

ÖNSÖZ

Kitabımızın ikinci baskısında ilk baskıya ilaveten teknik branşlarda eğitim veren Meslek Yüksekokulları, Teknik Eğitim Fakülteleri, Askeri Okullar ve Mühendislik Fakültelerinde ihtiyaç duyulan konular ve uygulamaları ele alınmıştır. Öğrencilerin matematik yazılım programlarının en önemlisi olan MATLAB hakkında bilgi sahibi olmaları ve bu kitaptaki konuların MATLAB ile nasıl kullanılacağını öğrenmeleri için yeni bir bölüm ilave edilmiştir.

Bununla birlikte, ilk baskıda gerek bizden gerekse baskıdan kaynaklanan hataları gidermeye çalıştık. Kendi alanında önemli bir katkı sağlayacağını düşündüğümüz bu ders kitabının matematik düşüncenin gelişmesine katkıda bulunacağı inancındayız.

Kitap hakkındaki eleştirilerinizi aşağıdaki elektronik posta adresimize göndermeniz temennisiyle...

tektas@marmara.edu.tr

Yrd.. Doç. Dr. Mehmet TEKTAS

Yrd . Doç. Dr. Necla TEKTAS

Ekim, 2006

İSTANBUL

Rahmetli babalarımız Mustafa TEKTAS ve Kaşif ZÜMBÜL anısına ithaf ediyoruz. . .

M A T E M A T I K
A I
T 1 T
E A
M

M
E A
T 1 T
A I
M A T I K

2.BASKI

Mehmet & Necla TEKTAŞ

**Ekim, 2005
İSTANBUL**

M A T E M A T İ K
A İ
T 1 T
E A
M

M
E A
T 1 T
A İ
M A T E M A T İ K

M A T E M A T İ K

A

İ

T

1

T

E

A

M

E

A

T

1

T

A

İ

M A T E M A T İ K

1. BÖLÜM

1. SAYI KÜMELERİ

1.1.DOĞAL SAYILAR KÜMESİ

Matematikte elemanları gerçek sayılar olan kümelerin önemli bir yeri vardır. Sonlu bir kümenin elemanlarının kaç tane olduğunu belirten $0,1,2,3,\dots$ 'n sayılarından her birine doğal sayı denir. Doğal sayılar kümesi N ile gösterilir. Doğal sayılar kümesi;

$$N = \{x \mid x \text{ bir doğal sayı}\} = \{0,1,2,3,\dots\} \text{ şeklindedir.}$$

1.2.TAM SAYILAR KÜMESİ

Doğal sayılar kümesi toplama işleminin tersine yani çıkarma işlemine göre kapalı olmadığından, birçok problemin çözümünde yetersiz kalmaktadır. Bu amaçla doğal sayıları da kapsayan çıkarma işlemine göre kapalı olan, toplama işlemine göre her elemanın tersi bulunan küme tanımlanmıştır. Tanımlanan bu kümeye Tam Sayılar Kümesi denir ve Z harfi ile gösterilir.

$Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ kümesinin her bir elemanına tamsayı denir.

$$Z^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$Z^- = \{\dots -3, -2, -1\}$$

$$Z = Z^- \cup \{0\} \cup Z^+ \text{ 'dır.}$$

1.3.RASYONEL SAYILAR KÜMESİ

Tam sayılar kümesi çarpma işleminin tersine yani bölme işlemine göre kapalı olmadığından daha geniş bir kümeye ihtiyaç duyulmaktadır. Bu amaçla bölme işleminin yapılabildiği bu kümeye Rasyonel Sayılar Kümesi denir ve Q harfi ile gösterilir.

$$Q = \left\{ x \mid \frac{p}{q}, \quad p \text{ ve } q \in Z, \quad q \neq 0 \right\} \text{ veya}$$

$$Q = \left\{ \dots, -8, -\frac{7}{2}, -2, -\frac{1}{2}, 0, 1, \frac{3}{2}, \dots \right\} \text{ şeklindedir.}$$

O halde her doğal sayı bir tam sayı, her tam sayı bir rasyonel sayı olduğundan aralarında; $N \subset Z \subset Q$ ilişkisi vardır.

1.4. İRRASYONEL SAYILAR KÜMESİ

Doğal sayıların genişletilmesi ile tam sayıları daha sonra tam sayıların genişletilmesi ile rasyonel sayılar elde edilir. Ayrıca rasyonel sayılar kümesi yoğun bir kümedir. Yani iki rasyonel sayı arasında sonsuz çoklukta rasyonel sayı vardır. Bu yoğunluğa rağmen bütün rasyonel sayıların sayı doğrusuna yerleştirilmesine karşın yine sayı doğrusu üzerinde boşluklar kalmaktadır. Örneğin; karesi 2 olan sayılar gibi. O halde rasyonel sayılar kümesine dahil olmayan yani hiçbir zaman $\frac{p}{q}$ şeklinde yazılamayan fakat sürekli kullanılan sayıların oluşturduğu kümeye İrrasyonel Sayılar Kümesi denir ve Q' harfi ile gösterilir.

$$Q' = \left\{ x \mid x \notin \frac{p}{q}, \quad q \neq 0 \right\}$$

şeklinde yazılır. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi$ ve e gibi sayılar irrasyonel sayılardır. Uygulamada yaklaşık rasyonel değerleri alınarak kullanılır. Yani, $\sqrt{2} = 1.41$, $\pi = 3.14$ ve $e = 2.72$ daha çok kullanılmaktadır.

1.5. REEL SAYILAR KÜMESİ

Rasyonel sayılar kümesi ile irrasyonel sayılar kümesinin birleşimine de gerçel(reel) sayılar kümesi denir ve **IR** harfi ile gösterilir. Buna göre;

$$\mathbf{IR} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{Q'}$$
 olur.

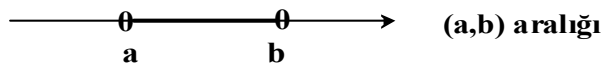
Her gerçel sayıya sayı doğrusunda bir nokta karşılık geldiğinden gerçel sayılar kümesi en geniş sayı kümesidir.

1.6. FONKSİYON KAVRAMI

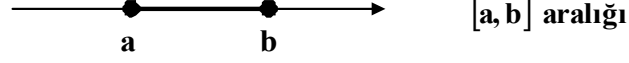
Bu bölümde, fonksiyon kavramını tanımlamada bize yardımcı olacak bazı temel tanımlamalar özetle ele alınmış olup, buna bağlı olarak fonksiyon kavramı incelenmiştir.

1.6.1. Aralık: $a, b \in \mathbf{IR}$ ve $a < b$ olsun

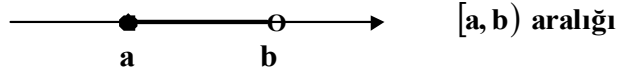
1) a ile b arasındaki tüm reel sayılar kümesine a 'dan b 'ye **açık aralık** denir ve **(a ,b)** veya **$a < x < b$** şeklinde gösterilir.



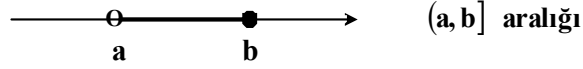
2) (a,b)açık aralığına a ile b sayılarının da katılmasıyla bulunan kümeye **kapalı aralık** denir ve $[a, b]$ veya $a \leq x \leq b$ şeklinde gösterilir.



3) Eğer a aralığa dahil, b dahil değil ise buna **soldan kapalı sağdan açık aralık** denir ve $[a, b)$ veya $a \leq x < b$ şeklinde gösterilir.



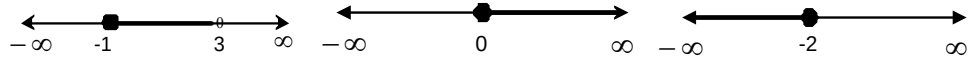
4) Eğer a aralığa dahil değil, b dahil ise buna **soldan açık sağdan kapalı aralık** denir ve $(a, b]$ veya $a < x \leq b$ şeklinde gösterilir.



a'dan büyük reel sayılar kümesi $(a, +\infty)$, a'dan küçük reel sayılar kümesi $(-\infty, a)$, tüm reel sayılar kümesi $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ şeklinde gösterilir.

Örnek : $[-1, 3)$, $[0, \infty)$ ve $(-\infty, 2]$ aralıklarını sayı ekseninde gösterelim.

Çözüm:



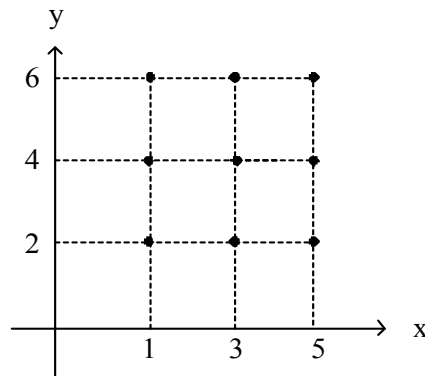
1.6.2. Kartezyen Çarpım: A ve B boş olmayan iki küme olsun.

$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ ve } b \in B\}$ kümesine **A kartezyen B** kümesi denir. Bu kümenin elemanları sıralı ikililerden oluşur. Eleman sayısı kümelerin eleman sayıları çarpımıdır.

Yani; $s(A \times B) = s(A) \times s(B)$ 'dir.

Örnek: $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ olsun. $A \times B$ kümesini yazınız ve grafikte gösteriniz.

Çözüm: $A \times B = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (5, 2), (5, 4), (5, 6)\}$ ve grafiği aşağıdadır.



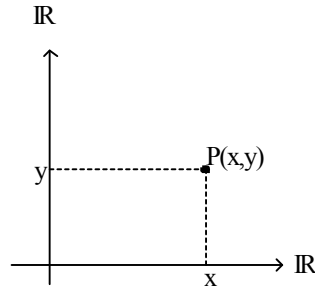
1.6.3.Kartezyen Çarpımının Özellikleri:

- a) $A \times B \neq B \times A$ 'dır. Kartezyen çarpımının değişme özelliği yoktur.
- b) $(A \times B) \times C = A \times (B \times C) = A \times B \times C$ 'dır. Kartezyen çarpımının birleşme özelliği vardır.
- c) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ kartezyen çarpımının “ $\cup$ ” işleminin dağılma özelliği vardır.
- d) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ kartezyen çarpımının “ $\cap$ ” işleminin dağılma özelliği vardır.

1.6.4.Kartezyen Koordinat Sistemi:

$A=B=\mathbb{R}$ alalım.Bu durumda;

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) | x \in \mathbb{R} \text{ ve } y \in \mathbb{R}\}$ kümesinin grafik gösterimine kartezyen koordinat sistemi veya analitik düzlem denir.



Analitik düzlemde her bir nokta bir sıralı ikiliye karşılık gelirken her bir sıralı ikilide bir noktaya karşılık gelir.Kartezyen düzlemde (x,y) sıralı ikilisini göz önüne alalım.Burada,x'e sıralı ikilinin birinci bileşeni veya **apsisi** denirken y'ye sıralı ikilinin ikinci bileşeni veya **ordinatı** denir.Apsislerden oluşan eksene apsisler ekseni veya Ox-ekseni denir.

Ordinatlardan oluşan eksene de ordinatlar ekseni veya Oy-ekseni denir. **Ox**-ekseni ile **Oy**-ekseninin oluşturduğu dik koordinat sistemine **Kartezyen Koordinat Sistemi** denirken bu eksenlerin oluşturduğu düzlemede **Analitik Düzlem** denir.

1.7.Bağıntı: A ve B boş olmayan iki küme olsun. $A \times B$ kümesinin her alt kümesine A'dan B'ye bir bağıntı denir ve $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ gibi harflerle gösterilir. $s(A)=n$, $s(B)=m$ ise $s(A \times B)=n.m$ olduğundan A'dan B'ye yazılabilecek tüm bağıntıların sayısı $2^{n.m}$ tanedir.

1.7.1 Bağıntının Özellikleri:

- a) **Yansıma Özelliği:** A kümesinde tanımlı β bağıntısı ele alındığında; $\forall x \in A$ için $(x,x) \in \beta$ oluyorsa β bağıntısı yansıma özelliğine sahiptir denir.
- b) **Simetri Özelliği:** β , A üzerinde tanımlı bir bağıntı olsun. Eğer; $\forall (x,y) \in \beta$ için $(y,x) \in \beta$ oluyorsa β bağıntısı simetri özelliğine sahiptir denir.
- c) **Ters Simetri Özelliği:** β , A üzerinde tanımlı bir bağıntı olsun. Eğer; $x \neq y$ ve $(x,y) \in \beta$ oluyorsa β ters simetri özelliğine sahiptir denir.
- d) **Geçişme Özelliği:** β , A'da tanımlı bir bağıntı iken; $(x,y) \in \beta$ ve $(y,z) \in \beta$ için $(x,z) \in \beta$ oluyorsa β bağıntısı geçişme özelliğine sahiptir denir.

1.7.2. Bağıntı Çeşitleri:

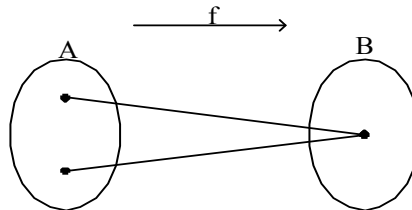
1.7.2.1. Denklik Bağıntısı: Eğer, A kümesi üzerinde tanımlı bir β bağıntısının yansıma, simetri ve geçişme özellikleri varsa β bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

1.7.2.2. Sıralama Bağıntısı: Eğer, A kümesi üzerinde tanımlı bir β bağıntısı yansıma, ters simetri ve geçişme özelliklerine sahipse β bağıntısı sıralama bağıntısı olarak isimlendirilir.

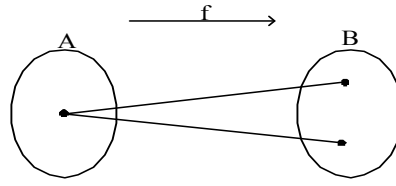
1.8. Fonksiyonun Tanımı :

A ve B boş olmayan iki küme olsun. Eğer A'dan B'ye tanımlanan bir f bağıntısı aşağıdaki şartları sağlıyorsa **f'ye A'dan B'ye bir fonksiyondur denir ve $f : A \longrightarrow B$ ve $A \xrightarrow{f} B$ şeklinde gösterilir.**

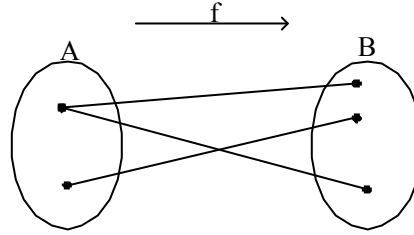
- i) A'nın her elemanı B'nin en az bir elemanı ile eşlenmelidir. (A kümesinde boşta eleman kalmayacak.)
- ii) A'nın her elemanı B'nin birden fazla elemanı ile eşlenmemelidir. (B'de boşta eleman kalabilir.) Şekil ile ifade edecek olursak;



Bu şekilde f fonksiyondur.



Bu şekilde f fonksiyon değildir.Çünkü (ii). şart sağlanmıyor.



Bu şekilde f fonksiyon değildir.Çünkü (i). şart sağlanmıyor.

A'dan B'ye tanımlanan f fonksiyonunu göz önüne alalım. $f : A \rightarrow B$ olsun. Burada, A kümesine **tanım kümesi**, B kümesine **değer kümesi** ve $f(A)$ kümesine de A'nın **görüntü kümesi** denir.Böylece; $f = A \rightarrow B$
 $x \rightarrow y = f(x)$ şeklinde tanımlanan fonksiyonda tanım kümesinin elemanlarına **(x) bağımsız değişken** denirken değer kümesinin elemanlarına da **bağımlı değişken veya fonksiyon** denir.Sonuç olarak;

$$f = A \rightarrow B$$

$$x \rightarrow y = f(x) \text{ şeklinde tanımlanan } f \text{ fonksiyonunda } \forall x \in A \text{ için } (x, y) = (x, f(x))$$

olup y 'ye x 'in f altındaki görüntüsü denir.Belli başlı fonksiyonlar şunlardır.

i) Eğer; $A=B=\mathbb{R}$ ise;

$$f = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow y = f(x)$$

fonksiyonuna gerçel değerli tek değişkenli fonksiyon denir.

ii) Eğer; $A=\mathbb{R}$ ve $B=\mathbb{R}^2$ ise;

$$f = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$x \rightarrow (x, y)$$

fonksiyonuna gerçel değerli iki değişkenli fonksiyon denir.

iii)Eğer ; $A=\mathbb{R}$, $B=\mathbb{R}^n$ ise;

$$f = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

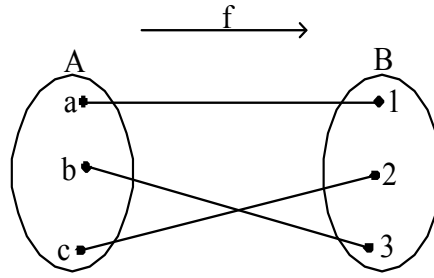
$$x \rightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

fonksiyonuna gerçel değerli “n” değişkenli fonksiyon denir.

1.9.Fonksiyon Çeşitleri:

1.9.1.İçine Fonksiyon: $f : A \rightarrow B$ fonksiyonu verilsin.Eğer, $f(A) \subsetneq B$ oluyorsa $(f(A), B$ 'nin özalt kümesi ise) f içine fonksiyondur.

Örneğin;

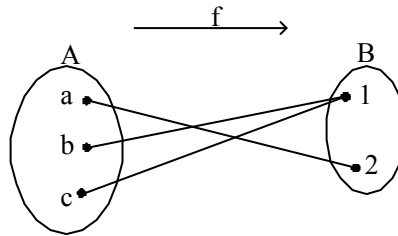


$$A = \{a, b, c, d\}, B = \{1, 2, 3\}$$

$$f(A) = \{f(a), f(b), f(c), f(d)\} = \{2, 3\} \text{ ise } f(A) \subsetneq B \text{ olduğundan } f \text{ içine fonksiyondur.}$$

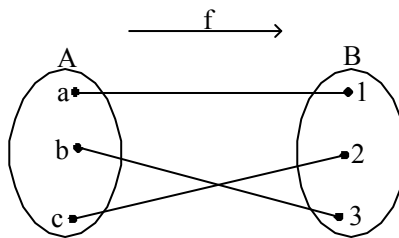
NOT: $\subsetneq$ sembolünü özalt küme tanımından $f(A)$, B 'nin kendisinden farklı her alt kümesi olmalı şeklinde tanımlayabiliriz.

1.9.2. Örten Fonksiyon: $f : A \rightarrow B$ 'ye fonksiyonunda $f(A) = B$ oluyorsa f örten fonksiyondur.**Örneğin;**



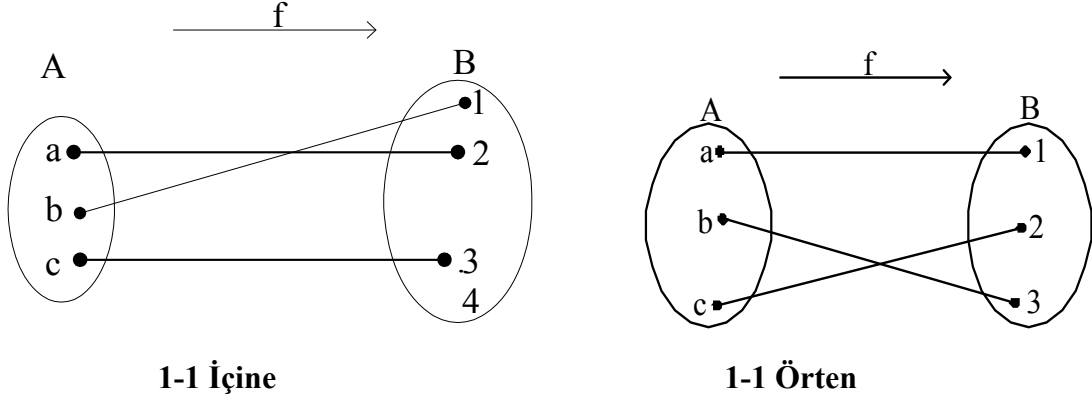
$$A = \{a, b, c\}, B = \{1, 2\} \text{ ise } f(A) = \{f(a), f(b), f(c)\} = \{1, 2\} \text{ ve } f(A) = B \text{ olduğundan, } f \text{ örtendir.}$$

1.9.3. Birebir Fonksiyon: $f : A \rightarrow B$ 'ye fonksiyon olsun.Eğer, $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$ için $f(x_1) \neq f(x_2)$ oluyorsa **f , 1-1 fonksiyondur** denir.Yani, tanım kümesinin farklı elemanlarının görüntüleri de farklı ise bu fonksiyon bire-bir fonksiyondur.**Örneğin;**



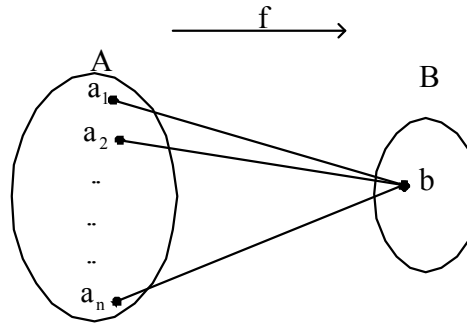
$$A = \{a, b, c\}, B = \{1, 2, 3\} \text{ ise } f(A) = \{f(a), f(b), f(c)\} = \{2, 1, 3\}$$

Bir başka deyişle, $f(A)=B$ ve B' 'de boşta eleman kalmıyorsa fonksiyon bire-bir denir.



1.10. Temel Fonksiyonlar:

1.10.1.Sabit Fonksiyon: $f: A \rightarrow B'$ ye fonksiyonu verilsin. $\forall a \in A$ için $f(a)=b \in B$ oluyorsa; f fonksiyonu sabittir denir.(Şekil.1.1)



Şekil.1.1. Sabit Fonksiyon Grafiği

1.10.2.Birim Fonksiyon: $f: A \rightarrow B'$ ye fonksiyonunda $\forall a \in A$ için $f(a)=a \in B$ oluyorsa f birim fonksiyondur denir ve I ile gösterilir. Böylece;

$$I: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

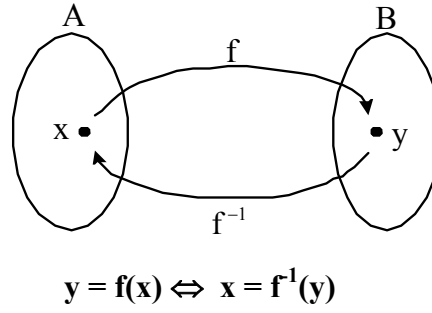
$$x \rightarrow y = x$$

fonksiyonu birim fonksiyondur ve $f(x)=x$ ile gösterilir.

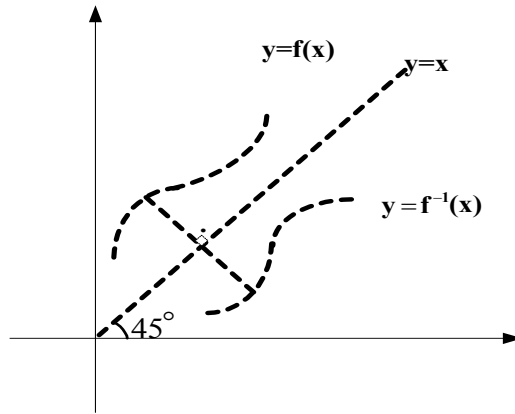
1.10.3.Ters Fonksiyon : $f: A \rightarrow B$ fonksiyonu verilsin. Eğer, f fonksiyonu birebir- örten bir fonksiyon ise f 'nin tersi tanımlıdır ve ;

$f^{-1}: B \rightarrow A$ şeklinde gösterilir ve f fonksiyonunun tersi diye adlandırılır. Buna göre ;

$f f^{-1}(x)=x$ iken $f^{-1} f(x)=x$ olur.

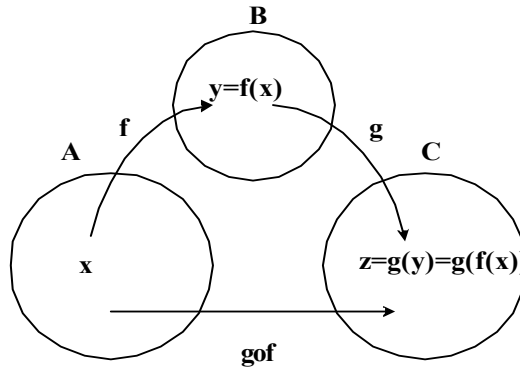


Pratikte, f fonksiyonu verildiğinde f^{-1} ters fonksiyonunu bulmak için $y = f(x)$ eşitliğinden x çözülerek $x = f^{-1}(y)$ elde edilir. Daha sonra, x yerine y , y yerine x konarak $y = f^{-1}(x)$ şeklinde ters fonksiyonun kuralı bulunmuş olur. Ayrıca, $y = f(x)$ ile $y = f^{-1}(x)$ fonksiyonlarının grafikleri $y = x$ doğrusuna göre simetriktr. (Şekil.1.2)



Şekil.1.2. $y = f(x)$ ile $y = f^{-1}(x)$ fonksiyonlarının grafikleri

1.10.4. Bileşke Fonksiyonu : $f: A \rightarrow B$, $f(x) = y$ ve $g: B \rightarrow C$, $g(y) = z$ fonksiyonları verilmiş olsun. Bu iki fonksiyonun ardarda uygulanmasıyla A 'nın elemanlarını C 'nin elemanlarına eşleyen yeni bir fonksiyon elde edilmiş olur. Buna f ile g fonksiyonlarının bileşke fonksiyonu denir ve $\mathbf{gof : A \rightarrow C}$, $\mathbf{gof(x) = g(f(x))}$ şeklinde gösterilir. (Şekil.1.3)



Şekil.1.3. f ile g fonksiyonlarının bileşke fonksiyonu grafiği

Eğer f bire bir ve örten bir fonksiyon ise $f \circ f^{-1}$ ve $f^{-1} \circ f$ bileşke fonksiyonları her elemanı kendisine eşleyecekleri için $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$ (Birim fonksiyon) olur.

Örnek : $f(x) = x+5$ ve $g(x) = 3x^2 - 5$ fonksiyonları için aşağıdakileri bulunuz.

- a) $g \circ f(x)$ b) $f \circ g(x)$ c) $g \circ f(1)$ d) $f \circ g(-\sqrt{2})$

Çözüm :

a) $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x+5) = 3(x+5)^2 - 5 = 3x^2 + 30x + 70$

b) $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(3x^2 - 5) = (3x^2 - 5) + 5 = 3x^2$

c) $g \circ f(1) = 3 \cdot (1)^2 + 30(1) + 70 = 103$

d) $f \circ g(-\sqrt{3}) = 3(-\sqrt{3})^2 = 3 \cdot 3 = 9$

1.10.5. Mutlak Değer Fonksiyonu : Bir $y = f(x)$ fonksiyonunun mutlak değer fonksiyonu

$$|f|(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ -f(x), & f(x) < 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Buna göre, her $y = f(x)$ fonksiyonu için $|f(x)| \geq 0$ 'dır. Bu nedenle,

$|f|$ 'nin grafiğine ait bütün noktalar x ekseninin üzeri veya üstündedir. $|f|$ 'nin grafiği çizilirken f 'nin grafiğinin x ekseninin üzeri veya üstündeki kısımları aynen alınır, x ekseninin altındaki kısımları simetrik olarak x ekseninin üstüne katlanır.

1.10.5.1. Mutlak Değer Özellikleri

$a, b \in \mathbb{R}$ ise :

1) $|a| = |-a|$

2) $-|a| \leq a \leq |a|$

3) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

4) $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$

5) $||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$

6) $a > 0$ ve $|x| = a \Rightarrow x = a \vee x = -a$

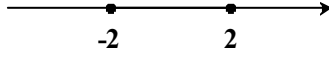
7) $a > 0$ ve $|x| < a \Rightarrow -a < x < a$

8) $a > 0$ ve $|x| > a \Rightarrow x > a \vee x < -a$

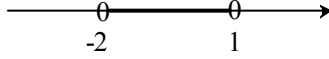
Örnek: Aşağıdaki önermelerin IR deki çözümlerini bulunuz. Sayı ekseninde gösteriniz.

a) $|x| = -2$ b) $|2x+1| < 3$ c) $|-x+3| \geq 5$

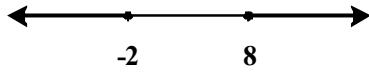
Çözüm : a) $|x| = 2 \Rightarrow x = -2 \vee x = 2$



b) $|2x+1| < 3 \Rightarrow -3 < 2x+1 < 3 \Rightarrow -4 < 2x < 2 \Rightarrow -2 < x < 1$



c) $|-x+3| \geq 5 \Rightarrow -x+3 \geq 5 \vee -x+3 \leq -5$
 $\Rightarrow -x \geq 2 \vee -x \leq -8 \Rightarrow x \leq -2 \vee x \geq 8$

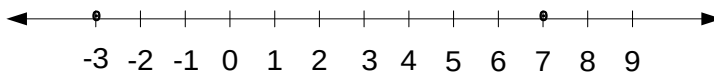


Örnek: $|x-2| = 5$ eşitliğinin çözüm kümesini bularak sayı ekseninde gösteriniz.

Çözüm:

i) $x-2 \geq 0 \Rightarrow x-2 = x-2$	ii) $x-2 < 0 \Rightarrow x-2 = -(x-2)$
$ x-2 = 5$	$ x-2 = 5$
$x-2 = 5$	$-(x-2) = 5$
$x = 7$	$-x+2 = 5$
	$x = -3$

$\mathcal{C} = \{-3, 7\}$



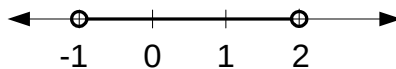
Örnek: $|2x-3| = -5$ eşitliğinin çözüm kümesi nedir?

Çözüm: $|2x-3| \geq 0$ olduğundan $|2x-3| = -5$ olamaz. O halde, $\mathcal{C} = \emptyset$

Örnek: $|1-2x| < 3$ eşitsizliğinin çözüm kümesi sayı doğrusunda gösteriniz.

Çözüm:

$|1-2x| < 3 \Rightarrow -3 < 1-2x < 3 \Rightarrow -3-1 < -2x < 3-1 \Rightarrow -4 < -2x < 2 \Rightarrow 2 > x > -1$



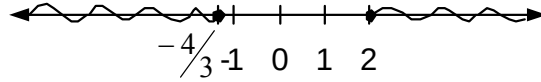
$-1 < x < 2 \Rightarrow \mathcal{C} = (-1, 2)$

Örnek: $|1 - 3x| \geq 5$ eşitsizliğinin çözüm kümesi sayı doğrusunda gösteriniz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} 1 - 3x \geq 5 &\Rightarrow 1 - 3x \geq 5 \quad \vee \quad 1 - 3x \leq -5 \\ -3x &\geq 4 \quad \vee \quad -3x \leq -6 \\ x &\leq -\frac{4}{3} \quad \vee \quad x \geq 2 \end{aligned}$$

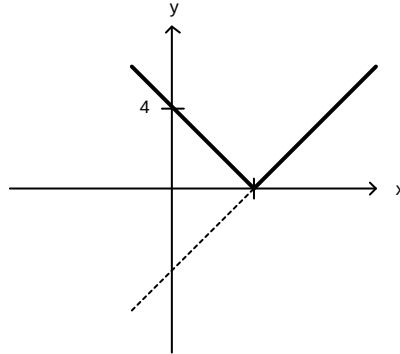
$$Ç = \left[-\infty, -\frac{4}{3}\right] \cup [2, \infty]$$



Örnek: $f(x) = |x - 4|$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm: $f(x) = \begin{cases} x - 4, & x \geq 4 \\ -(x - 4), & x < 4 \end{cases}$ Mutlak değer fonksiyonlarının grafiği çizilirken önce

mutlak değer göz önüne alınmadan fonksiyonun grafiği çizilir. Daha sonra x-ekseninin altında kalan kısmının simetriği x-ekseninin üstüne alınır.



Örnek: $f(x) = x^2 - 1$ ise $|f(x)|$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

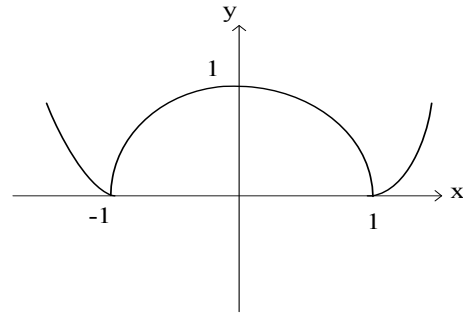
Çözüm: $x^2 - 1$ fonksiyonunun tablosunu yapalım.

$$\begin{array}{c|ccc} x & -1 & 0 & 1 \\ \hline x^2 - 1 & + & - & + \end{array}$$

$$|f(x)| = \begin{cases} x^2 - 1, & x < -1 \\ 1 - x^2, & -1 \leq x < 1 \\ x^2 - 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

şeklinde yazılır

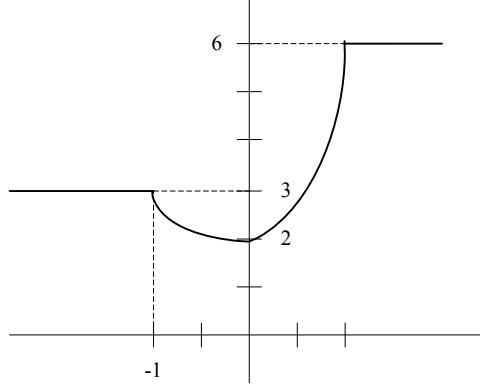
Yandaki tabloya göre grafiği çizelim.



Örnek: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki gibi veriliyor.

$$f(x) = \begin{cases} 3 & , x < -1 \\ x^2 + 1 & , -1 \leq x < 2 \\ 6 & , x \geq 2 \end{cases} \quad f(x) \text{ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.}$$

Çözüm: $f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilenlere göre;



şeklinde grafiği bulunur.

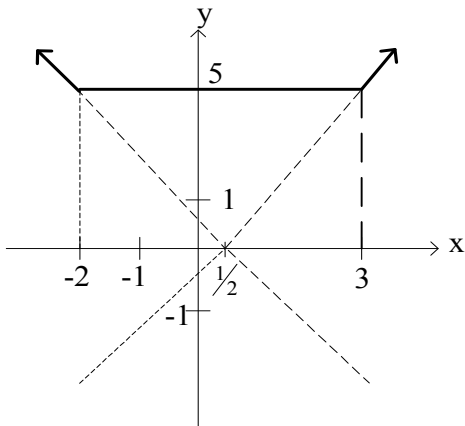
Örnek: $f(x) = |x-3| + |x+2|$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} x-3=0 & \Rightarrow x=3 \\ x+2=0 & \Rightarrow x=-2 \end{aligned} \quad \text{fonksiyonunun tablosunu yapıp işaretlerini inceleyelim}$$

x	$-\infty$	-2	3	∞
$x-3$	$3-x$	$3-x$	$\circ$	$x-3$
$x+2$	$-x-2$	$\circ$	$x+2$	$x+2$
$f(x)$	$-2x+1$	5	$2x-1$	

Burada $|x-3|$ ile $|x+2|$ nin arasında + işaretli göz önüne alınarak fonksiyon aşağıdaki gibi düzenleyerek grafiğini çizelim.



$$f(x) = \begin{cases} -2x+1 & , x < -2 \\ 5 & , -2 \leq x < 3 \\ 2x-1 & , x \geq 3 \end{cases}$$

Örnek: $f(x) = \sqrt{5 - |x - 3|}$ fonksiyonunun en geniş tanım aralığını bulunuz.

Çözüm: $5 - |x - 3| \geq 0$ için $f(x)$ fonksiyonu tanımlıdır.

$$5 - |x - 3| \geq 0 \Rightarrow |x - 3| \leq 5 \Rightarrow -5 \leq x - 3 \leq 5 \Rightarrow -2 \leq x \leq 8$$

$$T.A = [-2, 8]$$

I.10.6. İşaret Fonksiyonu:

$A \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun.

$$g(x) = \text{Sgn}.f(x) = \begin{cases} +1, & f(x) > 0 \\ 0, & f(x) = 0 \\ -1, & f(x) < 0 \end{cases}$$

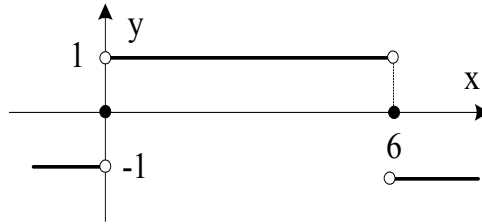
ile tanımlanan $g : A \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ fonksiyonuna **f'nin işaret fonksiyonu** denir.

Örnek: $f(x) = \text{sgn}(6x - x^2)$ fonksiyonun grafiğini çiziniz.

Çözüm: $6x - x^2 = 0 \Rightarrow x = 0, x = 6$

x	0	6
$6x - x^2$	— 0 +	0 —
$\text{sgn}(6x - x^2)$	-1	+1

tabloya göre fonksiyonunun grafiğini çizelim

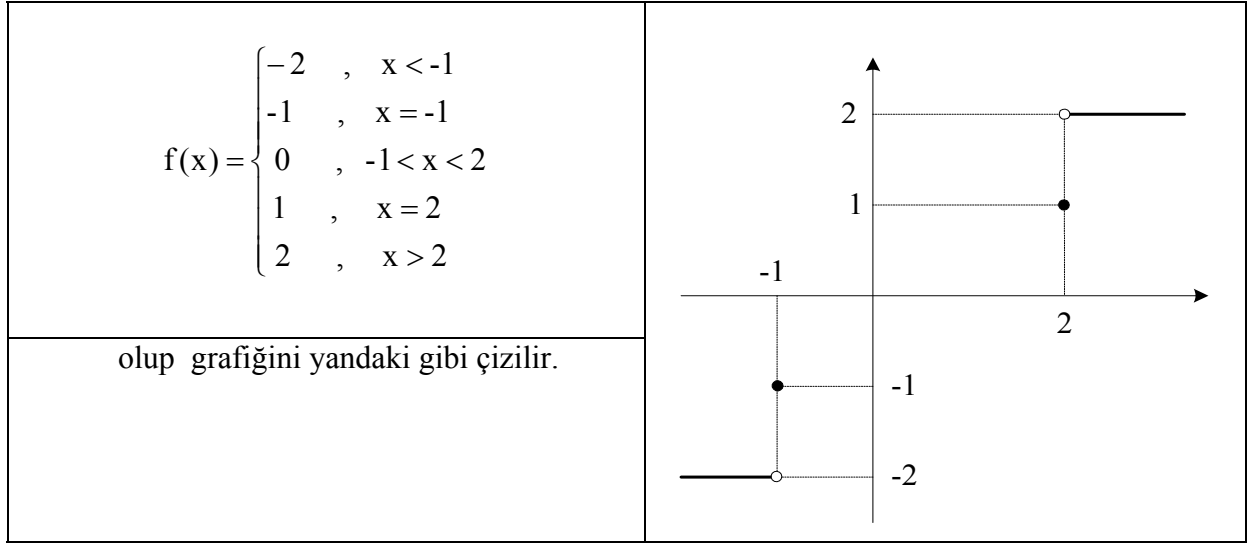


Örnek: $f(x) = \text{sgn}(x+1) + \text{sgn}(x-2)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

x	-1	2
$x+1$	— 0 +	+ 0 +
$x-2$	— —	0 +
$f(x)$	$(-1) + (-1) = -2$	0

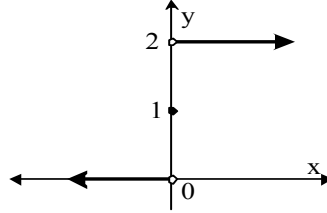
$f(x)$ fonksiyonunun aşağıdaki gibi düzenlersek;



Örnek: $f(x) = 1 + \text{sgn}(x)$ fonksiyonunun grafiğini çizin $f(x)$ fonksiyonunu düzenleyelim

Çözüm: $f(x)$ fonksiyonunu düzenleyelim

$$f(x) = \begin{cases} 1+1=2 & , x > 0 \\ 1+0=1 & , x = 0 \\ 1-1=0 & , x < 0 \end{cases}$$

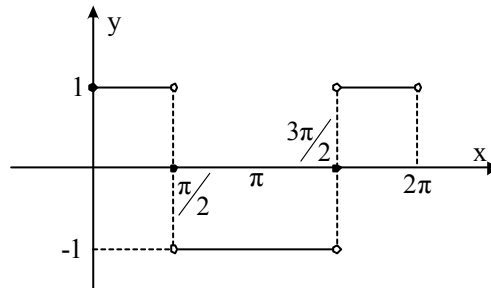


Örnek: $f(x) = \text{sgn}(\cos x)$ fonksiyonunun grafiğini çizin.

Çözüm: $f(x) = \cos x$ fonksiyonunun değişim tablosu;

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
Cosx	1	0	-1	0	1

olduğundan grafik bu tabloya göre ;



şeklindedir.

I.10.7. Tam Değer Fonksiyonu :

$x \in \mathbb{R}$ olsun x den büyük olmayan en büyük tamsayıya x in tam değeri denir ve $\lfloor x \rfloor$

ile gösterilir. Bu tanıma göre $n \in \mathbb{Z}$ (n tamsayı) olmak üzere $n \leq x < n + 1$ ise $\lfloor x \rfloor = n$ dir.

Örneğin, $\lfloor 2,3 \rfloor = 2$, $\lfloor -1 \rfloor = -1$, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ olur.

$A \subset \mathbb{R}$ olmak üzere bir $h : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun. $\forall x \in A$ için $h(x) \in \mathbb{R}$ yi tam değerine eşleyen $g : A \rightarrow \mathbb{Z}$, $g(x) = \lfloor h(x) \rfloor$ fonksiyonuna h 'nin tam değer fonksiyonu denir. Bu tanıma göre $h(x)$ in tam değer fonksiyonu ;

$$g(x) = \lfloor h(x) \rfloor = \begin{cases} h(x), & h(x) \in \mathbb{Z} \\ n, & n < h(x) < n + 1 \text{ ve } n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek: $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x + 2 \rfloor = 5$ denklemin çözüm kümesini bulunuz.

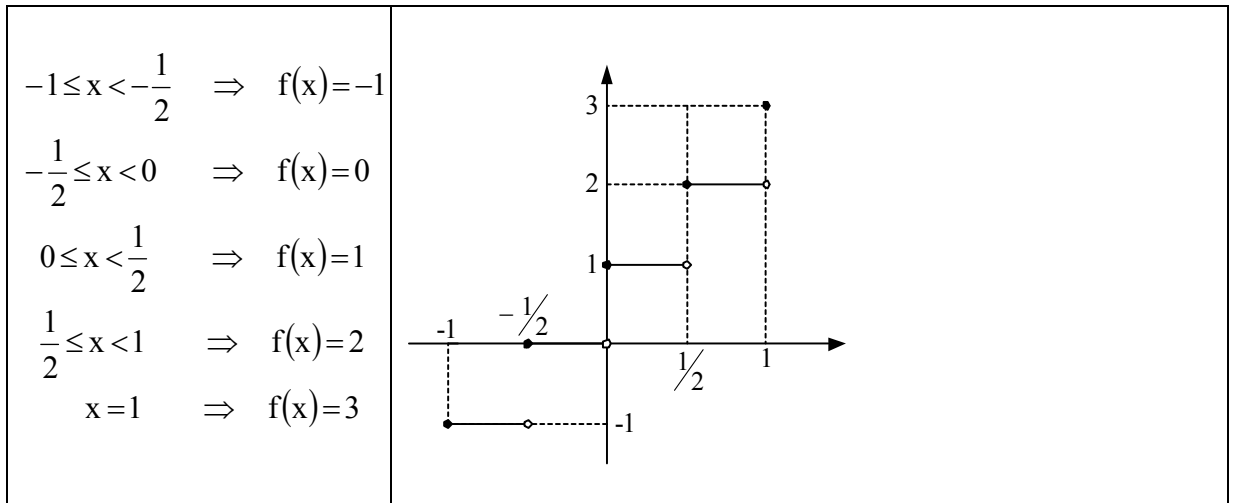
Çözüm: $\lfloor x + 2 \rfloor = 5 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 3 \Rightarrow 3 \leq x < 4$ olur. O halde $\mathcal{C} = [3, 4)$

Örnek: $f(x) = \lfloor 2x + 1 \rfloor$ fonksiyonunun $[-1, 1]$ aralığındaki grafiği çiziniz.

