	Eğer satırlarla sütunları (veya sütunlarla satırları) yer değiştirirsek determinantın değeri değişmez.
	76		Satırlar veya sütunların yerdeğiştirmesi	İki satır (veya sütun) aralarında yerdeğişitirilirse determinantın işareti değişir.
	77		Bir sabit ile çarpım	Bir determinantın bir sabitle çarpımı o determinantın bütün elemanlarının o sayıyla çarpımı demektir.
	78		Bir satır veya sütunun bir katının diğerine ilave edilmesi	Bir satır (veya sütunun) elemanları bir çarpanla çarpılır ve diğer satır veya sütunun aynı konumdaki elemanlarına ilave edilirse determinantın değeri değişmez.
MATRİSLER	79	Toplama	Değişme özelliği	A+B=B+A
	80		Birleşme özelliği	A+(B+C)=(A+B)+C=(A+C)+B
	81		Toplama ve Çıkarma	$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+w & b+x \\ c+y & d+z \end{pmatrix}$
	82	Çarpma	Çarpılabilir Matrisler	A ve B iki matris olsun. AB çarpım matrisi ancak A matrisinin sütun sayısı B matrisinin satır sayısına eşit iken tanımlanır.
	83		Değişme Özelliği	$AB \neq BA$ Matris çarpımında değişme özelliği yoktur
	84		Birleşme Özelliği	A(BC) = (AB)C = ABC
	85		Dağılma Özelliği	A(B+C) = AB + AC
	86		Çarpımın boyutu	(m x p)(p x n)=(m x n)
	87		Bir matrisin ve bir skalerin çarpımı	$k\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$
	88		Bir sütun vektörü ve bir satır vektörünün skaler çarpımı	(1 X 2)(2 X 1) (1 X 1) $(a \quad b)\begin{pmatrix} x \\ - \\ y \end{pmatrix} = (ax \quad + \quad by)$
	89		Bir satır vektörü ve bir sütun vektörünün tensör çarpımı	(2 X 1)(1 X 2) (2 X 2) $\begin{pmatrix} a \\ - \\ b \end{pmatrix}(x \quad y) = \begin{pmatrix} ax & ay \\ bx & by \end{pmatrix}$
	90		Bir satır vektörü ve bir matrisin çarpımı	(1 X 2) (2 X 3) (1 X 3) $(a \quad b)\begin{pmatrix} u & v & w \\ x & y & z \end{pmatrix} = (au+bx \quad av+by \quad aw+bz)$
	91		Bir sütun vektörü ve bir matrisin çarpımı	(2 X 2) (2 X 1) (2 X 1) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & by \\ cx & dy \end{pmatrix}$

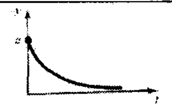
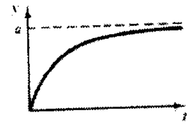
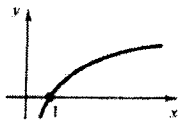
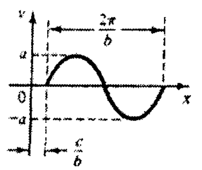
	92		İki matrisin çarpımı	(2 X 3) (3 X 2) (2 X 2) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u & x \\ v & y \\ w & z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} au+bv+cw & ax+by+cz \\ du+ev+fw & dx+ey+fz \end{pmatrix}$
	93		Bir matrisin tersi ile çarpımı	$AA^{-1}=A^{-1}A=I$
	94		Bir matrisin birim matris ile çarpımı	AI=IA=A
	95	**Denklem sistemlerinin çözümleri**	Bir denklem sistemin matris formu	AX=B
	96		Bir matrisin	1. Herhangi satırların değişimi 2. 0 olmayan bir sabit ile bu satırları çarpma 3. Bir satırın sabit çarpımının diğer satıra ilave edilmesi
	97		Birim matris metodu	AX=B formunun her iki tarafı A^{-1} ile çarpılarak X bilinmeyenler vektörü aşağıdaki gibi elde edilir.
	98		Ters matris yöntemiyle denklem sistemi çözümü	$X=A^{-1}B$
	99	**Genel form**		$ax^2+bx+c=0$
	100	**Quadratik form**		$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
	101	**Diskrimina nt**	Eğer a,b ve c reel sayı ise	Eğer $b^2-4ac>0$ gerçel iki farklı kök varsa Eğer $b^2-4ac=0$ İki eşit kök varsa Eğer $b^2-4ac<0$ Gerçel olmayan kökler
	102	**n. derece polinom**		$a_0x^n+a_1x^{n-1}+.....+a_{n-1}x+a_n$
	103	**Çarpan teoremi**		Eğer f(x)=0 denkleminin kökü r ise x-r f(x) polinomunun bir çarpanıdır; tersine x-r f(x) polinomunun bir çarpanı ise r, f(x)=0 denkleminin bir köküdür.
Kesişen doğrular	104	Kesişen iki doğrunun ters açıları eşittir.		
	105	Eğer iki paralel doğruyu üçüncü bir doğru keserse oluşan yöndeş ve iç ters açılar eşittir.		
	106	Eğer iki doğru birçok paralel doğruyla kesilirse karşılıklı doğru parçaları orantılıdır.		
ÇOKGENLER	107		Kare	$\text{Alan}=a^2$
	108		Dikdörtgenler	$\text{Alan}=a.b$
	109		Paralelkenar	$\text{Alan}=b.h$
	110		Eşkenar Dörtgen	$\text{Alan}=a.h$
	111		Yamuk	$\text{Alan}=\dfrac{(a+b).h}{2}$
	112		Çokgen	$\text{AçılarToplamı}=(n-2).180^\circ$

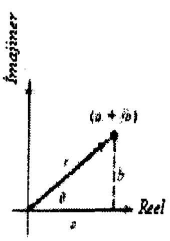
DAİRE VE ÇEMBER	113			$Çevre = 2\pi r = \pi d$
	114			$Alan = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}$
	115			$Merkezaç\ ı\theta(radyan) = \frac{s}{r}$
	116			$Kesit\ alanı = \frac{rs}{2} = \frac{r^2\theta}{2}$
	117			$1 \quad dönüş = 2\pi \quad radyan = 360^\circ \quad 1^\circ = 60dak. \quad 1\min = 60s$
	118			Bir dik üçgende??????
	119		Bir çemberin teğetleri	AP teğeti OA yarıçapına diktir
	120			Teğet AP = Teğet BP OP APB açısını ortalar
	121		Kesişen kirişler	a.b = c.d
	122		Küp	$hacim = a^3$
	123			$Yüzey\ Alanı = 6a^2$
	124		Dikdörtgen prizma	$Hacim = lwh$
	125			$YüzeyAlanı = 2(lh + lw + hw)$
	126		Herhangibir silindir veya prizma	Hacim = (taban alanı)(yükseklik)
	127		Dik silindir veya prizma	Yanal alan = (Taban çevresi)(yükseklik)
	128		Küre	$Hacim = \frac{4}{3}\pi r^3$
	129			$Yüzey\ Alanı = 4\pi r^2$
	130		Herhangi koni veya silindir	Hacim=1/3(taban alanı)(yükseklik)
	131		Dik dairesel koni veya düzgün piramit	Yanal Alan=1/2(Taban çevresi) X (yan yükseklik)
	132		Herhangi koni veya düzgün piramit	$Hacim = \frac{h}{3}(A_1 + A_2 + \sqrt{A_1 A_2})$
	133		Dik dairesel koni veya düzgün piramit	Yanal alan= $\frac{s}{2}$ (taban çevrelerinin toplamı)= $\frac{s}{2}(P_1 + P_2)$