Çözüm: Tam değer fonksiyonunun grafiği çizilirken önce aralıkların bulunması gerekir.

Aralıkların boyları $\lfloor ax \rfloor$ de $\frac{1}{a}$ olarak bulunur. Fonksiyonumuzun aralık boyu

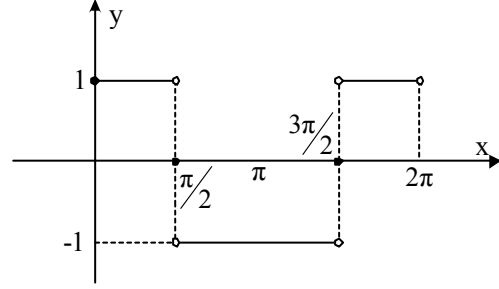
$\lfloor 2x \rfloor$ olup $a = 2 \Rightarrow \frac{1}{2}$ bulunur. Buna göre grafik aşağıdaki gibi çizilir



Örnek: $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \lfloor \cos x \rfloor$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} 0 < x < \frac{\pi}{2} &\Rightarrow \cos x > 0 \Rightarrow f(x) = 1 \\ x = \frac{\pi}{2} &\Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \\ \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} &\Rightarrow \cos x < 0 \Rightarrow f(x) = -1 \\ x = \frac{3\pi}{2} &\Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \\ \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi &\Rightarrow \cos x > 0 \Rightarrow f(x) = 1 \end{aligned}$$



1.10.8. Tek Ve Çift Fonksiyonlar :

$a \in \mathbb{R}$ ve $A = [-a, a]$ olmak üzere bir $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun

1) $\forall x \in A$ için $f(-x) = -f(x)$ ise tek fonksiyondur denir.

2) $\forall x \in A$ için $f(-x) = f(x)$ ise çift fonksiyondur denir.

Tek fonksiyonların grafikleri $O(0,0)$ başlangıç noktasına göre, çift fonksiyonların grafikleri ise y eksenine göre simetriktir.

Örnek : Aşağıdaki fonksiyonların tek fonksiyon veya çift fonksiyon olup olmadıklarını araştırınız.

a) $f: [-2\pi, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$

b) $g: [-2\pi, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \cos x$

c) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x^2 + 2x + 5$

Çözüm :

a) $\forall x \in [-2\pi, 2\pi]$ için $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$ olduğundan f tek fonksiyondur.

b) $\forall x \in [-2\pi, 2\pi]$ için $g(-x) = \cos(-x) = \cos x = g(x)$ olduğundan g çift fonksiyondur.

c) $\forall x \in \mathbb{R}$ için $h(-x) = (-x)^2 + 2(-x) + 5 = x^2 - 2x + 5$ olup $h(-x) \neq -h(x)$ ve $h(-x) \neq h(x)$ dir.

h ne tek ne de çift fonksiyondur.

I.10.9.Periyodik(Devirli) Fonksiyonlar: $A \subset \mathbb{R}$ olmak üzere bir $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun $\forall x \in A$ için $x + p \in A$ ve $f(x + p) = f(x)$ olacak şekilde sıfırdan farklı p reel sayıları varsa bu fonksiyon periyodiktir denir. p sayılarından pozitif ve en küçük olanına da fonksiyonun periyodu denir. Trigonometrik fonksiyonlar periyodiktir.

Örnek : $\mathbb{R}$ 'den $\mathbb{R}$ 'ye $\sin x$ ve $\cos x$ fonksiyonlarında $\sin(x + k \cdot 2\pi) = \sin x$ ve $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ ($k \in \mathbb{Z}$) olduğundan periyot 2π dir. $\tan x$ ve $\cot x$ fonksiyonlarında ise $\tan(x + k\pi) = \tan x$ ve $\cot(x + k\pi) = \cot x$ olduğundan periyot π dir.

Örnek : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos 4x$ fonksiyonunun periyodunu bulunuz

Çözüm : $f(x + p) = f(x) \Rightarrow \cos 4(x + p) = \cos 4x \Rightarrow \cos(4x + 4p) = \cos 4x$

$\Rightarrow 4x + 4p = 4x + k \cdot 2\pi \Rightarrow 4p = k \cdot 2\pi \Rightarrow p = \frac{k \cdot 2\pi}{4}$ olup $k = 1$ alınarak periyot $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ bulunur.

Uyarı : Genel olarak $\sin(ax + b)$ ve $\cos(ax + b)$ fonksiyonları ile bunların tek kuvvetlerinin periyodu $\frac{2\pi}{|a|}$, çift kuvvetlerinin periyodu $\frac{\pi}{|a|}$ dır.

$\tan(ax + b)$ ve $\cot(ax + b)$ fonksiyonları ile bunların bütün kuvvetlerinin periyodu $\frac{\pi}{|a|}$ dır.

$f(x)$ fonksiyonunun periyodu p_1 , $g(x)$ fonksiyonunun periyodu p_2 ise $f(x) + g(x)$ veya

$f(x) - g(x)$ fonksiyonlarının periyodu p_1 ve p_2 nin en küçük ortak katı ,yani;

$p = k_1 p_1 = k_2 p_2$ eşitliğini sağlayan en küçük k_1 ve k_2 sayma sayılarının belirlediği p sayısıdır.

I.11. Bir Fonksiyonun En Geniş Tanım Kümesi

Bir fonksiyonunun $y = f(x)$ şeklinde kuralı verilmiş , tanım kümesi verilmemişse kuralından yararlanarak bu fonksiyonun tanımlı olduğu en geniş küme bulunabilir. Eğer bir $a \in \mathbb{R}$ sayısı için $f(a) \in \mathbb{R}$ oluyorsa , yani $x = a$ nın görüntüsü varsa bu fonksiyon $x = a$ için tanımlıdır denir. Aksi halde , yani $f(a) \notin \mathbb{R}$ ise fonksiyon $x = a$ için tanımsızdır denir. Fonksiyonu tanımlı yapan bütün $a \in \mathbb{R}$ sayılarının kümesine bu fonksiyonun en geniş tanım kümesi denir.

Örnek : $y = f(x) = \frac{x}{x-2}$ fonksiyonunda $f(2) = \frac{2}{0} \notin \mathbb{R}$ olduğundan $x = 2$ için bu fonksiyon

tanımsızdır. $x = 2$ dışındaki bütün reel sayılar için sonucun reel çıkacağı açıktır. Buna göre bu fonksiyonun en geniş tanım kümesi $\mathbb{R} - \{2\}$ dir.

Örnek: $y = f(x) = \sqrt{x+2}$ fonksiyonunda

$$x = 3 \text{ için } f(3) = \sqrt{3+2} = \sqrt{5} \in \mathbb{R},$$

$$x = -1 \text{ için } f(-1) = \sqrt{-1+2} = \sqrt{1} = 1 \in \mathbb{R},$$

$$x = -3 \text{ için } f(-3) = \sqrt{-3+2} = \sqrt{-1} \notin \mathbb{R} \text{ dir.}$$

Buna göre, fonksiyon $x = 3$ ve $x = -1$ için tanımlı, $x = -3$ için tanımsızdır. Bu fonksiyonun tanımlı olması için kök içinin pozitif veya sıfır olması gerektiği düşünülerek $x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$ bulunur. Buna göre en geniş tanım kümesi $[-2, +\infty)$ olur.

1.12. Çeşitli Fonksiyonlarda En Geniş Tanım Kümesini Bulmak

1.12.1. Polinom Fonksiyonlar :

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere;

$$y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_0$$

şeklindeki fonksiyonlara **Polinom Fonksiyonlar** denir. Bu tür fonksiyonlarda $\forall a \in \mathbb{R}$ için $f(a) \in \mathbb{R}$ olacağından en geniş tanım kümesi $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ olur.

Örnek : $y = 3x + 5$ ve $y = 5x^2 - 2x + 8$ fonksiyonları sırasıyla 1. ve 2.dereceden polinom fonksiyonlar olup her ikisinin de en geniş tanım kümesi $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ dur.

1.12.2. Rasyonel Polinom Fonksiyonlar :

$y = \frac{f(x)}{g(x)}$ şeklindeki kesirli fonksiyonların en geniş tanım kümeleri bulunurken , bu tür

fonksiyonların paydayı sıfır yapan x değerleri için tanımsız olacağı düşünülür.

Örnek : Aşağıdaki fonksiyonların en geniş tanım kümelerini bulunuz.

$$\text{a) } y = \frac{x+5}{x^2-3x-4} \quad \text{b) } y = \frac{x^2-1}{x^2+4} \quad \text{c) } y = \left\lfloor \frac{1}{x^2-16} \right\rfloor$$

Çözüm :

a) $y = \frac{x+5}{x^2-3x-4}$ fonksiyonunda $x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = -1 \vee x = 4$ bulunur. Bu fonksiyon

paydayı sıfır yapan -1 ve 4 dışındaki bütün reel sayılar için tanımlıdır.

En geniş tanım kümesi : $\mathbb{R} - \{-1, 4\}$ dür.

b) $x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4 \Rightarrow x \notin \mathbb{R}$ dir. Paydanın reel kökü olmadığı için bu fonksiyonun en geniş tanım kümesi $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ olur.

$$c) \left[x^2 - 16 \right] = 0 \Rightarrow 0 \leq x^2 - 16 < 1$$

$$\Rightarrow 16 \leq x^2 < 17 \Rightarrow 4 \leq x < \sqrt{17} \vee -\sqrt{17} < x \leq -4 \text{ bulunur.}$$

Buna göre; $[4, \sqrt{17})$ ile $(-\sqrt{17}, -4]$ aralıklarında fonksiyon tanımsızdır.

En geniş tanım kümesi : $(-\infty, \sqrt{17}] \cup (-4, 4) \cup [\sqrt{17}, +\infty)$ olur.

1.12.3.İrrasyonel Fonksiyonlar

Bir $y=f(x)$ fonksiyonunda değişkene dört temel cebirsel işlemde başka kök alma işlemi de uygulanıyorsa bu fonksiyona irrasyonel fonksiyon denir. Kök kuvveti çift olan irrasyonel fonksiyonlar kök içini pozitif yapan x değerleri için tanımlı, negatif yapan x değerleri için tanımsızdır. Kök kuvveti tek olan irrasyonel fonksiyonlar ise kök içinin tanımlı olduğu her x değeri için tanımlıdır.

Örnek : Aşağıdaki irrasyonel fonksiyonların en geniş tanım kümelerini bulunuz.

$$a) y = \sqrt{25 - x^2} \quad b) y = \sqrt{\frac{x^3 - x}{x^2 - 4}}$$

Çözüm : a) Fonksiyon $25 - x^2 \geq 0$ için tanımlıdır. $25 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 25 \Rightarrow -5 \leq x \leq 5$ bulunur.

Fonksiyonun en geniş tanım kümesi $[-5, 5]$ dir.

$$b) f(x) = \sqrt{\frac{x^3 - x}{x^2 - 4}} \text{ fonksiyonunun tanım aralığı } T.A = \frac{x^3 - x}{x^2 - 4} \geq 0 \text{ olmalıdır.}$$

Buna göre, işaret tablosu hazırlanırsa;

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	∞
$x^3 - x$	-	-	0	+	0	-	+
$x^2 - 4$	+	0	-	-	-	-	+
$\frac{x^3 - x}{x^2 - 4}$	-	/	/	-	/	-	/

elde edilir. Tablodan da görüldüğü gibi tanım aralığı paydayı sıfır yapan değerler çıkartılarak;

$$T.A = (-2, 1] \cup [-1, 0] \cup (2, \infty) \text{ olarak bulunur.}$$

Örnek: $f(x) = \frac{5x^2 + 1}{\lfloor 2x - 3 \rfloor - 4}$ fonksiyonunun en geniş tanım aralığını bulunuz.

Çözüm: $f(x)$, $\lfloor 2x - 3 \rfloor - 4 = 0$ tanımlıdır. O halde paydayı sıfır yapan değerleri bulalım.

$$\begin{aligned}\lfloor 2x - 3 \rfloor - 4 = 0 &\Rightarrow \lfloor 2x - 3 \rfloor = 4 \Leftrightarrow 4 \leq 2x - 3 < 4 + 1 \Rightarrow 4 \leq 2x - 3 < 5 \\ &\Rightarrow 7 \leq 2x < 8 \Rightarrow 7/2 \leq x < 4 \text{ ve böylece; } T:A = \left[\frac{7}{2}, 4 \right) \text{ olur.}\end{aligned}$$

Örnek:

$\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \text{sgn}(x^2 + x + 1)$ eşitliğini gerçekleyen x değerinin bulunduğu tanım aralığını bulunuz.

Çözüm: $\forall x \in \mathbb{R}$ için daima $x^2 + x + 1 > 0$ olduğu için $\text{sgn}(x^2 + x + 1) = 1$ dir. O halde

$$\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{x+1}{2} < 2 \Rightarrow 2 \leq x+1 < 4 \Rightarrow 1 \leq x < 3 \text{ olup}$$

$T:A = [1, 3)$ aralığındadır.

ALİŞTIRMALAR

1) Aşağıdaki aralıkları sayı ekseninde gösteriniz.

- a) $[-3, 1]$ b) $(-4, 4)$ c) $[1, +\infty)$ d) $(-\infty, 3)$

2) Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -4x + 2$
b) $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 5$
c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -2x^2 + 5$
d) $f: (-4, 6] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -3x^2 - 4$

3) $f(x) = 2x^2 - 8x + 2$ fonksiyonunda $f(2x-3) = ?$

4) $f(x) = \frac{x-2}{x^2+1}$ fonksiyonunda $f(0)$, $f(2)$, $f(-\frac{1}{2})$, $f(2x-1)$ değerlerini bulunuz.

$$\left[C: f(0) = -2, f(2) = 0, f\left(-\frac{1}{2}\right) = -2, f(2x-1) = \frac{2x-3}{4x^2-4x+2} \right]$$

5) $f(x) = \sin x \cdot \cos 2x$ fonksiyonunda

a) $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ b) $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ c) $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ değerlerini bulunuz.

[C: a) $\frac{1}{4}$ b) -1 c) $-\cos x \cos 2x$]

6) $f(x) = x + 1$ fonksiyonunda $f(a^2 - 1) = ?$

[C: $f(a^2 - 1) = a$]

7) Aşağıdaki birebir örten fonksiyonların ters fonksiyonlarını bulunuz.

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 5x - 4$

b) $f: \mathbb{R}^- \rightarrow (1, +\infty), f(x) = x^2 + 1$

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 1$

d) $f: \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R} - \{2\}, f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$

e) $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$

f) $f^{-1}: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^-, f^{-1}(x) = -\sqrt{x-1}$

g) $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \sqrt[5]{x+1}$

h) $f^{-1}: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R} - \{3\}, f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{x-2}$

8) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı $f(x) = 2x^2 - 1$ ve $g(x) = 2x^2 + 1$ fonksiyonları veriliyor. $\text{fog}(x)$ ve $\text{gof}(x)$ fonksiyonlarını bulunuz.

[$\text{fog}(x) = 2x^2 + 1, \text{gof}(x) = \sqrt{x^4 - 4x^2 + 2}$]

9) $\mathbb{R}'$ de $\text{gof}(x) = 2x - 3$ ve $g(x) = 3x + 1$ fonksiyonları veriliyor. $f(x) = ?$ [C: $\frac{1}{3}(2x - 4)$]

10) Aşağıdaki önermelerin $\mathbb{R}$ deki çözümlerini bulunuz.

a) $|2x - 1|$ b) $|4x| < 1$ c) $|-3x + 5| + 1 \geq 5$ d) $|x + 2| \leq -1$

a) $\{-1, 2\}$

b) $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$

c) $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right] \cup (3, \infty)$

d) $\emptyset$

11) Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x-3|$
b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |-x^2 + 5| + 2$
c) $f: [-1,4] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x^2 - 4x + 3|$
d) $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |\sin x - 1|$

12) Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

- a) $y = \operatorname{sgn}(x^2 - 2)$ b) $y = \operatorname{sgn} x \frac{\operatorname{sgn} x}{x^2 - 4x + 3}$ c) $y = x - 1 + \operatorname{sgn}(x - 1)$ d) $y = |x - 2| + \operatorname{sgn}(x + 1)$

13) Aşağıdaki denklemlerin $\mathbb{R}$ ' deki çözümlerini bulunuz.

- a) $[2x - 3] = -1$ b) $[x]^2 = 9$ c) $[x^2] = 1$ d) $[x + [x + 2]] = -6$
C : a) $[1, \frac{3}{2})$ b) $[-3, -2) \cup [3, 4)$ c) $(-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2})$ d) $[-4, -3)$

14) Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çizin.

- a) $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - [x]$ b) $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = [\sin x]$
c) $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = [\cos x]$ d) $f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 [x]$

15) Aşağıdaki bağıntıların grafiklerini çiziniz.

- a) $|y - 3| = x - 3$ b) $|x| + |y| = -1$ c) $[2x - 3y] = -2$ d) $[x^2 + y^2] = 1$

16) Aşağıdaki fonksiyonların tek fonksiyon veya çift fonksiyon olup olmadıklarını araştırınız.

- a) $f(x) = 2x^2 + 3$ b) $f(x) = x^2 - 2x$ c) $f(x) = (x - 2)^2$ d) $f(x) = x^2 \cdot \sin x$
e) $f(x) = \cos 4x + 1$ f) $f(x) = x \cdot \operatorname{sgn} x$ g) $f(x) = x \leq \tan x$ h) $f(x) = \operatorname{sgn} x$

C : b, d, f, g fonksiyonları tek, a, e, h fonksiyonları çift, c fonksiyonu ise tek veya çift değildir.

17) Aşağıdaki fonksiyonların periyotlarını bulunuz.

- a) $y = \sin 3x$ b) $y = \cos 5x + \sin 4x$ c) $y = \tan(x/3)$ d) $y = 2 \cot(4x + 2)$

- C: a) $\frac{2\pi}{3}$ b) 2π c) 3π d) $\frac{\pi}{4}$

18) Aşağıdaki fonksiyonların en geniş tanım kümelerini bulunuz.

- a) $y = -x^3 + 4x - 6$ b) $y = \frac{x}{x^2 - x - 2}$ c) $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ d) $y = \frac{1}{[x - 2] + [x]}$

- C : a) $\mathbb{R}$ b) $\mathbb{R} - \{-1, 2\}$ c) $\mathbb{R}$ d) $\mathbb{R} - [1, 2)$

2. BÖLÜM

2. DENKLEMLER ve HORNER METODU

2.1. Cebirsel Denklemlerin Kökleri

2.1.1. Köklerin Varlığı :

(1) $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ ($a_n \neq 0$) ifadesine **n. dereceden cebirsel denklem** denir. Örneğin;

$$f(x) = a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0)$$

1. Dereceden cebirsel denklem

$$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0)$$

2. Dereceden cebirsel denklem

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0)$$

n. dereceden cebirsel denklemdir.

2.1.2. Teorem (Cebirin Esas Teoremi) :

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0) \dots \dots \dots (2.1)$$

denkleminin en az bir en çok n tane kökü vardır. Bu köklerin hepsi gerçel, bazıı gerçel bazıı karmaşık sayı olabilir.

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \dots (2.1) \dots (a_n \neq 0)$ denklemini göz önüne alalım. $x = r_1$, $f(x) = 0 \dots (2.1)$ denkleminin kökü ise;

$f(x) = (x - r_1) \cdot q_1(x) = 0$ olur. Burada, $q_1(x)$, (n-1). dereceden polinom fonksiyondur.

$x = r_2$, $q_1(x) = 0$ denkleminin kökü ise; $f(x) = (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot q_2(x) = 0$ olur. Burada ise $q_2(x)$, (n - 2). dereceden polinom fonksiyondur. Bu şekilde devam edilirse; $x = r_n$, $q_{n-1}(x) = 0$ denkleminin kökü olduğunda;

$$f(x) = a_n \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot (x - r_3) \dots \dots \dots (x - r_n) = 0 \dots \dots \dots (2.2)$$

şeklini alır. Burada, $q_{n-1}(x) = 0$ 1. Dereceden polinom fonksiyondur.

2.2. Rasyonel Kökler

$f(x) = 0 \dots (2.1)$ denkleminin rasyonel köklerini bulmak için aşağıdaki gibi pratik bir yolu izlemek özellikle yüksek dereceli denklemlerde kolaylık sağlar.

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \dots (a_n \neq 0)$ denkleminin her tarafını a_n ile bölersek; $x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} x^{n-1} + \dots + \frac{a_2}{a_n} x^2 + \frac{a_1}{a_n} x + \frac{a_0}{a_n} = 0 \dots \dots \dots (2.3)$ olur.

Buna göre, (2.3) denklemi n-lineer çarpanın bir çarpımı olarak;

$$(x-r_1) \cdot (x-r_2) \cdot (x-r_3) \dots\dots\dots(x-r_n) = 0 \quad (2.4)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada; $|r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \dots\dots r_{n-1}| = \left| \frac{a_0}{a_n} \right|$ (2.5) olur.

Yani; (2.3) denkleminin köklerinin (rasyonel kökler) çarpımı $\frac{a_0}{a_n}$ 'in çarpanları arasındadır

Descartes kuralı yardımıyla bu köklerin işaretleri hakkında şu şekilde bilgi sahibi olabilir.

$f(x) = 0$ (2.1) denkleminin **pozitif köklerinin sayısı** $f(x)$ fonksiyonundaki işaret değişikliklerinin (pozitiften negatife ya da negatiften pozitifte olan bütün değişiklikler) sayısından büyük olamazken, **negatif köklerin sayısı** da $f(-x)$ denklemindeki **işaret değişikliklerinin sayısından** daha büyük olamaz.

Örnek.2.1: $f(x)=4x^3-5x^2-7x+2=0$ 'ın köklerini bulmadan işaretleri hakkında bilgi veriniz.

Çözüm.2.1: $f(x)=+4x^3-5x^2-7x+2$

$\delta=2$ (işaret değişikliği sayısı = pozitif köklerin sayısı)

$$f(-x)=4.(-x)^3-5.(-x)^2-7.(-x)+2 = -4x^3-5x^2+7x+2$$

$\delta' = 1$ ($f(-x)$ 'in işaret değişikliği sayısı = negatif kök sayısı)

Yani, $f(x)=+4x^3-5x^2-7x+2= 0$ denkleminin 2 pozitif, 1 negatif kökü vardır ve bu köklerden

rasyonel olanları bulmak için; $|r_1 \cdot r_2 \cdot r_3| = \left| \frac{a_0}{a_n} \right| = \left| \frac{2}{4} \right|$ olacak şekilde $\frac{2}{4}$ 'ün çarpanları araştırılır.

2.3. Horner Metodu:

Örnek. 2.2: Önceki örnekte verilen denklemin köklerini bulalım.

Çözüm. 2.2: $f(x) = 4x^3-5x^2-7x+2 = 0$ denklemi veriliyor. Horner metodu kullanarak bu denklemin rasyonel kökleri aşağıdaki gibi bulunur. Bundan önce kök adaylarının kümesini bulalım.

$|r_1 \cdot r_2 \cdot r_3| = \left| \frac{a_0}{a_n} \right|$ idi. Buna göre; $|r_1 \cdot r_2 \cdot r_3| = \left| \frac{2}{4} \right|$ olur. Yani, bu denklemin kökleri $\frac{2}{4}$ 'ün çarpanları

arasındadır. O halde, ilk olarak $\frac{2}{4}$ 'ün çarpanları tespit edilir.

$$\frac{2}{4} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{çarpanları}} \\ = \\ \xrightarrow{\text{çarpanları}} \end{array} \left. \begin{array}{c} 1,2 \\ 1,2,4 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{muhtemel rasyonel kökler}} \mp 1, \mp \frac{1}{2}, \mp \frac{1}{4}, \mp 2$$

Böylece, $f(x) = 0$ denkleminin rasyonel kökleri varsa $\left\{ \mp 1, \mp \frac{1}{2}, \mp \frac{1}{4}, \mp 2 \right\}$ kümesine ait olacaktır. Şimdi Horner metodu kullanarak bu kümenin hangi elemanlarının kök olduklarını daha önceki örnekte ifade edilen Descartes kuralından da yararlanarak bulmaya çalışalım. Öncelikle kök adayı olarak 1'i sonra da -1'i deneyelim.

(x-1)	4	-5	-7	2
1	↓	4	-1	-8
	4	-1	-8	-6 = f(1)

$f(1)=-6$ olduğundan 1 kök değildir. Bunun anlamı, $f(x)$ 'in $(x-1)$ ile bölümünden kalan -6 demektir. Kalan, 0 olsaydı, $f(x)$, $(x-1)$ 'e tam bölünüyor ve $x=1$ sayısı $f(x)$ 'in kökü veya $x=1$ sayısı f fonksiyonunun sıfırı demektir.

(x+1)	4	-5	-7	2
-1	↓	-4	9	-2
	4	-9	2	0 = f(-1)

$f(-1) = 0$ olduğundan $x = -1$ köktür ya da $f(x)$, $(x+1)$ ile tam bölünüyor denir. Böylece, $f(x)=(x+1) \cdot (4x^2-9x+2)=0$ şekline gelir. Demek ki köklerden birisi -1 ise diğer iki kökün çarpımı $\left| \frac{2}{4} \right|$ olacak sayılar arasından (kök adaylarını içeren kümeden) seçilmesi gerekir.

Yani, $\mp 2, \mp \frac{1}{4}, \mp \frac{1}{2}$ elemanları arasında $\mp \frac{1}{2}$ kök olamaz. Öyleyse, diğer iki kök

2'lerden birisi ile $\frac{1}{4}$ 'lerden birisidir. Öncelikle ± 2 sayılarını önceki gibi deneyelim.

köktür. Şimdi, bu iki kökü tabloda ele alarak horner metodunu uygulayalım.

(x+2)	4	-5	-7	2
-2	↓	-8	26	-38
	4	-13	19	-36 = f(-2)

$x=-2$ kök değildir.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 (x-2) & 4 & -5 & -7 & 2 \\
 2 & \downarrow & & & \\
 & 8 & 6 & -2 & \\
 & 4 & 3 & -1 & \\
 \hline
 & 0 = f(2) & & &
 \end{array} \quad x=2 \text{ köktür}$$

Buna göre; $f(x)=(x+1).(x-2) (4x-1)=0$ şekline gelir.Bu işlemleri tek bir tabloda yapalım.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 (x-2) & 4 & -5 & -7 & 2 \\
 2 & \downarrow & & & \\
 & 8 & 6 & -2 & \\
 & 4 & 3 & -1 & \\
 \hline
 & 0 = f(2) & \Rightarrow f(x) = (x-2)(4x^2 + 3x - 1) = 0 \\
 (x+1) & -1 & & & \\
 -1 & \downarrow & & & \\
 & -4 & 1 & & \\
 & 4 & -1 & & \\
 \hline
 & 0 = f(-1) & \Rightarrow f(x) = (x-2)(x+1)(4x-1) = 0 \\
 (x-\frac{1}{4}) & \frac{1}{4} & & & \\
 \frac{1}{4} & \downarrow & & & \\
 & 1 & & & \\
 & 4 & & & \\
 \hline
 & 0 = f(\frac{1}{4}) & \Rightarrow f(x) = 4(x-2)(x+1)(x-\frac{1}{4}) = 0
 \end{array}$$

Buna göre; $f(x) = 0$ denkleminin kökleri ; $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = \frac{1}{4}$ olarak bulunur.

Örnek.2.3: $f(x) = 6x^5 - 13x^4 - 16x^3 + 51x^2 - 32x + 4 = 0$ denklemi veriliyor. Horner metodu kullanarak bu denklemin rasyonel kökleri aşağıdaki gibi bulunur.

Çözüm. 2.3:Bundan önce kök adaylarının kümesini bulalım.

$|r_1.r_2.r_3| = \left| \frac{a_0}{a_n} \right|$ idi. Buna göre; $|r_1.r_2.r_3| = \left| \frac{4}{6} \right|$ olur. Yani, bu denklemin kökleri $\frac{4}{6}$ 'nın çarpanları arasındadır. O halde, ilk olarak $\frac{4}{6}$ 'nın çarpanları tespit edilir.

$$\frac{4}{6} \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{çarpanları}} \\ = \\ \xrightarrow{\text{çarpanları}} \end{array} \left. \begin{array}{l} 1,2,4 \\ 1,2,3,6 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{muhtemel rasyonel kökler}} \mp 1, \mp \frac{1}{2}, \mp \frac{1}{3}, \mp \frac{1}{6}, \mp 2, \mp \frac{2}{3}, \mp 4, \mp \frac{4}{3}$$

Böylece, $f(x) = 0$ denkleminin rasyonel kökleri varsa $\left\{ \mp 1, \mp \frac{1}{2}, \mp \frac{1}{3}, \mp \frac{1}{6}, \mp 2, \mp \frac{2}{3}, \mp 4, \mp \frac{4}{3} \right\}$

kümesine ait olacaktır. Şimdi Horner metodu kullanarak bu kümenin hangi elemanlarının kök olduklarını daha önceki örnekte ifade edilen Descartes kuralından da yararlanarak bulmaya çalışalım. Öncelikle kök adayı olarak 1'i sonra da -1'i deneyelim.

$(x-1)$	6	-13	-16	51	-32	4	
1	↓	6	-7	-23	28	-4	
	6	-7	-23	28	-4	$0 = f(1)$	$x=1$ köktür.

$f(1)=0$ olduğundan 1 köktür. Bunun anlamı, $f(x)$ 'in $(x-1)$ ile bölümünden kalan 0 demektir. $f(x)=(x-1) \cdot (6x^4-7x^3-23x^2+28x-4)=0$ şekline gelir.Yani, $f(x)$, $(x-1)$ 'e tam bölünüyor ve $x=1$ sayısı $f(x)$ 'in kökü veya $x=1$ sayısı f fonksiyonunun sıfırı demektir.

$(x+1)$	6	-7	-23	28	-4	
-1	↓	-6	13	10	-38	
	6	-13	-10	38	$-42 = f(-1)$	$x=-1$ kök değildir.

$f(-1)=-42$ olduğundan -1 kök değildir. Bunun anlamı, $f(x)$ 'in $(x+1)$ ile bölümünden kalan

-42 demektir. Kalan, 0 olsaydı, $f(x)$, $(x+1)$ 'e tam bölünüyor ve $x=-1$ sayısı $f(x)$ 'in kökü veya $x=-1$ sayısı f fonksiyonunun sıfırı demektir.Şimdi de diğer kökleri tablo uygulayarak tekrar bulmaya çalışalım.

$(x-2)$	6	-19	15	-2	
2	↓	12	-14	2	
$(x-\frac{1}{6})$	6	-7	1	$0 = f(2)$	$\Rightarrow f(x) = (x-2)(6x^2-7x+1) = 0$
$\frac{1}{6}$	↓	1	-1		
$(x-1)$	6	-6	$0 = f(\frac{1}{6})$	$\Rightarrow f(x) = (x-2)(x-\frac{1}{6})(6x-6) = 0$	
1	↓	6			
	6	$0 = f(1)$	$\Rightarrow f(x) = 6(x-2)(x-1)(x-\frac{1}{6}) = 0$		

Buna göre; $f(x) = 0$ denkleminin kökleri ; $(x-1)^2 \cdot (x+2) \cdot (x-2) \cdot (x-\frac{1}{6})=0$ 'dan 1 , 2 , -2 ve $\frac{1}{6}$ olarak bulunur.

Örnek. 2.4: $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = 0$ denklemi veriliyor. Horner metodu kullanarak bu denklemin rasyonel kökleri aşağıdaki gibi bulunur.

Çözüm. 2.4: Bundan önce kök adaylarının kümesini bulalım.

$$|r_1, r_2, r_3| = \left| \frac{a_0}{a_n} \right| = \left| \frac{3}{2} \right| = \frac{\pm 3 \pm 1}{\pm 2 \pm 1} \rightarrow \pm \frac{3}{2}, \pm 3, \pm 1, \pm \frac{1}{2}$$

Şimdi Horner metodu kullanarak bu kümenin hangi elemanlarının kök olduklarını daha önceki örnekteki gibi bulmaya çalışalım

$$\begin{array}{r|rrrr}
 (x+1) & 2 & -5 & -4 & 3 \\
 -1 & \downarrow & -2 & 7 & -3 \\
 \hline
 (x - \frac{1}{2}) & 2 & -7 & 3 & 0 = f(-1) \Rightarrow f(x) = (x+1)(2x^2 - 7x + 3) = 0 \\
 \frac{1}{2} & \downarrow & 1 & -3 & \\
 \hline
 (x-3) & 2 & -6 & 0 = f(\frac{1}{2}) \Rightarrow f(x) = (x+1)(x - \frac{1}{2})(2x - 6) = 0 \\
 3 & \downarrow & 6 & \\
 \hline
 & 2 & 0 = f(3) \Rightarrow f(x) = 2(x+1)(x - \frac{1}{2})(x - 3) = 0
 \end{array}$$

Böylece $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = 2.(x+1).(x - \frac{1}{2}).(x - 3) = 0$ 'dan $-1, \frac{1}{2}, 3$ olarak bulunur.

ALIŞTIRMALAR

A) Aşağıdaki denklemlerin kökünü Horner metodunu kullanarak bulunuz.

1) $f(x) = 4x^5 - 8x^4 - 21x^3 + 26x^2 + 5x - 6 = 0$

2) $f(x) = 6x^5 - 23x^4 + 19x^3 + 17x^2 - 25x + 6 = 0$

3) $f(x) = 6x^5 - 11x^4 - 18x^3 + 43x^2 - 24x + 4 = 0$

4) $f(x) = x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = 0$

5) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 12 = 0$

B) Aşağıdaki denklemlerin kökünü bulmadan köklerin işareti hakkında bilgi veriniz.

1) $f(x) = x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 20x^2 + 9x - 18 = 0$

2) $f(x) = 48x^5 - 220x^4 + 376x^3 - 293x^2 + 101x - 12 = 0$

3) $f(x) = 2x^5 - 9x^4 + 2x^3 + 33x^2 - 40x + 12 = 0$

4) $f(x) = 6x^4 - 29x^3 + 48x^2 - 31x + 6 = 0$

5) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

3. BÖLÜM

EŞİTSİZLİKLER VE LİNEER PROGRAMLAMA

3.EŞİTSİZLİKLER

3.1. Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlikler

$a \neq 0$ ve $a, b, x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x)=ax+b$ ifadesine birinci dereceden fonksiyon ve birinci dereceden iki terimli denir. $ax + b > 0$, $ax+b<0$, $ax + b \geq 0$ ve $ax + b \leq 0$ şeklindeki ifadelere birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlikler adı verilir.

$ax+b=0$ ifadesine birinci dereceden denklem, $x = -\frac{b}{a}$ sayısına da denklemin kökü denir.

$ax + b > 0$, $ax+b<0$, $ax + b \geq 0$ ve $ax + b \leq 0$ eşitsizliklerini ise sonsuz sayı gerçeklediğinden bunların çözüm kümesini bulma işleminde denklemden yararlanılarak önce kökü bulunur.

Daha sonra işaret kuralı aşağıdaki tabloda olduğu gibi düzenlenerek çözüm kümesi bulunur.

$f(x)=ax+b$ iki terimlisinin işaret kuralı aşağıdaki tabloda verilmiştir.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x) = ax + b$	a'nın işaretinin tersi	0	a'nın işaretinin aynı

Örnek: $f(x) = -2x+8$ fonksiyonunun işaret tablosunu hazırlayarak $-2x+8 \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm:

$f(x) = -2x+8$ fonksiyonun önce kökünü bulalım. $-2x+8=0 \Rightarrow x = 4$ ve $a=-2$ dir.

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$-2x+8$		+	0	-	

Tablo incelendiğinde;

i) $x < 4$ ise $f(x) > 0$

ii) $x = 4$ ise $f(x) = 0$

iii) $x > 4$ ise $f(x) < 0$ olur. O halde çözüm kümesi $\mathbb{C} = [4, \infty)$ dir.

3.2. İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlikler

$a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ ve $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere; $f(x)=ax^2+bx+c$ ifadesine ikinci derece fonksiyonu ve ikinci dereceden üç terimli denir. $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c < 0$ ve $ax^2 + bx + c \leq 0$ şeklindeki ifadelere ikinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlikler denir. $f(x)=ax^2+bx+c$ üç terimlisinin işaret kuralı aşağıdaki tablolarda gösterildiği gibi bulunur. $ax^2+bx+c=0$ denkleminde;

I) $\Delta > 0$ ise denkleminin birbirinden farklı iki kökü vardır. Bunlar x_1, x_2 olsun.

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
ax^2+bx+c	a'nın işaretinin aynı	0	a'nın işaretinin tersi	0	a'nın işaretinin aynı

II) $\Delta = 0$ ise denkleminin eşit iki kökü vardır. $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

x	$-\infty$	$x_1 = x_2$	$+\infty$
ax^2+bx+c	a'nın işaretinin aynı	0	a'nın işaretinin aynı

III) $\Delta < 0$ ise $ax^2+bx+c=0$ denkleminin gerçek kökü yoktur. $f(x)=ax^2+bx+c$ hiçbir zaman sıfır olamayacağından, işareti değişmez, a ile aynı kalır.

x	$-\infty$	$+\infty$
ax^2+bx+c	a'nın işareti ile aynı	

$$\Delta < 0 \text{ ve } a > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$$

$$\Delta > 0 \text{ ve } a < 0 \Leftrightarrow f(x) < 0 \text{ dır.}$$

Örnek: a) $x^2+3x-10 < 0$ b) $9x^2+12x+4 > 0$ c) $x^2-2x < -8$ eşitsizliklerinin çözüm kümelerini bulunuz.

Çözüm: a) $x^2+3x-10 < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulurken önce eşitsizliği denkleme çevrilir. Daha sonra kökler bulunarak işaret tablosu hazırlanır.

$\Delta = 49 > 0$, farklı iki gerçek kökü vardır.

$x^2+3x-10=0$ denkleminin kökleri $(x+5)(x-2)=0$ ise $x=-5, x=2$ dir.

x	$-\infty$	-5	2	$+\infty$
$x^2+3x-10$		0	0	
	+	/	/	+

$$Ç = \{x \mid -5 < x < 2, x \in \mathbb{R}\} = (-5, 2)$$

b) $9x^2+12x+4>0$, a'da yapılan işlemler izlenerek kökleri araştırılır. $\Delta =0$, birbirine eşit iki kökü vardır. $9x^2+12x+4=0$ denkleminde $\Delta =0$ olduğundan birbirine eşit iki kökü vardır ve denklemin kökleri $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{3}$ tür.

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	$+\infty$
$9x^2+12x+4$	+	0	+

$\mathbb{C}=\mathbb{R}$ 'dir.

c) $x^2-2x<-8 \Rightarrow x^2-2x+8<0$ şekline getirdikten sonra a'da yapılan işlemler tekrarlanarak kökleri araştırılır. $x^2-2x+8=0$ denkleminde $\Delta < 0$ olduğundan gerçek kök yoktur.

x	$-\infty$	$+\infty$
x^2-2x+8	+++++	+++++

$\mathbb{C}=\emptyset$ dir.

3.3. Eşitsizlikler ve Grafikleri

$a.x+b.y+c \geq 0$, $a.x+b.y+c \leq 0$, $a.x+b.y+c > 0$ ve $a.x+b.y+c < 0$ şeklindeki eşitsizliklere 1.dereceden iki bilinmeyenli eşitsizlikler denir.Bu eşitsizliklerin grafiğini çizmek için ilk olarak;

$a.x+b.y+c=0$ denkleminden;

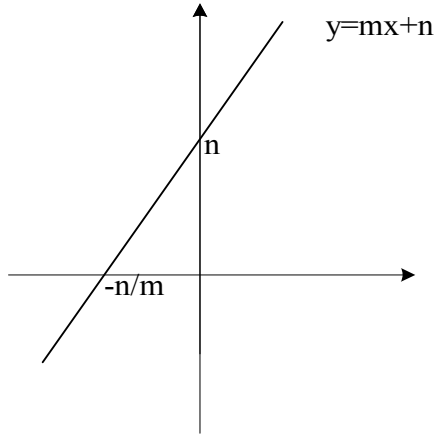
$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \quad (a,b,c \in \mathbb{R} \ b \neq 0)$$

şekline getirilerek fonksiyonun grafiği çizilir.Burada $-\frac{a}{b} = m, -\frac{c}{b} = n$ dersek;

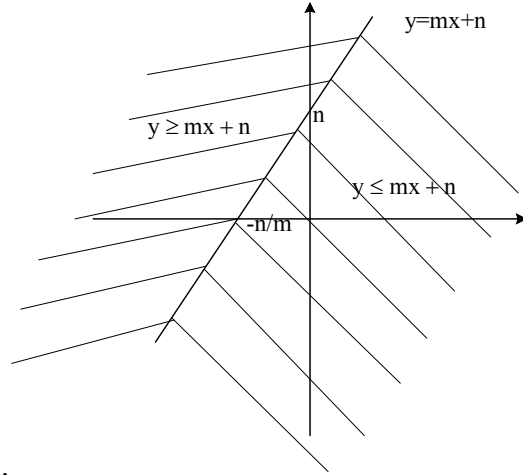
$y=mx+n$(1) elde edilir.Bu fonksiyonun grafiği bir doğru olup, bu doğrunun grafiğini çizmek için iki nokta bulmak yeterli olacaktır.Buradan; $y=mx+n$ için

x	0	$-\frac{n}{m}$
y	n	0

alınarak, $y=mx+n$ ile $y \leq mx+n$ ve $y \geq mx+n$ grafikleri aşağıdaki gibi çizilir.

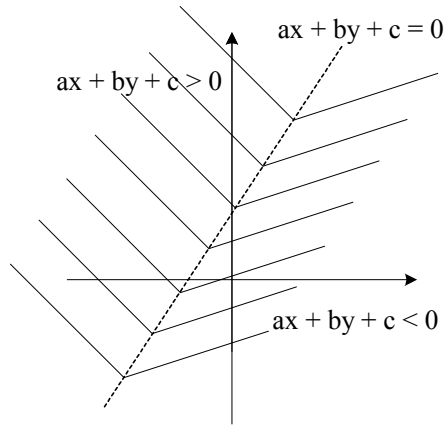


Şekil.3.1 $y=mx+n$ grafiği



Şekil.3.2 $y \leq mx+n$ ve $y \geq mx+n$ grafikleri

$y=mx+n$ eşitliğinde $y \leq mx+n$ veya $y \geq mx+n$ eşitsizliklerinin grafiği Şekil.3.2' deki gibidir. $y \leq mx+n$ eşitsizliğinin grafiğini çizmek için $y=mx+n$ doğrusunun grafiği ilk olarak çizilir. Daha sonra, bu doğru üzerinde bulunmayan herhangi bir test noktası alınarak eşitsizliği sağlayıp sağlamadığı belirlenir. Eğer bu nokta eşitsizliği sağlıyor ise, bu noktanın alındığı bölge istenen bölge, karşı bölge ise diğer eşitsizliğe ait olur. Bundan başka, $ax+by+c > 0$ ve $ax+by+c < 0$ eşitsizliklerinde yine yukarıdaki yol takip edilir. Fakat, grafik çizilirken $ax+by+c=0$ doğrusu kesikli çizgi ile gösterilir. (Şekil.3.3)



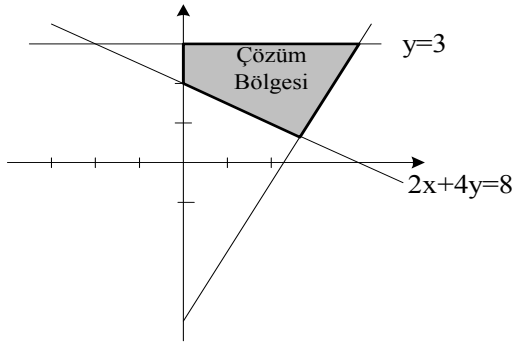
Şekil.3.3 $ax+by < 0$ ve $ax+by+c > 0$ grafikleri

3.4. Eşitsizlik Sistemlerinin Grafik Gösterimi

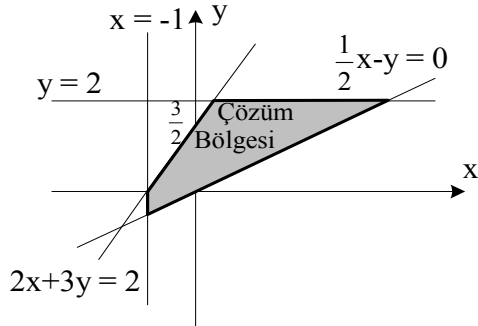
Eğer birden fazla eşitsizliğin bir araya gelmesiyle oluşan bir sisteme sahipsek, bu sisteme eşitsizlik sistemi denir. Bu sistemin çözümüne ait grafiği bulmak için ayrı ayrı her bir eşitsizliğin grafiği aynı koordinat düzleminde çizilir ve bu grafiklerin aynı anda sağlandığı bölge (çözüm bölgesi) bulunur. Bunu aşağıdaki gibi basit bir örnek ile gösterebiliriz.