134		Katı benzer şekiller veya düzlemin karşılıklı boyutları orantılıdır.	
135		Benzer düzlem veya katı şekillerin alanları, herhangi iki karşılıklı boyutun oranının karesi ile orantılıdır.	
136		Benzer katı şekillerin hacimleri herhangi iki karşılıklı boyutun oranının kübü ile orantılıdır.	
137		$Alan = \frac{1}{2}bh$	
138		Hero Formülü: $Alan = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ burada $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$	
139		İç açılar toplamı	$A+B+C=180^\circ$
140		Sinüs teoremi	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$
141		Kosinüs teoremi	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \quad \cos A$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \quad \cos B$ $c^2 = b^2 + b^2 - 2ab \quad \cos C$
142		Dış Açı	$\theta = A + B$
143	Eğer bir üçgenin iki açısı diğer bir üçgenin iki açısına eşitse,bu iki üçgen benzerdir.		
144	Benzer üçgenlerin karşılıklı kenarları orantılıdır.		
145		Pisagor teoremi	$a^2 + b^2 = c^2$
146	Trigonometric Ratios 	Sinüs	$\sin \Theta = \frac{y}{r} = \frac{\text{Karşı Dik Kenar}}{\text{Hipotenüs}}$
147		Kosinüs	$\cos \Theta = \frac{x}{r} = \frac{\text{Komşu Dik Kenar}}{\text{Hipotenüs}}$
148		Tanjant	$\tan \Theta = \frac{y}{x} = \frac{\text{Karşı Dik Kenar}}{\text{Komşu Dik Kenar}}$
149		Kotanjant	$\cot \Theta = \frac{x}{y} = \frac{\text{Komşu Dik Kenar}}{\text{Karşı Dik Kenar}}$
150		Sekant	$\sec \Theta = \frac{r}{x} = \frac{\text{Hipotenüs}}{\text{Komşu Dik Kenar}}$
151		Kosekant	$\csc \Theta = \frac{r}{y} = \frac{\text{Hipotenüs}}{\text{Karşı Dik Kenar}}$
152	Ters Bağıntılar	(a) $\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta}$	(b) $\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$ (3) $\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$
153		Bir dik üçgende hipotenüse ait yüksekliğin oluşturduğu iki üçgenden herbiri diğerine ve ilk dik üçgene benzerdir.	
154	 *A ve B tümler açılar*	Eş fonksiyonlar	$(a) \sin A = \cos B$ $(d) \cot A = \tan B$ $(b) \cos A = \sin B$ $(e) \sec A = \csc B$ $(c) \tan A = \cot B$ $(f) \csc A = \sec B$
155	İki üçgenin eşliği	Karşılıklı birer kenarları ve ikişer açıları aynı olan üçgenler eştir. (A.K.A) (A.A.K)	

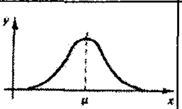
	156			Karşılıklı ikişer kenarları ile bu kenarlar arasındaki açıları aynı olan üçgenler eştir.(K.A.K)
	157			Karşılıklı kenarları aynı olan üçgenler eştir. (K.K.K)
	158		Kartezyen Form	$x = r\cos\theta$
	159			$y = r\sin\theta$
	160		Kutupsal Form	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$
	161			$\theta = \arctan\dfrac{y}{x}$
	162	Bölüm Bağıntıları		$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$
	163			$\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$
	164	Pisagor Bağıntılar		$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
	165			$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$
	166			$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$
	167	İki açı farkı veya toplamı		$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
	168			$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \pm \sin\alpha\sin\beta$
	169			$\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \pm \tan\alpha\tan\beta}$
	170	İki kat yay formülleri		$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
	171			(a) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin$ (b) $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ (c) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
	172			$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$
	173	Yarım açı formülleri		$\sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$
	174			$\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$
	175			(a) $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ (b) $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$ (c) $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$
	176	İki fonksiyonun farkının toplamı		$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$
	177			$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$
	178			$\cos\alpha - \cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$
	179			$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

	180	İki Fonksiyonun Çarpımı		$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$
	181			$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$
	182			$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta)$
	183	Ters trigonometrik fonksiyonlar		$\theta = \arcsin C = \arctan\frac{C}{\sqrt{1-C^2}}$
	184			$\theta = \arccos D = \frac{\sqrt{1-D^2}}{D}$
LOGARİTMA	185	**Üstel formun Logaritmik ifadesi**		Eğer, $b^x=y$ ise $x=\log_b y$ olur. Terside doğrudur. ($y>0$, $b>0$, $b \neq 1$)
	186	**Logaritma kuralları**	Çarpımlar	$\log_b MN = \log_b M + \log_b N$
	187		Bölümler	$\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$
	188		Kuvvetler	$\log_b M^p = p\log_b M$
	189		Kökler	$\log_b \sqrt[q]{M} = \frac{1}{q}\log_b M$
	190		1'in logaritması	$\log_b 1 = 0$
	191		Taban ile üs aynı ise	$\log_b b = 1$
	192	**Taban ile üs aynı iken kuvvet alma**		$\log_b b^n = n$
	193	**Taban değiştirme**		$\log N = \frac{\ln N}{\ln 10} \cong \frac{\ln N}{2.3026}$
	194	**Kuvvet Fonksiyon**		$y = ax^n$
	195	**Üstel Fonksiyon**		$y = a(b)^{nx}$
	196	**Seri Açılımı**		$b^x = 1 + x\ln b + \frac{(x\ln b)^2}{2!} + \frac{(x\ln b)^2}{3!} + \dots$ (b>0)
	197	**Üstel Büyüme**		$y = ae^{\ln}$
	198			Yarılanma Süresi: $t = \frac{\ln 2}{n}$