Örnek.3.1:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 4y \geq 8 \\ 3x - 2y \leq 6 \\ y \leq 3 \\ x \geq 0 \end{array} \right\} \text{ sistemini sağlayan çözüm bölgesini bulalım.}$$

Çözüm.3.1:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{2}x - y \geq 0 \\ 2x + 3y \leq 2 \\ y \geq 2 \\ x \geq -1 \end{array} \right\} \text{ eşitsizlik sisteminin grafik çözümünü bulunuz.}$$

Çözüm.3.2:

Not: Her iki örnekte elde edilen çözüm bölgesini bulmak için öncelikle eşitsizlikler eşitlikler haline getirilerek her birinin grafiği çizilir. Daha sonra, eşitsizliğin durumuna göre bir test noktası yardımıyla doğrunun altı veya üstü çözüm bölgesi olarak alınır. Sonuç olarak, bütün eşitsizliklerin aynı anda sağlandığı bölge istenen çözüm bölgesi olarak alınır.

3.5. Lineer Programlama Grafik Çözümü

3.5.1. Genel Bilgi:

Lineer programlama lineer fonksiyonlardan oluşan problemleri çözmek için geliştirilmiş bir metottur. Bu metotla problemlerde istenilen amaca ulaşılmaya çalışılır. Bu amaç maksimum kar, minimum maliyet, maksimum ağırlık vb.gibi olabilir. Bunun anlamı şudur. x, y değişkenleri gerçek hayatta bir olayı temsil ettiklerinden hiçbir zaman negatif olmazlar. Bir lineer programlama problemi;

$$\text{amaç } z=f(x_i)$$

Kısıtlar;

$$g_i(x) \leq (\geq) b_i$$

$x_i \geq 0$ şeklinde tanımlanır. Burada, amaç maksimum ise $g_i(x) \leq b_i$,

amaç minimum ise $g_i(x) \geq b_i$

3.5.2. Lineer Programlama İşlem Basamakları

- 1- i-) Bilinmeyenler belirlenir ve buna göre değişkenler tanımlanır.
- ii-) Kısıtlar lineer eşitsizliklere çevrilir.
- iii-) Amaç fonksiyonu oluşturulur.
- 2- Uygun bölgenin grafiği çizilir.
- i-) Eşitsizlikler standart forma çevrilir.
- ii-) Her bir eşitsizliğin grafiği çizilir.
- iii-) Her eşitsizliğin aynı anda sağlandığı uygun bölge bulunur.
- 3- Uygun bölgenin köşe noktaları bulunur.
- 4- Bu köşe noktalarda amaç fonksiyonu belirtilir. En iyi amaca ulaşılan nokta Optimal Çözüm Noktasıdır.

3.5.3. Lineer Programlama Problem Örnekleri

Problem.3.1: Aşağıdaki tabloda pirinç ve soya fasulyesinde birim bardakta bulunan kalori, vitamin ve B₂ vitamin miktarları verilmiştir. Buna göre minimum maliyete sahip diyeti elde edebilmek için günde ne kadar pirinç ve soya fasulyesi (bardak cinsinden) üretilmelidir?

	Pirinç	Soya	Günlük Gerekseim
(gr) Protein	15	22.5	90
Kalori	810	270	1620
(mg) B ₂ Vitamin	1/9	1/3	1
Maliyet	21	14	

Çözüm.3.1: x = günde üretilecek bardak cinsinden pirinç miktarı.

y = günde üretilecek bardak cinsinden soya miktarı.

Modeli kurarsak; $Minz=21x+14y$

Kısıtlar

x	0	6
y	4	0

← $15x + 22.5y \geq 90$

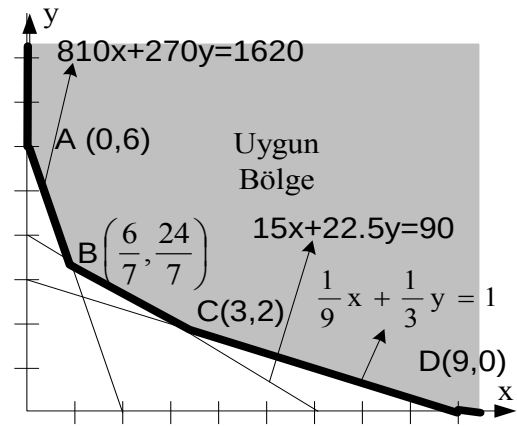
x	0	2
y	6	0

← $810x + 270y \geq 1620$

x	0	9
y	3	0

← $\frac{1}{9}x + \frac{1}{3}y \geq 1$

$x \geq 0 ; y \geq 0$



B için ; $810x + 270y = 1620$

$$15x + 22.5y = 90$$

$$x = \frac{6}{7} ; y = \frac{24}{7}$$

C için ; $15x + 22.5y = 90$

$$\frac{1}{9}x + \frac{1}{3}y = 1$$

$$x=3 ; y=2$$

Sonuçların değerlendirilmesi ;

$$A(0,6) \Rightarrow z = 21 \cdot 0 + 14 \cdot 6 = 84$$

$$B\left(\frac{6}{7}, \frac{24}{7}\right) \Rightarrow z = 21 \cdot \frac{6}{7} + 14 \cdot \frac{24}{7} = 66$$

$$C(3,2) \Rightarrow z = 21 \cdot 3 + 14 \cdot 2 = 91$$

$$D(9,0) \Rightarrow z = 21 \cdot 9 + 14 \cdot 0 = 189$$

Yorum : Günde 6/7 bardak pirinç ve 24/7 bardak soya üretirsek 66 T.L.'na mal olur ve optimum çözümdür

Problem.3.2: Aşağıdaki tabloda verilenlere göre işletmenin maksimum karı elde edebilmesi için günde kaç tane hangi tip bıçak üretilmelidir?

	(A tipi bıçak) x	(B tipi bıçak) y	Mevcut Kapasiteler
İş gücü	2	6	90
Çelik	20	35	700
Odun	4	3	120
Kar	2	5	

Çözüm.3.2:

x = Günde üretilecek A tipi bıçak sayısı.

y = Günde üretilecek B tipi bıçak sayısı.

Model : Maksimum $z = 2x + 5y$

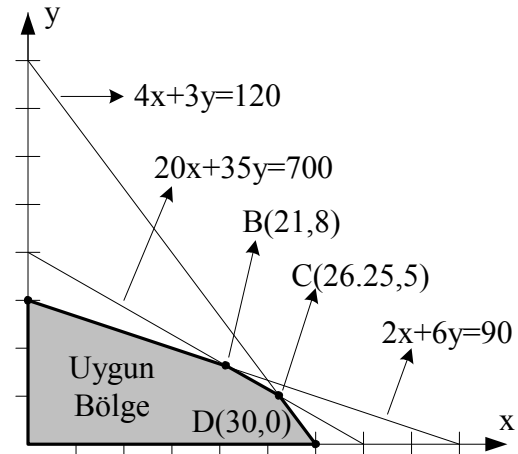
Kısıtlar :

$$\begin{array}{c|cc} x & 0 & 45 \\ y & 15 & 0 \end{array} \quad \leftarrow 2x + 6y \leq 90$$

$$\begin{array}{c|cc} x & 0 & 35 \\ y & 20 & 0 \end{array} \quad \leftarrow 20x + 35y \leq 700$$

$$\begin{array}{c|cc} x & 0 & 30 \\ y & 40 & 0 \end{array} \quad \leftarrow 4x + 3y \leq 120$$

$x \geq 0 ; y \geq 0$



B noktası için ;

$$20x + 35y = 700$$

$$-10/ \quad 2x + 6y = 90$$

$$x = 21 \text{ ve } y = 8$$

C noktası için ;

$$20x + 35y = 700$$

$$-5/ \quad 4x + 3y = 120$$

$$x = 26.25 \text{ ve } y = 5$$

B (21, 8) noktası için ;

$$z = 2 \cdot 21 + 5 \cdot 8 = 82$$

C (26.25, 5) noktası için ;

$$z = 2 \cdot (26.5) + 5 \cdot 5 = 77.5$$

Optimum çözüm B (21, 8)'dir.

Problem.3.3: Aşağıdaki tabloya göre günde üretilecek pamuk ve floş ipliği miktarını bulunuz?

	(Pamuk) x	(Floş) y	Mevcut Kapasiteler
Hallaç	1	4	8
Cer-fitul	1	1	5
Taraklama	2	1	7
Maliyet	20	30	

Çözüm.3.3:

x= Günde üretilecek Pamuk İpliği miktarı.

y= Günde üretilecek Floş İpliği miktarı.

Model 1 .

$$\text{Min } z=20x+30y$$

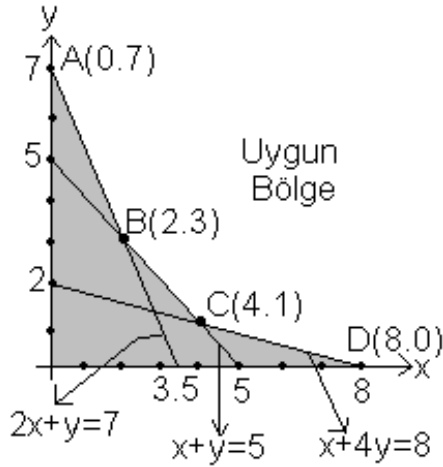
Kısıtlar

$$\begin{array}{c|cc} x & 0 & 8 \\ y & 2 & 0 \end{array} \Rightarrow x + 4y \geq 8$$

$$\begin{array}{c|cc} x & 0 & 5 \\ y & 5 & 0 \end{array} \Rightarrow x + y \geq 5$$

$$\begin{array}{c|cc} x & 0 & 7 \\ y & 3.5 & 0 \end{array} \Rightarrow 2x + y \geq 7$$

$x \geq 0 ; y \geq 0$



B Noktası

$$x+y = 5$$

$$2x+y = 7$$

$$x=2, y=3$$

C Noktası

$$x+4y = 8$$

$$x+y = 5$$

$$x=4, y=1$$

B için $z=20.2+30.3=130$, C için $z=20.4+30.1=110$ Optimum çözüm.

Problem.3.4:

Yandaki tabloda verilenlere göre işletmenin maksimum karı elde edebilmesi için günde hangi tip malzemeden ne kadar üretmesi gerekir.		(A Tipi) x	(B Tipi) y	Mevcut Kapasiteler
1.Atölye		1	4	340
2.Atölye		3	4	380
3.Atölye		5	2	330
Kar		80	120	

Çözüm.3.4:

x = A tipi malzemeden günde üretilecek miktar.

y = B tipi malzemeden günde üretilecek miktar.

Model :

Maksimum $z = 80x + 120y$

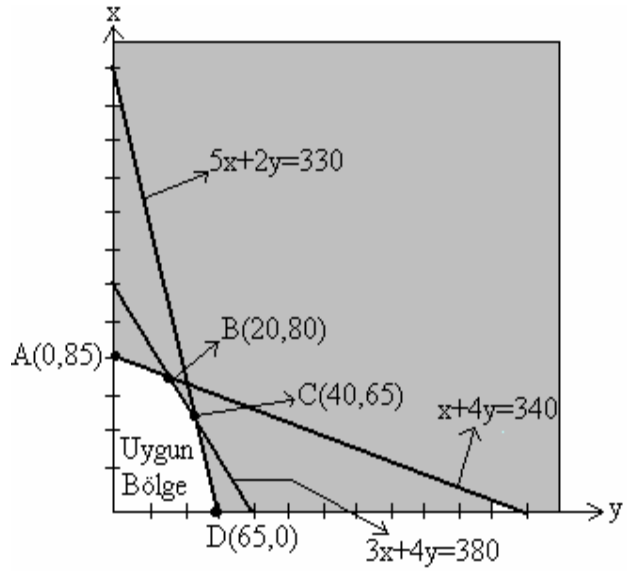
Kısıtlar

$$\begin{array}{c|cc} x & 0 & 340 \\ y & 85 & 0 \end{array} \Rightarrow x + 4y \leq 340$$

$$\begin{array}{c|cc} x & 0 & 380/3 \\ y & 95 & 0 \end{array} \Rightarrow 3x + 4y \leq 380$$

$$\begin{array}{c|cc} x & 0 & 65 \\ y & 165 & 0 \end{array} \Rightarrow 5x + 2y \leq 330$$

$x \geq 0 ; y \geq 0$



B için C için $B(20,80) \rightarrow Z=80.20+120.80=11.200$

$3x+4y=380$ $5x+2y=380$ $C(40,65) \rightarrow Z=80.40+120.65=11.000$

$x+4y=340$ $x+4y=340$ O halde $B(20,80)$ noktası optimum çözüm noktasıdır.

$x=20, y=80$ $x=40, y=65$

Problem.3.5: Bir işletmede radyo ve TV üretilmektedir .Bu üretim tasarım montaj ve test atölyelerinde gerçekleştirilmektedir. Birim radyo üretimi için bu atölyede sırasıyla 6saat,4saat,3saat iş gücü, gerekli iken birim TV üretimi için bu atölyede sırasıyla 3saat,4saat, ve saat iş gücü gerekmektedir .Atölyelerin günlük maksimum kullanım süreleri sırasıyla 90,72 ve 96 saattir.Birim karlar sırasıyla 10 ve 20 dolardır.Buna göre işletmenin maksimum karı elde edebilmesi için günde kaç tane radyo ve TV üretilmesi gerekir.

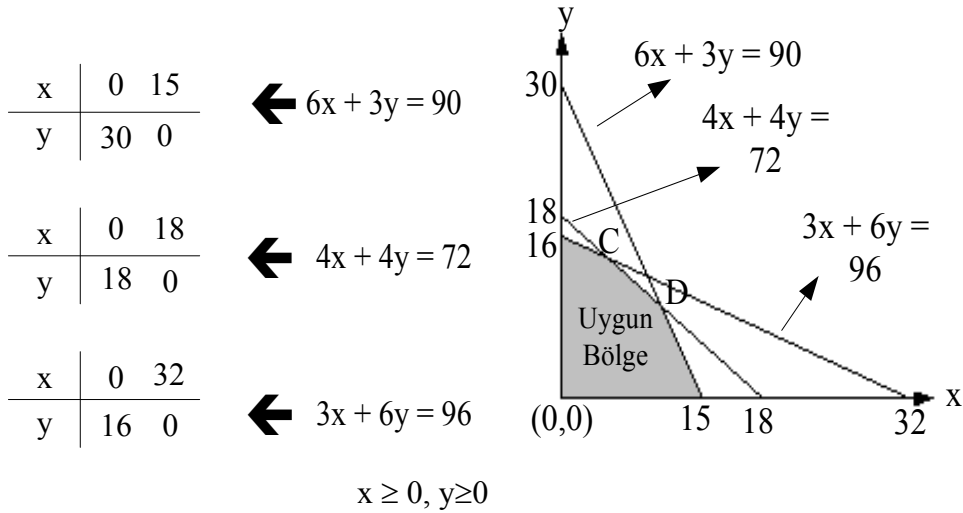
Çözüm.3.5:

x: günde üretilecek radyo sayısı

y:günde üretilecek TV sayısı

	x	y	Mevcut kapasite
Tasarım	6	3	90
Montaj	4	4	72
Test	3	6	96
Kar	10	20	

Maksimum $z = 10x + 20y$



$4x + 4y = 72$ ise $x = 4$ C (4,14) ise $z = 10.4 + 20.14 = 320$

$3x + 6y = 96$ $y = 14$

$4x + 4y = 72$ ise $x = 12$ D (12,6) ise $z = 10.12 + 20.6 = 240$

$6x + 3y = 90$ $y = 6$

İşletme günde 4 tane radyo , 14 tane TV üretmesi gerekir.

Problem.3.6:

Bir işletmede pamuk ve floş ipliği üretilmektedir. Bu üretim hallaç, cer-fitil ve taraklama dairesinde gerçekleşmektedir. Atölyelerin günlük kullanım süreleri mil olup 16,72,56 saattir. Birim pamuk üretimi için bu atölyede sırasıyla 2,12,4 saat iş gücü gerekirken birim floş üretimi için 2,6,14 saat iş gücü gereklidir. Birim maliyetler sırasıyla 5 ve 6 dolardır. Buna göre, işletmenin minimum maliyeti elde edebilmesi için günlük ne kadar pamuk ve floş ipliği üretmesi gerekir.

Çözüm.3.6:

u : günde üretilecek pamuk ipliği miktarı

v: günde üretilecek floş ipliği miktarı

	u	v	mevcut kapasite
Hallaç	2	2	16
Cer-fitil	12	6	72
Taraklama	4	14	56
Maliyet	5	6	

$$\text{Min } z = 5u + 6v$$

Kısıtlar

$$\begin{array}{c|cc} u & 0 & 8 \\ \hline v & 8 & 0 \end{array}$$

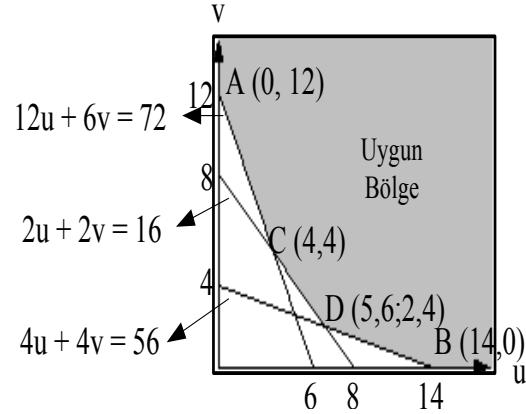
$$\leftarrow 2u + 2v = 16$$

$$\begin{array}{c|cc} u & 0 & 6 \\ \hline v & 12 & 0 \end{array}$$

$$\leftarrow 12u + 16v = 72$$

$$\begin{array}{c|cc} u & 0 & 14 \\ \hline v & 4 & 0 \end{array}$$

$$\leftarrow 4u + 4v = 56$$



$$u \geq 0, v \geq 0$$

$$4u + 14v = 56 \quad \text{ise} \quad u = 5,6 \quad D(5,6) \quad \text{ise} \quad z = 5 \cdot 5,6 + 6 \cdot 2,4 = 42,4$$

$$2u + 2v = 16 \quad \text{ise} \quad v = 2,4$$

$$12u + 6v = 72 \quad \text{ise} \quad u = 4 \quad C(4,4) \quad \text{ise} \quad z = 5 \cdot 4 + 6 \cdot 4 = 44$$

$$2u + 2v = 16 \quad \text{ise} \quad v = 4$$

günde 5,6 birim pamuk 2,4 birim floş ipliği üretilmesi gerekir

ALİŞTIRMALAR

1-) Min $z=25x+50y$ Kısıtlar $3x+y \geq 8$ $4x+3y \geq 19$ $x+3y \geq 7$ $x \geq 0, y \geq 0$	2-) Min $z=3.1x_1+4.2x_2$ Kısıtlar $0.1x_1+0.25x_2 \geq 1$ $x_1+0.25x_2 \geq 5$ $110x_1+120x_2 \geq 400$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	3-) Mak $z=45x+38y$ Kısıtlar $4x+5y \leq 180$ $95x+48y \leq 3600$ $x+2y \leq 60$ $x \geq 0, y \geq 0$
4-) Mak $z=34x+24y$ Kısıtlar $5x+3y \leq 50$ $21x+28y \leq 320$ $4.5x+4y \leq 50$ $x \geq 0, y \geq 0$	5-) Min $z=5u+6v$ Kısıtlar $2u+2v \geq 16$ $12u+6v \geq 72$ $4u+14v \geq 56$ $u \geq 0, v \geq 0$	6-) Mak $z=10k+8f$ Kısıtlar $k+f \leq 6$ $10k+5f \leq 50$ $5k+15f \leq 75$ $k \geq 0, f \geq 0$
7-) Min $z=5x+8y$ Kısıtlar $x+4y \geq 8$ $2x+2y \geq 10$ $2x+y \geq 7$ $x \geq 0, y \geq 0$	8-) Mak $z=10u+80t$ Kısıtlar $4u+4t \leq 56$ $6u+3t \leq 48$ $u+2t \leq 20$ $u \geq 0, t \geq 0$	9-) Min $z=20s+10r$ Kısıtlar $s+2r \geq 4$ $2s+r \geq 4$ $s+r \geq 3$ $s \geq 0, r \geq 0$
10-)Mak $z=18x+30y$ Kısıtlar $3x+y \leq 15$ $x+2y \leq 12$ $2x+2y \leq 14$ $x \geq 0, y \geq 0$	11-)Mak $z=10x+15y$ Kısıtlar $6x+3y \leq 90$ $x + y \leq 18$ $3x+6y \leq 96$ $x \geq 0, y \geq 0$	12-)Mak $z=10x+15y$ Kısıtlar $2x+4y \leq 16$ $3x+3y \leq 15$ $2x+y \leq 8$ $x \geq 0, y \geq 0$

4. BÖLÜM

4.MATRİSLER, DETERMİNANTLAR ve LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ

4.1. Matrisler

Tanım 4.1 : n satır ve m sütundan oluşan sayıların dikdörtgen şeklinde;

$$|A| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

yazılışına **n x m** tipinde matris denir. Matrisler genellikle **A, B, C, D,** gibi büyük harflerle elemanları ise **a,b,c,d,....** gibi küçük harflerle gösterilir ve **[]** veya **()** şeklinde sembolize edilirler. Bir başka gösterimle;

$$A = (a_{ij}) \quad (1 \leq i \leq n) \quad (1 \leq j \leq m) \text{ olarak ifade edilirler.}$$

Burada satır ve sütun bilindiğinde sadece $A = (a_{ij})$ gösterimi yeterlidir.

Örneğin; $a_{i1}, \dots, a_{in}$ elemanları **A'nın i. satırını** $a_{1j}, \dots, a_{mj}$ elemanları **A'nın j. sütununu** ifade eder.

Teorem 4.1: $A = (a_{ij})$ ve $B = (b_{ij})$, **m x n** tipinde iki matris olsun. $A=B$ olması için gerek ve yeter koşul;

$$a_{ij} = b_{ij} \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (j = 1, 2, \dots, n) \text{ olmasıdır.}$$

Tanım 4.2: $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, **m x n** tipinde iki matris olsun. Buna göre, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ifadesine A ve B matrislerinin toplamı denir ve $C = A + B$ ile gösterilir.

Tanım 4.3 : $A = (a_{ij})$, **m x n** tipinde bir matris ve r bir skaler olmak üzere; $c_{ij} = r \cdot a_{ij}$ ifadesine A matrisinin r skaleri ile skaler çarpımı denir ve $C = r \cdot A$ şeklinde gösterilir.

Tanım 4.4: m x n tipinde $A = (a_{ij})$ ve n x p tipinde $B = (b_{ij})$ matrisleri verilsin.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, p$$

ifadesine A ve B matrislerinin çarpımı denir ve $C=A \cdot B$ şeklinde gösterilir. Bu matris **m x p** tipindedir.

Sonuç olarak; iki matrisin çarpılabilmesi için gerek ve yeter şart birinci matrisin sütun sayısı ile ikinci matrisin satır sayısı eşit olmalıdır.

$A \cdot B \neq B \cdot A$ olup matrislerin çarpımının değişme özelliği yoktur.

Örnek 4.1:

$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ verilsin. Buna göre; $A + B$, $-3A$, $2B$, $-1.A + \frac{1}{2}B$

ifadelerini bulalım.

Çözüm 4.1:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1-2 & -2+2 & 3-3 \\ 4+0 & 0+1 & 5-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$-3 \cdot A = -3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -9 \\ -12 & 0 & -15 \end{bmatrix} \text{ ve } -1.A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -4 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$2.B = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \text{ ve } \frac{1}{2}B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$-1.A + \frac{1}{2}B = \begin{bmatrix} -1-1 & 2+1 & -3-\frac{3}{2} \\ -4+0 & 0+ & -5-\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -\frac{9}{2} \\ -4 & \frac{1}{2} & -\frac{11}{2} \end{bmatrix}$$

Örnek. 4.2: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{1 \times 3}$ ve $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$ matrisleri için $A.B$ ve $B.A$ nedir.

Çözüm 4.2: $A \cdot B = [1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6] = [32]_{1 \times 1}$ ve $B \cdot A = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 4.1 & 4.2 & 4.3 \\ 5.1 & 5.2 & 5.3 \\ 6.1 & 6.2 & 6.3 \end{bmatrix}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \\ 6 & 12 & 18 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

$$(1 \times 3) \cdot (3 \times 1) = (1 \times 1) \quad (A \cdot B)$$

$$(3 \times 1) \cdot (1 \times 3) = (3 \times 3) \quad (B \cdot A)$$

Görüldüğü gibi $A \cdot B \neq B \cdot A$ 'dır.

Tanım 4.5: Satır sayısı sütun sayısına eşit olan matrise kare matris denir. A bir kare matris olmak üzere;

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{n \text{ tane}}$$

n tane A matrisinin çarpımıdır.

4.2. Matrislerin Özellikleri

A, B ve C aynı tipte kare matrisler ve r,s skaler olsun.

1-) $A + B = B + A$

2-) $A + (B + C) = (A + B) + C$

3-) $r \cdot (A + B) = r \cdot A + r \cdot B$

4-) $(r + s) \cdot A = r \cdot A + s \cdot A$

5-) $0 \cdot A = 0$

6-) $A + (-1) \cdot A = 0$

7-) $A + 0 = A$

8-) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

9-) $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$

10-) $0 \cdot A = 0 = A \cdot 0$

11-) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

4.3. Özel Matrisler

4.3.1. Birim Matris : n x n tipindeki ;

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n} \quad \text{matrisine n. mertebeden birim matris denir.}$$

$$I_1 = [1]_{1 \times 1}; I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}; I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}; I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

4.3.2. Sıfır Matris : Bütün elemanları 0 olan matrise sıfır matris denir ve $0 = (0_{ij})$ ile gösterilir.

4.3.3. Köşegen Matrisler: n. Mertebeden herhangi bir $A = (a_{ij})$ kare matrisinin $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ elemanlarına A matrisinin **köşegen elemanları** denir.

Örneğin; $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 7 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ matrisinin köşegen elemanları 1, 3, 5 'tir

Böylece,sıfırdan farklı elemanları köşegen üzerinde bulunan matrise köşegen matris denir.

Yani; $A = (a_{ij})$ matrisinin köşegen matris olması için gerek ve yeter şart $i \neq j$ için $a_{ij} = 0$ olmasıdır.

Örnek 4.3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ matrisleri köşegen matrislerdir.

Özellik. 4.1: Genel olarak bir köşegen matris;

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ & & a_{33} \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n} \text{ şeklindedir. } A = \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ & & a_{33} \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} b_{11} & & 0 \\ & b_{22} & \\ & & b_{33} \\ 0 & & & b_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$$\text{İki köşegen matris olmak üzere; } A.B = \begin{bmatrix} a_{11} & b_{11} & 0 \\ a_{22} & b_{22} & \\ a_{33} & b_{33} & \\ 0 & & a_{nn} & b_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n} = B.A \text{ olur.}$$

4.3.4. Üçgen Matrisler :a) Bir $A = (a_{ij})$ kare matrisinde her $j > i$ için $a_{ij} = 0$ koşulu sağlanıyorsa A 'ya **alt üçgensel matris** denir.

Örneğin; $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ Matrisi alt üçgenseldir.

b) $i = j$ olmak üzere yani köşegen elemanları da 0 olan matrise tam üçgen matris denir.

Örneğin; $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ tam üçgenseldir.

c) Bir $A = (a_{ij})$ kare matrisinde her $i > j$ için $a_{ij} = 0$ koşulu sağlanıyorsa A matrisine **üst üçgensel matris** denir.

Örneğin, $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ Matrisi üst üçgenseldir.

4.3.5. Idempotent Matris : A kare matrisi $A^2 = A$ özelliğine sahipse A matrisine **idempotent** matris denir.

Örneğin; $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ bunlardandır.

4.3.6. Nilpotent Matris : Bir A kare matrisi için $A^q = 0$ olacak şekilde bir q tamsayısı bulunabiliyorsa A matrisine **Nilpotent Matris** denir.

Tanım 4.6: A, n x n tipinde bir kare matris olsun. A matrisinin i. satır ve j. Sütununun alınmasıyla elde edilen kare A matrisinin a_{ij} elemanınınminörü denir ve M_{ij} ile gösterilir.

Örnek 4.4: $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin M_{12} , M_{23} , M_{32} minörlerini bulalım.

Çözüm 4.4:

$$M_{12} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow M_{23} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow M_{32} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

4.3.7. Simetrik Matris: $A = (a_{ij})$ kare matrisinde eğer $a_{ij} = a_{ji}$ ise ($i, j = 1, 2, \dots, n$) ise **simetrik matris** $a_{ij} = -a_{ji}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) ise **ters simetrik matris** denir.

Örneğin; $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ matrisleri simetrik matris iken;

$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisleri ters simetrik matristir.

4.4. Determinantlar

Tanım 4.7: A , $n \times n$ 'lik bir kare matris olsun. A matrisinin determinanı **det A** veya $|A|$ ile gösterilir. 1. Satıra göre A matrisinin determinant açılımı

$$\det A = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \det M_{11} + (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \det M_{12} + \dots + (-1)^{1+n} \cdot a_{1n} \det M_{1n}$$
$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} \cdot a_{1j} \det M_{1j}$$

şeklinde tanımlanır.

4.4.1. Sarrus kuralı

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad \text{Matrisinin determinantını hesaplamak için pratik bir yol da sarrus}$$

kuralıdır. Buna göre;

$$|A| = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{31} a_{12} a_{23} - a_{31} a_{22} a_{13} - a_{11} a_{32} a_{23} - a_{21} a_{12} a_{33}$$

veya

$$|A| = a_{13} a_{21} a_{32} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{11} a_{22} a_{33} - a_{31} a_{22} a_{13} - a_{32} a_{23} a_{11} - a_{33} a_{21} a_{12}$$

Tanım 4.8: $A = (a_{ij})$ bir matris iken A matrisinin transpozesi (devriği) A^t ile gösterilir ve A matrisinin satırlarının sütunları ile yer değiştirilmesi ile elde edilir. Yani;

$$A = (a_{ij}) \text{ iken } A^t = (a_{ji}) \text{ 'dir.}$$

Örneğin;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{1 \times 3} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{veya} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 4} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 8 \\ 5 & 9 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}_{4 \times 2}$$

4.5. Determinantın Özellikleri : A bir kare matris olsun.Buna göre;

1-) A'nın bir satırı 0 ise $\det A = 0$

2-) A'nın herhangi iki satırı eşit ise $\det A = 0$

3-) A'nın herhangi iki satırının kendi aralarında yer değiştirmesiyle elde edilen matris B ise;

$$\det B = - \det A$$

4-) A'nın herhangi bir satırının katının diğer bir satırına ilave edilmesiyle elde edilen matris B ise;

$$\det B = \det A$$

5-) A'nın herhangi bir satırının k sayısı ile çarpılmasıyla elde edilen matris B ise;

$$\det B = k \cdot \det A$$

6-) $\det A^t = \det A$. Yani bir matrisin determinantı ile transpozunun determinantı aynıdır. Bir başka deyişle şimdiye kadar satırlar için söylenen özellikler sütunlar için de geçerlidir.

7-) A matrisi üst üçgen matris ise, A'nın determinantı köşegen üzerindeki elemanların çarpımına eşittir.

8-) $\det (A \cdot B) = \det A \cdot \det B$. olup burada A ve B aynı mertebeden iki kare matristir.

Teorem 4.2: A, $n \times n$ tipinde bir matris olsun. A matrisinin tersinin olabilmesi için gerek ve yeter şart $\det A \neq 0$ olmasıdır.

Tanım 4.9: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det M_{ij}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) şeklindeki sayıları tanımlayalım. A_{ij} sayısına a_{ij} elemanının **kofaktörü** (eşçarpamı – işaretli minörü) denir.

$$\det A = \sum_j a_{ij} A_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

A matrisinin kofaktörü A^{cof} ile gösterilir. $A^{\text{cof}} = (A_{ij})^t = A_{ji}$ 'dir. Yani, A matrisinin eşçarpam matrisi A'nın eşçarpamlarından oluşan matrisinin transpozüne eşittir.

Tanım 4.10:Ters Matris: A, bir $n \times n$ matris olsun. A matrisinin tersi;

$$A^{\text{cof}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^t \quad \text{iken} \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^{\text{cof}}$$

olup A matrisinin tersi olan A^{-1} matrisi A^{cof} ile $\frac{1}{\det A}$ çarpımına eşittir.

4.6. Lineer Denklem Sistemleri

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \quad (i=1,2,\dots,n)$$

ifadesi **n**- bilinmeyenli **n**- denklemden oluşan bir lineer denklem sistemidir. Açıkça yazmak

gerekirse; $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

.....

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

Matrisel formda gösterecek olursak bir Lineer denklem sistemi;

AX=B şeklinde gösterilir. Buradan;

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n \times 1}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}_{n \times 1}$$

$n \times n$ 'lik bir kare matris.

Bilinmeyenler vektörü

Sabitler vektörüdür.

Teorem.4.3: **AX=B** lineer denklem sisteminin çözümünün olması için gerek ve yeter koşul

A^{-1} 'in mevcut olmasıdır.

$AX=B$ ifadesinin her iki yanını A^{-1} ile çarparsak;

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} X = B \cdot A^{-1}$$

$$X = B \cdot A^{-1} \text{ çözüm vektörüdür.}$$

4.6.1. Cramer Kuralı:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

.

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \text{ denklem sistemini çözmek için;}$$

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A} \text{ olarak hesaplanır. (i=1,2,\dots,n)}$$

Burada, A_i matrisi **A** matrisinin **i. sütununun B** matrisiyle yer değiştirilmesiyle elde edilir.

4.6.2. Matris, Determinant ve LDS Örnekleri

$$1) \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ matrisinin; a) } \det A = ? \quad \text{b) } A^{-1} = ? \quad \text{c) } A^{\text{cof}} = ?$$

Çözüm : a) A, 3x3'lük bir kare matris olup istediğimiz bir satır (3 tane satır var) veya istediğimiz bir sütuna (3 tane sütun var) göre veya sarrus satır ilave veya sarrus sütun ilave pratik kurallarına göre 8 farklı yoldan determinant hesaplayabiliriz.

$$|A| = (-1)^{1+1} \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} -1 & -6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot (2) \cdot \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot (5) \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 15$$

$$|A| = (-3) \cdot (-1 + 18) + (-2) \cdot (4 - 12) + 5 \cdot (12 - 2) = -51 + 16 + 50 = 15$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & -6 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 15$$

$$|A| = (-3) \cdot (-1) \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 5 + (-2) \cdot 2 \cdot (-6) - (-2) \cdot (-1) \cdot 5 - (-3) \cdot 3 \cdot (-6) - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 15$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 5 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & -6 & 4 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 5 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-6) \cdot (-2) + (-3) \cdot (-1) \cdot 1 - (-2) \cdot (-1) \cdot 5 \cdot 3 \cdot (-6) \cdot (-3) - 1 \cdot 4 \cdot 2 = 15$$

$$\text{b) } A^{\text{cof}} = ?$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot |M_{ij}|$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} |M_{11}| = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & -6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 8$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} |M_{12}| = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 8$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} |M_{13}| = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 10$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} |M_{21}| = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 13$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} |M_{22}| = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 7$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} |M_{23}|, = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} |M_{31}| = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & -6 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -7$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} |M_{32}| = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} |M_{33}| = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

$$A^{\text{cof}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 17 & 8 & 10 \\ 13 & 7 & 5 \\ -7 & 2 & -5 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 17 & 13 & -7 \\ 8 & 7 & 2 \\ 10 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

c) $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{\text{cof}}$ olduğunu biliyoruz. Buradan A^{-1} ;

$$A^{-1} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 17 & 13 & -7 \\ 8 & 7 & 2 \\ 10 & 5 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{15} & \frac{13}{15} & \frac{-7}{15} \\ \frac{8}{15} & \frac{7}{15} & \frac{2}{15} \\ \frac{10}{15} & \frac{5}{15} & \frac{-5}{15} \end{pmatrix} \text{ olarak hesaplanır.}$$

$$2) -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -8$$

$$4x_1 - x_2 - 6x_3 = 13$$

$$-2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9 \quad \text{lineer denklem sistemini } AX=B \text{ matris formu ile ve Gauss-Yoketme}$$

yöntemiyle ayrı ayrı çözüünüz.

Çözüm: AX=B Matris formu: Lineer denklem sistemini önce matris biçiminde yazalım.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & -6 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -8 \\ 13 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$AX = B \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow I \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B \text{ eşitliğinden } X \text{ 'i hesaplayalım.}$$

$$X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{15} & \frac{13}{15} & \frac{-7}{15} \\ \frac{8}{15} & \frac{7}{15} & \frac{2}{15} \\ \frac{10}{15} & \frac{5}{15} & \frac{-5}{15} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 13 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{15} \cdot (-8) + \frac{13}{15} \cdot (13) + \frac{-7}{15} \cdot 9 \\ \frac{8}{15} \cdot (-8) + \frac{7}{15} \cdot (13) + \frac{2}{15} \cdot 9 \\ \frac{10}{15} \cdot (-8) + \frac{5}{15} \cdot (13) + \frac{-5}{15} \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-30}{15} \\ \frac{45}{15} \\ \frac{-60}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = -2, \quad x_2 = 3 \quad \text{ve} \quad x_3 = -4 \quad \text{olarak bulunur.}$$

$$\begin{aligned}
2) \quad & -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -8 \\
& 4x_1 - x_2 - 6x_3 = 13 \\
& -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9
\end{aligned}$$

LDS'sini Gauss - Yoketme ile çözünüz.

Çözüm : Gauss Yoketme ile Çözüm :

$$\begin{array}{lcl}
D_1 \dots\dots\dots -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -8 & \left. \begin{array}{c} \text{Önce } x_1 \\ \text{Önce } x_2 \\ \text{Önce } x_3 \end{array} \right\} & \text{yok edilebilir.} \\
D_2 \dots\dots\dots 4x_1 - x_2 - 6x_3 = 13 & & \\
D_3 \dots\dots\dots -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9 & &
\end{array}$$

1.Yaklaşım : 3 denklemleri 2'ser kullanarak x_1 'i yok edelim.

$$\begin{aligned}
D_2 + 2 \cdot D_3 &\Rightarrow \begin{array}{rcl} 4x_1 - x_2 - 6x_3 & = & 13 \\ -4x_1 + 6x_2 + 2x_3 & = & 18 \\ + & & \\ D_4 \dots\dots\dots 5x_2 - 4x_3 & = & 31 \end{array} \\
4 \cdot D_1 + 3 \cdot D_2 &\Rightarrow \begin{array}{rcl} -12x_1 + 8x_2 + 20x_3 & = & -32 \\ 12x_1 - 3x_2 - 18x_3 & = & 39 \\ + & & \\ D_5 \dots\dots\dots 5x_2 + 2x_3 & = & 7 \end{array} \\
D_4 \dots\dots\dots 5x_2 - 4x_3 &= 31 \\
D_5 \dots\dots\dots 5x_2 + 2x_3 &= 7 \\
D_4 + (-1) \cdot D_5 &\Rightarrow \begin{array}{rcl} 5x_2 - 4x_3 & = & 31 \\ -5x_2 - 2x_3 & = & -7 \\ + & & \\ -6x_3 & = & 24 \text{ ise } x_3 = -4 \end{array}
\end{aligned}$$

Bu değer D_4 veya D_5 'te yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
5x_2 - 4(-4) &= 31 \Rightarrow x_2 = 3 \\
5x_2 + 2(-4) &= 7 \Rightarrow x_2 = 3 \text{ bulunur.}
\end{aligned}$$

Şimdi de $x_2 = 3$ ve $x_3 = -4$ değerleri D_1 , D_2 veya D_3 'ten birine yazılırsa;

$$D_1 \Rightarrow -3x_1 + 2(3) + 5(-4) = -8 \Rightarrow -3x_1 = 6 \Rightarrow x_1 = -2 \text{ bulunur.}$$

Böylece; $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, $x_3 = -4$ olur.

$$\begin{aligned}
3) \quad & 2x - y + 3z = -6 \\
& -3x + 4y - 2z = 4 \\
& 5x - 2y + z = 5
\end{aligned}$$

LDS'sini Gauss - Yoketme
ve Cramer kuralı ile çözünüz.

Çözüm : Cramer kuralı;

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} -6 & -1 & 3 & -6 & -1 \\ 4 & 4 & -2 & 4 & 4 \\ 5 & -2 & 1 & 5 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & -2 & -3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}}$$

$$x = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 + 5(-2) \cdot (-1) + 1 \cdot 4 \cdot (-6) - 5 \cdot 4 \cdot 3 - (-2) \cdot (-2) \cdot (-6) \cdot (-3) - 1 \cdot 4 \cdot (-1)}{3 \cdot (-3) \cdot (-2) + (-1) \cdot (-2) \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 1 - 5 \cdot 4 \cdot 3 - (-2) \cdot (-2) \cdot 2 \cdot (-3) - 1 \cdot (-3) \cdot (-1)} = \frac{-70}{-35} = 2$$

$$y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -6 & 3 & 2 & -6 \\ -3 & 4 & -2 & -3 & 4 \\ 5 & 5 & 1 & 5 & 5 \end{vmatrix}}{-35}$$

$$y = \frac{5 \cdot (-3) \cdot 3 + 5(-2) \cdot (-6) + 1 \cdot 4 \cdot 2 - 5 \cdot 4 \cdot 3 - 5 \cdot (-2) \cdot 2 - 1 \cdot (-3) \cdot (-6)}{-35} = \frac{-35}{-35} = 1$$

$$z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -6 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & 4 & -3 & 4 \\ 5 & -2 & 5 & 5 & -2 \end{vmatrix}}{-35}$$

$$z = \frac{(-6) \cdot (-3) \cdot (-2) + (-1) \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 5 - 5 \cdot 4 \cdot (-6) - (-2) \cdot 4 \cdot 2 - 5 \cdot (-3) \cdot (-1)}{-35} = \frac{105}{-35} = -3$$

b) Gauss – Yoketme ; önce x'i veya y'yi veya z'yi yok edebiliriz. Önce z'yi yokedelim.

$$D_1 \Rightarrow 2x - y + 3z = -6$$

$$D_2 \Rightarrow -3x + 4y - 2z = 4$$

$$D_3 \Rightarrow 5x - 2y + z = 5$$

$$D_2 + 2 \cdot D_3 \Rightarrow -3x + 4y - 2z = 4$$

$$10x - 4y + 2z = 10$$

$$+ \underline{\hspace{2cm}}$$

$$7x = 14 \Rightarrow x = 2$$

Bu değer istenilen iki denklemde yerine yazılarak y ve z ‘ye bağlı iki bilinmeyenli iki denklem elde edilir. D_1 ve D_2 ‘de $x=2$ yazalım.

$$\begin{aligned}
 -y + 3z &= -10 \Rightarrow D_4 \\
 4y - 2z &= 10 \Rightarrow D_5 \\
 4D_4 + D_5 &\Rightarrow \\
 -4y + 12z &= -40 \\
 4y - 2z &= 10 \\
 + & \\
 10z &= -30 \\
 z &= -3
 \end{aligned}$$

$$4y - 2 \cdot (-3) = 10 \text{ ise } y = 1 \text{ ve çözüm : } x=2, y=1, z=-3$$

4.7. Özdeğer ve Özvektörler

$(A)_{n \times n}$ 'lik bir kare matris ve X , n - boyutlu bir vektör olsun. $Y=AX$, N boyutlu uzaydan kendi içine bir lineer dönüşüm olarak göz önüne alınabilir. Biz; $AX=\lambda X$ şartını sağlayan X vektörleri kompleks sayılardan ibarettir.

Tanım: A bir kare matris olmak üzere; $AX=\lambda X$ özelliğindeki sıfır olmayan X vektörüne A ’nın öz vektörü, λ değerlerine de A ’nın öz değerleri denir. $(A-\lambda I)X=0$ olsun.