	199	**Üstel Azalış**		$y = ae^{-\text{In}}$
	200	**Bir üst limitle üstel büyüme**		$y = a(1-e^{-\text{In}})$
	201	**Zaman sabiti**	$T = \dfrac{1\cdot}{Büyüme\ \text{Oranı}}$	
	202	**Seri Açılımı**	$e = 2 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{4!} + \cdots$	
	203		$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots$	
	204	**Logaritmik fonksiyon**		$y = \log_b x$ $(x > 0, b > 0, b \neq 1)$
	205	**Seri Açılımı**	$\ln x = 2a + \dfrac{2a^3}{3} + \dfrac{2a^5}{5} + \dfrac{2a^7}{7} + \cdots$ burada $a = \dfrac{x-1}{x+1}$	
	206	**Sinüs dalgası**		$y = a\sin(bx+c)$
	207			$Periyod = \dfrac{360}{b}\,\text{deg}/cycle = \dfrac{2\pi}{b}\,rad/cycle$
	208			$Frekans = \dfrac{b}{360}\,cycle/\text{deg} = \dfrac{b}{2\pi}\,cycle/rad$
	209			$Faz\ Kayması\ = -\dfrac{c}{b}$
	210	**Seri Açılımı**	$\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots$	
	211		$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots$	
	212	**i nin kuvveti**	$i = \sqrt{-1}\,,\ i^2 = -1\,,\ i^3 = -i\,,\ i^4 = 1\,, i^5 = i\,, \ldots$	
	213		Kartezyen Form	$a + ib$
	214		Toplamlar	$(a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d)$
	215		Farklar	$(a+ib)-(c+id) = (a-c)+i(b-d)$
	216		Çarpımlar	$(a+ib)(c+id) = (ac-bd)+i(ad+bc)$
	217		Bölme	$\dfrac{a+ib}{c+id} = \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}$

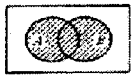
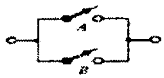
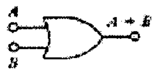
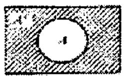
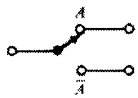
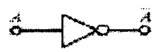
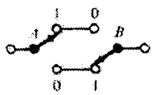
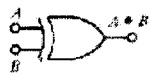


218		Trigonometrik Form		$z = a + ib = r(\cos\theta + i\sin\theta)$
219		Trigonometrik Form	Burada	$a = r\cos\theta$
220		Trigonometrik Form	Burada	$b = r\sin\theta$
221		Trigonometrik Form	Burada	$r = \sqrt{a^2 + b^2}$
222		Trigonometrik Form	Burada	$\theta = \arctan\dfrac{b}{a}$
223		Kutupsal Form		$Z = r\angle\theta = a + ib$
224		Kutupsal Form	Çarpma	
225		Kutupsal Form	Bölme	
226		Kutupsal Form	Üsler ve Kökler	
227		Üstel l Form	Euler Formülü	$re^{j\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$
228		Üstel l Form	Çarpma	$r_1e^{i\theta_1} \cdot r_2e^{i\theta_2} = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
229		Üstel l Form	Bölme	$\dfrac{r_1e^{i\theta_1}}{r_1e^{i\theta_2}} = \dfrac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$
230		Üstel l Form	Üsler ve Kökler	$(re^{i\theta})^n = r^ne^{in\theta}$
231	**Aritmetik Dizi Ortak fark=r**	İndirgeme Formülü		$a_n = a_{n-1} + d$
232	**Aritmetik Dizi Ortak fark=r**	Genel Terim		$a_n = a + (n-1)d$
233	**Aritmetik Dizi Ortak fark=r**	Terimler Toplamı		$s_n = \dfrac{n(a + a_n)}{2}$
234	**Aritmetik Dizi Ortak fark=r**	Terimler Toplamı		$s_n = \dfrac{n[2a + (n-1)d]}{2}$
235	**Geometrik Dizi Ortak oran=r**	İndirgeme Formülü		$a_n = ra_{n-1}$
236	**Geometrik Dizi Ortak oran=r**	Genel Terim		$a_n = ra^{n-1}$
237	**Geometrik Dizi Ortak oran=r**	Terimler Toplamı		$s_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$
238	**Geometrik Dizi Ortak oran=r**	Terimler Toplamı		$s_n = \dfrac{a - ra_n}{1-r}$
239	**Geometrik Dizi Ortak oran=r**	Sonsuz Toplam		$S = \dfrac{a}{1-r}$ burada $\lvert r\rvert < 1$
240	**Binom Açılımı**			$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \dfrac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \cdots + b^n$

	241	Genel Terim	$r.terim = \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} a^{n-r+1} b^{r-1}$	
	242	Binom Serisi	$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \cdots$ burada $\|a\| < \|b\|$	
	243		$(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\cdots$ burada $\|x\| < 1$	
	244	Merkezi Yoğunluk Ölçüleri	Aritmetik Ortalama	$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$
	245		Medyan	Bir seride tek sayıda terim varsa en ortadaki terim,seride çift terim varsa ortadaki iki terimin aritmetik ortalaması medyanı verir.
	246		Mod	Bir seride en çok tekrarlanan veya gözlenen terim o serinin modudur.
	247	Dağılım Ölçüleri	Değişim Aralığı	Bir serideki en büyük değer ile en küçük değer arasındaki farka değişim aralığı denir.
	248		Varyans (s^2)	$s^2 = \frac{\sum (x-\bar{x})^2}{n}$
	249		Standart Sapma (s)	Standard sapma, varyansın pozitif karekököküdür.
	250	Olasılık	Bir olayın olma olasılığı	$P(A) = \frac{\text{A olayının eleman sayısı}}{\text{Bütün olayın eleman sayısı}}$
	251		Bağımsız İki olayın birlikte olma olasılığı	$P(A,B) = P(A)P(B)$
	252		Bağımsız ikiden fazla olayın birlikte olma olasılığı	$P(A, B, C,....) = P(A)P(B)P(C)\cdots$
	253		Ayrık olmayan iki olayın birleşiminin olasılığı(A veya B olayı)	$P(A+B) = P(A)+P(B)-P(A,B)$
	254		Ayrık iki olayın birleşiminin olasılığı(A veya B olayı)	$P(A+B) = P(A)+P(B)$
	255	Gauss Dağılımı		$y = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$
	256	Standart Hata	Ortalamanın standart hatası	$SE_{\bar{x}} = \frac{a}{\sqrt{n}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$
	257		Standart sapmanın hatası	$SE_s = \frac{a}{\sqrt{2n}}$

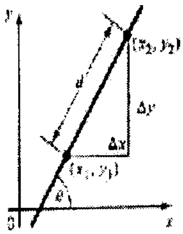
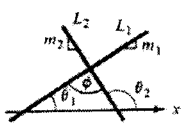
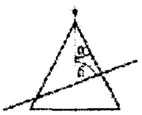
BOOLEAN CEBİRİ VE KÜMELER

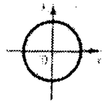
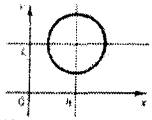
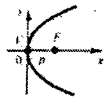
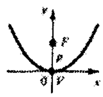
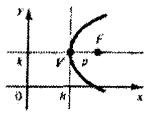
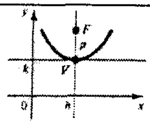
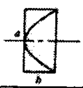
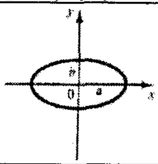
Boolean Cebiri

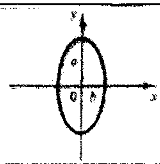
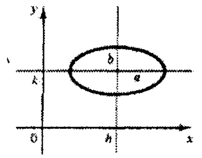
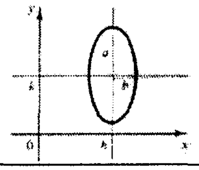
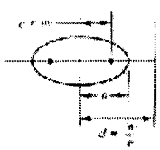
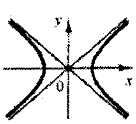
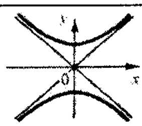
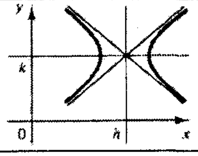
		Doğruluk Tablosu	Venn Diyagramı	Anahtar Diyagram	Lojik Kapılar
258	AND	A B $A\cdot B$ 0 0 0 0 1 0 1 0 0 1 1 1	 kesişim $A \cap B = \{x : x \in A, x \in B\}$		
259	OR	A B $A+B$ 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 1	 Birleşim $A \cup B = \{x : x \in A$ or $x \in B\}$		
260	NOT	A $\overline{A}$ 0 1 1 0	 A'nın tümleyeni $A' = \{x : x \in U, x \notin A\}$		
261	EXOR	A B $A \oplus B$ 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 0	 $A \oplus B = \{x : x \in A$ or $x \in B, x \notin A \cap B\}$		

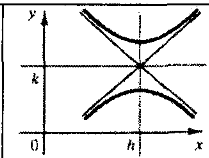
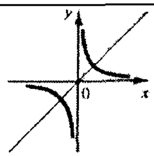
Boolean cebirinin özellikleri

		AND	OR
262	Değişme özelliği	$AB \equiv BA$	$A+B \equiv B+A$
263	Sınırlılık özelliği	$A\cdot 0 \equiv 0$	$A+1 \equiv 1$
264	Birim özellik	$A\cdot 1 \equiv A$	$A+0 \equiv A$
265	Idempotent Özelliği	$AA \equiv A$	$A+A \equiv A$
266	Ters işlem	$A\cdot\overline{A} \equiv 0$	$A+\overline{A} \equiv 1$
267	Birleşme özelliği	$A(BC) \equiv (AB)C$	$A+(B+C) \equiv (A+B)+C$
268	Dağılma özelliği	$A(B+C) \equiv AB+AC$	$A+BC \equiv (A+B)(A+C)$
269	Dağılma özelliği	$A(\overline{A}+B) \equiv AB$	$A+\overline{A}\cdot B \equiv A+B$
270	Absorption Laws	$A(A+B) \equiv A$	$A+(AB) \equiv A$
271	DeMorgan Kuralı	$\overline{A\cdot B} \equiv \overline{A}+\overline{B}$	$\overline{A+B} \equiv \overline{A}\cdot\overline{B}$
272	Üs alma kuralı	$\overline{\overline{A}} \equiv A$	

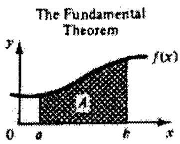
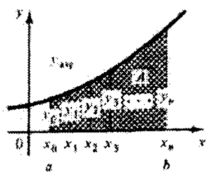
No				
273			Uzunluk Formülü	$d=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
274			Eğim (m)	$m=\dfrac{rise}{run}=\dfrac{\Delta_y}{\Delta_x}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$
275				m=tan θ $0\leq\theta<180°$
276		DOĞRU DENKLEMİ	Genel Form	$Ax+By+C=0$
277			x-eksenine Paralel	$y=b$
278			y-eksenine Paralel	$x=a$
279			Standart Form	$y=mx+b$
280			İki noktası belli	$\dfrac{y-y_1}{x-x_1}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$
281			Bir noktası ve eğimi belli	$m=\dfrac{y-y_1}{x-x_1}$
282			Eksen Form	$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$
283			Kutupsal Form	$r\cos(\theta-\beta)=p$
284			L_1 ve L_2 paralelse	$m_1=m_2$
285			L_1 ve L_2 dikse	$m_1=-\dfrac{1}{m_2}$
286			L_1 ve L_2 doğruları arasındaki açı	$\tan\phi=\dfrac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}$
287	KONİKLER		İkinci derece eğrilerin genel denklemi(Konikler)	$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$
288			Eksenlerin dönüşümü	Bir eğrinin eksenlerinin dönüşümü veya kaydırılması (Öteleme) : (h,k) noktasına eksenleri ötelemek,x-eksenini h kadar sola ve y-eksenini k kadar aşağı doğru kaydırmaktır.
289			Dışmerkezlilik 	$e=\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}$
290				e=0 ise Çember 0< e < 1 ise Elips e = 1 ise Parabol e > 1 ise Hiperbol
291			Bir koniğin tanımı	$PF=e\cdot PD$
292			Konikler için kutupsal denklem	$r=\dfrac{ke}{1-e\cos\theta}$

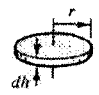
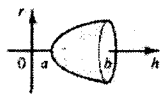
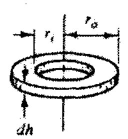
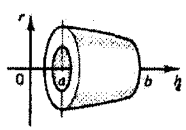
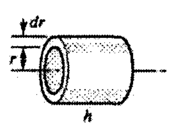
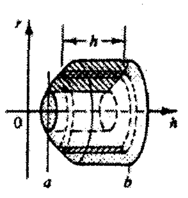
293		Çember: Sabit bir noktadan eşit uzaklıktaki noktaların kümesi			
294	ÇEMBER		Standart Form	$x^2 + y^2 = r^2$	
295				$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$	
296		Genel Form		$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$	
297		Parabol:Bir düzlemde sabit bir nokta(Odak) ile sabit bir doğruya (Doğrultman) eşit uzaklıktaki noktalar kümesi			
298	PARABOL		Standart Form	$y^2 = 4px$	
299				$x^2 = 4py$	
300				$(y-k)^2 = 4p(x-h)$	
301				$(x-h)^2 = 4p(y-h)$	
302		Genel Form		$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ *or* $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$	
303		Odaklar arası uzaklık		$L = \|4p\|$	
304		Alan		$\text{Alan} = \frac{2}{3}\text{ab}$	
305		Elips: F ve F' sabit noktalarına (odaklar) uzaklıkları toplamı sabit ve büyük eksenin uzunluğuna (2a) eşit noktalar kümesi (PF + PF' = 2a)			
306	ELİPS		Standart Form	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $a > b$	