Bu denklemin aşikar çözümden başka çözümlerinin olması $\det(A-\lambda I) \neq 0$ olmasıdır.

Özdeğer problemlerini çözmek için yukarıdaki determinanttın λ öz değerinin bulunarak her bir özdeğere karşı gelen özvektörleri belirlemektir. Bu nedenle yukarıdaki determinant açıldığında n . dereceden bir polinom elde edilir ki bu polinoma **karakteristik polinom** denir. Bundan dolayı A matrisinin en çok n tane özdeğeri olur.

Örnek 4.5: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ matrisinin özdeğer ve özvektörlerini bulunuz?

Çözüm 4.5: $\det(A - \lambda I) = 0$ ifadesinden;

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 19\lambda + 12 = -(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-4) = 0$$

denklemini elde edilir ve buradan özdeğerler; $\lambda=1$, $\lambda=0$, $\lambda=4$ olarak bulunur.

Bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler ise;

$$\Rightarrow \lambda=1 \text{ için; } 2x_1 - x_2 = 0$$

$$-x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

$$-x_2 + 2x_3 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 = x_2 \\ 2x_3 = x_2 \end{array} \right\} x_2 = a \quad x^{(1)} = (2a, a, 2a)^t = a(2, 1, 2)^t$$

$$\Rightarrow \lambda=3 \text{ için; } x^{(2)} = (b, 0, -b)^t = b(1, 0, -1)^t$$

$$\Rightarrow \lambda=4 \text{ için; } x^{(3)} = c(1, -1, 1)^t$$

$$\det[V_1, V_2, V_3] = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & 0 & -c \\ a & -b & c \end{vmatrix} = -6abc$$

Örnek.4.6: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ matrisinin özdeğer ve özvektörlerini bulunuz.

Çözüm.4.6:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - I\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda) \cdot ((2-\lambda)(3-\lambda) - (-1)(-1)) + 1((-1)(3-\lambda) - 0 \cdot (-1)) = 0 \quad (3-\lambda)(6-5\lambda+\lambda^2-1) + \lambda-3=0$$

$$18-6\lambda-15\lambda+5\lambda^2+3\lambda^2-\lambda^3-3+\lambda+\lambda-3\lambda=0$$

$$-\lambda^3+8\lambda^2-19\lambda+12=0 \quad \text{ise} \quad \lambda_1=1, \lambda_2=3, \lambda_3=4$$

$$(3-\lambda)x_1 + (-1)x_2 = 0 \quad \lambda_1=1 \text{ için,}$$

$$-x_1 + (2-\lambda)x_2 - x_3 = 0 \quad 2x_1 - x_2 = 0, \quad -x_1 + x_2 - x_3 = 0, \quad -x_2 + 2x_3 = 0, \quad x_1 = x_3, x_2 = 2x_1$$

$$-x_2 + (3-\lambda)x_3 = 0 \quad V^{(1)} = (x_1 \ 2x_1 \ x_1) = a(1 \ 2 \ 1)$$

$\lambda_2=3$ için,

$$-x_2=0, \quad -x_1-x_2-x_3=0, \quad -x_2=0, \quad x_3=-x_1$$

$$V^{(2)} = (x_1 \ 0 \ -x_1) = b(1 \ 0 \ -1)$$

$\lambda_3=4$ için,

$$-x_1-x_2=0, \quad -x_1-2x_2-x_3=0, \quad -x_2-x_3=0, \quad x_3=-x_2, x_1=-x_2$$

$$V^{(3)} = (-x_2 \ x_2 \ -x_2) = c(-1 \ 1 \ -1)$$

Örnek.4.7: $A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & -3 \\ -12 & -20 & 24 \\ -6 & -12 & 16 \end{pmatrix}$ matrisinin özdeğer ve özvektörlerini bulunuz.

Çözüm.4.7:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 7 - \lambda & 6 & -3 \\ -12 & -20 - \lambda & 24 \\ -6 & -12 & 16 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(7 - \lambda)[(-20 - \lambda)(16 - \lambda) + 24 \cdot 12] - 6[(-12)(16 - \lambda) + 24 \cdot 6] - 3[144 - (20 + \lambda) \cdot 6] = 0$$

$$(7 - \lambda)(-320 - 16\lambda + \lambda^2 + 20\lambda + 288) - 6(12\lambda - 192 + 144) - 3(144 - 120 - 6\lambda) = 0$$

$$(7 - \lambda)(\lambda^2 + 4\lambda - 32) - 6(12\lambda - 48) - 3(24 - 6\lambda) = 0$$

$$7\lambda^2 - \lambda^3 + 28\lambda - 4\lambda^2 + 21\lambda - 224 - 72\lambda + 288 - 72 + 18\lambda = 0,$$

$$-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 6\lambda - 8 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = -2 \text{ bulunur.}$$

$$(7 - \lambda)x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 0, \quad -12x_1 - (20 + \lambda)x_2 + 24x_3 = 0, \quad -6x_1 - 12x_2 + (16 - \lambda)x_3 = 0$$

$\lambda = 1$ için

$$6x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 0$$

$$-12x_1 - 21x_2 + 24x_3 = 0$$

$$-6x_1 - 12x_2 + 15x_3 = 0$$

$$x_1 = \frac{3}{2}x_3, \quad x_2 = 2x_3$$

$$V^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}x_3 \\ 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$V^{(1)} = a \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 4$ için

$$3x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 0$$

$$-12x_1 - 24x_2 + 24x_3 = 0$$

$$-6x_1 - 12x_2 + 12x_3 = 0$$

$$x_3 = 0, \quad x_1 = -2x_2$$

$$V^{(2)} = \begin{pmatrix} -2x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V^{(2)} = b \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda = -2$ için

$$9x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 0$$

$$-12x_1 - 18x_2 + 24x_3 = 0$$

$$-6x_1 - 12x_2 + 18x_3 = 0$$

$$x_2 = -2x_1, \quad x_3 = -x_1$$

$$V^{(3)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -2x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix}$$

$$V^{(3)} = c \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

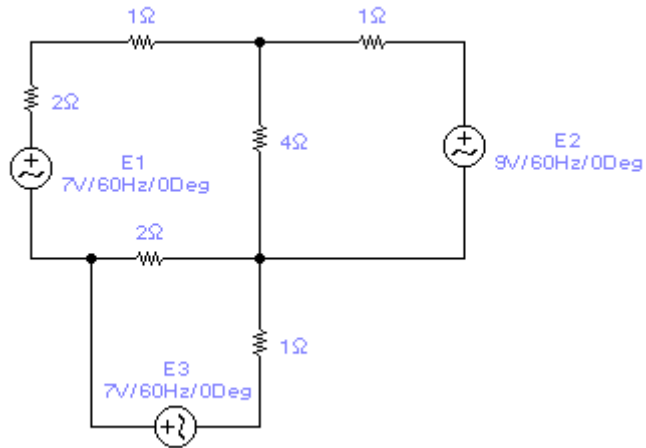
ALİŞTIRMALAR

1) Aşağıdaki lineer denklem sistemlerini çözünüz.

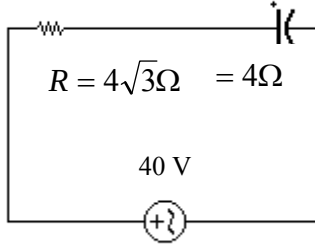
$2x - 3y - z = -5$ $3x - 4y + 2z = -3$ $5x + 2y - 3z = 6$	$-6u - v - 2w = -9$ $-4u + 5v + 3w = 4$ $-2u + 4v - 5w = -3$	$x + 6y + z = 0$ $2x - 3y + 4z = 2$ $-3x + 2y - 3z = 0$
$5x - 2y + 3z = 18$ $-4z - 2x + 3y = -9$ $3x - 2z + y = 6$	$4x - 2y + 3z = 26$ $-3x + 7y - 2z = -24$ $-2x + y - 3z = -19$	$3u - 2v + w = 18$ $-4u + 4v - 2w = -26$ $5u - 6v + 4w = 41$
$3x - y + 4z = 5$ $-2x + 3y - z = 3$ $5x - 4y + 3z = 0$	$2x - 3y - 4z = -3$ $-x + 2y - 3z = -9$ $-5x + y + 6z = 6$	$u - 3v + 4w = 9$ $-4u + 5v - 2w = -1$ $2u - 7v + 8w = 15$
$4x - 2y + 3z = 0$ $-3x + 7y - 2z = -5$ $-2x + y - 3z = -3$	$2x - 3y + z = -1$ $-3x + 2y - 3z = -8$ $x - 6y + 5z = 4$	$3x - 2y + z = 4$ $-x + 4y - 5z = -6$ $6x - 3y - 8z = -2$
$-2x + 3y - z = -4$ $-3x + 4y + z = 1$ $4x - 3y + 2z = 11$	$-2u - v + 4w = 1$ $4u + 3v - w = 6$ $-u - 6v - 2w = -9$	$x + y + z = 2$ $2x - y + z = 5$ $x + z = -4$
$x + 2y + 2z = 1$ $3x + 2y - 2z = -1$ $x - 2z = 0$	$x + y + z = 4$ $2x - 5y - 2z = 3$ $x + 7y - 7z = 5$	$-x + y - z = 0$ $2x - y - z = 2$ $x + y = -1$
$x + y - z = 3$ $x + z = -2$ $2y - z = 3$	$x + y + z + t = 0$ $x + y + z - t = 3$ $x + y - z + t = -4$ $x - y + z + t = 2$	$x + y + 2z = 1$ $2x + y - z = -2$ $3x + y + z = 5$
$x - 2y - z = 1$ $-2x - 3z = 1$ $3y + z = 2$	$2x + y - z = 0$ $-x + 2y + z = -9$ $-x + 2y + z = -9$	$3x - y + 2z = 7$ $x - 5y - 4z = -7$ $2x + 2y = -2$

$x + y + z = 6$ $-x - y + z = 0$ $3x + y - 2z = -1$	$x + y - z = 2$ $-2x + y + z = 3$ $x + y + z = 6$	$-x + 2y - z = 0$ $-x + y - 2z = 0$ $2x + y - z = 0$
$x + y - z = 0$ $x - 3y + z = 0$ $3x - y - z = 0$	$2x - y + z = 0$ $3x + 2y + 3z = 0$ $x + 3y + 2z = 0$	$-x - y - 5z = 0$ $x - y - z = 0$ $2x + 4z = 0$
$x + 2y + 3z = 0$ $2x + y - 3z = 0$ $3x + 2y + z = 0$	$10x + 8y + 2z = 0$ $5x + 4y + z = 0$ $14x + 12y + 3z = 0$	$x - y - 2z = 0$ $7x - 3y - z = 0$ $x + 3y + 4z = 0$
$2x - y + 3z = 0$ $3x + 2y + z = 0$ $x - 4y + 5z = 0$	$2x + 3y + 5z = 0$ $x + y + z = 0$ $3x + 5y - z = 0$	$-4x + 5y - z = 0$ $2x - 4y = -2$ $-7y - 3z = -10$

2) Şekildeki üç gözlü kapalı devreyi $AX=B$ lineer denklem sistemi haline çevirip I_1, I_2, I_3 akımlarını bulunuz.



3) Şekle göre ;



i) Z 'nin vektör diyagramını çiziniz.

ii) $\theta = ?$ $|Z| = ?$

iii) $V=40 \text{ V} \Rightarrow I = ?$

4) Aşağıdaki matris işlemlerini hesaplayınız.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) $A+B$ b) $3A-2B$ c) $A^T + B^T$ d) $(A+B)^T$

e) $(A-B)^T$ f) $A + A^T$ d) $B - B^T$

5) Aşağıdaki matris işlemlerini hesaplayınız.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

a) $A.B$ b) $A^2.B$ c) $A + A^T$ d) $B - B^T$

e) $A^{-1}.B$ f) $(A.B)^{-1}$ g) $(B-A)^{-1}$ h) $(A+B)^{-1}$

6) Aşağıdaki denklem sistemlerinde a ve b değerlerini hesaplayınız.

$$\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \end{pmatrix}$$

7) Aşağıdaki matrislerin çarpımlarını bulunuz.

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

8) Aşağıdaki matrislerin ters matrislerini bulunuz.

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{b) } B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

5. BÖLÜM

5. TRİGONOMETRİ

Trigonometri matematiğin en çok kullanılan kavramlarından biridir. Teorik matematikte olduğu kadar mühendislikte ve diğer bilim dallarında da çok uygulama alanları bulmuştur. Trigonometri üçgenlerin bilinmeyen kenarlarının uzunluğunu bulma ihtiyacından ortaya çıkan bir kavramdır. Halen de kullanılmaktadır. Şimdi bu özelliklere göre bazı tanımlar yapalım.

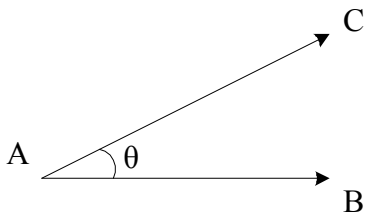
5.1. Genel Bilgiler

Doğru: Geometride doğru kısaca noktalar topluluğu olarak tanımlanabilir. Bir başka deyişle doğru, başlangıç ve bitiş noktası belli olmayan sınırsız uzunlukta, sonsuz sayıdaki noktalar kümesidir.

Yarım Doğru (Işın): Başlangıç noktası belli olan doğruya yarım doğru veya ışın denir. $[AB)$ Şeklinde gösterilir.



Açı: $[AB)$ ve $[AC)$ yarım doğrularının (ışın) arasında kalan alana açı denir. Bu iki yarım doğrunun kesiştiği noktaya açının tepesi ve ışınların her birine açının kenarları denir.

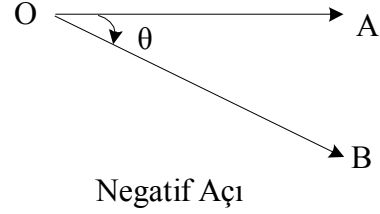
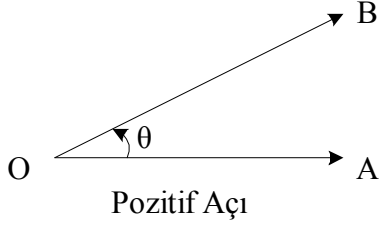


Bir açının ölçüsü iki ışının arasındaki dönme miktarı ile belirlenir. (θ gibi)

Biz burada sadece bir dönme yönünden bahsediyoruz. Gerçekte iki dönme yönü vardır. Bunu biz dönme yönünü tanımlayarak açıklayalım. $[AB)$ yarım doğrusuna başlangıç kenarı diyelim. Bu yarım doğruyu saat ibresinin tersi yönde aynı pozisyonda belirli bir θ miktarı döndürelim. Bu durumda $[AC)$ doğrusunu elde ederiz. Böylece BAC açısı $[AB)$ yarım doğrusundan $[AC)$ yarım doğrusuna kadar θ birimlik dönme ile elde edilir.

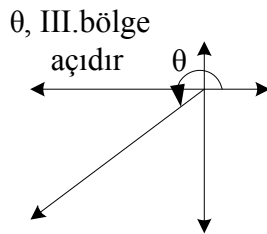
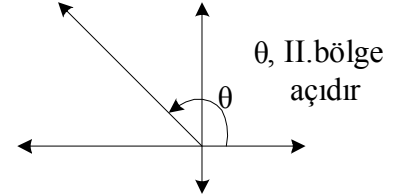
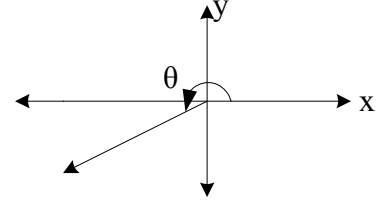
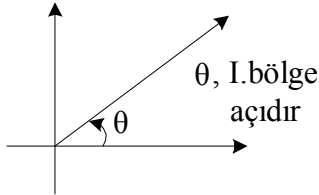
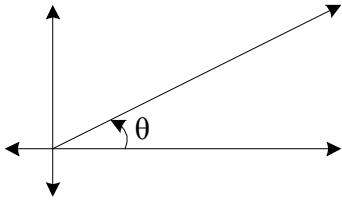
İşte bu θ birimlik dönme yönü yani saat ibresinin tersi yönünde olana pozitif dönme yönü denir. Tersine saat ibresi ile aynı yöndeki dönmeye negatif dönme yönü denir.

Bir açı $[OA)$ ışınının başlangıç noktası etrafında döndürülmesiyle elde edilir. Bu nedenle biz $[OA$ yarı doğrusunun başlangıç kenarı ve $[OB)$ yarı doğrusunu da (O köşesi etrafında θ birimlik dönme ile elde edilen) bitiş kenarı denir. O noktasına da açının köşesi denir. Açılar genellikle $\alpha, \beta, \theta, \dots$ gibi harflerle gösterilirler.

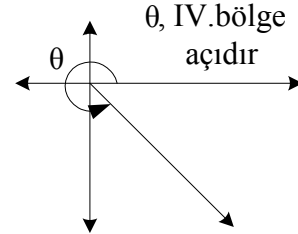


Eğer bir θ açısının köşesi kartezyen koordinat sisteminde orijinde ve başlangıç kenarı x-ekseninin pozitif yönü üzerinde ise θ açısı standart pozisyonadadır denir.

Standart pozisyonadaki bazı açılar aşağıda gösterilmiştir.

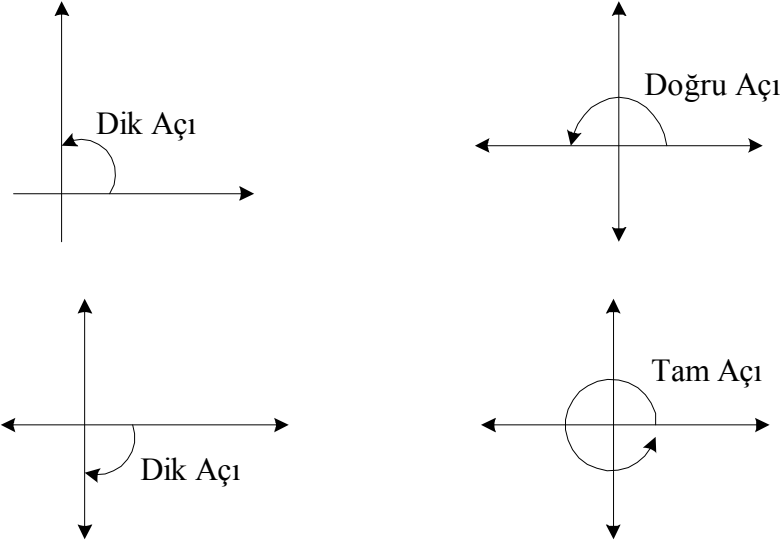


θ , III.bölge açıdır

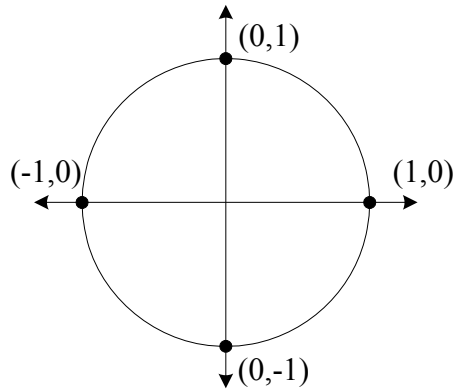


θ , IV.bölge açıdır

Şimdi de bölgesel açıları aşağıdaki gibi tanımlayalım.

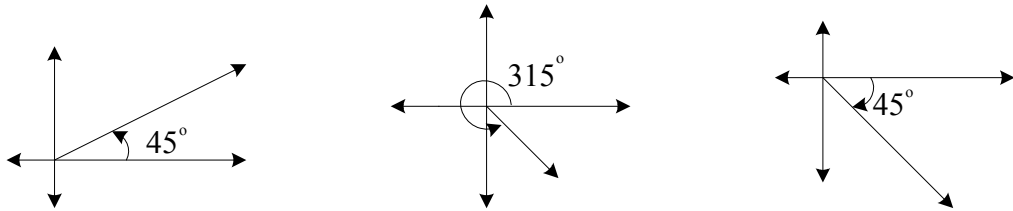


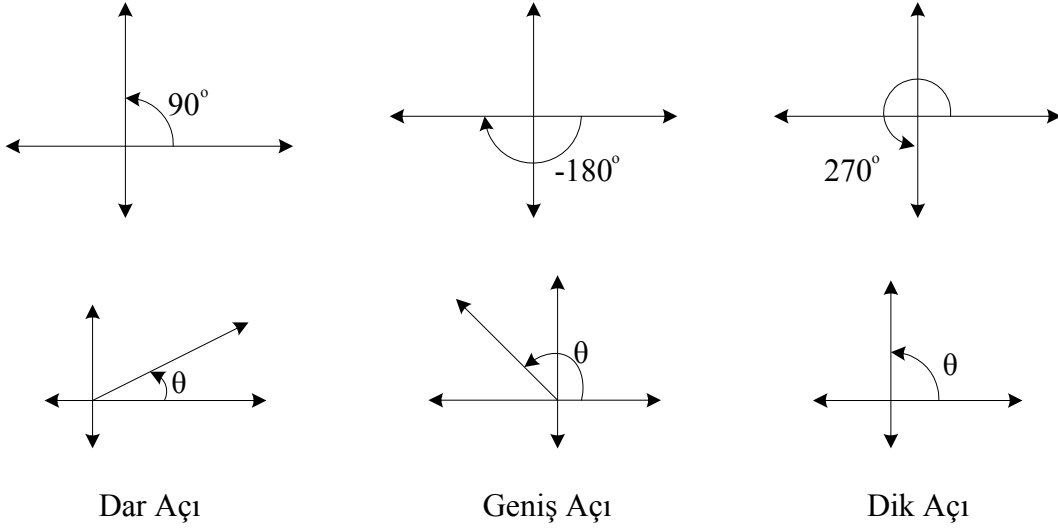
Birim Çember ($x^2 + y^2 = 1$ Çemberi) : Merkezi orijinde ve yarıçapı 1 birim olan çembere **birim çember** denir. Birim çemberin x ekseninin pozitif yönünü kestiği A noktasına **açı ölçülerinin başlangıç noktası** denir.



Açı Ölçü Birimleri:

1-) Derece: Eğer bir daire 360 eşit parçaya bölünürse her bir eşit parçaya 1 derecelik yay, yayı gören merkez açıya da 1 derecelik açı denir. 1° ile gösterilir.





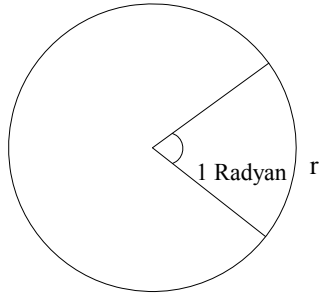
Bir θ açısı , $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ise θ açısına dar açı, $90^\circ < \theta < 180^\circ$ ise θ açısına geniş açı, $\theta = 90^\circ$ ise θ açısına dik açı denir.

$$1 \text{ derece} = 60 \text{ dakika} \quad 1^\circ = 60'$$

$$1 \text{ dakika} = 60 \text{ saniye} \quad 1' = 60'' \quad \text{şeklinde gösterilir.}$$

2)Radyan: Bir dairenin yarıçapı r iken, r birim uzunluğundaki yaya **bir radyanlık yay** ve bu yayı gören açiya **1 radyanlık açı** denir. **1 rad** ile gösterilir.

Buna göre 360° ' lik açı 2π radyanına eşittir.



$$\begin{aligned} & \text{r} \quad \text{1 rad} \\ & \text{2}\pi \quad \text{x} \\ & \text{x} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \end{aligned}$$

Buna göre $360^\circ = 2\pi$ rad eşitliği her zaman geçerlidir. $360^\circ = 2\pi$ rad ise $180^\circ = \pi$ rad buradan:

$$1 \text{ rad} = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \quad \text{veya} \quad 1 \text{ rad} = \frac{180}{\pi} \text{ eşitlikleri bulunur.}$$

3)Grad: Bir dairenin 400 eşit parçaya bölünmesi ile elde edilen her bir parçaya bir gradlık yay ve bu yayı gören çevre açiya da 1 gradlık açı denir ve grad ile gösterilir.Buna göre ;400 grad = $360^\circ = 2\pi$ eşitliği geçerlidir. Böylece açı ölçü birimleri arasında; **D = Derece; R = Radyan; G = Grad** olmak üzere;

$$\frac{D}{360} = \frac{R}{2\pi} = \frac{G}{400} \quad \text{veya} \quad \frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} = \frac{G}{200} \quad \text{bağıntısı her zaman geçerlidir.}$$

Örnekler:

1-) 30° ' lik açı kaç radyandır?

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \rightarrow \frac{30}{180} = \frac{R}{\pi} \rightarrow R = \frac{30\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{veya } 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad ise } 30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

2-) -240° ' lik açı kaç radyandır?

$$-240^\circ = (-240) \cdot \left(\frac{\pi}{180}\right) = -\frac{4\pi}{3}$$

3-) 240 grad kaç derecedir?

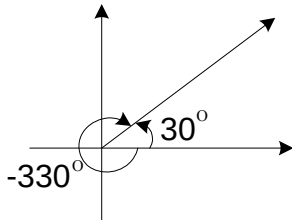
$$\frac{G}{200} = \frac{D}{180} \rightarrow \frac{240}{200} = \frac{D}{180} \rightarrow D = \frac{180 \cdot 240}{200} = 216^\circ$$

4-) $\frac{3\pi}{4}$ kaç radyandır?

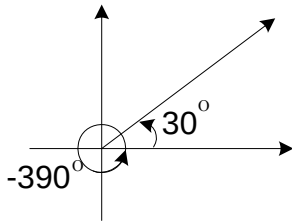
$$\frac{R}{\pi} = \frac{G}{200} \rightarrow \frac{\frac{3\pi}{4}}{\pi} = \frac{G}{200} \rightarrow \frac{\frac{3\pi}{4} \cdot 200}{\pi} = G \rightarrow G = 150 \text{ grad}$$

Standart pozisyonda aynı bitiş kenarına sahip açılara ortak bitiş kenarına sahip açılar denir.

Örneğin;

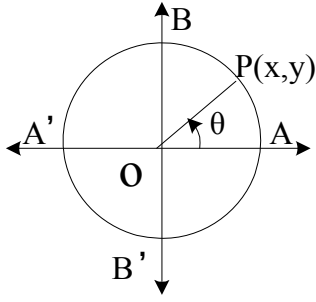


30° ve 330° ortak bitiş kenarına sahip açılar.



30° ve 390° derece ortak bitiş kenarına sahip açılardır.

Esas Ölçü:



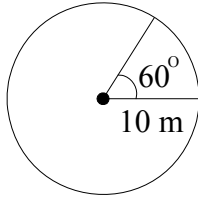
Şekildeki $P(x,y)$ noktası çember üzerindedir $k \in \mathbb{Z}$ ve $0 \leq \theta_1 \leq 360^\circ$ için $\theta = \theta_1 + 2k\pi$ değerlerinin hepsi P noktasına karşılık gelir. Buna göre AOP açısına θ açısının esas ölçüsü denir.

Örnekler: $\frac{16\pi}{3}$ radyanlık açının gerçek ölçüsü nedir?

$$\frac{16\pi}{3} = \frac{12\pi + 4\pi}{3} = 4\pi + \frac{4\pi}{3} \quad \theta = \frac{4\pi}{3} \text{ esas ölçüdür.}$$

Yay Uzunluğu: θ radyan cinsinden merkez açı ve r yarıçap iken; $S = r \cdot \theta$ 'dır.

Örnek: Yay uzunluğunu bulunuz?

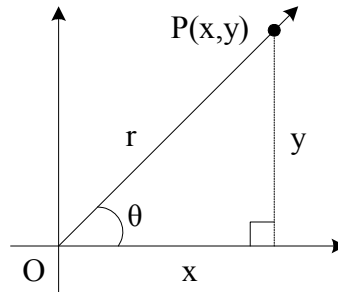


$$60^\circ = 60 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$$

$$S = r \cdot \theta = (10m) \cdot \left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{10\pi}{3} m = 10.47m$$

5.2.Dar Açıların Trigonometrik Fonksiyonları:

Bir θ dar açısına sahip olduğumuzu varsayalım. Bitiş kenarı üzerinde $O(0,0)$ noktası dışında herhangi bir $P(x,y)$ noktası seçelim. Orjinden P noktasına kadar olan uzaklığı r ile gösterelim ($r > 0$). Bu r değerine aynı zamanda yarıçap vektörü denir.

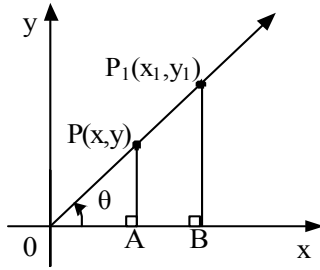


Phytagorean (Pisagor) teoreminden; $r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ($r > 0$ olduğu için)

olarak bulunur. Buna göre trigonometrik fonksiyonları tanımlayalım;

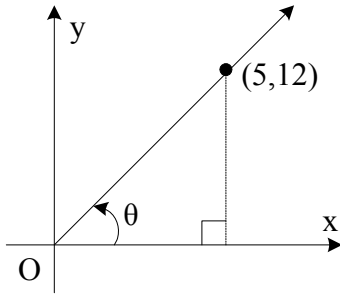
$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \Rightarrow & \quad \tan \theta = \frac{y}{x} & \Rightarrow & \quad \sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} \\ \cos \theta &= \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \Rightarrow & \quad \cot \theta = \frac{x}{y} & \Rightarrow & \quad \csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y} \end{aligned}$$

Her bir trigonometrik fonksiyon $P(x,y)$ noktasının seçiminden bağımsız iken θ değerine bağlıdır. Bunu biraz daha açıklayalım. Aşağıdaki şekilde bitiş kenarı üzerinde P noktasından ve $O(0,0)$ noktasından farklı bir $P_1(x_1, y_1)$ noktası alalım.



OAP ve OBP_1 üçgenleri benzer üçgendirler Geometriden hatırlanabileceği gibi bu iki üçgen orantılıdır. Bu oran üçgenlerin benzerliğinden veriler kullanılarak kolaylıkla elde edilebilir. Sonuç olarak $\sin \theta$ ve verilen bir θ açısına göre bir tektir.

Örnek:

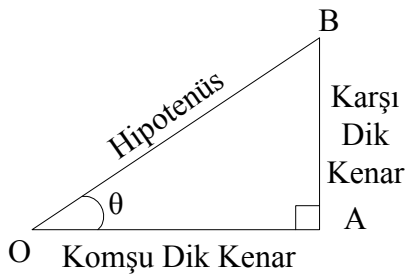


Şekilde verilenlere göre θ dar açısının trigonometrik fonksiyonlarının değerlerini bulunuz.

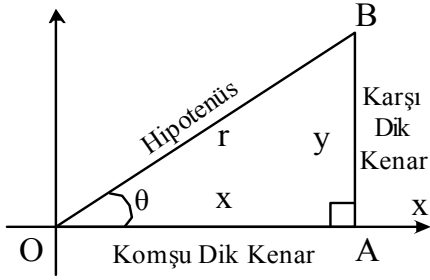
Çözüm: $\left. \begin{array}{l} x = 5 \\ y = 12 \end{array} \right\} r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{y}{r} = \frac{12}{13} & \Rightarrow & \quad \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{12}{5} & \Rightarrow & \quad \sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{13}{5} \\ \cos \theta &= \frac{x}{r} = \frac{5}{13} & \Rightarrow & \quad \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{5}{12} & \Rightarrow & \quad \csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{13}{12} \end{aligned}$$

Bir θ dar açısının trigonometrik fonksiyonlarının değerleri bir dik üçgenin kenarlarının uzunlukları oranı cinsinden bulunabilir. Bunu açıklamak için aşağıdaki gibi bir AOB üçgenini göz önüne alalım.



θ dar açısının karşısındaki AB kenarına karşı dik kenar ve açı kavramında başlangıç kenarı diye tanımladığımız OA kenarına komşu dik kenar diyelim. OB kenarında AOB üçgeninde hipotenüs olmak üzere bu AOB üçgenini dik koordinat sistemine taşıyalım.



B noktasının apsisi θ için komşu dik kenarı iken ordinatı θ için karşı dik kenardır. Buna göre;

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{\text{Karşı Dik Kenar}}{\text{Hipotenüs}}$$

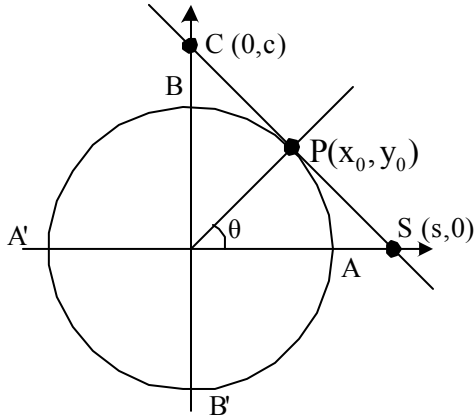
$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{\text{Komşu Dik Kenar}}{\text{Hipotenüs}}$$

$$\sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{\text{Hipotenüs}}{\text{Komşu Dik Kenar}}$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{\text{Hipotenüs}}{\text{Karşı Dik Kenar}}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{\text{Karşı Dik Kenar}}{\text{Komşu Dik Kenar}}$$

$$\cotan \theta = \frac{x}{y} = \frac{\text{Komşu Dik Kenar}}{\text{Karşı Dik Kenar}}$$



P noktasından birim çembere çizilen teğetin x ekseninin kestiği $s(s,0)$ noktasının s apsisine θ **reel sayısının sekanti** denir ve $\sec \theta = S$ şeklinde gösterilir. Teğetin y ekseninin kestiği $C(0,c)$ noktasının C ordinatına θ **reel sayısının kosekanti** denir ve $\csc \theta = C$ şeklinde gösterilir.

Örneklerde görüldüğü gibi trigonometrik fonksiyonlar arasında birbirleri cinsinden birçok ilişki vardır. Bunları aşağıdaki tablo ile sunacak olursak;

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \Rightarrow \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \Rightarrow$$

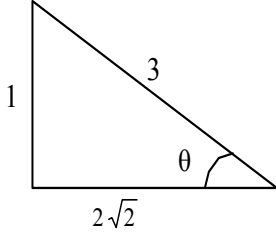
$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} \Rightarrow \tan \theta = \frac{1}{\cotan \theta}$$

$$\cotan \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}$$

$$\Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{\csc \theta} \Rightarrow \cotan \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

Örnek: $\cos\theta = 2\sqrt{2}/3$ ise θ 'nın diğer değerini bulunuz?

Çözüm:



$$3^2 = (2\sqrt{2})^2 + x^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 9 - 8 = 1 \Rightarrow x = 1$$

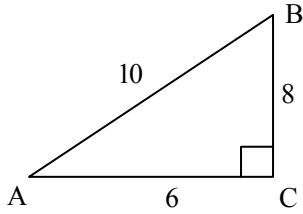
$$\sin\theta = \frac{1}{3} \text{ ise } \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{veya } \tan\theta = \frac{x}{y} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \text{Co tan } \theta = \frac{1}{\tan\theta} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{Cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3 \quad \text{ve } \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Böylece biz bu bilgilere göre bir θ dar açısının trigonometrik fonksiyonları cinsinden değerini herhangi bir dik üçgende rahatlıkla bulabiliriz.

Örnek:



Şekle göre A ve B açılarının trigonometrik fonksiyonlarının değerlerini bulunuz?

Çözüm: $\sec A = \frac{\text{Hipotenüs}}{\text{Kom.DikKenar}} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$

$$\text{Co sec } A = \frac{\text{Hipotenüs}}{\text{Kar.DikKenar}} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

$$\sin A = \frac{\text{Kar.DikKenar}}{\text{Hipotenüs}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\tan A = \frac{\text{Kar.DikKenar}}{\text{Kom.DikKenar}} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\cos A = \frac{\text{Kom.DikKenar}}{\text{Hipotenüs}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\text{Co tan } A = \frac{\text{Kom.DikKenar}}{\text{Kar.DikKenar}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$\sin B = \frac{\text{Kar.DikKenar}}{\text{Hipotenüs}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\tan B = \frac{\text{Kar.DikKenar}}{\text{Kom.DikKenar}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$\cos B = \frac{\text{Kom.DikKenar}}{\text{Hipotenüs}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

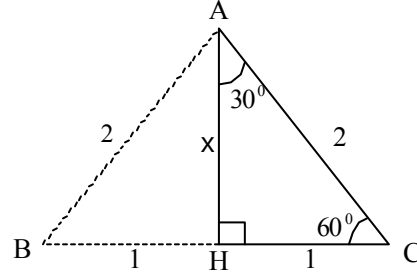
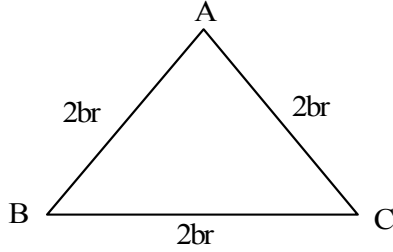
$$\text{Co tan } B = \frac{\text{Kom.DikKenar}}{\text{Kar.DikKenar}} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\sec B = \frac{\text{Hipotenüs}}{\text{Kom.DikKenar}} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

$$\text{Co sec } B = \frac{\text{Hipotenüs}}{\text{Kar.DikKenar}} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

5.3. Bazı Dar Açların Trigonometrik Oranları

30° , 45° ve 60° 'lik açların trigonometrik oranlarını bazı üçgenleri kullanarak rahatlıkla bulabiliriz. Her bir kenarı $2br$ olan ABC eşkenar üçgenini göz önüne alalım (soldaki şekil), sonra A köşesinden H dikmesini inelim (sağdaki şekil).



Eşkenar üçgen özelliğinden $|BH| = |HC| = 1$ ve $\hat{HAC} = 30^\circ$ olur. $|AH| = x$ diyelim. Pisagor

teoreminden $|AC|^2 = |AH|^2 + |HC|^2 \Rightarrow 2^2 = x^2 + 1^2 \Rightarrow x^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$

$x = |AH| = \sqrt{3}$ olarak bulunur. Buna göre;

$$\sin 30^\circ = \frac{|HC|}{|AC|} = \frac{1}{2}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{|AH|}{|AC|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{|AH|}{|AC|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{|HC|}{|AC|} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{|HC|}{|AH|} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{|AH|}{|HC|} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$\cot 30^\circ = \frac{|AH|}{|HC|} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$\cot 60^\circ = \frac{|HC|}{|AH|} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

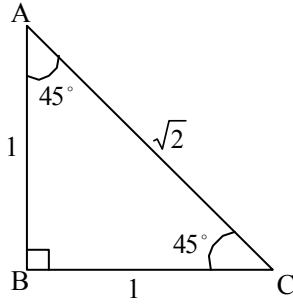
$$\sec 30^\circ = \frac{1}{\cos 30^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 60^\circ = \frac{1}{\cos 60^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\csc 30^\circ = \frac{1}{\sin 30^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\csc 60^\circ = \frac{1}{\sin 60^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Şimdi de 45° lik dar açının trigonometrik oranlarını bulalım. Bunun için aşağıdaki ABC ikizkenar dik üçgeni gözönüne alalım.



$$|AB| = |BC| = 1$$

$$\hat{A} = \hat{C} = 45^\circ$$

$$\hat{B} = 90^\circ$$

Bu verilere göre; $\sin A = \sin 45^\circ = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ve $\tan 45^\circ = \frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} = 1$

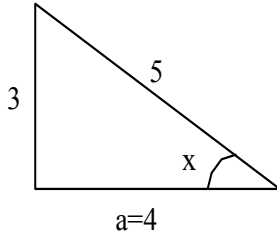
$$\cot 45^\circ = \frac{1}{\tan 45^\circ} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \sec 45^\circ = \frac{1}{\cos 45^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} \Rightarrow \operatorname{cosec} 45^\circ = \frac{1}{\sin 45^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$$

5.4. Trigonometrik Oranlardan Biri Bilinirken Diğerlerini Bulmak için Örnekler

Verilen trigonometrik oranın pay ve paydası kenar uzunlukları olacak biçimde taralı çizim yapılır. III. kenarın uzunluğu Pisagor bağıntısı ile bulunur. Bölgelerdeki işaretler de dikkate alınarak trigonometrik oranlar hesaplanır.

Örnek : $0 < x < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere $\sin x = \frac{3}{5}$ ise $\tan x$ ve $\sec x$ 'i bulunuz.

Çözüm :



Pisagor bağıntısından $a^2 = 5^2 - 3^2$ $a=4$ bulunur.

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ ise I. bölgededir. I. bölgede tüm trigonometrik oranlar pozitifdir.

$$\tan x = \frac{3}{4} \text{ ve } \sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4} \text{ bulunur.}$$

Örnek : $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ olmak üzere $\tan x = 3$ ise $\cos x$ ve $\operatorname{cosec} x$ 'i bulunuz.

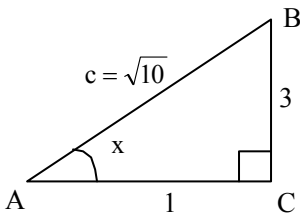
Çözüm :

Pisagor bağıntısından $c^2 = 3^2 + 1^2 \Rightarrow c = \sqrt{10}$ bulunur.

$\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ ise x III. Bölgededir. Bu bölgede

$\cos x$ ve $\operatorname{cosec} x$ negatiftir. Buna göre; $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ ve

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{-\frac{3}{\sqrt{10}}} = -\frac{\sqrt{10}}{3} \text{ olur.}$$



Örnek: $\sin x - \cos x = \frac{8}{7}$ ise $\sin 2x = ?$

Çözüm: $(\sin x - \cos x)^2 = \left(\frac{8}{7}\right)^2$

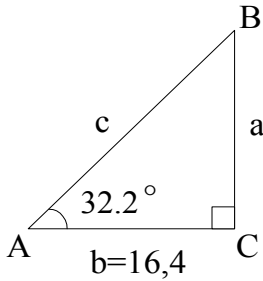
$$\sin^2 x - 2\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = \frac{64}{49} \text{ ve } \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow 1 - \frac{64}{49} = 2\sin x \cdot \cos x$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x = -\frac{15}{49} \text{ bulunur. Böylece bir dik üçgende açı ve bir kenar veya iki kenar}$$

verildiğinde istenen diğer elemanlar bulunabilir.

Örnek: Şekildeki ABC üçgeninde verilenlere göre a ve c kenarlarının uzunluklarını bulunuz.

Çözüm:



$$\cos A = \frac{b}{c} \text{ 'den}$$

$$\tan 32.2^\circ = \frac{a}{b} = \frac{a}{16.4}$$

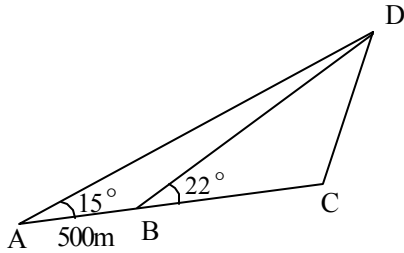
$$\tan 32.2^\circ = 0.62973 = \frac{a}{16.4} \Rightarrow a = 16.4(0.62973)$$

$$a = 10.3 \text{ ve Pisagor Teoreminden; } c^2 = a^2 + b^2 \text{ 'den}$$

$$c = \sqrt{(10,3)^2 + (16,4)^2} = 19,4 \text{ veya } \cos 32.2 = \frac{16.4}{c}$$

$$= 0.84619 \rightarrow c = \frac{16.4}{\cos 32.2^\circ} = \frac{16.4}{0.84619} = 19.4$$

Örnek:

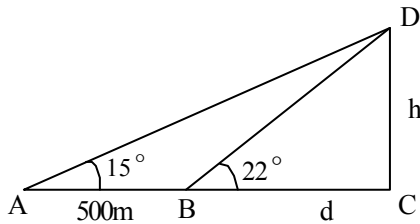


Bir köprünün tahmini yüksekliğine göre A ve B noktaları 500 m mesafe ile şekildeki gibi konuluyor.

Köprünün yüksekliğini bulunuz?

$$1 \text{ ft} \cong 30.5 \text{ cm} \quad 1 \text{ m} = 3.28 \text{ ft}$$

Çözüm:



$$h(1 - \cot 22^\circ \cdot \tan 15^\circ) = 500 \tan 15^\circ \text{ ise}$$

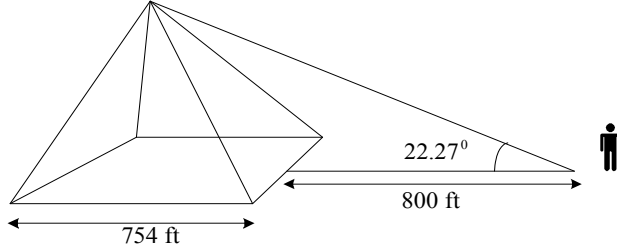
ADC üçgeninden; köprünün yüksekliğine h

$$\text{dersek; } \tan 15^\circ = \frac{h}{500 + d} \Rightarrow h = (500 + d) \tan 15^\circ$$

$$\text{BCD üçgeninden; } \cot 22^\circ = \frac{d}{h} \text{ ve } d = \cot 22^\circ \cdot h \text{ olup}$$

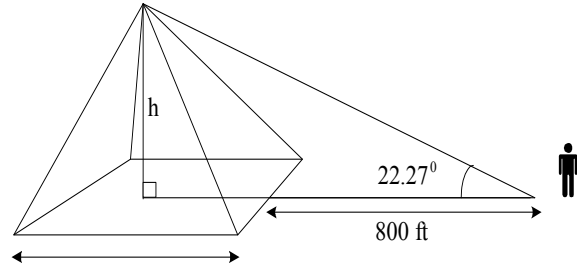
$$h = \frac{500 \tan 15^\circ}{1 - \cot 22^\circ \cdot \tan 15^\circ} = 397,8 \text{ m}$$

Örnek: Keops'un Büyük Piramidi tabanı kare şeklindedir ve bir kenarı 754ft uzunluğundadır. Bir ziyaretçi piramit'in yüksekliğini belirlemek için karenin bir kenarının orta noktasından 800 ft uzakta bulunduğu nokta ile piramitin en tepe noktası arasındaki açıyı 22.27° olarak ölçüyor. Piramitin yüksekliği nedir?



Çözüm: $\tan 22.27^\circ = \frac{h}{800 + \frac{754}{2}}$ veya

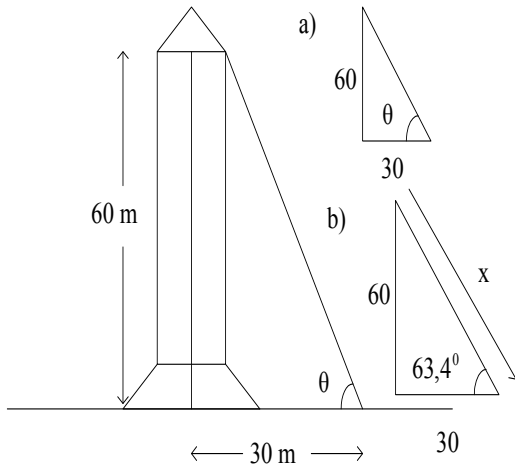
$h = 1177$. $\tan 22.27^\circ = 482 \text{ ft} = 147 \text{ m}$



Örnek: Şekildeki roket bir kablo ile destekleniyor. Kablo zeminden 30 m uzaklıkta olup rokete desteklendiği zirve 60 m yüksekliktedir. Buna göre;

- Kablonun gergin olduğu varsayılırsa θ açısı ne olur?
- Kablonun uzunluğu nedir?

Çözüm:



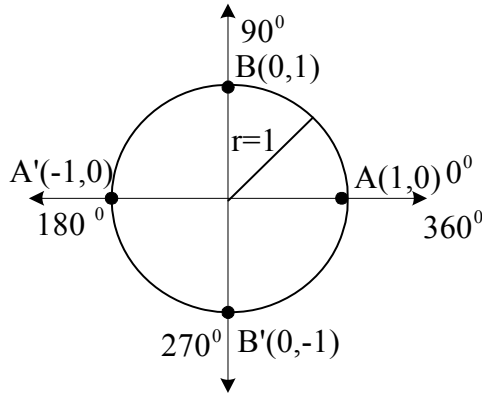
$$\tan \theta = \frac{60}{30} = 2 \text{ ise } \theta = \text{Arctan} 2 = 63.4^\circ$$

$$\sin 63.4^\circ = \frac{60}{x} \Rightarrow x = \frac{60}{\sin 63.4^\circ} = \frac{60}{0.8942}$$

$$\cos 63.4^\circ = \frac{30}{x} \Rightarrow x \cong 70 \text{ m}$$

30°, 45°, ve 60° lik özel açılar 0°, 90°, 180° ve 270° açılar gibi çizilemez Daha önce özel açıların trigonometrik oranlarını bulmuştuk. Şimdi de birim çember yardımı ile 0°, 90°, 180° ve 270° lik açıların trigonometrik oranlarını bulalım. Daha önce gösterdiğimiz gibi;

$$\left. \begin{aligned} \sin \theta &= \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y \\ \cos \theta &= \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x \end{aligned} \right\} \text{idi. Aşağıdaki birim çemberden;}$$



$$\left. \begin{aligned} \cos 0^\circ &= x = 1 \\ \sin 0^\circ &= y = 0 \end{aligned} \right\} A(1,0) \text{ noktası}$$

$$\left. \begin{aligned} \cos 90^\circ &= x = 0 \\ \sin 90^\circ &= y = 1 \end{aligned} \right\} B(0,1) \text{ noktası}$$

$$\left. \begin{aligned} \cos 180^\circ &= x = -1 \\ \sin 180^\circ &= y = 0 \end{aligned} \right\} A'(-1,0) \text{ noktası}$$

$$\left. \begin{aligned} \cos 270^\circ &= x = 0 \\ \sin 270^\circ &= y = -1 \end{aligned} \right\} B'(0,-1) \text{ noktası ile temsil edilir.}$$

$$\tan 0^\circ = \frac{\sin 0^\circ}{\cos 0^\circ} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\cotan 0^\circ = \frac{\cos 0^\circ}{\sin 0^\circ} = \frac{1}{0} = \infty \text{ tanımsız}$$

$$\tan 90^\circ = \frac{\sin 90^\circ}{\cos 90^\circ} = \frac{1}{0} = \infty \text{ (tanımsız)} \quad \cotan 90^\circ = \frac{\cos 90^\circ}{\sin 90^\circ} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\tan 180^\circ = \frac{\sin 180^\circ}{\cos 180^\circ} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\cotan 180^\circ = \frac{\cos 180^\circ}{\sin 180^\circ} = \frac{-1}{0} = \infty \text{ tanımsız}$$

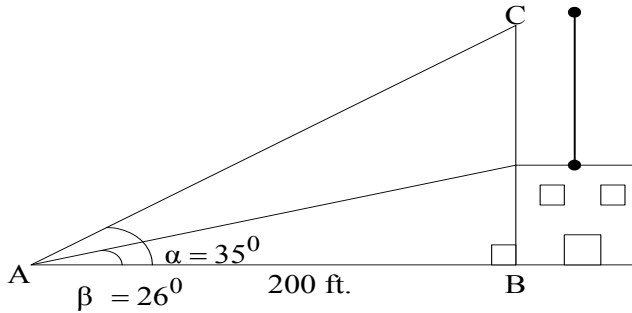
$$\tan 270^\circ = \frac{\sin 270^\circ}{\cos 270^\circ} = \frac{-1}{0} = \infty \text{ (tanımsız)}$$

$$\cotan 270^\circ = \frac{\cos 270^\circ}{\sin 270^\circ} = \frac{0}{-1} = 0$$

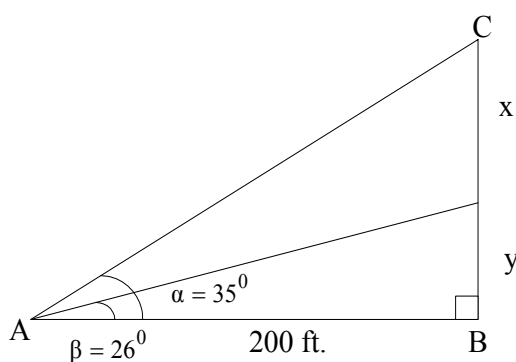
Bu değerler ile özel açıların trigonometrik oranlarını birlikte bir tabloda toplarsak;

	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
Sinüs	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
Cosinüs	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
Tanjant	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞
Cotanjant	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	∞	0
Secant	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞	-1	∞
Kosecant	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	∞	-1

Örnek: Şekildeki yerel radyo istasyonunu göz önüne alalım. İstasyonun yüksekliğini bulmak için zeminde tam istasyonun altında duran bir kişinin olduğu noktaya B diyelim. B'den 200ft.(*30.5cm) uzaklıkta bir A noktası alalım.A noktasında kulenin başlangıcı ile tepesi arasındaki açılara sırasıyla α ve β dersek kullanım yüksekliği ne olur?



Çözüm: Şeklimizi daha sistematik bir şekilde ifade edelim.



$$\tan \beta = \tan 26^\circ = \frac{y}{200} \rightarrow y = 200 \cdot \tan 26^\circ \text{ değerini}$$

$$\tan \alpha = \tan 35^\circ = \frac{x + y}{200} \text{ formülünde yerine}$$

$$\text{yazarsak; } \tan 35^\circ = \frac{x + 200 \cdot \tan 26^\circ}{200} \rightarrow$$

$$200 \cdot \tan 35^\circ - 200 \cdot \tan 26^\circ = x \rightarrow x = 42.5$$

5.5.Kartezyen Koordinat Sisteminde Trigonometrik Fonksiyonların İşaretleri

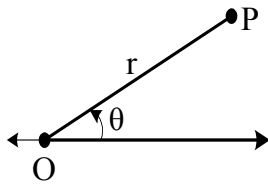
θ açısının altı trigonometrik fonksiyonu olan $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$, $\cotan\theta$, $\sec\theta$, $\csc\theta$ fonksiyonlarının bölgelere göre işaretleri aşağıda verilmiştir.

II. Bölge	I. Bölge
$\sin\theta > 0$ $\sec\theta > 0$ $\cos\theta > 0$ $\csc\theta > 0$ $\tan\theta > 0$ $\cotan\theta > 0$	Hepsi Pozitif
$\sin\theta > 0$ $\sec\theta > 0$ $\cos\theta > 0$ $\csc\theta > 0$ $\tan\theta > 0$ $\cotan\theta > 0$	$\sin\theta > 0$ $\sec\theta > 0$ $\cos\theta > 0$ $\csc\theta > 0$ $\tan\theta > 0$ $\cotan\theta > 0$
III. Bölge	IV. Bölge

Bu işaretleri belirlemenin bir başka yolu ise trigonometrik çemberde $(x,y)=(\cos\theta,\sin\theta)$ olduğundan her bir bölgedeki trigonometrik fonksiyon değeri ($\cos\theta$ ve $\sin\theta$) kullanılarak kolayca belirlenir.

II. Bölge (-x,y)	I. Bölge (x,y)
(-x,-y)	(x,-y)
III. Bölge	IV. Bölge

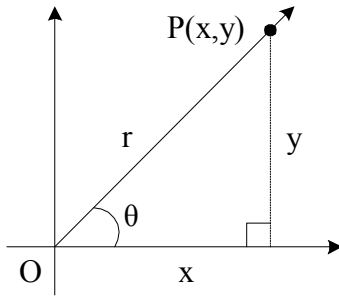
5.6.Kutupsal Koordinatlar



Kutupsal koordinatlarda şekilden de görüldüğü gibi x-eksenine kutup eksen, O(başlangıç noktası) noktasına kutup noktası (θ,r) çiftine de P noktasının kutupsal koordinatları denir. Düzlemin noktaları ile kutupsal koordinatlar arasında ki eşleme bire-bir değildir.

Çünkü (θ,r) , $(\theta+2k\pi,r)$ $(\theta+2k+1)\pi,-r)$ çiftleri aynı bir P noktasının kutupsal koordinatlarıdır.Bir P noktasının $P(\theta,r)$ şeklinde kutupsal koordinatları verildiğinde $x=r.\cos\theta$; $y=r.\sin\theta$ eşitlikleri yardımıyla P noktasının kartezyen koordinatlarını bulabiliriz.

Buna karşit olarak P noktasının P(x,y) kartezyen koordinatları verilmiş ise x-ekseni kutup ekseni, orijin kutup seçilerek ;



$$r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{r \cos \theta}{r \sin \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$$

$$\frac{y}{x} = \tan \theta \text{ ise } \theta = \arctan \frac{y}{x} \text{ bağıntıları ile}$$

kartezyen koordinatlardan kutupsal koordinatlara

dönüştürülür. Kutupsal koordinatlarda bir fonksiyon $r = f(\theta)$ veya $f(\theta, r) = 0$ eşitlikleriyle tanımlıdır. Kartezyen koordinatlar ile kutupsal koordinatlar arasındaki ilişkiden dolayı kutupsal formda verilen fonksiyonu kartezyen koordinatlardaki ifadesini kartezyen formda verilen bir fonksiyonun kutupsal koordinatlardaki ifadesini bulabiliriz.

Örnek: Kartezyen koordinatları $(4, -4\sqrt{3})$ olan noktaların kutupsal koordinatlarını bulunuz.

$$r = \pm\sqrt{x^2 + y^2} = \pm\sqrt{16 + 48} = \pm 8$$

$$\frac{y}{x} = \tan \theta \Rightarrow \frac{-4\sqrt{3}}{4} = \tan \theta$$

$$\theta = \arctan(-\sqrt{3}) \text{ ise } \theta = \frac{5\pi}{3} \text{ ve } P\left(\frac{5\pi}{3}, 8\right) \text{ dir.}$$

Örnek: $F(\theta, r) = r^3 \sin \theta - 2r \cos \theta + 7r^2 + 2 = 0$ kutupsal denkleminin kartezyen denklemini bulunuz.

Çözüm: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ ve $r^2 = x^2 + y^2$ bağıntılarını denklemde yerine koyalım.

$$r^2 \cdot r \cdot \sin \theta - 2r \cos \theta + 7r^2 + 2 = 0$$

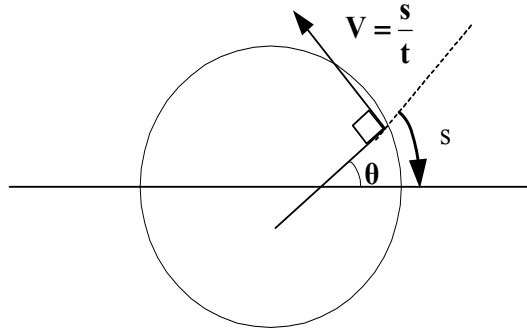
$$r^2 y - 2x + 7r^2 + 2 = 0 \text{ ise } r^2 (y + 7) - 2x + 2 = 0 \text{ ve } (x^2 + y^2) \cdot (y + 7) - 2x + 2 = 0 \text{ olur.}$$

5.7.Açısal Hız:Şekilden de anlaşıldığı gibi yay uzunluğu s , birim zaman t , yarıçap r , açı θ

olmak üzere birim radyan cinsinden lineer hız $v = \frac{s}{t}$ 'dir .Bu ifade s yay uzunluğu formülünde

$s = r \cdot \theta$, her iki taraf t ile bölünerek; $\frac{s}{t} = r \cdot \frac{\theta}{t}$ bulunur ve buradan; $V = r \cdot \omega$ elde edilir.Burada

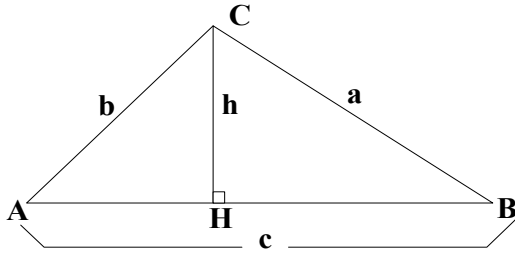
lineer hız $V = \frac{s}{t}$ iken açısal hız $\omega = \frac{\theta}{t}$ birim zamandaki radyan cinsinden hızdır.



5.8.Sinüs ve Kosinüs Kuralı

Özel üçgenlerin dışındaki üçgenlere herhangi üçgenler denir. Bu üçgenlerin kenar ve açılarından bazıları bilindiğinde diğer açı ve kenarları bulmak için sinüs ve kosinüs kuralları kullanılır.

5.8.1.Sinüs Kuralı: Herhangi bir ABC üçgenini göz önüne alalım. C kenarından AB doğrusuna h dikmesini inelim ve bunun AB'yi kestiği noktayı H ile belirtelim.



Buna göre sinüs kuralı;

$$\frac{a}{\sin a} = \frac{b}{\sin b} = \frac{c}{\sin c}$$

şeklinde ifade edilir.

Sinüs kuralının uygulanabilmesi için;

- 1) İki açı ve bu açılardan birinin karşısındaki kenar
- 2) İki kenar ve bu kenarlar arasındaki açı bilinmesi gerekir.

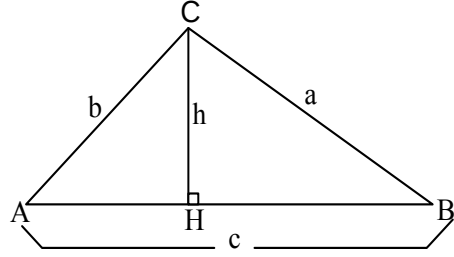
İspat:

ACH üçgeninde; $\sin A = \frac{h}{b}$ ve $h = b \cdot \sin A$

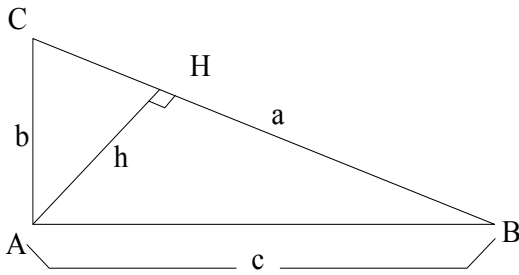
BCH üçgeninde; $\sin B = \frac{h}{a}$ ve $h = a \cdot \sin B$

elde edilir. $h=h$ olduğundan;

$$a \cdot \sin B = b \cdot \sin A \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \dots\dots\dots (i)$$



Benzer olarak A noktasından CB Kenarına h dikmesi inilerek;



AHC üçgeninde; $\sin C = \frac{h}{b}$ ve $h = b \cdot \sin C \Rightarrow$ AHB üçgeninde; $\sin B = \frac{h}{c}$ ve $h = c \cdot \sin B$

elde edilir. $h=h$ olduğundan; $c \cdot \sin B = b \cdot \sin C \Rightarrow \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \dots\dots\dots (ii)$

olur. (i) ve (ii) ifadeleri birleştirilirse; $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ olur.

5.8.2.Kosinüs Kuralı : Herhangi bir ABC üçgeninde;

- i) İki kenar ve aralarındaki açı biliniyorsa
- ii) Üç kenar biliniyorsa diğer istenen açı ve kenarlar bulunabilir. Bunun için aşağıdaki ABC üçgenini göz önüne alalım; Bu durumda;

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B \text{ ifadeleri kosinüs kuralı olarak bilinir.}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

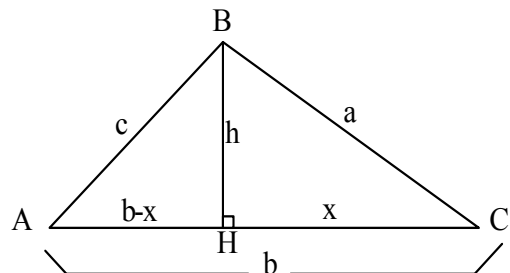
İspat : AHB üçgeninde pisagor teoremi uygulanırsa ;

$$(i) \quad c^2 = (b-x)^2 + h^2 \text{ elde edilir.}$$

AHC dik üçgeninde pisagor uygulanırsa;

$$(ii) \quad a^2 = h^2 + x^2 \text{ elde edilir.}$$

(i) ve (ii) ifadelerini taraf tarafa çıkarırsak;



$$c^2 - a^2 = b^2 - 2bx + x^2 + h^2 - h^2 - x^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2bx \quad \text{olur.}$$

$$\cos C = \frac{x}{a} \Rightarrow x = a \cdot \cos C \text{ değeri yukarıda yerine yazılırsa; } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C \text{ bulunur.}$$

Örnekler:

1)

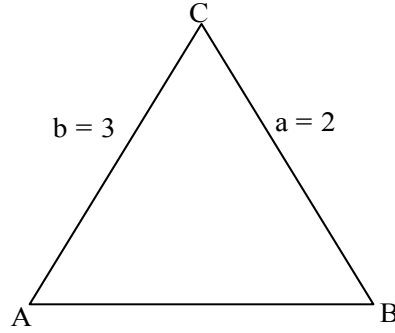
Yandaki ABC üçgeninde;

$$\hat{A} = 30^\circ$$

$$a = 2\text{cm}$$

$$b = 3\text{cm}$$

$$\hat{B} = ?$$

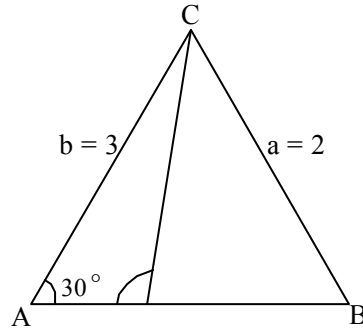


Çözüm: Çözümü iki yolla yapmak mümkündür. Bunlar ABC dar açılı üçgeninde veya AB'C geniş açılı üçgenindedir.

Sinüs kuralı iki kenar ve bunlardan birinin karşısındaki açı belli olduğundan uygulanabilir. Buna göre;

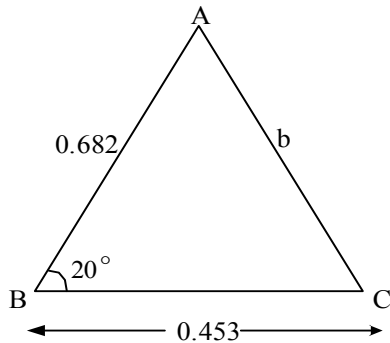
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \text{ 'den } \sin B = \frac{b \cdot (\sin A)}{a} \text{ ise}$$

$$\sin B = 0.75 \text{ ve } B = \sin^{-1}(0.75) = 49^\circ$$



2) Herhangi bir ABC üçgeninde $B=30^\circ$, $a=0.453$ ve $c=0.682$ ise diğer bilinmeyenleri bulunuz.

Çözüm: İki kenar ve aralarındaki açı bilindiğine göre diğer kenar ve açılar kosinüs kuralı uygulanarak bulunabilir. Bunun için şeklimizi verilenlere göre çizelim.



$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$

$$b^2 = (0.453)^2 + (0.681)^2 - 2(0.453)(0.681)\cos 20^\circ$$

$$b^2 = 0.2052 + 0.4638 - 0.6170 \cdot (0.9397) = 0.0892$$

$$b = \sqrt{0.0892} = 0.299$$

$$C \text{ açısını bulmak için sinüs uygulanırsa; } \sin C = \frac{C \cdot (\sin B)}{b} = \frac{(0.681)(0.3420)}{0.299} = 0.7790$$

$$C = \sin^{-1}(0.7790) \Rightarrow C = 51.2^\circ \text{ o halde } A = 180 - B - C = 180 - 51.2 - 20 = 108.8^\circ$$

Fakat en büyük kenarın karşısında en büyük açı bulunacağından $\hat{C} = 108.8^\circ$ ve

$$A = 180 - B - C \Rightarrow B = 180 - 51.2 - 108.8 \Rightarrow A = 31.2^\circ \text{ olarak bulunur.}$$

5.9. Trigonometrik Fonksiyonların Periyodu:

Eğer bir $y=f(x)$ fonksiyonu $\forall x \in \mathbb{R}$ ve $p \in \mathbb{R}^+$ sayısı için; $f(x+p)=f(x)$ şartını sağlıyorsa $y=f(x)$ fonksiyonuna periyodik fonksiyon p sayısında da $y=f(x)$ fonksiyonunun periyodu denir.

$$\left. \begin{array}{l} \sin^n(ax+b) \\ \cos^n(ax+b) \\ \sec^n(ax+b) \\ \operatorname{cosec}^n(ax+b) \end{array} \right\} \begin{array}{l} n \text{ tek doğal sayı ise; } p = \frac{2\pi}{|a|} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sin^n(ax+b) \\ \cos^n(ax+b) \\ \sec^n(ax+b) \\ \operatorname{cosec}^n(ax+b) \end{array} \right\} \begin{array}{l} n \text{ çift doğal sayı ise; } p = \frac{\pi}{|a|} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \tan^n(ax+b) \\ \cot^n(ax+b) \end{array} \right\} \begin{array}{l} n \text{ doğal sayı ise; } p = \frac{\pi}{|a|} \end{array}$$

Not: Toplam veya fark biçiminde verilen trigonometrik fonksiyonların periyotlarının bulunması için her birinin periyotları ayrı ayrı bulunur. Bu periyotların paydaları eşitlendikten sonra payların en küçük ortak katı bulunarak paya ortak payda da paydaya yazılır.

Örnek: Aşağıdaki fonksiyonların periyodunu bulunuz.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = \sin(5x + 3) & \Rightarrow p = \frac{2\pi}{5} \\ \text{b) } f(x) = 3 \tan^5\left(\frac{x}{7} + 4\right) & \Rightarrow p = \frac{\pi}{\left(\frac{1}{7}\right)} = 7\pi \\ \text{c) } f(x) = 5 \cot\left(\frac{-3x}{8} + \frac{3\pi}{5}\right) & \Rightarrow p = \frac{2\pi}{\left|\frac{-3}{8}\right|} = \frac{16\pi}{3} \\ \text{d) } f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{cosec}^7\left(\frac{x-\pi}{4}\right) & \Rightarrow p = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{4}\right|} = 8\pi \end{array}$$

5.10.Trigonometrik Fonksiyonların Grafikleri

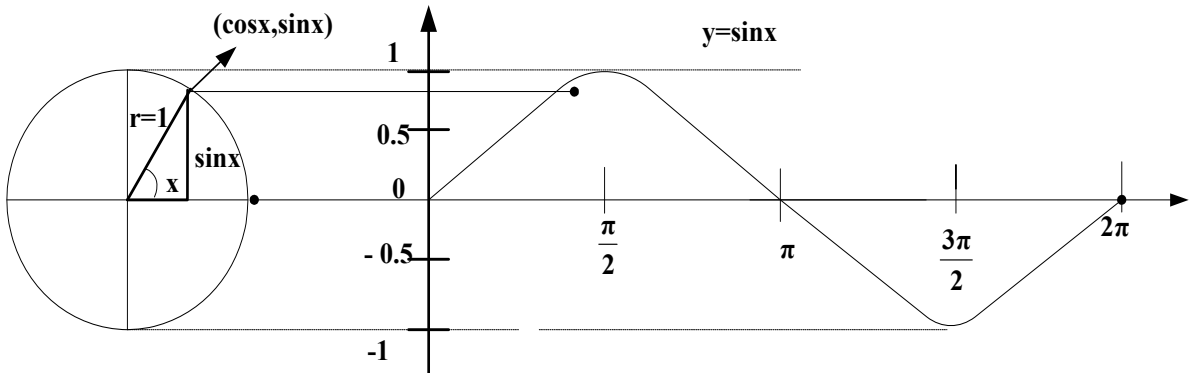
Sinüs ve Kosinüs eğrileri, dairesel hareket içeren matematiğin uygulamalarında kullanılır.

Sinüs ve Kosinüs eğrilerinin bazı kullanım alanlarını yazacak olursak;

- 1- Alternatif Akım-Elektrik
- 2- Pistonun hareketi
- 3- Işık, dalga ve diğer elektromanyetik dalgalar
- 4- Bir tel-yay vb. mekanik titreşimi
- 5- Akış hareketi
- 6- Bir sarkacın hareketi
- 7- Ses dalgaları
- 8- Dünya, güneş, ay, vb. yörünge hareketi

Şimdi dairesel hareketle sinüs eğrisi arasındaki ilişkiyi görmek için $[0, 2\pi]$ aralığında $y=\sin x$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

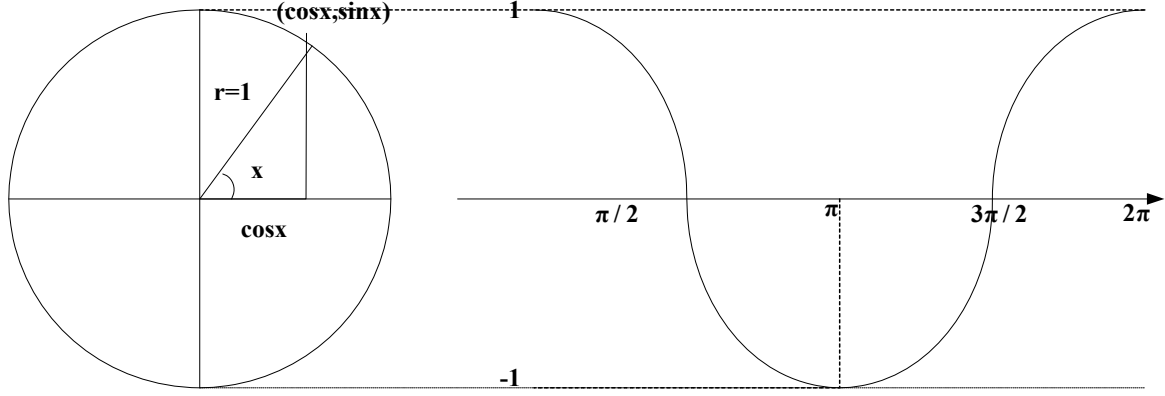
x (Derece)	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330
x (Radyan)	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π	$7\pi/6$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$11\pi/6$
y=sinx	0	0.5	0.87	1	0.87	0.5	0	-0.5	-0.87	-1	-0.87	-0.5



Şekilden de görüleceği gibi birim çember ile $y=\sin x$ fonksiyonunun $[0, 2\pi]$ aralığındaki ilişki r yarıçap vektörünün yüksekliğinin her bir x açısı için grafik üzerindeki y koordinatına bağlı olmasıdır. Yani, birim çemberde x açı cinsinden ölçüm iken grafikte radyan cinsinden ölçümdür ve bunlar yukarıdaki tabloda olduğu gibi aynı değerlerde birbirine eşittir.

Benzer şekilde $[0, 2\pi]$ aralığında $y = \cos x$ eğrisini çizelim:

x (Derece)	0	30		120				240			300	330
x (Radyan)	0	$\pi / 6$	$\pi / 3$	$\pi / 2$	$2\pi / 3$	$5\pi / 6$	π	$7\pi / 6$	$4\pi / 3$	$3\pi / 2$	$5\pi / 3$	$11\pi / 6$
y=sinx	0	0.87	0.5	0	0.5	0.87	-1	-0.87	-0.5	0	-0.5	-0.87



Böylece, $y = \sin x$ ve $y = \cos x$ fonksiyonları aynı grafik üzerinde karşılaştırılacak olursa bunların aynı değer kümesi $[-1, 1]$ 'e sahip oldukları ve periyodik bir fonksiyon oldukları görülür. Bu periyot, $f(x + 2k\pi) = f(x)$ olduğundan 2π olarak bulunur.

5.10.1. Trigonometrik Fonksiyonların Grafik Çizimleri

- 1) Fonksiyonun periyodu bulunur,
- 2) Bulunan periyoda uygun aralık seçimi yapılır,
- 3) Seçilen aralıkta fonksiyonun değişimi incelenir ve değişim tablosu hazırlanır,
- 4) Değişim tablosuna göre fonksiyonun grafiği çizilir,
- 5) Periyot aralığında çizilen grafik aynen tekrarlanır.

1. $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun grafiği

1) $f(x) = \sin x$

$$\sin(x + k\pi) = \sin x \Rightarrow p = 2k\pi \Rightarrow k \in \mathbb{Z}$$

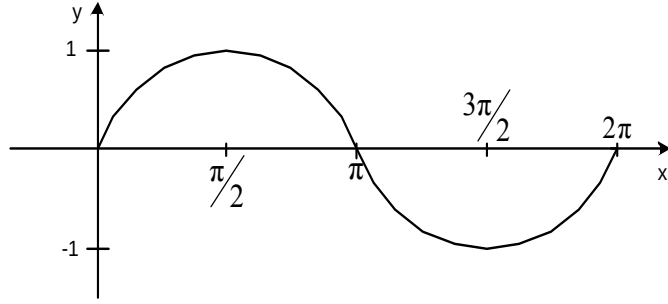
$$k = 1 \text{ için } 2\pi \text{ olduğundan } p = 2\pi$$

2) $[0, 2\pi]$ uygun aralıktır.

3)

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
sinx	0	1	0	-1	0

4)



2. $f(x) = \cos x$ fonksiyonunun grafiği

1) $f(x) = \cos x$

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x \Rightarrow p = 2k\pi \Rightarrow k \in \mathbb{Z}$$

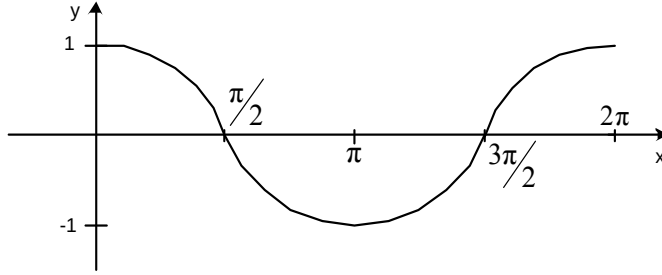
$$k = 1 \text{ için } 2\pi \text{ olduğundan } p = 2\pi$$

2) $[0, 2\pi]$ uygun aralıktır.

3)

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1

4)



3. $f(x) = \tan x$ fonksiyonunun grafiği

1) $f(x) = \tan x$

$$\tan(x + k\pi) = \tan x \Rightarrow p = k\pi \Rightarrow (k \in \mathbb{Z})$$

$$k = 1 \text{ için } \pi \text{ olduğundan } p = \pi$$

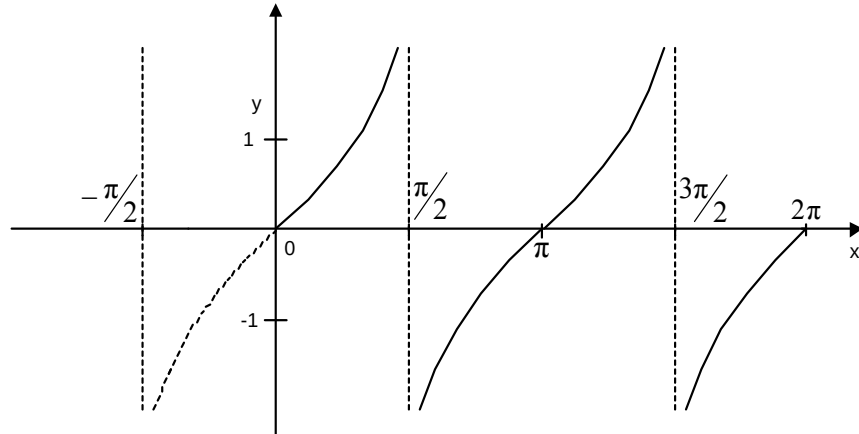
2) $x = \frac{\pi}{2}$ için $f(x) = \tan x$ fonksiyonu tanımsızdır.

Grafik $\frac{\pi}{2}$ doğrusunu kesmez. $[0, \pi] - \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$ aralığında çizilir.

3)

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
tanx	0	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$
	0	1	$+\infty$	$-\infty$	-1
					0

4)



4. $f(x) = \cot x$ fonksiyonunun grafiği

1) $f(x) = \cot x$

$\cot(x + k\pi) = \cot x$ ise $p = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

$k = 1$ için π olduğundan $p = \pi$

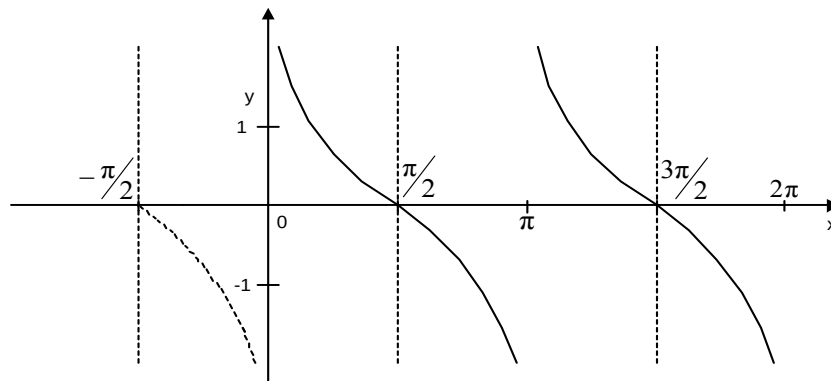
2) $x = 0$ ve $x = \pi$ için $f(x) = \cot x$ tanımsızdır.

Grafik $[0, \pi] - \{0, \pi\}$ aralığında çizilir.

3)

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
cotanx	$+\infty$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$-\infty$
		1	0	-1	

4)



5. $f(x) = \sec x$ fonksiyonunun grafiği

1) $f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x} \quad p = 2\pi$

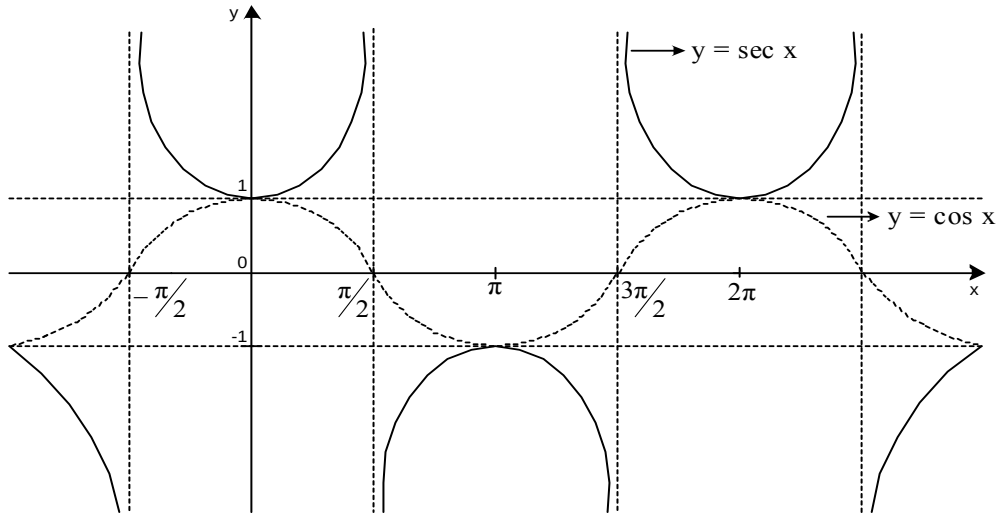
2) $x = \frac{\pi}{2}$ ve $x = \frac{3\pi}{2}$ için $f(x) = \sec x$ tanımsızdır.

Grafik $x = \frac{\pi}{2}$ ve $x = \frac{3\pi}{2}$ doğrularını kesmez. $[0, 2\pi] - \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$ 'de çizilir.

3)

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sec x	1	$+\infty$	-1	$-\infty$	1

4)



6. $f(x) = \operatorname{cosec} x$ fonksiyonunun grafiği

1) $f(x) = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\cos x} \quad p = 2\pi$

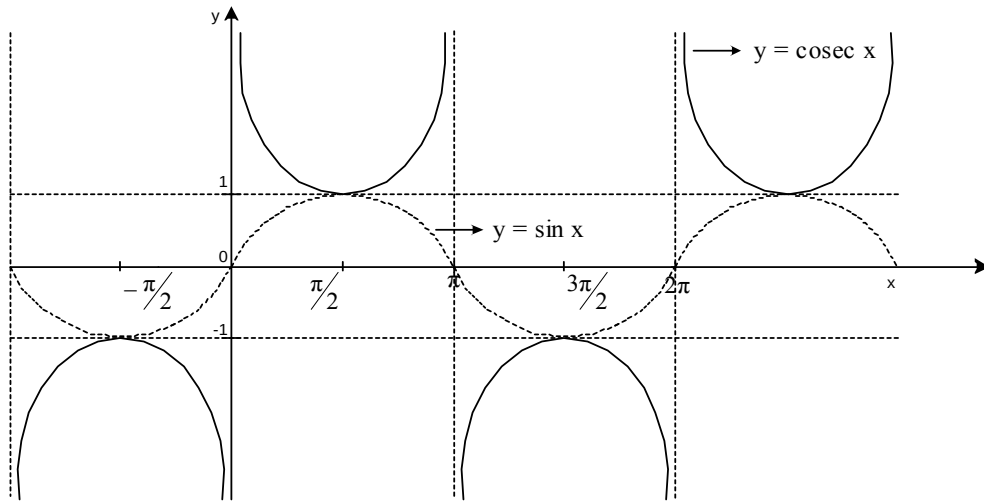
2) $x = 0$, $x = \pi$ ve $x = 2\pi$ için $f(x) = \operatorname{cosec} x$ tanımsızdır.

Grafik $x = 0$, $x = \pi$ ve $x = 2\pi$ doğrularını kesmez. $[0, 2\pi] - \{0, \pi, 2\pi\}$ aralığında çizilir.

3)

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
cosec x	$+\infty$	1	$-\infty$	-1	$+\infty$

4)



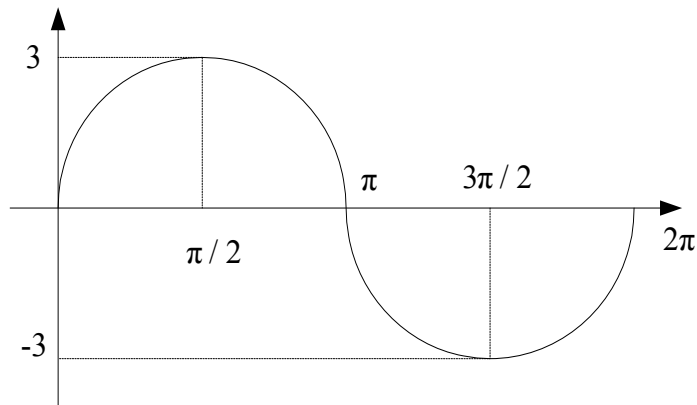
5.10.2. $y=a.\sin bx$ ve $y=a.\cos bx$ ($a, b \in \mathbb{R}$) grafikleri:

$\text{Genlik(Amplitude)}= a $	$\text{Periyot}=\frac{2\pi}{b}$	$\text{Frekans}=\frac{1}{\text{Periyot}}=\frac{b}{2\pi}$
--------------------------------	---------------------------------	--

Örnek: $y=3\sin x$ fonksiyonunun $[0, 2\pi]$ aralığındaki grafiğini çiziniz.