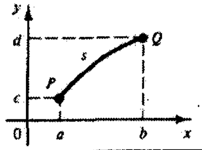
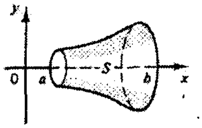
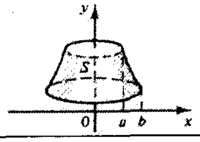
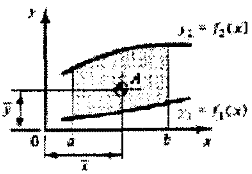
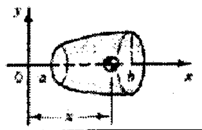
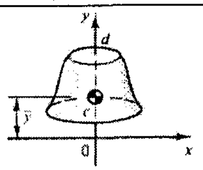
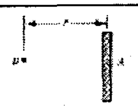
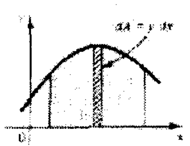
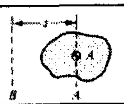
	307	ELİPS		$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$ $a>b$
	308			$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ $a>b$
	309			$\frac{(x-k)^2}{a^2}+\frac{(y-h)^2}{b^2}=1$ $a>b$
	310		Genel Form	$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ $A\neq C$, ama aynı işaretli
	311		Merkezin odağa uzaklığı	$c=\sqrt{a^2-b^2}$
	312		Odaklar arası uzaklık	$c=\sqrt{a^2-b^2}$
	313			(Dışmerkezlilik) $e=\frac{a}{d}=\frac{c}{a}$
	314		Alan = πab	
	315	HİPERBOL	Hiperbol: F ve F' sabit noktalarına (odaklar) uzaklıkları farkı sabit ve 2a noktalar kümesi (PF - PF' =2a)	
	316			$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
	317			$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$
	318			$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

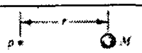
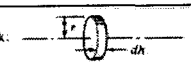
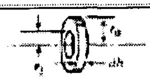
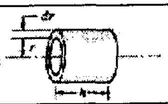
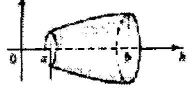
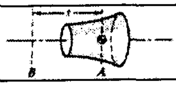
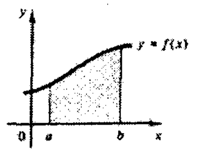
	319	**HİPERBOL**		$$\frac{(x-k)^2}{a^2}-\frac{(y-h)^2}{b^2}=1$$
	320		Genel Form	$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ $A \neq C$, A ve C farklı işaretli
	321		Merkezin odağa uzaklığı	$c=\sqrt{a^2+b^2}$
	322		Asimptotların eğimi – Yatay Eksen	$\text{Eğim}=\pm\frac{\text{b}}{\text{a}}$
	323		Asimptotların eğimi – Düşey Eksen	$\text{Eğim}=\pm\frac{\text{b}}{\text{a}}$
	324		Length of Latus Recturn	$L=\frac{2b^2}{a}$
	325			*Axes Rotated* $45°$: $xy=k$
	326	Limit Notasyonu		$\lim_{x\to a} f(x)=L$
	327	Apsisler-Ordinatlar farkı		$\Delta x=x_2-x_1, \Delta y=y_2-y_1$
	328	Türevin Tanımı		$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ $=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(y+\Delta y)-y}{\Delta x}$
	329	Zincir Kuralı		$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$
	330	**TÜREV**	Sabitin türevi	$\frac{d(c)}{dx}=0$
	331		Kuvvet fonksiyonunun türevi	$\frac{d}{dx}x^n=nx^{n-1}$
	332		Bir sabitle bir fonksiyonun çarpımının türevi	$\frac{d(cu)}{dx}=c\frac{du}{dx}$
	333		x'in kuvvetinin c katının türevi	$\frac{d}{dx}cx^n=cnx^{n-1}$
	334		Toplamın türevi	$\frac{d}{dx}(u+v+w)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}+\frac{dw}{dx}$
	335		u'nun kuvvetinin c katının türevi	$\frac{d(cu^n)}{dx}=cnu^{n-1}\frac{du}{dx}$
	336		Çarpımın türevi	$\frac{\text{d(uv)}}{\text{dx}}=\text{u}\frac{\text{dv}}{\text{dx}}+\text{v}\frac{\text{du}}{\text{dx}}$

	337		Üçlü çarpım türevi	$\frac{d(uvw)}{dx}=uv\frac{dv}{dx}+uw\frac{dv}{dx}+vw\frac{du}{dx}$
	338		N terimin çarpım türevi	N terimin herbiri, kendi türevi ile diğer (N-1) terimin çarpımından oluşur ve toplam terim sayısı N tanedir.
	339		Bölümün türevi	$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$
	340		Trigonometrik fonksiyonların türevi	$\frac{d(\sin u)}{dx}=\cos u\frac{du}{dx}$
	341			$\frac{d(\cos u)}{dx}=-\sin u\frac{du}{dx}$
	342			$\frac{d(\tan u)}{dx}=\sec^2 u\frac{du}{dx}$
	343			$\frac{d(\cot u)}{dx}=-\csc^2 u\frac{du}{dx}$
	344			$\frac{d(\sec u)}{dx}=\sec u\ \tan u\frac{du}{dx}$
	345			$\frac{d(\csc u)}{dx}=-\csc u\ \cot u\frac{du}{dx}$
	346		Ters Trigonometrik Fonksiyonların türevi	$\frac{d(\sin^{-1}u)}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$ -1 < u < 1
	347			$\frac{d(\cos^{-1}u)}{dx}=\frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$ -1 < u < 1
	348			$\frac{d(\tan^{-1}u)}{dx}=\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$
	349			$\frac{d(\cot^{-1}u)}{dx}=\frac{-1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$
	350			$\frac{d(\sec^{-1}u)}{dx}=\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$ |u|>1
	351			$\frac{d(\csc^{-1}u)}{dx}=\frac{-1}{u\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$ |u|>1
	352		Logaritmik ve Üstel fonksiyonların türevi	(a) $\frac{d}{dx}(\log_b u)=\frac{1}{u}\log_b e\frac{du}{dx}$ (b) $\frac{d}{dx}(\log_b u)=\frac{1}{u\ in\ b}\frac{du}{dx}$
	353			$\frac{d}{dx}(\ln u)=\frac{1}{u}\frac{du}{dx}$
	354			$\frac{d}{dx}b^u=b^u\frac{du}{dx}\ln b$
	355			$\frac{d}{dx}e^u=e^u\frac{du}{dx}$
	356		Maksimum ve Minimum Noktalar	Maksimum ve Minimum noktaları bulmak için birinci türev alınıp sıfıra eşitlenerek elde edilen denklem çözülür.Bu denklemin çözümü olan x değerlerine sabit noktalar denir ve bu noktalar ekstremum (maksimum yada minimum) adayıdır.