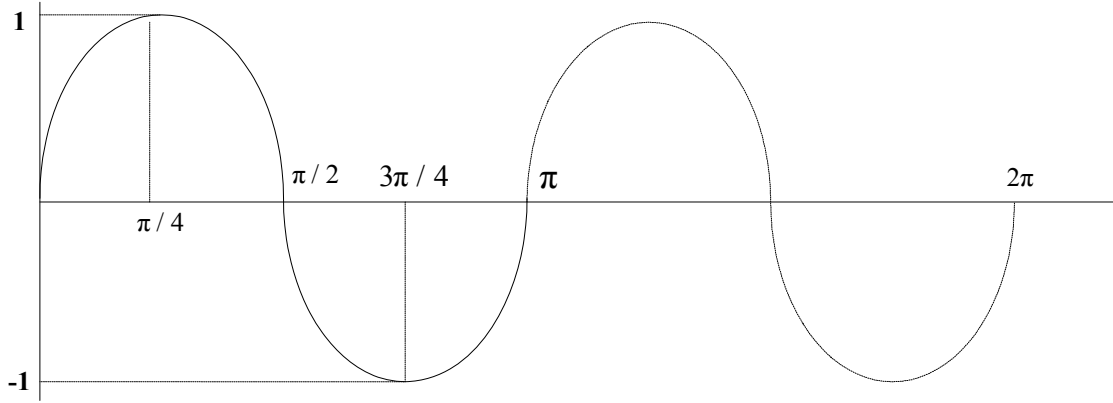
Periyot = 2π $|a| = 3$

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
y=sinx	1	0.87	0.5	0	-0.5	-0.87	-1	-0.87	-0.5
y=3sinx	3	2.61	1.5	0	-1.5	-2.61	-3	-2.61	-1.5



Örnek: $y = \sin 2x$ $\frac{2\pi}{2} = \pi$ (Periyod)

x	0	$\pi / 6$	$\pi / 4$	$\pi / 3$	$\pi / 2$	$2\pi / 3$	$3\pi / 4$	$5\pi / 6$	π
2x	0	$\pi / 3$	$\pi / 2$	$2\pi / 3$	π	$4\pi / 3$	$3\pi / 2$	$5\pi / 3$	2π
y=sin2x	0		1		0		-1		0

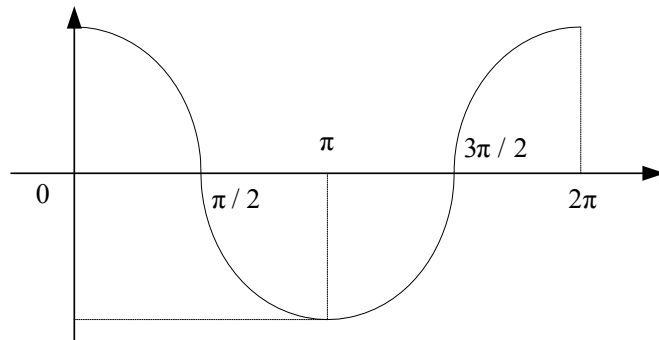


5.10.3. $y = a \sin(bx + \phi)$ ve $y = a \cos(bx + \phi)$ grafikleri :

Örnek: $y = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm:

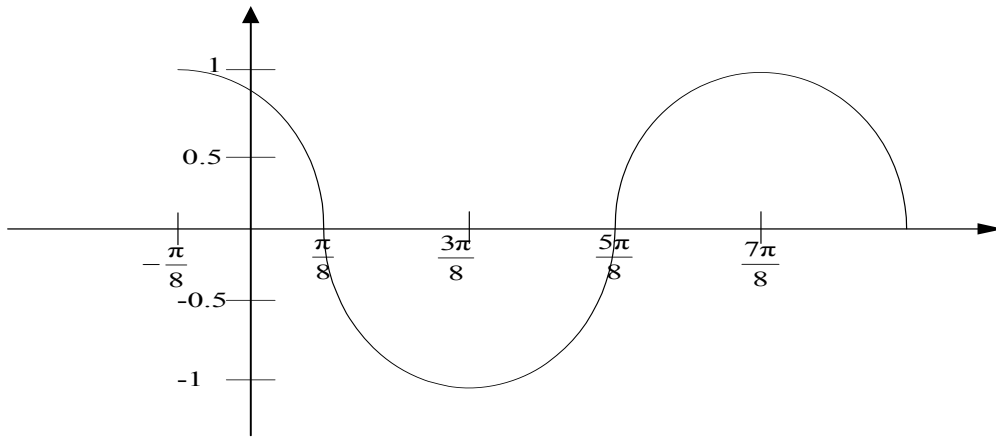
x	0	$\pi / 2$	π	$3\pi / 2$	2π
$x + \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$
$\sin(x + \frac{\pi}{2})$	1	0	-1	0	1



Örnek: $y = \cos(2x + \frac{\pi}{4})$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

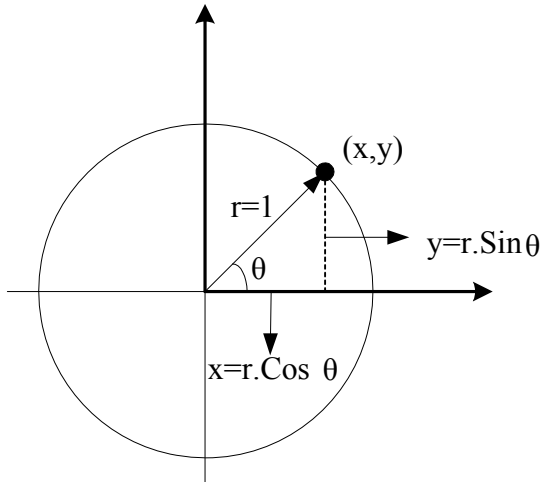
Çözüm:

$2x$	$-\pi/8$	$\pi/8$	$3\pi/8$	$5\pi/8$	$7\pi/8$	$2\pi/3$
$2x + \frac{\pi}{4}$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π	2π
$\cos(2x + \frac{\pi}{4})$	1	0	-1	0	1	0



5.11. Trigonometrik Özdeşlikler

i) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$



$$\sin \theta = \frac{y}{r} \quad \text{ve} \quad \cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cdot \cos \theta \\ y = r \cdot \sin \theta \end{array} \right\} x^2 + y^2 = r^2$$

$$\Rightarrow r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = r^2$$

$$r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r^2$$

$$\boxed{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1}$$

ii)

$$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$$

$$\tan^2 \theta = \sec^2 \theta - 1$$

$$\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + 1 = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} = \sec^2 \theta$$

$$\cot^2 \theta + 1 = \operatorname{cosec}^2 \theta$$

$$\text{iii)} \quad \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} + 1 = \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta} = \operatorname{cosec}^2 \theta$$

$$\cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta - 1$$

$$\text{iv)} \quad \tan \theta \cdot \operatorname{cosec} \theta = \sec \theta$$

$$\frac{\sec^2 \theta}{\cos^2 \theta} \cdot \sin^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} \cdot \sin^2 \theta + 1 = \tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} (1 - \cos^2 \theta) + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta} - 1 + 1 = \sec^2 \theta$$

$$\text{v)} \quad \operatorname{cosec} x \cdot \sec x - \cot x = \tan x$$

$$\text{vi)} \quad \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} = \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}$$

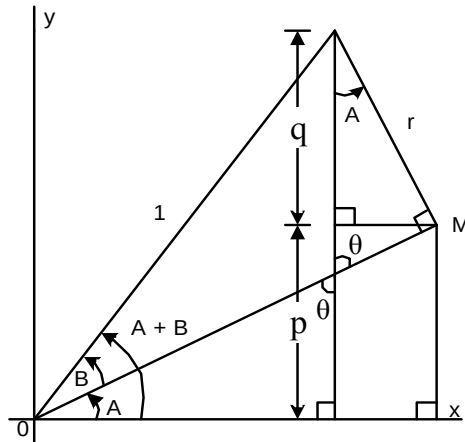
$$\left(\frac{\sin \theta}{\sin \theta} \right) \left(\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \right) = \frac{\sin^2 \theta}{\sin \theta (1 - \cos \theta)} = \frac{1 - \cos^2 \theta}{\sin \theta (1 - \cos \theta)}$$

$$\frac{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)}{\sin \theta (1 - \cos \theta)} = \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}$$

$$\frac{\tan A + \cot A}{\tan A} = \sec^2 A \cdot \cot^2 A$$

$$\frac{\tan A + \frac{1}{\tan A}}{\tan A} = \frac{\sec^2 A}{\tan^2 A} = \sec^2 A \cdot \cot^2 A$$

5.11.1. Toplam ve Fark Formülleri



$$\sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B = \left(\frac{P}{OM} \right) \left(\frac{OM}{1} \right) + \left(\frac{q}{r} \right) \left(\frac{r}{1} \right) = p + q$$

$$\sin(A + B) = \frac{p + q}{1} = p + q$$

$$\sin A = \frac{P}{OM} \Rightarrow \cos B = \frac{OM}{1} \Rightarrow \sin B = \frac{r}{1} \Rightarrow \cos A = \frac{q}{r}$$

öyleyse;

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\sin[A + (-B)] = \sin A \cos(-B) + \cos A \sin B$$

$$= \sin A (\cos B) + \cos A \sin(-B)$$

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

Benzer yollardan gidilirse;

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B \quad \cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \quad \tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

$$\cot(A + B) = \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot A + \cot B} \quad \cot(A - B) = \frac{-\cot A \cot B - 1}{\cot A - \cot B} \quad \text{şeklinde bulunabilir.}$$

5.11.2.Yarım Açı Formülleri

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

$$\cot 2x = \frac{\cot^2 x - 1}{2 \cot x}$$

$$\cot \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \frac{1 + \cos x}{\sin x}$$

Örnek : $\cos x = -\frac{7}{9} \Rightarrow \sin \frac{x}{2}, \cos \frac{x}{2}, \tan \frac{x}{2} = ?$

Çözüm:

$$\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{7}{9}}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{7}{9}}{2}} = \frac{1}{3} \quad \tan \frac{x}{2} = 2\sqrt{2}$$

5.11.3.Trigonometride İki Açının Toplamı veya Farkı İçin Örnekler:

Örnek: Aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız.

a) $\sin 105^\circ$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 15^\circ - \frac{1}{2} \sin 15^\circ$ c) $\cos^2 75^\circ - \sin^2 75^\circ$ d) $\sin 18^\circ \cdot \cos 12^\circ + \cos 18^\circ \sin 12^\circ$

Çözüm:

a) $\sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ) = \sin 60^\circ \cdot \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \cdot \sin 45^\circ$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

b) $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 15^\circ - \frac{1}{2} \cdot \sin 15^\circ = \cos 30^\circ \cdot \cos 15^\circ - \sin 30^\circ \cdot \sin 15^\circ = \cos(30^\circ + 15^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\cos^2 75^\circ - \sin^2 75^\circ = \cos 75^\circ \cdot \cos 75^\circ - \sin 75^\circ \cdot \sin 75^\circ = \cos(75^\circ + 75^\circ) = \cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\sin 18^\circ \cdot \cos 12^\circ + \cos 18^\circ \cdot \sin 12^\circ = \sin(18^\circ + 12^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

5.11.3.1.Yarım Açılı Örnekleri:

Aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız.

Örnek: 1) a) $\frac{\sin 36^\circ}{\sin 12^\circ} - \frac{\cos 36^\circ}{\cos 12^\circ} = ?$ **b)** $\sin \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{12} = ?$

2) a) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ve $\sin x = \frac{3}{4}$ ise $\sin 2x$ 'in değeri nedir?

b) $\sin 37^\circ = 0,6$ ise $\cos 16^\circ$ 'yi hesaplayınız.

c) $\tan 2x = \frac{4}{3}$ ise $\tan x$ değerlerini bulunuz.

Çözümler: 1) a)

$$\frac{\sin 36^\circ}{\sin 12^\circ} - \frac{\cos 36^\circ}{\cos 12^\circ} = \frac{\sin 36^\circ \cdot \cos 12^\circ - \cos 36^\circ \cdot \sin 12^\circ}{\sin 12^\circ \cdot \cos 12^\circ} = \frac{\sin(36^\circ - 12^\circ)}{\frac{1}{2} \cdot \sin 24^\circ} = \frac{\sin 24^\circ}{\frac{1}{2} \cdot \sin 24^\circ} = 2$$

b) $\sin\left(\frac{\pi}{24}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{24}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

2) a) $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $\sin x = \frac{3}{4}$ verilenlere göre istenenleri hesaplayalım.

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

b) $\sin 37^\circ = 0,6$

$$\cos 16^\circ = \sin 74^\circ = 2 \cdot \sin 37^\circ \cdot \cos 37^\circ = 2 \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{8}{10} = 0,96$$

c) $\tan 2x = \frac{4}{3} \Rightarrow \tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \rightarrow \tan x = t \quad \frac{4}{3} = \frac{2t}{1-t^2} \Rightarrow 4 - 4t^2 = 6t$

$$2t^2 + 3t - 2 = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow t_2 = -2$$

$$(2t-1) \cdot (t+2) = 0$$

$$\tan x = \frac{1}{2} \Rightarrow \tan x = -2$$

5.11.3.2.Dönüşüm Örnekleri (Çarpım)

Aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız.

1) a) $\tan 255^\circ + \tan 15^\circ$ b) $\frac{\sin 50^\circ + \sin 10^\circ}{\sin 40^\circ}$ c) $\frac{\sin 48^\circ + \sin 12^\circ}{\cos 48^\circ + \cos 12^\circ}$ d) $\cos 36^\circ - \cos 72^\circ$

2) (Ters Dönüşüm)

a) $\frac{\cos 50^\circ \cdot \cos 40^\circ}{\sin 80^\circ}$ b) $2 \sin 45^\circ \cdot \cos 15^\circ$ c) $\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 80^\circ$

Çözümler:

1) a) $\tan 255^\circ + \tan 15^\circ = \frac{\sin 255^\circ}{\cos 255^\circ} + \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{\sin 255^\circ \cdot \cos 15^\circ + \sin 15^\circ \cdot \cos 255^\circ}{\cos 255^\circ \cdot \cos 15^\circ}$

$$= \frac{\sin(255^\circ + 15^\circ)}{\cos(270^\circ - 15^\circ) \cos 15^\circ} = \frac{\sin 270^\circ}{-\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ} = \frac{-1}{-\frac{1}{2} \cdot \sin 30^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 4$$

b) $\frac{\sin 50^\circ + \sin 10^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{2 \cdot \sin\left(\frac{50^\circ + 10^\circ}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{50^\circ - 10^\circ}{2}\right)}{\sin 40^\circ} = \frac{2 \sin 30^\circ \cdot \cos 20^\circ}{2 \sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ}$

$$= \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1}{2 \cdot \sin 20^\circ} = \frac{1}{2 \cdot \sin 20^\circ}$$

c) $\frac{\sin 48^\circ + \sin 12^\circ}{\cos 48^\circ + \cos 12^\circ} = \frac{2 \sin 30^\circ \cdot \cos 18^\circ}{2 \cos 30^\circ \cdot \cos 18^\circ} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

d) $\cos 36^\circ - \cos 72^\circ = -2 \sin\left(\frac{36^\circ + 72^\circ}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{36^\circ - 72^\circ}{2}\right)$

$$= -2 \sin 54^\circ \cdot \sin(-18^\circ) = \frac{2 \sin 18^\circ \cdot \cos 18^\circ \cdot \cos 36^\circ}{\cos 18^\circ} = \frac{\sin 36^\circ \cdot \cos 36^\circ}{\sin 72^\circ} = \frac{1}{2}$$

$$2) a) \frac{\cos 50^\circ \cdot \cos 40^\circ}{\sin 80^\circ} = \frac{\frac{1}{2} [\cos 90^\circ + \cos 10^\circ]}{\sin 80^\circ} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \cos 10^\circ}{\cos 10^\circ} = \frac{1}{2}$$

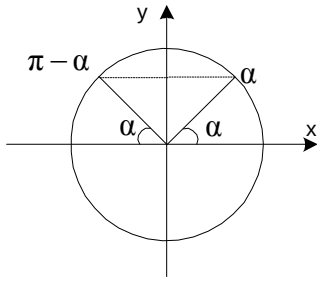
$$b) 2 \sin 45^\circ \cos 15^\circ = 2 \cos 45^\circ \cos 15^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} [\cos 60^\circ + \cos 30^\circ] = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$c) \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos 20^\circ \cdot \sin 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \sin 80^\circ \cdot \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{1}{8} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \sin 160^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{1}{16} \cdot \frac{\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{1}{16}$$

5.12. Trigonometrik Denklemlerin Çözümleri

1. $[0, 2\pi]$ olmak üzere $\sin x = \sin \frac{3\pi}{2}$ $\sin x = \sin \alpha$ denkleminin çözümü:



$[0, 2\pi]$ aralığında sinüsü $\sin \alpha$ olan iki açı vardır. Birinci açı α , diğeri ise $(\pi - \alpha)$ 'dır. Genel çözüm elde etmek için her birine $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $2k\pi$ eklenir.

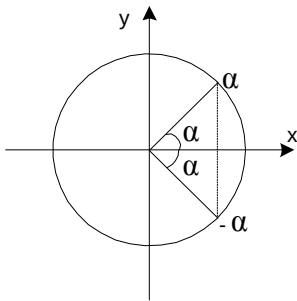
$$\sin x = \sin \alpha = \sin(\pi - \alpha)$$

$$x_1 = \alpha + 2k\pi \text{ veya } x_2 = \pi - \alpha + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

Genel olarak, $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere; $\sin f(x) = \sin g(x)$

$f(x) = g(x) + 2k\pi$ veya $f(x) = \pi - g(x) + 2k\pi$ eşitliklerini sağlayan $x \in \mathbb{R}$ değerler kümesidir.

2. $[0, 2\pi)$ olmak üzere $\cos x = \cos \alpha$ denklemlerinin çözümü:



$[0, 2\pi)$ aralığında kosinüsü $\cos \alpha$ olan iki açı vardır. Birinci açı α diğeri ise $-\alpha$ 'dır. Genel çözüm elde etmek için her birine $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $2k\pi$ eklenir.

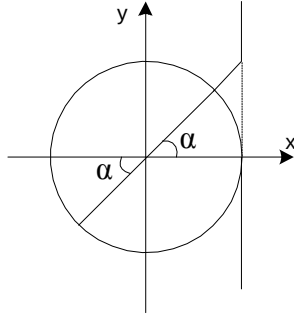
$$\cos x = \cos \alpha = \cos(-\alpha)$$

$$x_1 = \alpha + 2k\pi \text{ veya } x_2 = -\alpha + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

Genel olarak, $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere; $\cos f(x) = \cos g(x)$

$f(x) = g(x) + 2k\pi$ veya $f(x) = -g(x) + 2k\pi$ eşitliklerini sağlayan $x \in \mathbb{R}$ değerlerinin kümesidir

3. $[0, 2\pi)$ olmak üzere $\tan x = \tan \alpha$ denklemlerinin çözümü:



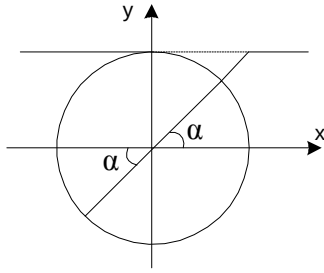
$[0, 2\pi)$ aralığında tanjantı, $\tan \alpha$ olan iki açı vardır. Birinci açı α , diğeri ise $(\pi + \alpha)$ 'dır.

Burada iki açı arasında π kadar fark olduğundan α 'ya $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $k\pi$ eklenerek genel çözüm bulunur.

$$\tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = \alpha + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

Genel olarak, $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere; $\tan f(x) = \tan g(x) \Rightarrow f(x) = g(x) + k\pi$ 'dır.

4. $[0, 2\pi)$ olmak üzere $\cot x = \cot \alpha$ denklemlerinin çözümü:



$[0, 2\pi)$ aralığında kotanjantı, $\cot \alpha$ olan iki açı vardır. Birinci açı α , diğeri ise $(\pi + \alpha)$ 'dır. α ile $(\pi + \alpha)$ arasında π kadar fark olduğundan α 'ya $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $k\pi$ eklenerek genel çözüm bulunur.

$$\cot x = \cot \alpha \Rightarrow x = \alpha + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

Genel olarak, $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere; $\cot f(x) = \cot g(x) \Rightarrow f(x) = g(x) + k\pi$ 'dır.

Örnek: Aşağıdaki Trigonometrik Denklemleri çözünüz.

a) $\sin 2x = \frac{1}{2}$ b) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\tan 3x \cdot \tan 2x = 1$

Çözüm : a) $\sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow$

$$2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{veya} \quad 2x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k \Rightarrow \mathcal{C} = \left\{ x \mid x_1 = \frac{\pi}{12} + k \quad \text{veya} \quad x_2 = \frac{5\pi}{12} + k, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$$

b) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{6} = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k \quad \text{veya} \quad x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2k$

$$\mathcal{C} = \left\{ x \mid x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{veya} \quad x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$c) \tan 3x \tan 2x = 1 \Rightarrow \tan 3x = \frac{1}{\tan 2x} \Rightarrow \tan 3x = \cot 2x \Rightarrow \tan 3x = \left(\tan \frac{\pi}{2} - 2x \right)$$

$$3x = \frac{\pi}{2} - 2x + 2\pi \Rightarrow 5x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}, \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left\{ x \mid x_1 = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$$

5.13. Toplam ve Çarpım formülleri

i) Toplamın Çarpıma Dönüştürülmesi

$$\begin{aligned} \sin A + \sin B &= 2 \sin \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} \\ \sin A - \sin B &= 2 \sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2} \\ \cos A + \cos B &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} \\ \cos A - \cos B &= -2 \sin \frac{A+B}{2} \cdot \sin \frac{A-B}{2} \end{aligned}$$

ii) Çarpımın Toplama Dönüştürülmesi

$$\begin{aligned} \sin A \cos B &= \frac{1}{2} [\sin(A+B) + \sin(A-B)] \\ \cos A \cos B &= \frac{1}{2} [\cos(A+B) + \cos(A-B)] \\ \sin A \sin B &= -\frac{1}{2} [\cos(A+B) - \cos(A-B)] \end{aligned}$$

5.14. Trigonometrik Eşitlikler

1)

$$\begin{aligned} \forall \theta \in \mathbb{R} \text{ için;} \\ \sin \theta &= \sin(2k\pi + \theta) \\ \sin(-\theta) &= -\sin \theta \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \cos \theta \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) &= \cos \theta \\ \sin(\pi - \theta) &= \sin \theta \\ \sin(\pi + \theta) &= -\sin \theta \\ \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) &= -\cos \theta \\ \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) &= -\cos \theta \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} \forall \theta \in \mathbb{R} \text{ için;} \\ \cos \theta &= \cos(2k\pi + \theta) \\ \cos(-\theta) &= \cos \theta \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \sin \theta \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) &= -\sin \theta \\ \cos(\pi - \theta) &= -\cos \theta \\ \cos(\pi + \theta) &= -\cos \theta \\ \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) &= -\sin \theta \\ \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) &= \sin \theta \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} \forall \theta \in \mathbb{R} \text{ için ; } \theta &\neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ k &\in \mathbb{Z} \text{ için ,} \\ \tan \theta &= \tan(2k\pi + \theta) \\ \tan(-\theta) &= -\tan \theta \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \cot \theta \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) &= -\cot \theta \\ \tan(\pi - \theta) &= -\tan \theta \\ \tan(\pi + \theta) &= \tan \theta \\ \tan\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) &= \cot \theta \\ \tan\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) &= -\cot \theta \end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned} \forall \theta \in \mathbb{R} \text{ için ; } \theta &= k\pi, \\ k &\in \mathbb{Z} \text{ için ,} \\ \cot \theta &= \cot(2k\pi + \theta) \\ \cot(-\theta) &= -\cot \theta \\ \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \tan \theta \\ \cot\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) &= -\tan \theta \\ \cot(\pi - \theta) &= -\cot \theta \\ \cot(\pi + \theta) &= \cot \theta \\ \cot\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) &= \tan \theta \\ \cot\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) &= -\tan \theta \end{aligned}$$

5.15.Ters Trigonometrik Fonksiyonlar

Bir fonksiyonun tersinin olabilmesi için bire-bir ve örten olması gerekir. Fakat trigonometrik fonksiyonlar $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye bire-bir ve örten değildir. Bu nedenle, tanım kümeleri $\mathbb{R}$ olarak seçilirse, bu fonksiyonların bire-bir ve örten oldukları alt kümeler seçilerek ters trigonometrik fonksiyonlar tanımlanabilir.

1) Arcsinüs fonksiyonu

Sinüs fonksiyonu, $\mathbb{R} \rightarrow [-1,1]$ örten fakat bire-bir olmayan bir fonksiyondur. Bu fonksiyonun tanım aralığı $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ alırsak bire-bir ve örten olur.

$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1,1], \quad f(x) = \sin x \quad \text{fonksiyonunun ters fonksiyonu}$$

$$f^{-1}(x) = \sin^{-1} x \quad \text{veya} \quad f^{-1} = \text{Arc sin } x \quad \text{şeklinde gösterilir.}$$

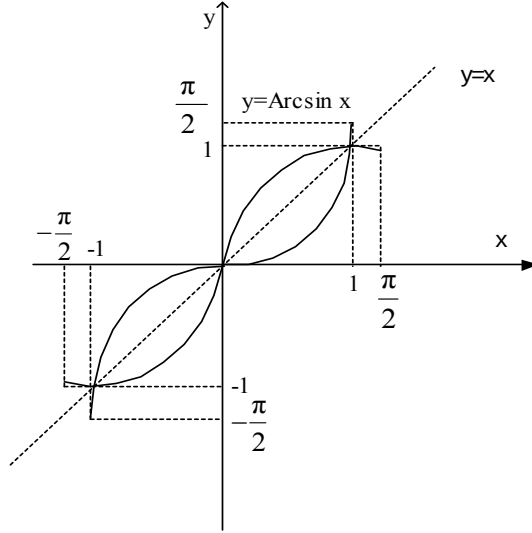
$$\text{Arc sin} : [-1,1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ dir.}$$

$$y = f(x) = \sin x \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = \sin^{-1} y \text{ ise } x = \text{Arc sin } y$$

Ters fonksiyonda x ile y yer değiştirilirse,

$y = \text{Arc sin } x$ bulunur. Arcsinüs fonksiyonunun grafiği :

Arcsinüs fonksiyonunun grafiği $y = \sin x$ fonksiyonunun $y = x$ doğrusuna göre simetriğidir.



2) Arccosinüs fonksiyonu

Kosinüs fonksiyonu, $IR \rightarrow [-1,1]$ örten fakat birebir olmayan bir fonksiyondur.

Bu fonksiyonun tanım aralığını $[0, \pi]$ alırsak, birebir ve örten olur.

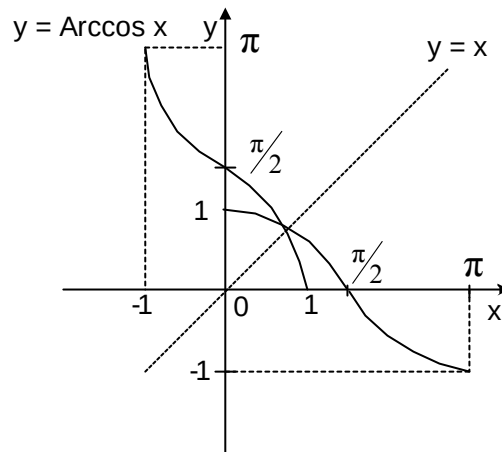
$$f : [0, \pi] \rightarrow [-1,1] \quad f(x) = \cos x \text{ fonksiyonunun ters fonksiyonu}$$

$$f^{-1}(x) = \cos^{-1} x \text{ veya } f^{-1}(x) = \text{Arc cos}^{-1} x \text{ şeklinde gösterilir.}$$

$$\text{Arc cos} : [-1,1] \rightarrow [0, \pi] \text{ dir. } y = f(x) = \cos x \Leftrightarrow x = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = \text{Arc cos } y$$

Ters fonksiyonda x ile y yer değiştirirse $y = \text{Arc cos } x$ olur.

Arccosinüs fonksiyonun grafiği:



Arccosinüs fonksiyonunun grafiği $y = \cos x$ fonksiyonunun $y = x$ doğrusuna göre simetriğidir.

3) Arctanjant fonksiyonu

Tanjant fonksiyonunun tanım kümesini $\mathbb{R} \rightarrow \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ ve değer kümesini $\mathbb{R}$ alırsak bu fonksiyon birebir ve örten olmaz. Bu fonksiyonun tanım aralığını $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ alırsak, birebir ve örten olur.

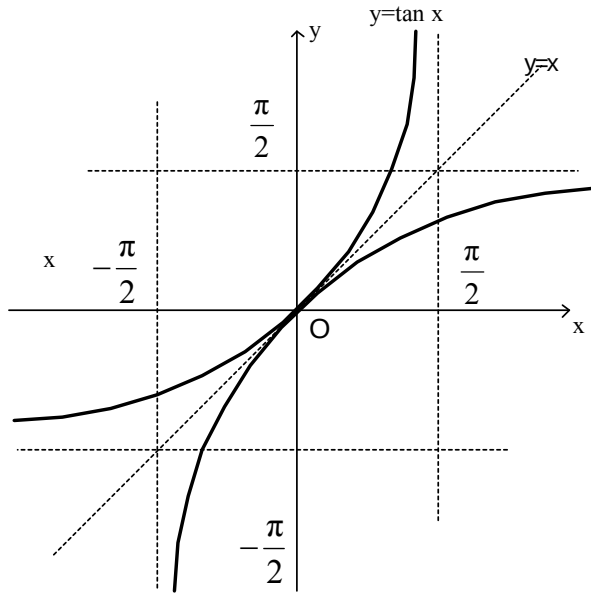
$f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \tan x$ fonksiyonunun ters fonksiyonu $f^{-1}(x) = \tan^{-1} x$ veya

$f^{-1}(x) = \text{Arc tan } x$ şeklinde gösterilir.

$\text{Arc tan} : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ dir.

$$y = f(x) = \tan x \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = \tan^{-1} y \Leftrightarrow x = \text{Arc tan } y$$

Ters fonksiyonda x ile y yer değiştirirse, $y = \text{Arc tan } x$ olur.



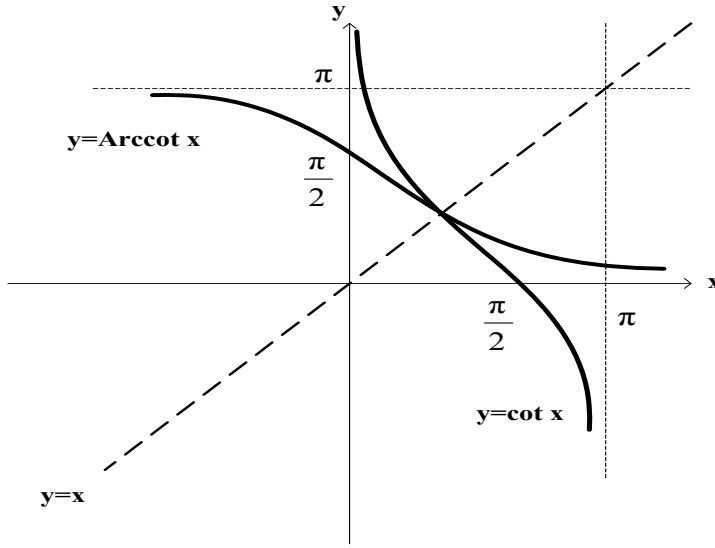
Arctanjant fonksiyonun grafiği tanjant fonksiyonunun grafiğinin $y = x$ doğrusuna göre simetriğidir.

4) Arccotanjant fonksiyonu : Kotanjant fonksiyonunun bire bir ve örten olduğu aralıklardan biri $(0, \pi)$ aralığıdır. Bu nedenle, $f : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cot x$ fonksiyonun ters

fonksiyonu; $f^{-1}(x) = \cot^{-1} x$ veya $f^{-1}(x) = \text{Arc cot } x \Rightarrow \text{Arc cot} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$ dir.

$$y = f(x) = \cot x \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = \cot^{-1} y \Leftrightarrow x = \text{Arc cot } y$$

Ters fonksiyonda x ile y yer değiştirirse, $y = \text{Arc cot } x$ olur. Arccotanjanant fonksiyonun grafiği:



Arccotanjanant fonksiyonun grafiği cotanjanant grafiğinin $y = x$ doğrusuna göre simetriğidir.

Örnekler:

1) Aşağıdaki değerleri bulunuz.

a) $\text{Arc sin}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ b) $\text{Arc cos}\left(\frac{1}{2}\right)$ c) $\text{Arc tan}(-1)$ d) $\text{Arc cot}(-\sqrt{3})$

Çözüm: a) $\text{Arc sin}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = x \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin x$

$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığında bulunan ve sinüsü $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 'den açının ölçüsü $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ 'dür.

$x = -\frac{\pi}{4}$ olur. Yani, $\text{Arc sin}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$

b) $\text{Arc cos}\left(\frac{1}{2}\right) = x \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \cos x$

$[0, \pi]$ aralığında bulunan ve cosinüsü $\left(\frac{1}{2}\right)$ olan açının ölçüsü $\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 'tür.

$x = \frac{\pi}{3}$ yani, $\text{Arc cos}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$

c) $\text{Arc tan}(-1) = x \Leftrightarrow -1 = \tan x$

$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığında bulunan ve tanjantı (-1) olan açının ölçüsü $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ 'dür.

$$x = \left(-\frac{\pi}{4}\right) \text{ yani } \text{Arc tan}(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

d) $\text{Arc cot}(-\sqrt{3}) = x \Leftrightarrow (-\sqrt{3}) = \cot x \Rightarrow (0, \pi)$ aralığında bulunan ve kotanjantı $-\sqrt{3}$ olan açının ölçüsü $\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ 'dır. $x = \left(\frac{5\pi}{6}\right)$ yani $\text{Arc cot}(-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6}$

2) $\text{Arc tan}\left(\frac{3}{4}\right) = x$ ise $\sin x + \cos x$ ifadesinin eşitini bulunuz.

Çözüm: $\text{Arc tan}\left(\frac{3}{4}\right) = x \Rightarrow \tan x = \frac{3}{4}$ olduğundan istenenler hesaplanırsa;

$$\sin x = \frac{3}{5}, \cos x = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin x + \cos x = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{5} \text{ bulunur.}$$

3) $\text{Arc tan } 3 + \text{Arc cot}\left(\frac{1}{2}\right)$ toplamının değerini bulunuz.

Çözüm: $\text{Arc tan } 3 = \alpha \Leftrightarrow \tan \alpha = 3$

$$\text{Arc cot}\left(\frac{1}{2}\right) = \beta \Leftrightarrow \cot \beta = \left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \tan \beta = 2$$

Buna göre; $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - (\tan \alpha \cdot \tan \beta)} = \frac{3+2}{1-(3 \cdot 2)} = -1$

$$\alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}. \text{ O halde } \text{Arc tan } 3 + \text{Arc cot}\left(\frac{1}{2}\right) = \alpha + \beta = \frac{3\pi}{4} \text{ tür.}$$

ALİŞTIRMALAR

1. 72 derece kaç graddır?
2. 16 grad kaç radyandır?
3. -1320 derecenin esas ölçüsü nedir?
4. -900 gradın esas ölçüsü kaç radyandır?
5. $\frac{45\pi}{8}$ radyanın esas ölçüsü kaç radyandır?
6. $\frac{-23\pi}{8}$ radyanın esas ölçüsü kaç graddır?
7. $4\cos\pi + 3\sin\frac{3\pi}{2} - 5$ ifadesinin sayısal değeri nedir?
8. $f(x)=\cotg x$ fonksiyonunun tanım cümlesi nedir?
9. $f(x)=(5-\sin x)(8+\sin x)$ ise $f(x)$ 'in en büyük değeri nedir?
10. $f(x)=(7+\cos x)(13-\cos x)$ ise $f(x)$ 'in en küçük değeri nedir?
11. $\tg x - \cotg x = 5$ ise $\tg^2 x \cdot \cotg^2 x$ neye eşittir.
12. $\cos ec^2 x - \cot g^2 x$ 'in eşitini bulunuz.
13. $\cos 2760$ neye eşittir?
14. $\cotg 13420$ neye eşittir?
15. $\cos 15$ neye eşittir?
16. $\cos x - \sin x = \frac{1}{5}$ ise $\sin 2x$ nedir?
17. $\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} = \frac{2}{3}$ ise $\sin x$ nedir?

18. $\cos 83=t$ ise $\sin 14$ nedir?
19. $\frac{1}{\sin 10} + \frac{\sqrt{3}}{\cos 10}$ neye eşittir?
20. $\sin 2x = \frac{1}{5}$ ise $\sin^4 x + \cos^4 x$ nedir?
21. $\frac{\sin 2x}{2\cos^2 x}$ neye eşittir?
22. $\cos 50 = m$ ise $\cos 70 \cdot \sin 20$ nedir?
23. $\sin^4 x - \cos^4 x$ neye eşittir?
24. $\cos^2 15 - \sin^2 15$ ' in sayısal değeri nedir?
25. $\cos 50=k$ ise $\cos 80$ nedir?
26. $\cos \frac{\pi}{8}$ neye eşittir?
27. $\frac{\cos 15 - \sin 15}{\cos 15 + \sin 15}$ in sayısal değeri nedir?
28. $f(x)=\tan x-1$ ise $f(x)$ 'in grafiğini çiziniz.
29. $f(x)=3\sin x+2$ ise $f(x)$ in grafiğini çiziniz.
30. $f(x)= -\cos 4x$ ise $f(x)$ in grafiğini çiziniz.
31. $f(x)=\cos 3x+2$ ise $f(x)$ in grafiğini çiziniz.
32. $\sin^2 x - \sin x - 6 = 0$ denkleminin çözüm kümesi nedir?
33. $\cos 2x=1$ denkleminin çözüm kümesi nedir?
34. $[0, 2\pi]$ arasında $\sin 8x + \sin 2x = 2\sin 5x$ denkleminin çözüm kümesi nedir?
35. $[0, 360]$ arasında $\tan^2 x - (\sqrt{3} + 1)\tan x + \sqrt{3} = 0$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

6. BÖLÜM

6.ÜSTEL ve LOGARİTMİK FONKSİYONLAR

6.1.Genel Üstel Fonksiyon : $a > 0$, x herhangi bir rasyonel veya irrasyonel sayı için;

$f(x) = a^x$ şeklindeki fonksiyona genel üstel fonksiyon denir. Yani;

$$a^x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

olarak tanımlanır.

6.2.Üstel Fonksiyonun Özellikleri

i) $a > 1$ için;

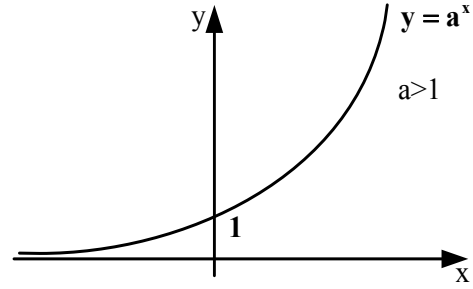
a) Fonksiyon artandır ve $\forall x \in \mathbb{R}$ sayısı için $a^x \neq 0$ 'dır.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x &= 0 & \lim_{x \rightarrow \infty} a^x &= \infty \end{aligned}$$

Fonksiyon süreklidir.

d) Grafiği;

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
a^x	0	1	a	∞



Şekil.6.1 $a > 1$ için $y = a^x$ grafiği

ii) $0 < a < 1$ için fonksiyon azalandır.

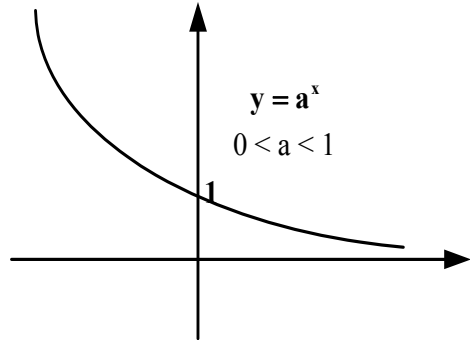
$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty \text{ 'dur.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty$$

Fonksiyon süreklidir.

d) Grafiği;

x	$-\infty$	0	$+\infty$
a^x	0	1	∞



Şekil.6.2. $0 < a < 1$ için $y = a^x$ grafiği

$a = 1$ ise $x \in \mathbb{R}$ ve $a^x = 1$ ' dir.

Sonuç olarak, $a^x : (-\infty, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ fonksiyonu bire-bir ve örten bir fonksiyondur ve aşağıdaki özelliklere sahiptir.

$$1-) a^x a^y = a^{x+y}$$

$$2-) \frac{a^x}{a^y} = a^{(x-y)}$$

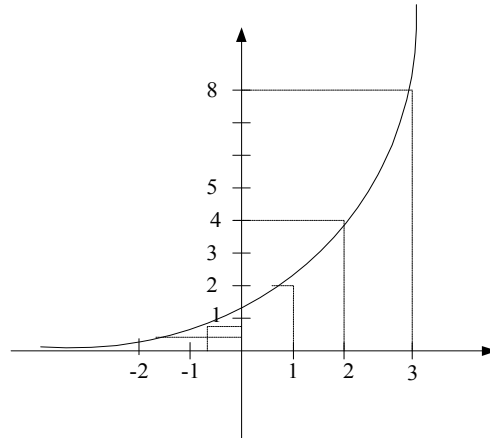
$$3-) (a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

$$4-) (ab)^x = a^x b^x$$

$$5-) \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

Örnek.6.1: $f(x) = 2^x$ üstel fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm.6.1:



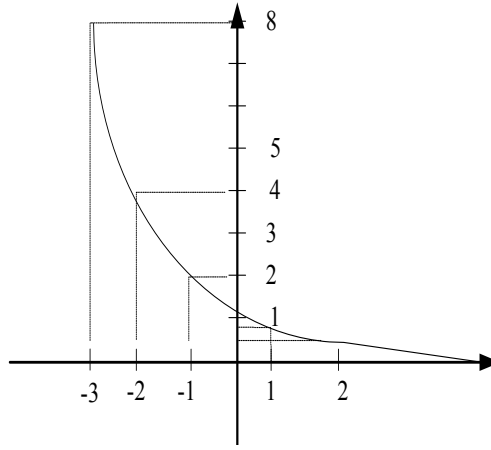
Şekil.6.3 $f(x) = 2^x$ üstel fonksiyonunun grafiği

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
2^x	0.0625	0.125	0.25	0.5	1	2	4	8	16

Örnek.6.2: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm.6.2:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$(1/2)^x$	16	8	4	2	1	0.5	0.25	0.125	0.0625



Şekil.6.4. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ fonksiyonunun grafiği

6.3.e sayısı : e irrasyonel bir sayı olup ondalık açılımı;

$e = 2.71828182845....$ şeklindedir. Limit yardımıyla $e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ olarak tanımlanır.

x	1	5	10	20	100	1000	5000
$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	2	2.488	2.653	2.594	2.705	2.717	2.718

Uygulamada e sayısı yaklaşık değer olarak kullanıldığından $e \approx 2.718$ olarak alınır.

Buna göre, $f(x) = e^x$ fonksiyonu $a > 1$ için $f(x) = a^x$ fonksiyonun özel bir hali olup e tabanına göre üstel fonksiyon olarak adlandırılır ve $f(x) = a^x$ ($a > 1$) fonksiyonu ile aynı özelliklere sahiptir. Yani;

$$e^x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \rightarrow -\infty \text{ için } e^x \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow +\infty \text{ için } e^x \rightarrow +\infty$$

$f(x) = e^x$ fonksiyonunun özellikleri;

$$1) x = 0 \text{ için } e^x = 1$$

$$2) \forall x \text{ için } e^x > 0$$

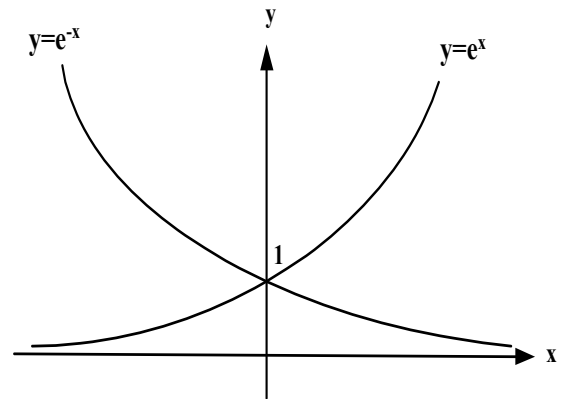
$$3) \forall x \text{ için } e^x \neq 0$$

$$4) x \rightarrow -\infty \text{ için } e^x \rightarrow 0$$

$$6) e^x e^y = e^{x+y}$$

$$7) \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$$

$$8) e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

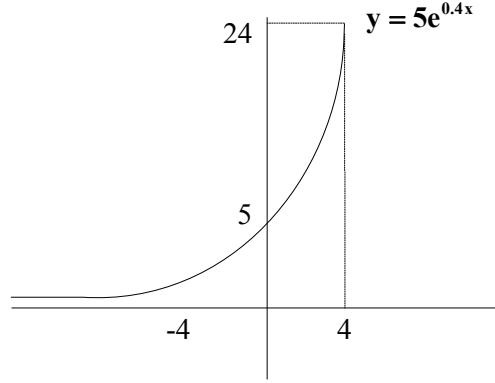


Şekil.6.5. $f(x) = e^x$ ve $f(x) = e^{-x}$ fonksiyonlarının grafiği

Örnek.6.3: $y = 5e^{0.4x}$, $-4 \leq x \leq 4$ aralığında fonksiyonun grafiğini çiziniz.

Çözüm.6.3:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$5e^{0.4x}$	1.009	1.509	2.247	3.352	5	7.459	11.128	16.601	24,765



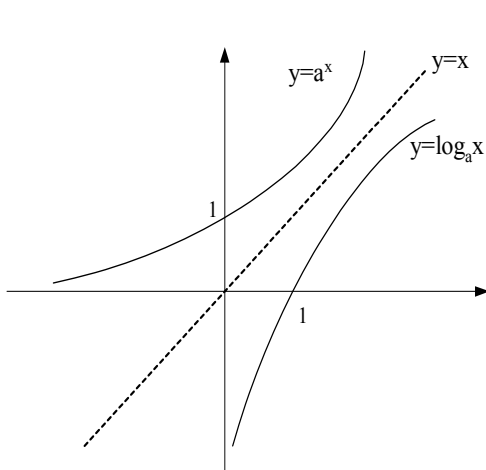
Şekil.6.6 $y = 5e^{0.4x}$ fonksiyonun grafiği

6.4. Logaritma Fonksiyonu: $a > 0$ ve $a \neq 1$ olmak üzere $y = a^x$ ise x , y nin a tabanına göre logaritmasına eşittir denir ve bu $x = \log_a y$ şeklinde yazılır.