357		Birinci Türev Testi		$f'(x_0)=0$ olsun.Eğer, x_0 noktasında birinci türev işaret değiştirirse, x_0 noktası ekstremum noktadır.
358		İkinci Türev Testi		Eğer, $f'(x_0)=0$ iken x_0 noktasında: $f''(x_0) > 0$ ise noktası minimum $f''(x_0) < 0$ ise noktası maksimum noktadır. $f''(x_0) = 0$ ise test başarısız
359		Büküm Noktaları		$f''(x_0)=0$ olsun. Eğer, x_0 noktasında ikinci türev işaret değiştirirse noktası büküm noktasıdır.
360		Newton Metodu		$x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
361		Diferansiyel (y'nin)		$dy = f'(x)dx$
362		Diferansiyel ile yaklaşık hesap		$\Delta y \cong \dfrac{dy}{dx}\Delta x$
363		**Belirli İntegral**		$\int F'(x)dx = F(x)+c$
364				$\int f(xdx = F(x)+c) \quad f(x)=F'(x)$
365				$A = \int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$
366		**Riemann Toplamları ile İntegral Tanımı**		$A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i{}^*)\Delta x = \int_a^b f(x)dx$
367		**Belirli İntegralin Özellikleri**		$\int_a^b c\, f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$
368				$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
369				$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^c f(x)\,dx$
370				$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$
371	**Yaklaşık İntegral**		Orta Nokta Metodu	$A \cong \sum_{i=1}^{n} f(x_i{}^*)\Delta x$ burada; $f(x_i{}^*)$, İ.dilimin yüksekliğidir.
372			Ortalama Ordinat Metodu	$A = y_{ort}(b-a)$
373			Yamuk Kuralı	Dilim genişliği eşit değilse; $A \cong \frac{1}{2}[(x_1-x_0)(y_1+y_0)+(x_2-x_1)(y_2+y_1)+\cdots$ $+(x_n-x_{n-1})(y_n+y_{n-1})$

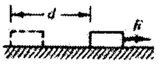
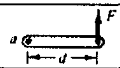
	374				Dilim genişliği eşitse, $h = x_1 - x_0$: $A \cong h[\frac{1}{2}(y_0 + y_n) + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}]$
	375			Prismoidal Formülü	$A = \frac{h}{2}(y_0 + 4y_1 + y_2)$
	376			Simpson Kuralı	$A \cong \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots + 4y_{n-1} + y_n)$
	377	**Dönel Cisimlerin Hacimleri**	**Disk Metodu**		Hacim = dV = πr^2dh
	378				$V = \pi \int_a^b r^2\, dh$
	379		**Halka Metodu**		$dV = \pi(r_0^{\,2} - r_i^{\,2})\, dh$
	380				$V = \pi \int_a^b (r_0^{\,2} - r_i^{\,2})\, dh$
	381		**Tabaka Metodu**		$dV = 2\pi r h\, dr$
	382				$V = 2\pi \int_a^b rh\, dr$
	383	**Yay Uzunluğu**			$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$

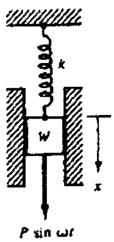
	384				$s=\int_c^d \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$
	385	**Yüzey Alanı**			x-ekseni; $s=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$
	386				x-ekseni; $s=2\pi\int_a^b x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$
	387	**Ağırlık ve Kütle Merkezi**			$\bar{x}=\frac{1}{A}\int_a^b x(y_2-y_1)\,dx$
	388				$\bar{y}=\frac{1}{2A}\int_a^b (y_1+y_2)(y_2-y_1)\,dx$
	389				x-ekseni; $\bar{x}=\frac{\pi}{V}\int_a^b xy^2\,dx$
	390				y-ekseni; $\bar{y}=\frac{\pi}{V}\int_c^d yx^2\,dy$
	391				$I_p = Ar^2$
	392				$I_x=\frac{1}{3}\int y^3\,dx$
	393				$I_y=\int x^2 y\,dx$
	394				**Kutupsal:** $I_0=I_x+I_y$
	395				**Radius of Gyration:** $r=\sqrt{\frac{I}{A}}$
	396				Paralel Eksen Teoremi $I_B=I_A+Ax^2$

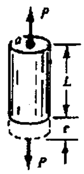
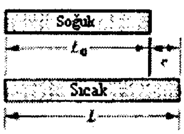
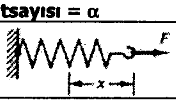
	397				$I_P = Mr^2$	
	398			Disk: 	$dI = \frac{m\pi}{2} r^4\, dh$	
	399			Halka 	$dI = \frac{m\pi}{2} (r_0^{\,4} - r_i^{\,4})\, dh$	
	400			Tabaka 	$dI = 2\pi m r^3 h\, dr$	
	401			Katıların döndürülmesi 	Disk Metodu: $I = \frac{m\pi}{2} \int_a^b r^4\, dh$	
	402				Shell(Tabaka) Metodu: $I = 2\pi m \int r^3 h\, dr$	
	403				Paralel Eksen Teoremi $I_B = I_A + Ms^2$	
	404				Ortalama Ordinat Formülü: $y_{avg} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$	
	405				Etkin (Efektif) Değer: $rms = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x)]^2\, dx}$	
	406	1.MERTEBE DİFERANSİYEL DENKLEMLER	**Değişkenlerine Ayrılabilen**	$f(y)\,dy = g(x)\,dx$		
	407		**İntegral Yöntemi**	$f(y)\,dy = g(x)\,dx$		
	408			$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right)$		
	409			$\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right)$		
	410			$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = d\left(\tan^{-1}\frac{y}{x}\right)$		
	411		**Homojen D.D**	$M\,dx + N\,dy = 0$ $(y = ux)$ konarak		
	412		**Lineer D.D**	Form	$y' + Py = Q$	
	413			Integral Çarpanı	$R = e^{\int P dx}$	
	414			Çözüm	$ye^{\int P dx} = \int Q e^{\int P dx}\, dx$	
	415	2.MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER	HOMOJEN D.D	Form	$ay'' + by' + cy = 0$	
	416			Karakteristik Denklem	$am^2 + bm + c = 0$	
				Çözüm Formu	Karakteristik Denklemin Kökleri	Çözüm