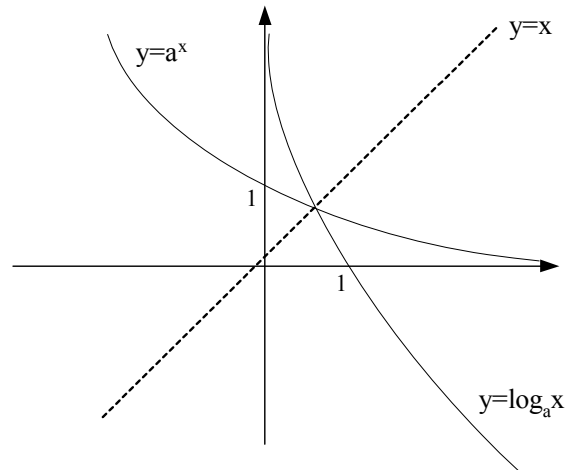
$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y \quad a > 0 \text{ ve } a \neq 1 \text{ 'dir.}$$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad , \quad f(x) = a^x \text{ üstel fonksiyonunun ters fonksiyonu}$$

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = \log_a x \text{ olur.}$$



Şekil .6.7.a $y = (a > 1)a^x$ grafiği



Şekil.6.7.b $y = \log_a x$ ($0 < a < 1$) grafiği

Şekil.6.7.a.b.' den de görüldüğü gibi $y = a^x$ ile $y = \log_a x$ fonksiyonları ters fonksiyonlar olduklarından grafikleri de $y=x$ doğrusuna göre simetriktir.

6.4.1. Logaritma Fonksiyonunun Özellikleri

1) Yalnız pozitif sayıların logaritması vardır. Sıfırın ve negatif sayıların logaritması yoktur.

2) $a^0 = 1$ olduğundan $\log_a 1 = 0$ dir. 3) $a^1 = a$ olduğundan $\log_a a = 1$ dir.

4) $a > 1$ ise 1'den büyük sayıların logaritmaları pozitif, 1 den küçük sayıların logaritmaları negatiftir .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \infty \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \log_a x = -\infty$$

5) $0 < a < 1$ ise 1'den büyük sayıların logaritmaları negatiftir. 1'den küçük sayıların logaritmaları pozitiftir.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = -\infty \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = \infty$$

6.4.2. Logaritma Formülleri

$$1) \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \quad 2) \log_a(\sqrt[n]{x}) = \left(\frac{1}{n}\right) \log_a x$$

$$3) \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y \quad 4) \log_a x^n = n \log_a x$$

$$5) \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \quad (x > 0) \quad 6) \log_a b = \left(\frac{1}{\log_b a}\right)$$

$$7) {}_a^{\log_a x} = x \quad 8) \log_a a^x = x \log_a a = x$$

Uygulamada en çok iki taban kullanılır. 10 tabanına göre olan logaritmaya bayağı logaritma denir ve $\log_{10} x = \log x$ ile gösterilirken e tabanına göre olan logaritmaya doğal logaritma denir $\log_e x = \ln x$ ile gösterilir.

6.5. Üstel ve Logaritmik Fonksiyonlara İlişkin Çözümlü Örnekler :

$$1) \log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$$

$$2) \log 12 = \log(4 \cdot 3) = \log 4 + \log 3$$

$$3) 2 \log_{10} x + 3 \log_{10}(x+2) - \log_{10}(x^2 + 5) \text{ tek bir logaritma ile ifade ediniz.}$$

$$\text{Çözüm:} = \log_{10} x^2 (x+2)^3 - \log_{10}(x^2 + 5) = \log_{10} [(x^2(x+2)) / (x^2 + 5)]$$

4) $\log_2 x + \log_2(x+2) = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm: $\log_2 x(x+2) = 3$

$x(x+2) = 2^3 \rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$ ise $(x+4)(x-2) = 0$ ve $x = -4$, $x = 2$ bulunur.

$x = -4 < 0$ için logaritma fonksiyonu tanımlı olmadığından çözüm olamaz. $x = 2$ için çözümdür.

5) $\log_2 13 = \frac{\log_{10} 13}{\log_{10} 2} \approx 3.7004$

6) $\log_a 4 = b$, $\log_a v = c$ ve $\log_a w = d$ için aşağıdaki her bir soruyu b, c ve d cinsinden hesaplayınız.

a) $\log_a(4v^2 + w^3) = ?$

Çözüm: $\log_a(4v^2 + w^3) = \log_a 4 + \log_a v^2 + \log_a w^3 = \log_a 4 + 2\log_a v + 3\log_a w = b + 2c + d$

b) $\log_a \left(\frac{4^4}{\sqrt[3]{vw^2}} \right) = ?$

Çözüm: $\log_a \left(\frac{4^4}{\sqrt[3]{vw^2}} \right) = \log_a 4^4 - \log_a (vw^2)^{\frac{1}{3}} = 4\log_a 4 - \left(\frac{1}{3} \right) \log_a (vw^2)$
 $= 4b - \left(\frac{1}{3} \right) [\log_a v + \log_a w^2] = 4b - \left(\frac{1}{3} \right) c - \left(\frac{2}{3} \right) d$

7) $300e^x = 600$ ise x'i bulunuz.

Çözüm: $300e^x = 600$ ise $e^x = 2$ ve buradan $x = \ln 2 = 0.6931$ bulunur.

8) $5^{2x-1} = 7^{x+2} \Rightarrow x = ?$

Çözüm: $\ln(5^{2x-1}) = \ln(7^{x+2})$

$$(2x-1)\ln 5 = x\ln 7 + 2\ln 7 \text{ ise } 2x\ln 5 - x\ln 7 = \ln 5 + 2\ln 7$$

$$x(2\ln 5 - \ln 7) = \ln 5 + 2\ln 7 \text{ ve buradan;}$$

$$x = \frac{(\ln 5 + 2\ln 7)}{(2\ln 5 - \ln 7)} \Rightarrow x = \frac{(1.609 + 2(1.946))}{(2(1.609) - 1.946)} \cong 4.325$$

9) 28-Mart-1964'de Alaska'da rihter ölçeğine göre 8.5 şiddetinde deprem olmuştur. 2-Mayıs-1983'de California'da da rihter ölçeğine göre 6.5 şiddetinde başka bir deprem olmuştur. Alaska'daki deprem California'daki depremden ne kadar şiddetli olmuştur ?

Çözüm: Bir depremin büyüklüğü; $m = \log\left(\frac{a}{a_0}\right)$ ile ilgili bir formüldür.

Burada, $\left(\frac{a}{a_0}\right)$ depremin şiddeti olarak bilinir. a , verilen bir depremin

en büyük sismik dalgasının üzerinde ölçülen genişliğidir. a_0 , aynı deprem merkezinde 0 seviyeli depremin en büyük sismik dalgasının aynı sismograf üzerinde genişliğidir.

a , ile California'daki, a_0 ile Alaska'daki anların deprem merkezinden 1000 km uzağındaki en büyük sismik dalganın genişliği olsun. Buna göre;

$$6.5 = \log\left(\frac{a_2}{a_0}\right) \Rightarrow 8.5 = \log\left(\frac{a_1}{a_0}\right) \Rightarrow 8.5 = \log\left(\frac{a_1}{a_0}\right) \Rightarrow$$

olarak bulunur. Yani, $a_1 = 100 a_2$ Alaska depremi California depreminden 100 kez daha şiddetli olmuştur.

10) Uzun süreli bir grip salgınının yayılması $P(t) = \left(\frac{32000}{(1+50e^{-0.1t})}\right)$ ile tanımlanıyor. $P(t)$

hastalığın patlamasından t hafta sonra etkilenen insanların sayısıdır. 2000 insan ne kadar süre sonra hastalanmış olacaklardır.

Çözüm:

$$\left(\frac{32000}{(1+50e^{-0.1t})}\right) = 2000 \Rightarrow 2000(1+50e^{-0.1t}) = 32000 \Rightarrow 2000 + 100000e^{-0.1t} = 32000 \Rightarrow 100000e^{-0.1t} = 30000 \Rightarrow e^{-0.1t} = 0.30 \Rightarrow -0.1t = \ln 0.30 \Rightarrow -0.1t = -1.2040 \Rightarrow t = 12.04 \text{ olur. 12 hafta sonra 2000 kişi bu hastalıktan etkilenmiş olacaktır.}$$

11) Türkiye nüfusunun $f(t) = 50 \cdot 10^6 \cdot e^{0.025(t-1984)}$ formülüne göre değiştiğini kabul edelim. Burada zaman birimi yıldır. $t=1984$ için $f(1984) = 50 \cdot 10^6 \cdot 0.025$ (%0.25) nüfus artış katsayısıdır. Buna göre Türkiye nüfusu ne zaman 100 milyon olur?

Çözüm: $f(t) = 50 \cdot 10^6 \cdot e^{-0.025 \times 1984} = c \cdot e^{at}$

$$T = \frac{\log_e 2}{a} \quad (\text{Yarılanma süresi})$$

$$T = \frac{0.69}{0.025} = 27,6 \text{ yıl bulunur.}$$

1984+27,6≈2011 yılında nüfus 100 milyon olur.

6.6. Kazanç Ölçüleri :Yapılan araştırmalar ve elde edilen tecrübeler sonucunda insan kulağının ses seviyelerindeki değişimlere logaritmik olarak cevap verdiği görölmüştür.

$$A_p(\text{bels}) = \log P_{\text{OUT}} - \log P_{\text{IN}} = \log P_{\text{OUT}} / P_{\text{IN}}$$

Ölçüm birimi “bel” Alexander Graham Bell’e ithafen bel olarak adlandırılmıştır. Bel sözcüğü günümüzde nadir olarak kullanılmaktadır çünkü bu sözcük çok büyük ünitelerde ele alınmakta kullanılmaktadır. Bel’in yerine normalde ölçümlerimizde birim olarak decibel’i kullanmaktayız. 1 decibel (db), 1/10 bel’e eşittir. Buradan;

$$A_p(\text{db}) = 10 \log P_{\text{OUT}} / P_{\text{IN}}$$

$$A_v(\text{db}) = 20 \log V_{\text{OUT}} / V_{\text{IN}}$$

Örnek: Yükseltecin çıkış gücü 30W’dır. Giriş gücü ise 100mW’dır. Güç kazancı kaç decibeldir.

Çözüm: $A_p(\text{db}) = 10 \log P_{\text{OUT}} / P_{\text{IN}} = 10 \log 30\text{W} / 100\text{mW} = 10 \log 300 = 24.8\text{db}$

Örnek: Bir yükseltecin giriş gücü 50μW’dır ve güç kazancı 40db ise çıkış gücü kaç W’dır?

Çözüm: $A_p(\text{db}) = 10 \log P_{\text{OUT}} / P_{\text{IN}} \quad 40\text{db} = 10 \log P_{\text{OUT}} / 50\mu\text{W}$

Her iki tarafı 10’a bölersek: $4\text{db} = \log P_{\text{OUT}} / 50\mu\text{W}$

Eşitliği logarimadan kurtarırsak: $10^4 = P_{\text{OUT}} / 50\mu\text{W}$

Her iki tarafıda 50μW’a bölersek: $P_{\text{OUT}} = 0.5\text{W}$ çıkar.

Örnek: Bir yükseltecin giriş voltajı 50mV çıkış voltajı 1.73V’dur ve $R_{\text{OUT}}=R_{\text{IN}}$ ise voltaj kazancı kaç db’dır?

Çözüm: $A_v(\text{db}) = 20 \log V_{\text{OUT}} / V_{\text{IN}} = 20 \log 1.73\text{V} / 50\text{mV} = 20 \log 34.6 = 30.8\text{db}$

Örnek: Voltaj kazancı -6db, çıkış voltajı 700mV olan bir yükseltecin giriş voltajı nedir?

Çözüm: $A_v(\text{db}) = 20 \log V_{\text{OUT}} / V_{\text{IN}} \quad -6\text{db} = 20 \log 700\text{mV} / V_{\text{IN}}$

Her iki tarafıda 20 ‘ye bölersek: $-0.3\text{db} = \log 700\text{mV} / V_{\text{IN}}$

Eşitliği logarimadan kurtarırsak: $10^{-0.3} = 700\text{mV} / V_{\text{IN}}$

$V_{\text{IN}} = 1.4\text{V}$ çıkar.

6.7. Referans Seviyeleri

Bazı örneklerde çıkış güçleri yada çıkış voltajları giriş değerleri referans alınarak verilir. Bazen diğer referans seviyelerinde kullanılmaktadır. Genel olarak kullanılan referans seviyelerinden biri 6mW’dır. Diğer bir değişle, 0 db eşittir 6mW’a denir. Diğer bir referans seviyesi 1mW’dır. Referans 1mW olduğunda, decibel ölçümü **dbm** olarak isimlendirilir. Eğer güç dbm olarak verilirse, giriş gücünün 1mW olduğunu anlarız.

Örnek: Güç kazancı 33dbm olan yükseltecin çıkış gücü nedir?

Çözüm: $A_p(\text{db}) = 10 \log P_{\text{OUT}} / P_{\text{IN}}$ $33\text{dbm} = 10 \log P_{\text{OUT}} / 1\text{mW}$

Her iki tarafı 10'a bölersek: $3.3\text{dbm} = \log P_{\text{OUT}} / 1\text{mW}$

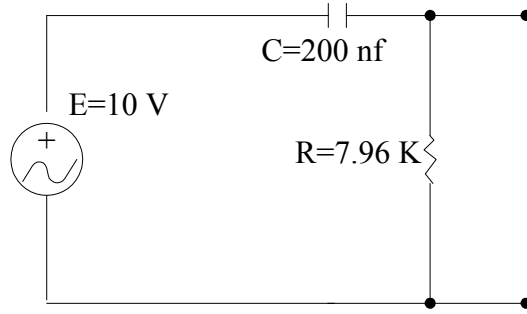
Eşitliği logarimadan kurtarırsak: $10^{3.3} = P_{\text{OUT}} / 1\text{mW}$

Her iki tarafıda 1mW'a bölersek: $P_{\text{OUT}} = 2\text{W}$ çıkar.

6.8. Frekans Cevabı

6.8.1. Bode Analizörü

Bode analizörü devre yada sistemin frekans cevabını bulmakta kullanılan kullanışlı bir alettir. Şekil.6. 8'deki RC devresinin frekans cevap karakteristiğini bode analizörü ile ele alalım. AC devre analizinden çağrışım yapacak olursa X_C 'nin frekansa göre değiştiğini ve kesim frekansı f_{CO} 'nun $X_C = R$ olduğu zaman gerçekleştiğini hatırlamalıyız. Çıkış voltajı R üzerinden alındığından $V_{\text{OUT}} = V_R$ 'dir. Voltaj kazancını öğrendiğimiz eşitliği kullanarak bulabiliriz.



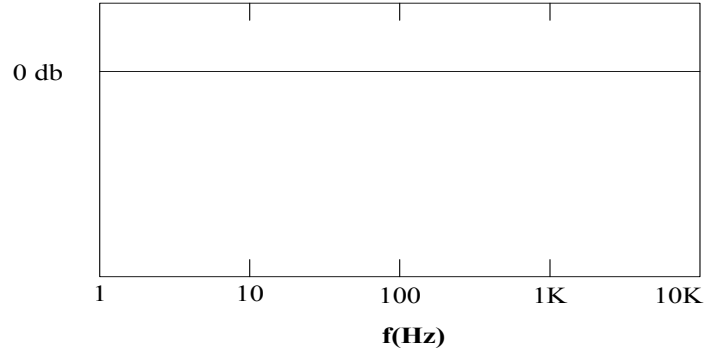
Şekil.6. 8. RC devresinin frekans cevap karakteristiğinin bode analizörü

$$A_v(\text{db}) = 20 \log V_{\text{OUT}} / V_{\text{IN}}$$

Yüksek frekanslarda $V_{\text{OUT}} = V_{\text{IN}}$ Buradan; $A_v(\text{db}) = 20 \log 10\text{V} / 10\text{V} = 0\text{db}$

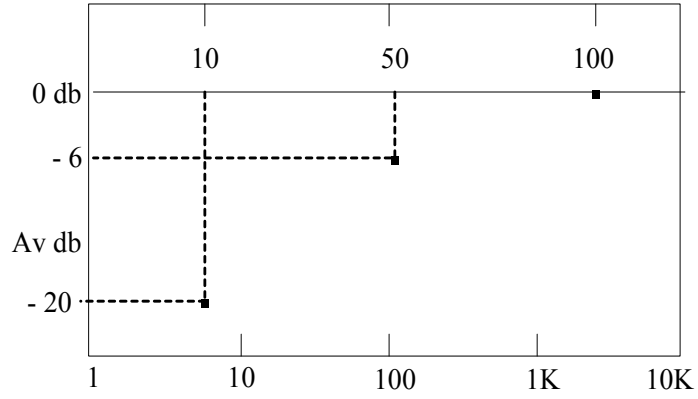
Bu devre için mümkün olan maksimum kazanç 0db'dir.

Analizör için yarı logaritmik grafik kağıdı kullanılmaktadır. Frekans bağımsız değişkendir ve logaritmik ölçek boyunca grafiği çıkarılır. A ölçeği A_v içindir ve bu seçim bize kazancı en düşük -20db'den itibaren değiştirmemize izin vermektedir. İlk şekilde ölçek yatay çizilmiştir. Yarı logaritmik kağıdımız minimum frekansı 1Hz'den başlamak üzere 4 saykıla ayrılmıştır. (Şekil.6.9)Bu bize kazancı elde ettiğimiz frekansı 1Hz ile 10Khz arasında görebilmemizi sağlamaktadır. Kesim frekansı 100Hz'dir. $f_{\text{CO}} = 1 / 2 * \pi * C * R = 100\text{Hz}$



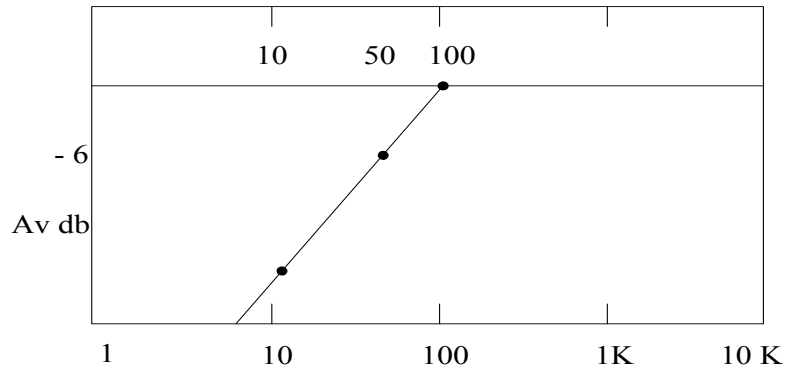
Şekil.6.9. Analizör için yarı logaritmik grafik kağıdı

Şekil.6.10.'da 100Hz noktasının grafiği yatay hattımızın üzerine çıkmıştır. Frekans hattımızın diğer noktalarında kazanç değişecektir. -6db octave ve -20db decade'te olduğu gibi. Octave değişim, frekansın yarısı yada iki katı olan frekanstır. Decade değişim ise, frekansın 10 kat değiştiği frekanstır. (Şekil.6.10)



Şekil.6.10. 100Hz noktasının grafiği

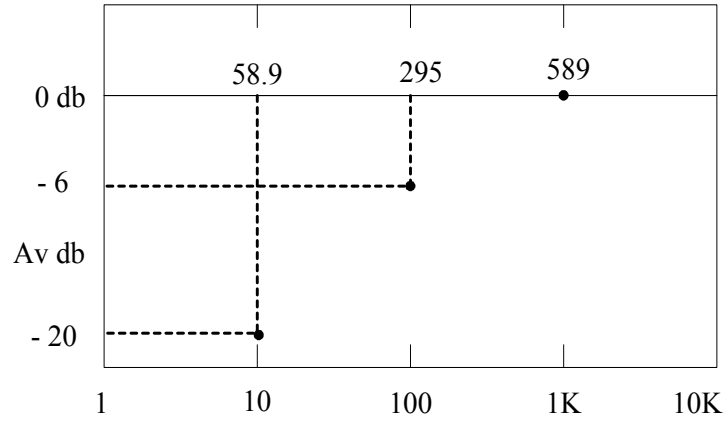
Kazanç düştüğünde frekansta düşmektedir. Şekil.6.10'da kazanç -6db ve frekansın 50Hz olduğu yere ikinci nokta çizilmiştir. $f_{CO} = 0.1$ olduğu yerde çizilmiştir. Şekil.6.11'de bu üç nokta düz bir doğru ile birleştirilmiştir. Bu bizim bode grafiğimizdir. Bode analizöründe tüm çizimler bu yolla yapılmaktadır. Kazanç düştüğü zaman frekansta azalır şekil.6.11'de olduğu gibi. Kazanç düştüğü zaman frekans da azalır (Şekil.6.11).



Şekil.6.11. Bode Grafiği

Örnek: Şekil.6.8'e göre $C = 100\text{nf}$ ve $R = 2.7\text{K}$ ise Bode analizöründeki grafiğini çizin.

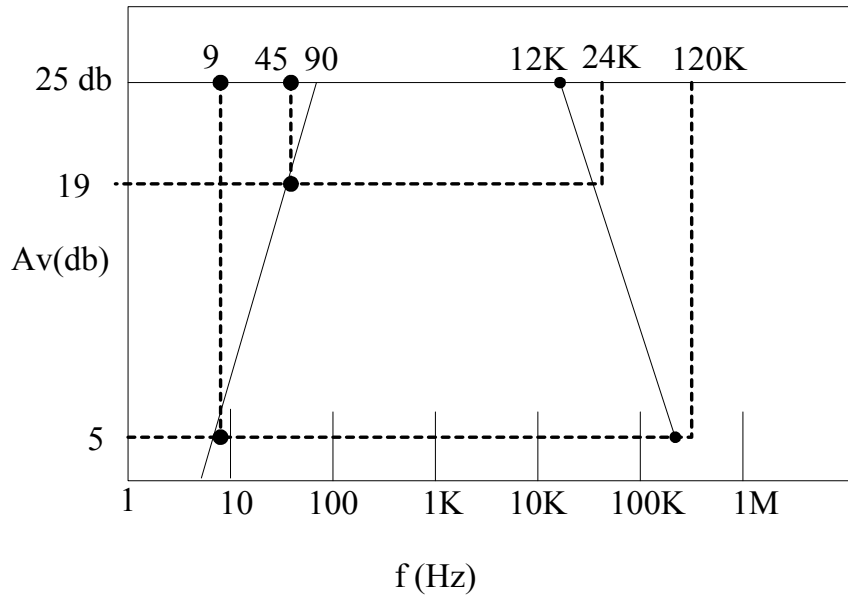
Çözüm : $f_{CO} = 589\text{Hz}$ ve Bode grafiği şekil.6.12'de gösterilmiştir.



Şekil.6..12. Bode Analizör Grafiği

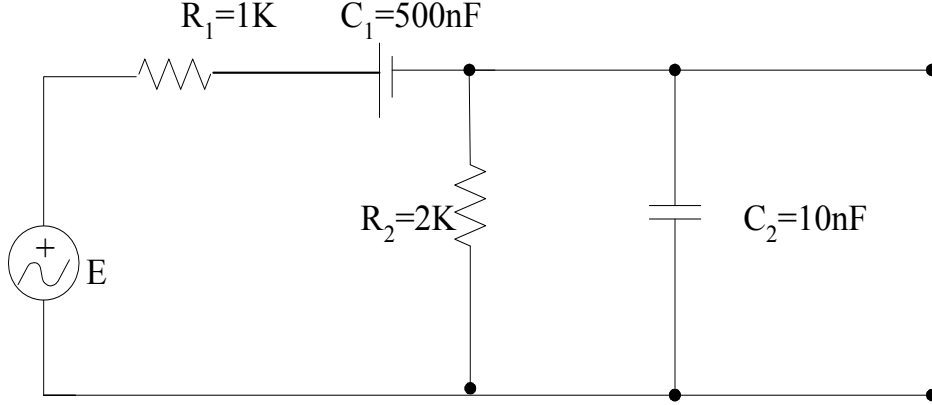
Örnek :Yükseltecin orta frekans kazancı 25db, düşük kesim frekansı(f_1) 90Hz, yüksek kesim frekansı(f_2) 12Khz'dir. Yükseltecin bode analizöründeki frekans cevabını bulun.

Çözüm :5 sayıklılık yarı logaritmik grafik kağıdı kullanacağız. Ölçek A_v için seçilmiştir ve yatay hat 25db'de çizilmiştir. Önce düşük kesim frekansını çizelim. İlk nokta f_1 'dir ve 25db'dir. İkinci nokta (6db aşağıda) $f_1 / 2$ ve 19db. Üçüncü nokta (20db aşağıda) $f_1 / 10$ ve 5db. Yüksek kesim frekansı f_2 ve 25db kullanarak çizilir, $2 f_2$ ve 19db, $10 f_2$ ve 5db. Tüm çizim şekil .6.13'de gösterilmiştir.



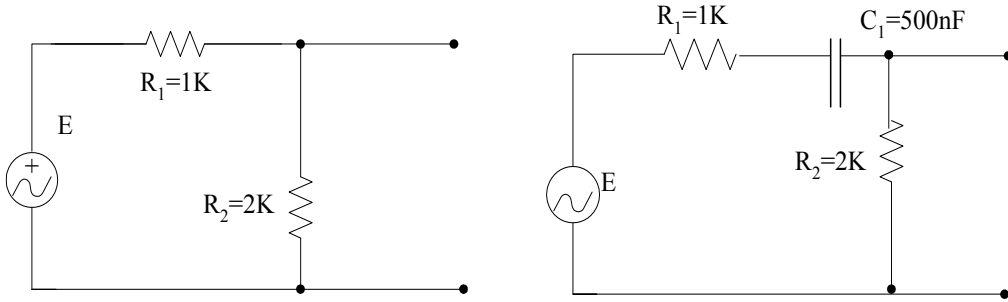
Şekil.6..13. Yükseltecin Bode Analizör Grafiği

Şekil.6.14.'deki devreyi ele alalım. Bu gibi devrelerde, orta frekans kazancını bulabiliriz. C_1 ve C_2 'nin etkisini göz ardı ederek ve R_2 'nin toplam direnç $R_1 + R_2$ üzerindeki etkisi ele alınarak bunu gerçekleştirebiliriz. $R_2 / (R_1 + R_2) = V_{OUT} / V_{IN}$



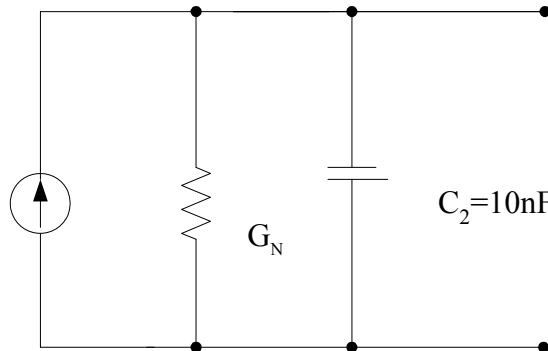
Şekil.6. 14. Eşdeğer Frekans Devresi

Orta frekans eşdeğer devresi şekil.6.15(a)'da gösterilmiştir. (Pratikte kablo kapasitansı gibi faktörler frekans cevabına etki edebilir.)



Şekil.6.15(a). Şekil.6.14'ün orta frekans eşdeğer devresi

Şekil.6.15(b). Şekil.6.14'ün alçak frekans eşdeğer devresi



Şekil.6.15. Şekil.6.14'ün yüksek frekans eşdeğer devresi

Orta frekans şu formülle bulunur : $A_v(\text{db}) = 20 \log R_2 / (R_1 + R_2)$

$$\text{Bu devre için : } A_v(\text{db}) = 20 \log 2K / (1K + 2K) = -3.52\text{db}$$

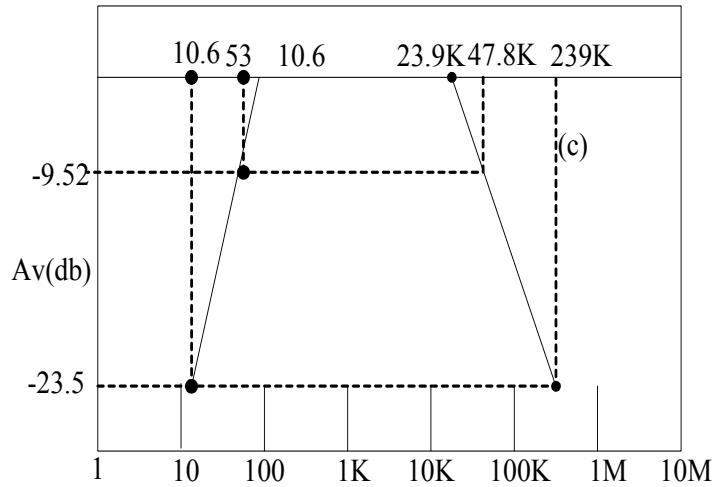
Eğer frekans artarsa , C_2 'nin reaktansı artar ve üzerinde bazı gerilim düşümleri meydana gelebilir. Bu çıkış voltajının artmasının nedenidir. Eğer frekans azalırsa, buda çıkış voltajının düşmesine neden olur. Düşük frekans eşdeğer devresi şekil.6.15(b)'de görüldüğü gibidir. Yüksek frekansta, C_1 'in reaktansı göz ardı edilebilecek bir değer alır, ama C_2 'nin suseptansı bir faktör haline gelmiştir. C_2 paralel bir eleman etkisi gösterdiği zaman, devreyi R_2 'de nortonize edersek, R_1 , C_2 ve R_2 'nin hepsinin paralel olarak şekil.6.15.(c)'deki gibi gösterildiği gibi bir eşdeğer devreye ulaşırız.

Örnek:Şekil.6.14'deki devre için f_1 ve f_2 'yi bul ve bode analizöründe göster.

Çözüm : $f_1 = 1 / 2 * \pi * C * (R_1 + R_2) = 1 / 2 * 3.14 * 500 * 10^{-9} * 3 * 10^3 = 106$

$$f_2 = (G_1 + G_2) / 2 * \pi * C_2 = 1.5 * 10^{-3} / 2 * 3.14 * 10 * 10^{-9} = 23.9\text{Khz}$$

Şekil.6.16'da bode analizör grafiği gösterilmektedir.



Şekil.6.16.Örnek 6.14'ün bode analizör grafiği

6.8.2. Frekans Cevap Eğrisi

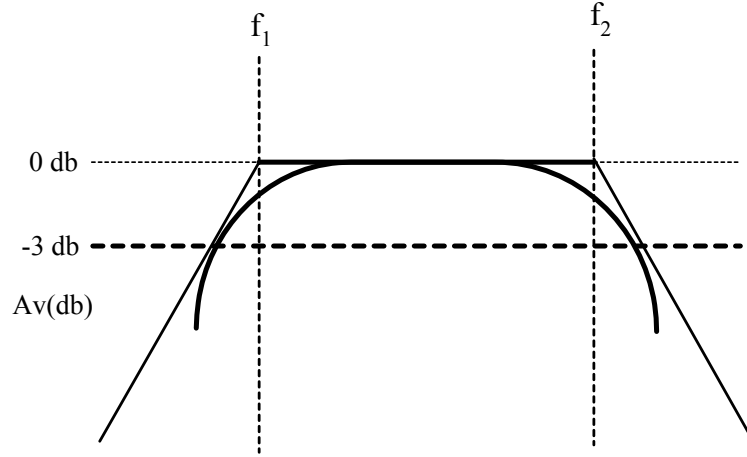
Bode analizör sonuçları özellikle kesim frekansı etrafında bazı hatalar içermektedir. Biliyoruz ki, f_{co} 'da kazanç 3db'nin altındadır. Hata f_{co} 'nın 1 dekat altında yada üstünde 0'dır. Kazancın düşürülmesi (maksimum kazançtan) her frekansta aşağıdaki formüller kullanılarak bulunabilir.

RC yüksek geçiren filtre için : $A_v = 20 \log 1 / \sqrt{1 + (f_1 / f)^2}$

f_1 düşük kesim frekansı f ise sorudaki frekanstır.

RC düşük geçiren filtre için : $A_v = 20 \log 1 / \sqrt{1 + (f / f_2)^2}$

f_2 yüksek kesim frekansı için f ise sorudaki frekanstır. Gerçek eğim ve bode analizör
şekil.6.17.'de birlikte çizilmiştir.



Şekil.6.17.Örnek 6.14'ün gerçek eğim ve bode analizör grafiği

Örnek :Şekil .6.14'e göre, 50Hz ve 100Khz'deki kazançları ve bu frekanstaki eğimi bode analizörde bulun.

Çözüm :Özel olarak orta frekanstaki kazanç (maksimum kazanç) 50Hz'de -3.52db ile sınırlandırılmaktadır.

$$A_v = 20 \log 1 / \sqrt{1 + (f_1 / f)^2} = 20 \log 1 / \sqrt{1 + (106\text{Hz} / 50\text{Hz})^2} = -7.4\text{db}$$

Bu bize -3.52db'den 7.4db aşağıda olduğumuzu anlatmaktadır.

Sonuçta kazanç;

$$A_v(\text{db}) = -3.52\text{db} + (-7.4\text{db}) = -10.9\text{db} \text{ bulunur.}$$

100Khz'de;

$$A_v = 20 \log 1 / \sqrt{1 + (f / f_2)^2} = 20 \log 1 / \sqrt{1 + (100\text{Khz} / 23.9\text{Khz})^2} = -12.7\text{db}$$

Sonuçta buradaki kazanç ise;

$$A_v(\text{db}) = -3.52 + (-12.7\text{db}) = -16.2\text{db} \text{ bulunur.}$$

Bode analizör şekil 6.16'da gösterilmiştir. Bode analizör 50Hz ve 100Khz'deki kazanç hesaplarımızın doğruluğunu göstermektedir.

6.9. RC Devreleri

Bu kısımda kapasitörlerin şarj ve deşarjlarını logaritmik eşitlikler kullanarak hesaplayacağız. Seri RC devrelerinde kapasitör şarjı için şu eşitlik kullanılmaktadır.

$$V_C = E (1 - e^{-t/R \cdot C})$$

V_C = Kapasitör şarj voltajı

t = Zaman (sn)

R = Direnç (Ω)

C = Kapasitans (F)

E = Uygulanan voltaj (V)

V_R için eşitlik : $V_R = E \cdot e^{-t/R \cdot C}$

Kapasitör Deşarj Voltajı İçin Eşitlik : $V_C = E \cdot e^{-t/R \cdot C}$

Örnek : Şekil.6.18’de anahtar kapandıktan sonraki V_R ve V_C nedir?

Çözüm : $V_C = E (1 - e^{-t/R \cdot C}) = 17.8V$

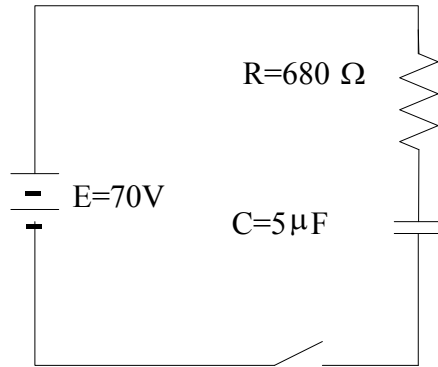
V_R Kirchhoff’un gerilimler kanununu kullanarak bulunabilir.

$$V_R = E - V_C = 70 - 17.8V \Rightarrow V_R = 52.2V$$

Örnek : Şekil.6.18’e göre $V_C = 40V$ ise t kaçtır?

Çözüm : $V_C = E (1 - e^{-t/R \cdot C}) \Rightarrow 40 = 70 (1 - e^{-t/R \cdot C})$

Buradan; $t = 2.88msn$



Örnek : Şekil.6.18’e göre $V_C = 30V$ ise t kaçtır?

Çözüm : $V_C = E (1 - e^{-t/R \cdot C}) \Rightarrow 30 = 70 (1 - e^{-t/R \cdot C})$

Buradan; $t = 3.17 msn$

ALİŞTIRMALAR

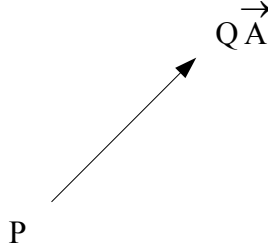
- 1) $\log_{\sqrt[3]{4}} \sqrt[5]{27} \cdot \log_{\sqrt{3}} \sqrt[4]{125} \cdot \log_5 \sqrt[13]{32}$ işleminin sonucu nedir?
- 2) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} 32 \cdot \log_{\sqrt[3]{2}} \sqrt[7]{243}$ işlemini sonucu nedir?
- 3) $\log_5 3 = p$ ise $\log_{625} 27$ nedir ?
- 4) $7^{\frac{1}{\log_5 7}}$ nedir ?
- 5) $e^{\ln 3 + \ln 5}$ nedir ?
- 6) $\frac{1}{\log_a abcd} + \frac{1}{\log_b abcd} + \frac{1}{\log_c abcd} + \frac{1}{\log_d abcd}$ işleminin sonucu nedir ?
- 7) $\log 2 = a$ ve $\log 3 = b$ ise $\log_{72} 12$ işleminin sonucu nedir ?
- 8) $\log_6 2 = a$ ise $\log_6 3$ nedir ?
- 9) $\log_5 \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x \dots}}} = 7$ ise x nedir ?
- 10) $\log_3 \sqrt[5]{x \sqrt[5]{x \sqrt[5]{x \dots}}} = 7$ ise x nedir ?
- 11) $\log x = \frac{5}{7}$ ise $\sqrt[3]{x^2 \sqrt{\frac{1}{x} \cdot \sqrt[5]{x^3}}}$ nedir ?
- 12) $\log x = 1,15$ ise $\sqrt[23]{x^{40}}$ nedir ?
- 13) $5 \log_4 x - \frac{2}{7} \log_4 3 = -10$ ise x nedir ?
- 14) $27^{\lg x} = 3^{-\sqrt{3}}$ ise x 'in en küçük derece ölçüsü nedir ?
- 15) $100 \cdot 10^x = \sqrt{(1000)^5}$ ise x nedir ?
- 16) $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810$ ise x nedir ?
- 17) $4^{x+1} + \frac{64}{4^x} = 257$ ise x nedir ?
- 18) $5^{3x-4} = 2^{2x+1} \cdot 3^{4x-5}$ ise x nedir ?
- 19) $-\log_2 3 \cdot 7 \log_5 6 \cdot \log_3 2 \cdot 3 \log_6 5$ işleminin sonucu nedir ?
- 20) $4 \log_7 e^{\ln 21 - \ln 3}$ işleminin sonucu nedir ?

7. BÖLÜM

7.VEKTÖRLER

7.1.Giriş: Fizikte kütle, uzunluk, sıcaklık, hacim gibi yalnızca sayısal değeri olan büyüklüklere **skaler büyüklükler** denir. Bunlara doğrultu ve yön belirleme gereği yoktur. Bunların dışında yer değiştirme, hız, kuvvet, ivme gibi büyüklüklerin hem sayısal değerleri hemde yönleri vardır. Bunlarada **vektörel büyüklükler** kısaca **vektör** denir.

Bir vektör, başlangıç noktası denilen bir P noktasından, bitim noktası denilen Q noktasına yönlendirilmiş bir $\vec{PQ}$ doğru parçasıdır. Bir vektörün elemanları;



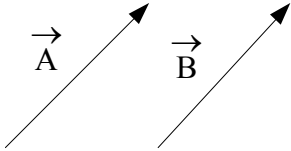
a) Başlangıç noktası b) Doğrultusu c) Yönü d) Büyüklüğü

Yukarıdaki dört eleman bilindiği zaman, bir vektör tamamen belirtilmiş olur.

Vektörü $\vec{A}$ veya $\vec{PQ}$ ile gösteririz. Vektörün uzunluğu ise $|\vec{PQ}|$ veya $|\vec{A}|$ ile gösterilir.

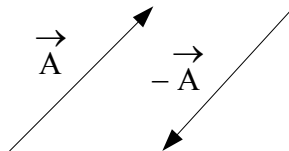
7.2.Vektör Cebri : Sayıların cebirinde bildiğimiz toplama, çıkartma ve çarpma işlemleri uygun tanımlarla vektörlerin cebrine genişletilebilirler.

7.2.1. İki Vektörün Eşitliği: Büyüklüğü ve yönü aynı olan $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerine, başlangıç

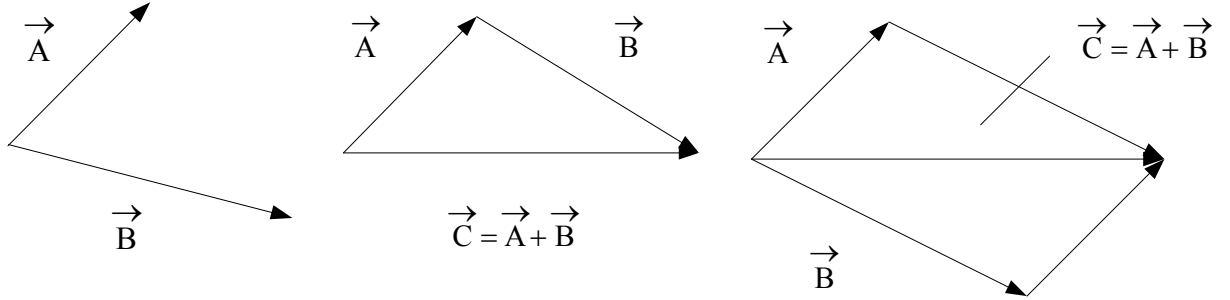


noktalarına bakılmaksızın eşittirler denir. $A = B$

7.2.2.Bir Vektörün Negatifi: Yönü, $\vec{A}$ 'nın yönünün karşıtı fakat $\vec{A}$ ile aynı büyüklükte olan bir vektör $-\vec{A}$ ile gösterilir.



7.2.3. İki Vektörün Toplamı (Paralelkenar Kuralı):

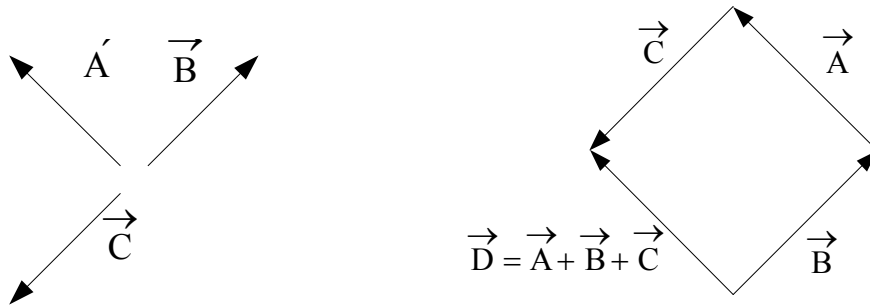


$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin toplamı veya bileşkesi, $\vec{B}$ nün başlangıç noktası $\vec{A}$ nın bitim noktasına birleştirilerek oluşturulan $\vec{C}$ dır. C toplamı $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ şeklinde yazılır.

En son şekil vektörlerin toplanmasına ait **paralelkenar** yasasıdır.

7.2.4. İki'den Fazla Vektörün Toplamı: (Çokgen yöntemi) :

Bu yöntemde bileşke herhangi bir uygun noktadan başlayarak bir ölçeğe göre bütün vektörleri bir öncekinin ucuna eklemek sureti ile bulunur. Yani her vektörün başlangıcı bir önceki vektörün oklu ucu olur. Bu şekilde oluşan çokgeni tamamlamak üzere çizilen doğru, vektörlerin bileşkesi olur.



7.2.5. İki Vektörün Farkı:: $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ nin $\vec{A} - \vec{B}$ şeklinde gösterilen farkı öylebir $\vec{C}$ dirki $\vec{B}$ ile toplandığı zaman $\vec{A}$ yı verir. Buna eşdeğer olarak $\vec{A} - \vec{B}$, $\vec{A} + (-\vec{B})$ şeklinde tanımlanabilir. Eğer $\vec{A} = \vec{B}$ ise $\vec{A} - \vec{B}$ sıfır vektör olarak tanımlanır ve $\vec{0}$ ile gösterilir. $\vec{0}$ vektörünün büyüklüğü sıfırdır fakat yönü tanımlanmış değildir.