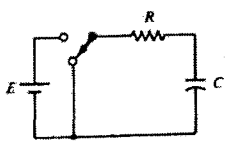
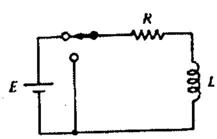
417				Reel ve eşit değil	$y=c_1e^{m_1x}+c_2e^{m_2x}$
418				Reel ve eşit	$y=c_1e^{mx}+c_2xe^{mx}$
419				Kompleks	$(a)\ y=e^{ax}(C_1\cos bx+C_2\sin bx)$ veya $(b)\ y=Ce^{ax}\sin(bx+\phi)$
420		HOMOJEN OLMAYAN	Form	$ay''+by'+cy=f(x)$	
421		HOMOJEN OLMAYAN	Genel Çözüm	$y=\underbrace{y_c}_{\text{Homojen Kısmın Çözümü}}+\underbrace{y_p}_{\text{Sağ Taraf Çözümü}}$	
422	**Bernoulli Denklemi**			$\frac{dy}{dx}+Py=Qy^n$ Burada; $(z=y^{1-n})$ dönüşümü yapılır.	
423	**Laplace Dönüşümü**			Tanım	$\ell[f(t)]=\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$
424	**Laplace Dönüşümü**			Ters Laplace	$\ell^{-1}[F(s)]=f(t)$
425	**Nümerik Çözümler**		**Euler Metodu**	$x_q=x_p+\Delta x$ $y_q=y_p+m_p\Delta x$	
426	**Nümerik Çözümler**		**Değiştirilmiş Euler Metodu**	$x_q=x_p+\Delta x$ $y_q=y_p+\left(\frac{m_p+m_q}{2}\right)\Delta x$	
427	**Nümerik Çözümler**		**Runge-Kutta Metodu**	$x_q=x_p+\Delta x$ $y_q=y_p+m_{avg}\Delta x$ $m_{avg}=\left(\frac{1}{6}\right)(m_p+2m_r+2m_s+m_q)$ $m_p=f'(x_p,y_p)$ $m_r=f'\left(x_p+\frac{\Delta x}{2},y_p+m_p\frac{\Delta x}{2}\right)$ $m_s=f'\left(x_p+\frac{\Delta x}{2},y_p+m_r\frac{\Delta x}{2}\right)$ $m_s=f'(x_p+\Delta x,\ y_p+m_s\Delta x)$	

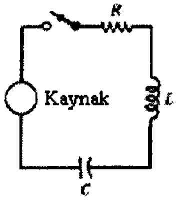
	428	Kuvvet Serileri	Notasyon		$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$
	429		Yakınsaklık testleri	Limit Testi	$\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$
	430			Kısmi toplamlar testi	$\lim\limits_{n \to \infty} S_n = S$
	431			Oran testi	Eğer $\lim\limits_{n\to\infty} \left\| \frac{u_{n-1}}{u_n} \right\|$ (a) 1' den küçükse, seri yakınsaktır. (b) 1' den büyükse, seri ıraksaktır (c) 1' e eşitse, test edilemez.
	432		Maclaurent Serisi		$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$
	433		Taylor Serisi		$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$
	434			n. terimden sonra kalan terim	$R_n = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(c)$ c, a ile x arasında
	435	Fourirer Serileri	Periyod 2π		$f(x) = a_0/2 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \cdots + a_n \cos nx + \cdots$ $+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \cdots + b_n \sin nx + \cdots$
	436			burada	$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$
	437				$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx$
	438				$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx$
	439		Periyod 2L		$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\frac{\pi x}{L} + a_2 \cos\frac{2\pi x}{L} + a_3 \cos\frac{3\pi x}{L} + \cdots$ $b_1 \sin\frac{\pi x}{L} + b_2 \sin\frac{2\pi x}{L} + b_3 \sin\frac{3\pi x}{L} + \cdots$
	440			Katsayılar	$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx$
	441				$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\frac{n\pi x}{L}\, dx$
	442				$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin\frac{n\pi x}{L}\, dx$
	443		Simetrik dalga şekli	Tek ve çift fonksiyonlar	(a) Tek fonksiyonların fourier serilerine açılımları yalnız sinüslü terimlerden oluşur. (sabit yoktur) (b) Çift fonksiyonların fourier serilerine açılımları yalnız kosinüslü terimlerden oluşur. (sabit vardır)
	444			Yarım dalga simetri	Bir dalganın fourier dönüşümleri yalnızca tek harmoniklere sahipse yarım dalga simetri vardır

	A1	Karışım A, B, C .... gibi maddelerden oluşsun		Toplam karışım miktarı= A' nın miktarı + B' nin miktarı +.....
	A2			Her karışımın son değeri= Başlangıç miktarı + eklenen miktar – çıkarılan miktar
	A3	İki karışım		Final amount of A from mixture 1 + amount of A from mixture 2
	A4	Akış miktarı		Akış miktarı = akış oranı x akma zamanı A=QT
	A5	Yapılan iş = iş oranı x çalışma süresi		
	A6		Sabit kuvvet	İş = Kuvvet X Yol = Fd
	A7		Değişken kuvvet	$İş = \int_a^b F(x)\,dx$
FİNANS	A8	Birim maliyet		$\text{Birim maliyet} = \dfrac{\text{Toplam maliyet}}{\text{Birimlerin sayısı}}$
	A9	**Faiz:** t= yıl, a = ana para, n=faiz oranı, y=biriktirilmiş miktar	Basit faiz	$y = a(1+nt)$
	A10		Yıllık bileşik faiz	$y = a(1+n)^t$
	A11		Bileşik faiz (m) zaman/yıl	$y = a(1+\frac{n}{m})^{mt}$
STATİK	A12		Bir noktanın momenti	$M_a = Fd$
	A13	Denge denklemleri (Newton' nun birinci kanunu)		Dikey kuvvetler toplamı = 0
	A14			Yatay kuvvetler toplamı = 0
	A15			Bir noktadaki momentler toplamı = 0
	A16		Sürtünme katsayısı	$\mu = \dfrac{f}{N}$
HAREKET DENKLEMLERİ	A17	Lineer Hareket — Düzgün hareket (Sabit Hız)		Uzaklık = oran X time $D = Rt$
	A18	Düzgün ivmelenme (Sabit ivme a, Başlangıç hızı v_0) Serbest düşme için, a=g=9.807 m/s² = 32.2 ft/s²	t zamanda yerdeğiştirme	$s = v_0 t + \dfrac{at^2}{2}$
	A19		t anındaki hız	$v = v_0 + at$
	A20		Newton' nun İkinci Kanunu	$F = ma$
	A21	Düzgün olmayan hareket	Ortalama hız	Ortalama Hız= Toplam alınan yol / Toplam süre
	A22		Yerdeğiştirme	$s = \int v\,dt$
	A23		Ani hız	$v = \dfrac{ds}{dt}$
	A24			$v = \int a\,dt$

	A25			Ani ivme	$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$
	A26	Dönme	Düzgün hareket	Açısal yerdeğişitirme	$\theta = wt$
	A27			r yarıçapında noktanın lineer hızı	$v = wr$
	A28		Düzgün olmayan hareket	Açısal yerdeğiştirme	$\theta = \int w \, dt$
	A29			Açısal Hız	$w = \frac{d\theta}{dt}$
	A30				$w = \int \alpha \, dt$
	A31			Açısal ivme	$\alpha = \frac{dw}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$
	A32	Lineer dairesel hareket	x ve y bileşenleri	Yerdeğiştirme	(a) $x = \int v_x \, dt$ (b) $y = \int v_y \, dt$
	A33			Hız	(a) $v_x = \frac{dx}{dt}$ (b) $v_y = \frac{dy}{dt}$
	A34				(a) $v_x = \int a_x \, dt$ (b) $v_y = \int a_y \, dt$
	A35			İvme	(a) $a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}$ (b) $a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2}$
MEKANİK TİTREŞİMLER	A36	 Sürtünme katsayısı = c	Serbest salınımlar ($P = 0$)	Basit harmonik hareket	$x = x_0 \cos w_n t$
	A37				Sönümsüz açısal hız $w_n = \sqrt{\frac{kg}{W}}$
	A38				Doğal frekans $f_n = \frac{w_n}{2\pi}$
	A39			Eksik Sönümlü (Underdamped)	$x = x_0 e^{-at} \cos w_d t$
	A40				Sönümlü Açısal Hız $w_d = \sqrt{w_n^2 - \frac{c^2 g^2}{W^2}}$
	A41			Aşırı Sönümlü (overdamped)	$x = C_1 e^{m_1 t} + C_2 e^{m_2 t}$
	A42		Kuvvet Titreşimleri	Maksimum Sapma	$x_0 = \frac{P_g}{W\sqrt{4a^2 w^2 + (w_n^2 - w^2)^2}}$
	A43	Yoğunluk			*Yoğunluk = Kütle / Hacim*
	A44	Kütle			*Kütle = Ağırlık / Yerçekimi ivmesi*
	A45	Özgül Ağırlık			*SG = Madde Yoğunluğu / Su Yoğunluğu*

	A46	 **Basınç**	Bir yüzeydeki toplam kuvvet	$Kuvvet = Basınç \; X \; Yüzey$
	A47		Suyun içindeki bir yüzeye etkiyen kuvvet	$F = \delta \int y \, dA$
	A48			$F = \delta \bar{y} A$
	A49	**PH**	pH = -10 log konsantrasyon	
SICAKLIK	A50	**Celsuis derecesi (C) ile Fahrenheit derecesi arasındaki ilişki (*F*)**	$C = \frac{5}{9}(F-32)$	
	A51		$F = \frac{9}{5}C + 32$	
MATERYAL KUVVETLERİ	A52	 **Gerilme yada sıkıştırma**	Normal gerilim	$a = \frac{P}{a}$
	A53		Uzama	$\varepsilon = \frac{e}{L}$
	A54		Modül elastikiyeti ve Hooke Kanunu	$E = \frac{PL}{ae}$
	A55			$E = \frac{a}{\varepsilon}$
	A56	**Sıcaklıkla genleşme** 	Uzama	$e = \alpha L \, \Delta t$
	A57		Yeni uzunluk	$L = L_0(1 + \alpha \Delta t)$
	A58		Birim uzama katsayısı	$\varepsilon = \frac{e}{L} \alpha \Delta t$
	A59		Gerilme	$\sigma = E\varepsilon = E\alpha \, \Delta t$
	A60	**Sıcaklık değişimi= Δt Sıcaklık genleşme katsayısı = α**	Gerilme kuvveti	$P = a\sigma = aE\alpha \, \Delta t$
	A61		Bir yaya etki eden kuvvet	F = yay katsayısı X uzunluk = kx
	A62	**Ohm Kanunu**	$\text{Akım} = \frac{\text{Gerilim}}{\text{Direnç}}$	$i = \frac{V}{R}$
	A63	**Direnç Eşdeğerleri**	Seri	$R = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots$
	A64		Paralel	$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots$
	A65	**Bir direncin gücü**	$Güç = P = VI$	
	A66		$P = \frac{V^2}{R}$	
	A67		$P = I_2 R$	

A68	Kirchhoff Kanunu	Çevreler	Bir kapalı çevredeki gerilimlerin toplamı sıfırdır.	
A69		Düğümler	Bir düğüme giren ve çıkan akımların toplamı sıfırdır.	
A70	Sıcaklıkla direncin değişimi		$R = R_1[1+\alpha(t-t_1)]$	
A71	Bir kablonun direnci 		$R = \frac{\rho L}{A}$	
A72	Kapasitör Eşdeğerleri	Seri	$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots$	
A73		Paralel	$C = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots$	
A74	V gerilimin de C kapasitesinin yükü		$Q = CV$	
			Sinusoidal Form	**Kompleks Form**
A75	Alternatif Gerilimi		$v = V_m \cos(wt + \phi_1)$	$V = V_m \angle \phi_1$
A76	Alternatif Akım		$I = I_m \cos(wt + \phi_1)$	$I = I_m \angle \phi_2$
A77	Periyod		$P = \frac{2\pi}{w}$ *saniye*	
A78	Frekans		$f = \frac{1}{P} = \frac{w}{2\pi}$ *hertz*	
A79	Akım		$i = \frac{dp}{dt}$	
A80	Yük		$q = \int i\, dt$ *coulombs*	
A81	Kapasitör	Ani Akım	$i = C\frac{dv}{dt}$	
A82		Ani Gerilim	$v = \frac{1}{C}\int i\, dt$ *volt*	
A83		Dolma yada boşalma anında akım		$i = \frac{E}{R}e^{-t/RC}$
A84		Boşalma anında Gerilim		$v = Ve^{-t/RC}$
A85		Ani akım	$i = \frac{1}{L}\int v\, dt$ [amper]	
A86		Ani Gerilim	$v = L\frac{di}{dt}$	
A87		Dolma anında akım	 Seri RL Devresi	$i = \frac{V}{R}(1-e^{-Rt/L})$
A88		Dolma yada boşalma anında gerilim		$v = Ve^{-Rt/L}$

	A89			Rezonans Frekansı	$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{LC}}$
	A90			Dirençsiz: Seri LC Devresi:	$i = \frac{V}{\omega_n L} \sin \omega_n t$
	A91		**DC Kaynak**	Underdamped	$i = \frac{V}{\omega_d L} e^{-at} \sin \omega_d t$
	A92				$\omega_d = \sqrt{\omega_n^2 - \frac{R^2}{4L^2}}$
	A93	**Seri *RLC* Devresi** 		Overdamped	$i = \frac{V}{2i\omega_d L}[e^{(-a+i\omega_d)t} - e^{(-a-i\omega}$
	A94		**AC Kaynak**	Endüktif Reaktans	$X_L = \omega L$
	A95			Kapasitif Reaktans	$X_C = \frac{1}{\omega C}$
	A96			Toplam Reaktans	$X = X_L - X_C$
	A97			Empedans	$\vert Z \vert = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right.}$
	A98			Faz açısı	$\phi = \arctan \frac{X}{R}$
	A99			Empedansın kompleks formu	$Z = R + iX = Z\angle\phi = Ze^{i\phi}$
	A100			Kararlı hal akımı	$i_{ss} = \frac{V}{Z}\sin(\omega t - \phi)$
	A101	**AC için ohm kanunu**	$V = ZI$		
	A102	**Desibel cinsinden kazanç yada kayıp**	$G = 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1} \quad dB$		