7.2.6. Bir Vektörün Bir Skalerle Çarpımı: Bir $\vec{A}$ vektörünün k skaleri ile çarpılması, büyüklüğü $\vec{A}$ nın büyüklüğünün k katı olan ve yönü k 'nın pozitif veya negatif olmasına göre, $\vec{A}$ nın k ile aynı veya karşıtı olan bir $k\vec{A}$ dır. Eğer $k = 0$ ise $k\vec{A} = \vec{0}$ dır.

7.2.7. Vektör Cebrinin Özellikleri:

$\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ üç vektör ve k, r skaler olmak üzere;

1) $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$ Toplama için değişme özelliği

2) $\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$ Toplama için birleşme özelliği

3) $k + (r \vec{A}) = (kr) \vec{A} = r(k \vec{A})$ Çarpma için birleşme özelliği

4) $(k + r) \vec{A} = k \vec{A} + r \vec{A}$ Çarpma için dağılma özelliği

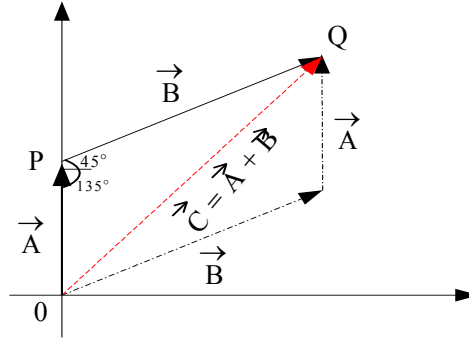
5) $k(\vec{A} + \vec{B}) = k \vec{A} + k \vec{B}$ Çarpma için dağılma özelliği

Örnek : Bir araba tam kuzeye doğru 3km yaptıktan sonra kuzeydoğuya doğru 5km yol alıyor.

Bu yer değiştirmelerini grafikte gösteriniz ve bileşke yer değiştirmeyi

a) Grafikte, b) hesapla belirtiniz.

Çözüm:



Uzunluk yaklaşık 7.4 km. Doğrultusu 61.5 kuzey-doğu dur.

b) Hesapla bulunması;

OPQ üçgeninden kosinüs kuralına göre

$$\begin{aligned} C^2 &= A^2 + B^2 - 2AB \cos \widehat{OPQ} \\ &= 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 135^\circ = 34 + 15\sqrt{2} = 55,21 \Rightarrow C \cong 7,43 \quad (\text{yaklaşık}) \end{aligned}$$

Sinüs kuralından;

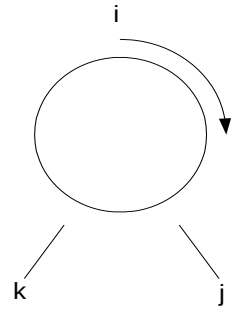
$$\begin{aligned} \frac{A}{\sin OQP} &= \frac{B}{\sin OPQ} \\ \sin OQP &= \frac{A \sin OPQ}{C} = \frac{3(0,707)}{7,43} = 0,2855 \Rightarrow OQP = 16^\circ 35' \end{aligned}$$

$\vec{OQ}$ vektörünün büyüklüğü 7,43km ve doğrultusu kuzey-doğu $(45^\circ + 16^\circ 35') = 61^\circ 35'$ dir.

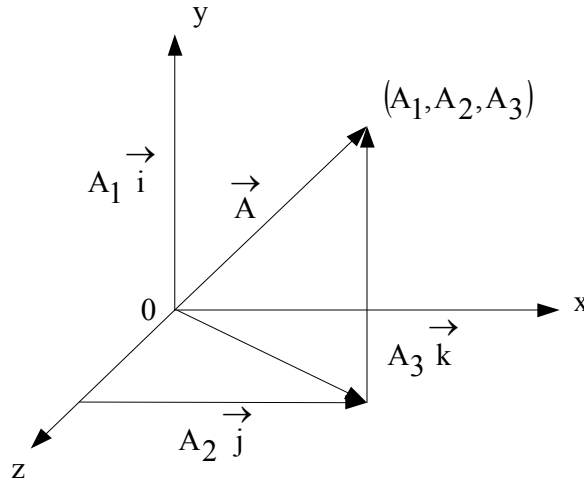
7.3. Birim vektör : $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{u}$ eşitliğini sağlayan $\vec{u}$ vektörüne, $\vec{a}$ vektörü ile aynı doğrultu ve yöne sahip olan vektöre birim vektör denir. Buradan; $\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, $\vec{a}$ vektörünün doğrultu ve yönündeki birim vektör, $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ yı 1 ile çarpmak sureti ile bulunur. Kısaca uzunluğu 1 olan vektöre birim vektör denir.

7.4. Dik Birim Vektör : Bir dik koordinat sisteminin pozitif x, y ve z eksenleri ile aynı yönde bulunan $\vec{i}$, $\vec{j}$ ve $\vec{k}$ birim vektörleri dik birim vektörleridir. Aksi söylenmedikçe sağ dik koordinat sistemleri kullanılır.

Başlangıç noktaları çakışık olan ve aynı düzlemde bulunmayan $\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ vektörleri verildiğine göre, eğer sağ dişli bir vida A dan B ye 180° küçük bir açı kadar döndürüldüğünde C yönünde ilerlerse $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ bir sağ sistem oluşturmaktadır denir.



7.5. Bir Vektörün Bileşenleri : Üç boyutlu uzayda herhangi bir $\vec{A}$, başlangıç noktası bir dik koordinat sisteminin O başlangıç noktasında bulunmak üzere gösterilebilirler.



Başlangıç noktası O olan bir A limit noktasının dik koordinatları (A_1, A_2, A_3) olsun. $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3, \vec{A}$ nın sırasıyla x, y ve z yönündeki dik vektör bileşenleri, veya sadece bileşen vektörleri denir. $\vec{A}_1 \vec{i}, \vec{A}_2 \vec{j}, \vec{A}_3 \vec{k}$, , ' nın toplam veya bileşkesi $\vec{A}$ dır.

$A = A_1 \vec{i} + A_2 \vec{j} + A_3 \vec{k}$ dir. $\vec{A}$ nın (büyüklüğü) uzunluğu;

$|\vec{A}| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$ iken özel olarak, O'yu (x, y, z) noktasına birleştiren $\vec{r}$ yer

vektörü; $\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ ve uzunluğu $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 'dır.

Başlangıç noktası P (x_1, y_1, z_1) ve bitim noktası Q (x_2, y_2, z_2) olan vektör; P' nin yer

vektörü $\vec{r}_1 = x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j} + z_1 \cdot \vec{k}$ ve Q' nun yer vektörü : $\vec{r}_2 = x_2 \cdot \vec{i} + y_2 \cdot \vec{j} + z_2 \cdot \vec{k}$

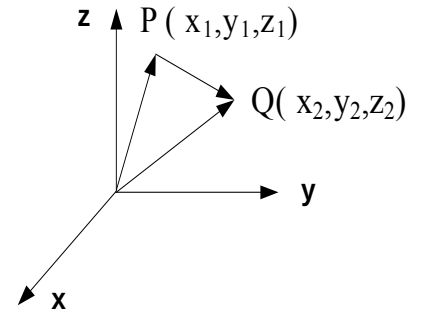
olsun.Buna göre;

$$|\vec{PQ}| = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$= \left(x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k} \right) - \left(x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k} \right)$$

$$= (x_2 - x_1) \cdot \vec{i} + (y_2 - y_1) \cdot \vec{j} + (z_2 - z_1) \cdot \vec{k}$$

$$|\vec{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



7.6.Skaler Çarpım : $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta \dots \dots \dots (0 \leq \theta \leq \pi)$

1) $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$

2) $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$

3) $k(\vec{A} + \vec{B}) = (k \cdot \vec{A}) \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot (k \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \vec{B}) \cdot k$

4) $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$
 $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$

5) $\vec{A} = A_1 \vec{i} + A_2 \vec{j} + A_3 \vec{k}, \vec{B} = B_1 \vec{i} + B_2 \vec{j} + B_3 \vec{k}$
 $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3$

$\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$
 $\vec{B} \cdot \vec{B} = B^2 = B_1^2 + B_2^2 + B_3^2$

6) $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ İki vektörün skaler çarpımı 0 ise, ya bu iki vektör birbirine diktir yada bu vektörlerden biri sıfır vektörüdür

Örnekler :

$$1) \vec{i} \cdot \vec{i} = |\vec{i}| \cdot |\vec{i}| \cos 0^\circ = 1.1.1 = 1$$

$$2) \vec{i} \cdot \vec{j} = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cos 90^\circ = 1.1.0 = 0$$

$$3) \vec{j} \cdot \left(2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} \right) = 2 \cdot \vec{j} \cdot \vec{i} - 3 \cdot \vec{j} \cdot \vec{j} + \vec{j} \cdot \vec{k} = 0 - 3 + 0 = -3$$

$$4) \left(2\vec{i} - \vec{j} \right) \cdot \left(3\vec{i} + \vec{k} \right) = 2\vec{i} \cdot \left(3\vec{i} + \vec{k} \right) - \vec{j} \cdot \left(3\vec{i} + \vec{k} \right)$$

$$= 6\vec{i} \cdot \vec{i} + 2\vec{i} \cdot \vec{k} - 3\vec{j} \cdot \vec{i} - \vec{j} \cdot \vec{k} = 6 + 0 - 0 - 0 = 6$$

7.7.Vektörel Çarpım :

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \text{ dir. } \vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin \theta \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ yönü, A, B ve C bir sağ sistem oluşturacak tarzda A ve B nin düzlemine diktir.

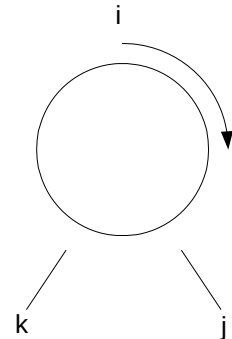
Eğer $\vec{A} = \vec{B}$ ise veya $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ paralel iseler $\sin \theta = 0$ ve $\vec{A} \times \vec{B} = 0$ dir.

$$1) \vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

$$2) \vec{A} \times \left(\vec{B} + \vec{C} \right) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$$

$$3) k \left(\vec{A} \times \vec{B} \right) = \left(k \vec{A} \right) \times \vec{B} = \vec{A} \times \left(k \vec{B} \right) = \left(\vec{A} \times \vec{B} \right) k$$

$$4) \begin{aligned} \vec{i} \times \vec{i} &= \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0 \\ \vec{i} \times \vec{j} &= \vec{k}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \end{aligned}$$



5) Eğer $\vec{A} = A_1 \vec{i} + A_2 \vec{j} + A_3 \vec{k}$ ve $\vec{B} = B_1 \vec{i} + B_2 \vec{j} + B_3 \vec{k}$ ise

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

$|\vec{A} \times \vec{B}| =$ Kenarları $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ olan paralel kenarların alanıdır.

6) Eğer $\vec{A} \times \vec{B} = 0$ ise $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ sıfır vektör değil iseler $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ paralel kenardırlar.

Örnek : $\vec{A} = A_1 \vec{i} + A_2 \vec{j} + A_3 \vec{k}$, $\vec{B} = B_1 \vec{i} + B_2 \vec{j} + B_3 \vec{k}$ ise

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \text{ olduğunu gösteriniz.}$$

$$\begin{aligned} \text{Çözüm: } \vec{A} \times \vec{B} &= \left(A_1 \vec{i} + A_2 \vec{j} + A_3 \vec{k} \right) \times \left(B_1 \vec{i} + B_2 \vec{j} + B_3 \vec{k} \right) \\ &= A_1 \vec{i} \times \left(B_1 \vec{i} + B_2 \vec{j} + B_3 \vec{k} \right) + A_2 \vec{j} \times \left(B_1 \vec{i} + B_2 \vec{j} + B_3 \vec{k} \right) + A_3 \vec{k} \times \left(B_1 \vec{i} + B_2 \vec{j} + B_3 \vec{k} \right) \\ &= A_1 \underbrace{B_1 \vec{i} \times \vec{i}}_0 + A_1 \underbrace{B_2 \vec{i} \times \vec{j}}_{\vec{k}} + A_1 \underbrace{B_3 \vec{i} \times \vec{k}}_{-\vec{j}} + A_2 \underbrace{B_1 \vec{j} \times \vec{i}}_{-\vec{k}} + A_2 \underbrace{B_2 \vec{j} \times \vec{j}}_0 + A_2 \underbrace{B_3 \vec{j} \times \vec{k}}_{\vec{i}} \\ &\quad + A_3 \underbrace{B_1 \vec{k} \times \vec{i}}_{\vec{j}} + A_3 \underbrace{B_2 \vec{k} \times \vec{j}}_{-\vec{i}} + A_3 \underbrace{B_3 \vec{k} \times \vec{k}}_0 \end{aligned}$$

$$= (A_2 B_3 - A_3 B_2) \vec{i} + (A_3 B_1 - A_1 B_3) \vec{j} + (A_1 B_2 - A_2 B_1) \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

Örnek : $\vec{A} = 3 \vec{i} - \vec{j} + 2 \vec{k}$ ve $\vec{B} = 2 \vec{i} + 3 \vec{j} - \vec{k}$ ise $\vec{A} \times \vec{B}$ yi bulunuz.

$$\text{Çözüm: } = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \vec{j} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -5 \vec{i} - 7 \vec{j} + 8 \vec{k}$$

Örnek : Köşeleri P (2, 3, 5), Q (4, 2, -1), R (3, 6, 4) olan üçgenin alanını bulun.

Çözüm:

$$\vec{PQ} = (4-2)\vec{i} + (2-3)\vec{j} + (-1-5)\vec{k} = 2\vec{i} - \vec{j} - 6\vec{k}$$

$$\vec{PR} = (3-2)\vec{i} + (6-3)\vec{j} + (4-5)\vec{k} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$$

$$\text{Üçgenin alanı} = \frac{1}{2} \left| \vec{PQ} \times \vec{PR} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 2\vec{i} - \vec{j} - 6\vec{k} \\ \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} \end{pmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -6 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |19\vec{i} + 4\vec{j} + 7\vec{k}| = \frac{1}{2} \sqrt{19^2 + 4^2 + 7^2} = \frac{1}{2} \sqrt{425} \text{br}^2$$

7.8.Üçlü Çarpım : $\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ vektörünün nokta veya çapraz çarpımı

$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$; $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$, $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ şeklinde anlamlı çarpımlar meydana getirirler.

1) $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} \neq \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$

2) $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$ kenarları $\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ olan paralelyüzün hacmi

$\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ nin bir sağ sistem teşkil edip etmemelerine göre bu hacim pozitif veya negatif işaretlidir.

Eğer $\vec{A} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$, $\vec{B} = B_1\vec{i} + B_2\vec{j} + B_3\vec{k}$ ve $\vec{C} = C_1\vec{i} + C_2\vec{j} + C_3\vec{k}$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \text{ dir.}$$

3) $\vec{C} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \neq (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$

$$4) \quad \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{C}) \cdot \vec{C} - (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$$

$$(\vec{B} \times \vec{C}) \times \vec{C} = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \cdot \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{C}$$

NOT : $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ çarpımına bazen üçlü skaler çarpım veya kutu çarpım denir ve

$\begin{bmatrix} \vec{A} & \vec{B} & \vec{C} \end{bmatrix}$ şeklinde gösterilir. $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ çarpımına üçlü vektör çarpımı denir.

7.9.Vektör Analizinde Aksiyomatik Yaklaşım

$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ vektörünün bir koordinat sistemine göre (x, y, z) bileşenleri bilindiği zaman vektör belirtilmiş olur. Bir üç boyutlu vektör (A_1, A_2, A_3) reel sayılardan oluşan bir sıralı üçlüdür.

$\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$, $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$ ve $\vec{C} = (C_1, C_2, C_3)$ olarak verilsin. Buna göre;

1) $\vec{A}_1 = \vec{B}_1, \vec{A}_1 = \vec{B}_1, \vec{A}_1 = \vec{B}_1$ ise $\vec{A} = \vec{B}$ dir.

2) $\vec{A} + \vec{B} = (A_1 + B_1, A_2 + B_2, A_3 + B_3)$

3) $\vec{A} - \vec{B} = (A_1 - B_1, A_2 - B_2, A_3 - B_3)$

4) $\vec{0} = (0, 0, 0)$

5) $k \vec{A} = k(A_1, A_2, A_3) = (kA_1, kA_2, kA_3)$

6) $\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3)$

7) $\vec{A}$ nın büyüklüğü veya uzunluğu; $|\vec{A}| = \vec{A} \cdot \vec{A} = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$

Bu tanımlardan;

i) $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$ ii) $\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$ iii) $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$

gibi özellikler elde edilir.

7.9.1.Birim Vektörler : $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$ olarak tanımlansın.

$\vec{A} = A_1 \vec{i} + A_2 \vec{j} + A_3 \vec{k}$, $\vec{B} = B_1 \vec{i} + B_2 \vec{j} + B_3 \vec{k}$ olsun.Buna göre;

$\vec{A} \times \vec{B} = (A_2 B_3 - A_3 B_2 , A_3 B_1 - A_1 B_3 , A_1 B_2 - A_2 B_1)$ bulunur.

Sonuçları geometrik veya fiziksel olarak yorumlayabiliriz.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta \Rightarrow \left| \vec{A} \times \vec{B} \right| = A.B \sin \theta$$

vektörlerin daha yüksek boyutlara genişletilmesi kolaydır. Örneğin, bir dört boyutlu vektör (A_1, A_2, A_3, A_4) sayılarından oluşan bir sıralı dördlüdür.

Örnekler : $A(1,0,2)$, $B(3,1,4)$, $C(0,-1,1)$, $D(0,0,-2)$, noktaları verilmektedir

- a) $\left(\vec{AC} + \vec{BC} \right) + \vec{AD} = \vec{AC} \left(\vec{BC} + \vec{AD} \right)$
- b) $\vec{AB} + \vec{BA} = 0$
- c) $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{AD}$ olduğunu gösteriniz.
- d) $3 \left(\vec{AB} + 2 \vec{DC} \right)$, $\left(\vec{AB} + \vec{BC} \right)$ hesaplayınız.

Çözüm :a) Vektörlerin toplama kuralına göre ; $\vec{A} + \vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA}$ ise $A(1,0,2)$, $C(0,-1,1)$ yer vektörleri

$$\left. \begin{array}{l} \vec{OA} = \vec{A} = \vec{i} + 2\vec{k} \\ \vec{OC} = \vec{C} = -\vec{i} + \vec{k} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \vec{AC} = \vec{C} - \vec{A} = -\vec{j} + \vec{k} - \vec{i} - 2\vec{k} = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} \\ \vec{BC} = \vec{C} - \vec{B} = -\vec{i} + \vec{k} - 3\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k} = -4\vec{i} - 4\vec{j} - 3\vec{k} \end{array}$$

Benzer yoldan :

$$\vec{BC} = -3\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k} , \quad \vec{AD} = -\vec{i} - 4\vec{k}$$

$$\left(\vec{AC} + \vec{BC} \right) + \vec{AD} = \left(-\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} \right) + \left(-3\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k} \right) - \vec{i} - 4\vec{k} = -5\vec{i} - 3\vec{j} - 8\vec{k}$$

$$\vec{AC} + \left(\vec{BC} + \vec{AD} \right) = -5\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k} + \left(-3\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k} \right) + \left(-\vec{i} - 4\vec{k} \right) = -5\vec{i} - 3\vec{j} - 8\vec{k}$$

$$\text{b) } \vec{AB} + \vec{BA} = (\vec{OB} - \vec{OA}) + (\vec{OA} - \vec{OB}) = 0$$

$$\text{c) } \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = (\vec{OB} - \vec{OA}) + (\vec{OC} - \vec{OB}) + (\vec{OD} - \vec{OC}) = \vec{OD} - \vec{OA} = \vec{AD}$$

$$\text{d) } 3 \left(\vec{AB} + \vec{DC} + 2\vec{DC} \right) = 3 \left(2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} \right) 2 + \left(\vec{j} - 3\vec{k} \right) = 3 \left(2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} \right) = -2\vec{i} - 3\vec{j} - 12\vec{k}$$

$$2 \left(\vec{AB} + \vec{BC} \right) = 2 \left(2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} \right) + \left(-3\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k} \right) = 2 \left(-\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} \right) = -2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$2) \vec{A} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k} \quad \vec{B} = 2\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k} \quad \vec{C} = -5\vec{j} \quad \text{ise;}$$

$$\text{a) } |\vec{A}|, |\vec{B}|, |\vec{C}| \quad \text{b) } \left| \vec{A} + \vec{B} \right|, |\vec{A}| + |\vec{B}| \quad \text{c) } \left| \vec{A} - \vec{B} \right|, |\vec{A}| - |\vec{B}| \quad \text{hesaplayınız.}$$

Çözüm :

$$\text{a) } |\vec{A}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14} \cong 3,7416$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{4+1+16} = \sqrt{21} \cong 4,5825 \quad \text{ve} \quad |\vec{C}| = \sqrt{(-5)^2} = 5 \quad \text{bulunur.}$$

$$\text{b) } \vec{A} + \vec{B} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$$

$$\left| \vec{A} + \vec{B} \right| = \sqrt{9+9+1} \sqrt{19} \cong 4,3588 \rightarrow |\vec{A}| + |\vec{B}| = \sqrt{14} + \sqrt{21} = 3,7416 + 4,5825 = 8,3241$$

$$|\vec{A}| - |\vec{B}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-7)^2} = \sqrt{51} \cong 7,1414$$

$$\text{c) } \left| \vec{A} - \vec{B} \right| = \left(\vec{i} + -2\vec{j} + 2\vec{j} - \vec{j} - 3\vec{k} - 4\vec{k} = -\vec{i} + \vec{j} - 7\vec{k} \right)$$

$$|\vec{A}| - |\vec{B}| = \sqrt{14} - \sqrt{21} = 3,7416 - 4,5825 = -1,1591$$

3) $\vec{A} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$ $\vec{B} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ olsun. Buna göre;

a) $\vec{a}$ b) $\vec{A} + \vec{B}$ c) $\vec{A} - \vec{B}$ vektörlerinin doğrultusundaki birim vektörleri bulunuz

Çözüm : a) Verilen bir vektör doğrultusundaki birim vector;

$$\vec{a} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{2\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 5^2}} = \frac{2\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}}{\sqrt{4 + 16 + 25}} = \frac{2\vec{i}}{\sqrt{45}} + \frac{4\vec{j}}{\sqrt{45}} - \frac{5\vec{k}}{\sqrt{45}}$$

b) $\vec{A} + \vec{B} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k} + \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} = 3\vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k}$

$$\vec{n} = \frac{\vec{A} + \vec{B}}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{3\vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k}}{\sqrt{9 + 36 + 4}} = \frac{3}{7}\vec{i} + \frac{6}{7}\vec{j} - \frac{2}{7}\vec{k}$$

c) $\vec{A} - \vec{B} = \vec{i} + 2\vec{j} - 8\vec{k} \rightarrow \vec{n} = \frac{\vec{i} + 2\vec{j} - 8\vec{k}}{\sqrt{1 + 4 + 64}} = \frac{1}{\sqrt{69}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{69}}\vec{j} - \frac{8}{\sqrt{69}}\vec{k}$

4) $\vec{A} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{B} = \vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{C} = \vec{i} - \vec{k}$

a) $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$ b) $\vec{A} \cdot \left(\vec{B} + \vec{C} \right) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$

Çözüm :a) $\vec{A} \cdot \vec{B} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 2.1 + (-1)(-4) + 1.2 = 8$

$$\vec{B} \cdot \vec{A} = b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3 = 1.2 + (-4)(-1) + 2.1 = 8$$

$$\vec{B} + \vec{C} = \vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k} + \vec{i} - \vec{k} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{A} \cdot \left(\vec{B} + \vec{C} \right) = 2.(2) + (-1)(-4) + 1.1 = 9$$

b) $\vec{A} + \vec{B} = 2.1 + (-1)(-4) + 1.2 = 2 + 4 + 2 = 8$

$$\vec{A} \cdot \vec{C} = 2.1 + (-1)(0) + 1(-1) = 2 - 1 = 1$$

$$\vec{A} \cdot \left(\vec{B} + \vec{C} \right) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C} = 8 + 1 = 9$$

- 5) $\vec{A} = \vec{i} + 2\vec{k}$, $\vec{B} = -\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$ vektörleri arasındaki açının kosinüsünü bulun.

Çözüm : $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos\theta \Rightarrow 5 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{26} \cos\theta$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 5 \Rightarrow 5 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{26} \cos\theta$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \rightarrow |\vec{B}| = \sqrt{1+16+9} = \sqrt{26}$$

- 6) $\vec{A} = \vec{i} + m\vec{j} + 4\vec{k}$ ve $\vec{B} = 2\vec{i} + \vec{j} + m\vec{k}$ vektörleri verilmektedir. Bu iki vektörün birbirlerine dik olabilmesi için 'm' ne olmalıdır?

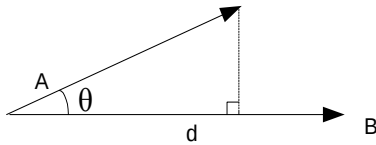
Çözüm : Aradaki açının kosinüsü sıfır olduğunda A ve B vektörleri birbirine dik olur.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos\theta \Rightarrow \theta = 0$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = (-1)2 + m \cdot 1 + 4 \cdot m = 0 \Rightarrow 5m = 2 \Rightarrow m = \frac{2}{5} = 0,4 \text{ olur.}$$

- 7) $\vec{A} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ vektörünün, $\vec{B} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ vektörü üzerindeki iz düşümünü bulunuz.

Çözüm : A vektörünün B vektörü üzerindeki iz düşümü şekildeki gibidir.



$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos\theta$$

$$d = |\vec{A}| \cos\theta, \cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|} \text{ ve } d = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|}$$

- 8) $\vec{A} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$ vektörünün, $\vec{B} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ vektörü üzerindeki iz düşümünü bulunuz.

Çözüm : $d = \frac{2 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 + 6 \cdot 2}{\sqrt{1+4+43}} = \frac{2-6+12}{3} = \frac{8}{3}$

9) $\vec{A} = \begin{pmatrix} \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k} \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{C} = -\vec{i} + \vec{j}$ olduğuna göre;

a) $\vec{A} \times \vec{B}$, $\vec{A} \times \vec{C}$ b) $\left(\vec{A} - \vec{C} \right) \times 2\vec{B}$ ifadelerini bulunuz.

Çözüm :a) $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(6) + \vec{j}(3) + \vec{k}(2-2)$

$$\vec{A} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(3) - \vec{j}(-3) + \vec{k}(1+2) = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$$

b) $\left(\vec{C} - \vec{A} \right) \times 2\vec{B}$
 $\vec{C} - \vec{A} = -\vec{i} + \vec{j} - \begin{pmatrix} \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k} \end{pmatrix} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k} = -2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$

$$\left(\vec{C} - \vec{A} \right) \times 2\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(-12) - \vec{j}(+6) - \vec{k}(10) = -12\vec{i} - 6\vec{j} - 10\vec{k}$$

10) A (1,0,0) , B (0,1,0) ve C (0,0,1) noktalarının meydana getirdikleri düzleme,

A noktasından dik olan birim vektörü ifade ediniz.

Çözüm : $\vec{AC} = -\vec{i} + \vec{k}$ $\vec{AB} = -\vec{i} + \vec{j}$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(1) - \vec{j}(-1) + \vec{k}(1) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

$$n = \frac{\vec{AB} \times \vec{AC}}{|\vec{AB} \times \vec{AC}|} = \frac{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{3}} \Rightarrow |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

11) A (-1,2,3) , B (1,1,1) ve C (2,-1,3) noktalarının meydana getirdiği düzleme A noktasında dik olan birim vektörü ifade ediniz.

Çözüm :

$$\vec{AC} = (3, -3, 0) \quad \text{ise} \quad \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{n} = \frac{6\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k}}{\sqrt{36+36+9}} = \frac{3(2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k})}{9} = \frac{2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}}{3}$$

12) A (1,0,1) , B (0,1,1) , C (1,1,0) noktalarının meydana getirdikleri üçgenin alanı nedir.

Çözüm : $\vec{AB} = B - A = (-1, 1, 0)$ ise $\vec{AC} = C - A = (0, 1, -1)$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}(-1) - \vec{j}(1) + \vec{k}(-1) = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$$

$$S(ABC) = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{3} br^2$$

13) $\vec{A} = \vec{i}$, $\vec{B} = -\vec{j}$, $\vec{C} = 3\vec{k}$ vektörlerinin meydana getirdikleri paralel yüzünün hacmini bulunuz.

Çözüm : $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \text{paralel yüzünün hacmi}$

$$\vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3\vec{i} \quad \text{ise} \quad \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (1, 0, 0) \cdot (-3, 0, 0) = -3 \Rightarrow V = 3br^3$$

14) A (-1,2,3), B (0,-4,7) ve C(-5,1,0) veriliyor.Buna göre;

- a) $\vec{A}$ vektörünün $\vec{B}$ vektörü üzerine izdüşüm vektörünü bulunuz.
- b) $\vec{A}$ vektörünün $\vec{C}$ vektörü üzerine izdüşüm vektörünü bulunuz.
- c) $\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ vektörlerinin meydana getirdikleri paralel yüzünün hacmini bulunuz.
- d) $\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ vektörlerinin meydana getirdikleri üçgenin alanını bulun.
- e) $\vec{A}$, $\vec{B}$ vektörleri arasındaki açının kosinüsünü hesaplayınız.
- f) $\vec{A}$, $\vec{B}$ vektörlerinin meydana getirdiği paralel kenarın alanını hesaplayınız.
- g) $\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ vektörlerinin doğrultularındaki birim vektörleri bulunuz.
- h) $\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ vektörlerinin meydana getirdiği düzleme A noktasında dik olan birim vektörü bulunuz.

Çözüm:

a) $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos\theta$

$$d = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|} \Rightarrow d = \frac{(-1) \cdot 0 + 2 \cdot (-4) + 3 \cdot 7}{\sqrt{(-4)^2 + 7^2}} = \frac{-8 + 21}{\sqrt{16 + 49}} = \frac{13}{\sqrt{65}}$$

b) $d = \frac{(-1) \cdot (-5) + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0}{\sqrt{(-5)^2 + 1^2}} = \frac{5 + 2}{\sqrt{26}} = \frac{7}{\sqrt{26}}$

c) $\vec{A} \cdot \left(\vec{B} \times \vec{C} \right) = \text{Paralel Yüzünün Hacmi}$

$$\vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -4 & 7 \\ -5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -7 \vec{i} - 35 \vec{j} - 20 \vec{k}$$

$$\vec{A} \cdot \left(\vec{B} \times \vec{C} \right) = (-1, 2, 3) \cdot (-7, -35, -20) = -123 \Rightarrow V = 123 \text{ br}^3$$

d)

$$\vec{AB} = B - A = (0 - (-1))\vec{i} + (-4 - 2)\vec{j} + (7 - 3)\vec{k} = \vec{i} - 6\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\vec{AC} = C - A = (-5 - (-1))\vec{i} + (1 - 2)\vec{j} + (0 - 3)\vec{k} = -4\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$$

$$\text{Üçgenin alanı} = \frac{1}{2} \left| \vec{AB} \times \vec{AC} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} \vec{i} - 6\vec{j} + 4\vec{k} \\ -4\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k} \end{pmatrix} \right|$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -6 & 4 \\ -4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i}(18 + 4) - \vec{j}(-3 + 16) + \vec{k}(-1 - 24) = 22\vec{i} + 13\vec{j} - 25\vec{k}$$

$$\frac{1}{2} \left| \vec{AB} \times \vec{AC} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{22^2 + 13^2 + (-25)^2} \text{ br}^2$$

$$\text{e) } \cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\left| \vec{A} \right| \left| \vec{B} \right|} = \frac{(-1) \cdot 0 + 2 \cdot (-4) + 3 \cdot 7}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2} \sqrt{(-4)^2 + 7^2}} = \frac{13}{\sqrt{14} \sqrt{65}}$$

$$\text{f) } \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 7 \end{vmatrix} = 26\vec{i} + 7\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\left| \vec{A} \times \vec{B} \right| = \sqrt{26^2 + 7^2 + 4^2}$$

$$\text{g) } \vec{a} = \frac{\vec{A}}{\left| \vec{A} \right|} = \frac{-\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2}} = -\frac{\vec{i}}{\sqrt{14}} + \frac{2\vec{j}}{\sqrt{14}} + \frac{3\vec{k}}{\sqrt{14}}$$

$$\vec{b} = \frac{\vec{B}}{\left| \vec{B} \right|} = \frac{-4\vec{j} + 7\vec{k}}{\sqrt{(-4)^2 + 7^2}} = -\frac{4\vec{j}}{\sqrt{65}} + \frac{7\vec{k}}{\sqrt{65}}$$

$$\vec{c} = \frac{\vec{C}}{\left| \vec{C} \right|} = \frac{-5\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{(-5)^2 + 1^2}} = -\frac{5\vec{i}}{\sqrt{26}} + \frac{\vec{j}}{\sqrt{26}}$$

h)

$$\vec{AB} = B - A = \vec{i} - 6\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\vec{AC} = C - A = -4\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -6 & 4 \\ -4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 22\vec{i} + 13\vec{j} - 25\vec{k} \quad \text{ise } n = \frac{22\vec{i} + 13\vec{j} - 25\vec{k}}{\sqrt{22^2 + 13^2 + 25^2}} =$$

15) $\vec{A} = -2\vec{j} + 3\vec{k}$; $\vec{B} = \vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$; $\vec{C} = -5\vec{i} + 6\vec{k}$ veriliyor.

a) $\vec{A}$ vektörünün $\vec{B}$ vektörü üzerine izdüşüm vektörünü bulunuz.

Çözüm: $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos\theta$

$$d = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|} \Rightarrow d = \frac{(-1) \cdot 0 + 2 \cdot (-4) + 3 \cdot 7}{\sqrt{(-4)^2 + 7^2}} = \frac{-8 + 21}{\sqrt{16 + 49}} = \frac{13}{\sqrt{65}}$$

b) $\vec{A}$ vektörünün $\vec{C}$ vektörü üzerine iz düşüm vektörünü bulunuz.

$$\text{Çözüm: } d = \frac{(-1) \cdot (-5) + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0}{\sqrt{(-5)^2 + 1^2}} = \frac{5 + 2}{\sqrt{26}} = \frac{7}{\sqrt{26}}$$

c) $\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ vektörlerinin meydana getirdikleri paralel yüzünün hacmini bulunuz.

Çözüm: $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \text{Paralel Yüzünün Hacmi}$

$$\vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -4 & 7 \\ -5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -7\vec{i} - 35\vec{j} - 20\vec{k}$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (-1, 2, 3) \cdot (-7, -35, -20) = -123 \Rightarrow V = 123 \text{ br}^3$$

d) $\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ vektörlerinin meydana getirdikleri üçgenin alanını bulun.

Çözüm:

$$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = (0 - (-1))\vec{i} + (-4 - 2)\vec{j} + (7 - 3)\vec{k} = \vec{i} - 6\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\vec{AC} = \vec{C} - \vec{A} = (-5 - (-1))\vec{i} + (1 - 2)\vec{j} + (0 - 3)\vec{k} = -4\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$$

$$\text{Üçgenin alanı} = \frac{1}{2} \left| \vec{AB} \times \vec{AC} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} \vec{i} - 6\vec{j} + 4\vec{k} \\ -4\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k} \end{pmatrix} \right|$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -6 & 4 \\ -4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i}(18 + 4) - \vec{j}(-3 + 16) + \vec{k}(-1 - 24) = 22\vec{i} + 13\vec{j} - 25\vec{k}$$

$$\frac{1}{2} \left| \vec{AB} \times \vec{AC} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{22^2 + 13^2 + (-25)^2} \text{ br}^2$$

e) $\vec{A}$, $\vec{B}$ vektörleri arasındaki açının kosinüsünü hesaplayınız.

$$\text{Çözüm: } \cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\left| \vec{A} \right| \left| \vec{B} \right|} = \frac{(-1) \cdot 0 + 2 \cdot (-4) + 3 \cdot 7}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2} \sqrt{(-4)^2 + 7^2}} = \frac{13}{\sqrt{14} \sqrt{65}}$$

f) $\vec{A}$, $\vec{B}$ vektörlerinin meydana getirdiği paralelkenarın alanını hesaplayınız.

$$\text{Çözüm: } \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 7 \end{vmatrix} = 26\vec{i} + 7\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\left| \vec{A} \times \vec{B} \right| = \sqrt{26^2 + 7^2 + 4^2}$$

g) $\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ vektörlerinin doğrultularındaki birim vektörleri bulunuz.

$$\text{Çözüm: } \vec{a} = \frac{\vec{A}}{\left| \vec{A} \right|} = \frac{-\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2}} = -\frac{\vec{i}}{\sqrt{14}} + \frac{2\vec{j}}{\sqrt{14}} + \frac{3\vec{k}}{\sqrt{14}}$$

$$b = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{-4\vec{j} + 7\vec{k}}{\sqrt{(-4)^2 + 7^2}} = -\frac{4\vec{j}}{\sqrt{65}} + \frac{7\vec{k}}{\sqrt{65}} \quad \text{ve} \quad c = \frac{\vec{C}}{|\vec{C}|} = \frac{-5\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{(-5)^2 + 1^2}} = -\frac{5\vec{i}}{\sqrt{26}} + \frac{\vec{j}}{\sqrt{26}}$$

h) $\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ vektörlerinin meydana getirdiği düzleme A noktasında dik olan birim vektörü bulunuz.

Çözüm:

$$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \vec{i} - 6\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\vec{AC} = \vec{C} - \vec{A} = -4\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -6 & 4 \\ -4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 22\vec{i} + 13\vec{j} - 25\vec{k} \quad \text{ise } n = \frac{22\vec{i} + 13\vec{j} - 25\vec{k}}{\sqrt{22^2 + 13^2 + 25^2}} =$$

ALİŞTIRMALAR

1) A(-3, 6, 4) ve B(-1, 4, 2) vektörleri verildiğine göre;

$$a) \cos \theta = ? \quad b) d = ? \quad c) S = ? \quad d) a = ? \quad e) b = ?$$

2) Köşeleri A(-2, 3, 4), B(1, -5, -3) ve C(-2, 4, -3) olan üçgenin alanı nedir ?

3) Köşeleri A(2, -3, -4), B(-1, 3, 2) ve C(-3, 4, 5) olan dörtyüzlünün hacmi nedir ?

$$4) \left. \begin{array}{l} \vec{A} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} \\ \vec{B} = -3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k} \end{array} \right\} \cos \theta = ?, d = ?, S = ?$$

$$5) \left. \begin{array}{l} \vec{A} = -2\vec{i} + 3\vec{k} \\ \vec{B} = 4\vec{i} - 5\vec{j} \\ \vec{C} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k} \end{array} \right\} \text{vektörleri veriliyor.}$$

Buna göre kenarları A, B, C olan paralel yüzünün hacmi nedir ?

6)

$$\left. \begin{aligned} \vec{A} &= \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k} \\ \vec{B} &= 4\vec{i} - 3\vec{j} \\ \vec{C} &= -2\vec{j} + 5\vec{k} \end{aligned} \right\} \text{ vektörleri veriliyor.}$$

Buna göre kenarları A, B, C olan üçgenin alanı nedir ?

7) Köşeleri A(-2, 3, 1), B(1, 0, -3) ve C(0, 4, -1) olan üçgenin alanı nedir ?

8) Köşeleri A(1, -3, 0), B(-1, 4, -2) ve C(0, 2, -5) olan dörtyüzlünün hacmi nedir ?

9) A(3, 0, -4) ve B(-2, 4, -1) vektörleri verildiğine göre;

$$a)\cos\theta = ? \quad b)d=? \quad c)S=? \quad d)a=? \quad e)b=?$$

10)

$$\left. \begin{aligned} \vec{A} &= 2\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k} \\ \vec{B} &= -\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k} \\ \vec{C} &= 3\vec{i} - 4\vec{j} \end{aligned} \right\} \text{ vektörleri veriliyor. A ve B vektörleri arasındaki ;}$$

$$a)\cos\theta = ? \quad b)d=? \quad c)S=? \quad d)a=? \quad e)b=? \quad f) \text{ Kenarları A, B, C olan üçgenin alanı nedir ?}$$

$$g) \text{ Kenarları A, B, C olan paralel yüzünün hacmi nedir ?}$$

11)

$$\left. \begin{aligned} \vec{A} &= 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} \\ \vec{B} &= -3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k} \end{aligned} \right\} \cos\theta = ?, d = ?, S = ?$$

12)

$$\left. \begin{aligned} \vec{A} &= 3\vec{i} - 2\vec{j} \\ \vec{B} &= -2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k} \\ \vec{C} &= -2\vec{j} - 5\vec{k} \end{aligned} \right\} \text{ vektörleri veriliyor. Kenarları A, B, C olan üçgenin alanı nedir ?}$$

13)

$$\left. \begin{aligned} \vec{A} &= 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k} \\ \vec{B} &= 3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k} \\ \vec{C} &= -\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k} \end{aligned} \right\} \text{ vektörleri veriliyor.}$$

Buna göre, kenarları A, B, C olan paralel yüzünün hacmi nedir ?

$$14) \left. \begin{aligned} \vec{A} &= 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k} \\ \vec{B} &= -\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} \end{aligned} \right\} \cos\theta = ?, d = ?, S = ?$$

15)

$$\left. \begin{aligned} \vec{A} &= -3\vec{i} + 2\vec{j} \\ \vec{B} &= -2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k} \\ \vec{C} &= 2\vec{j} - 5\vec{k} \end{aligned} \right\} \text{ vektörleri veriliyor.}$$

Buna göre, kenarları A, B, C olan üçgenin alanı nedir ?

16)

$$\left. \begin{aligned} \vec{A} &= 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k} \\ \vec{B} &= 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} \\ \vec{C} &= -\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k} \end{aligned} \right\} \text{ vektörleri veriliyor.}$$

Buna göre, kenarları A, B, C olan paralel yüzünün hacmi nedir ?

$$17) \left. \begin{aligned} \vec{A} &= -2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k} \\ \vec{B} &= -2\vec{i} + \vec{j} - 5\vec{k} \end{aligned} \right\} \cos\theta = ?, d = ?, S = ?, a = ?, b = ?$$

$$18) \left. \begin{aligned} \vec{A} &= -3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k} \\ \vec{B} &= -2\vec{i} + 3\vec{k} \\ \vec{C} &= -4\vec{i} + \vec{k} \end{aligned} \right\} \text{ vektörleri veriliyor. Buna göre, Kenarları A, B, C olan paralel}$$

yüzünün hacmi nedir ?

8. BÖLÜM

8.KARMAŞIK SAYILAR

8.1.Giriş: $x^2 = -1$ denkleminin reel sayılarda çözümü yoktur. Bir başka deyişle reel sayı sisteminde karesi -1 olan hiçbir reel sayı bulunamaz. Bu nedenle, reel sayılara i veya j sembolleri ile gösterilen ve karesi (-1) olan imajiner birimi dahil edelim.

$$i = \sqrt{-1} \text{ veya } i^2 = -1 \text{ olsun.}$$

8.1.1.Tanım: Bir karmaşık sayı genel olarak $z = a + ib$ şeklinde tanımlanır. Burada, a ve b reel sayı iken $i = \sqrt{-1}$ imajiner birimdir. Buna göre karmaşık sayılar kümesi ;

$$\mathbf{C} = \{ a+ib \mid a,b \in \mathbf{IR} , i = \sqrt{-1} \} \text{ şeklinde gösterilir.}$$

$z = a+ib$ karmaşık sayısında $b=0$ ise bu karmaşık sayı bir **reel** sayıdır. $a=0$ ise $z=ib$ sayısına **pür imajiner** sayı denir.

Örnek.8.1 : 2 karmaşık sayısı bir reel sayıdır. Çünkü $b=0$ 'dır.

$\sqrt{5}i$ karmaşık sayısı aynı zamanda bir pür imajiner sayıdır. Çünkü $a=0$ 'dır.

Böylece $a+ib$ karmaşık sayısında a sayısına $a+ib$ karmaşık sayısının reel kısmı , b sayısının $a+ib$ kompleks sayısının imajiner kısmı denir. Bir kompleks sayı genellikle $z=a+ib$ şeklinde gösterilir. Bu gösterime bir karmaşık sayının **kartezyen formu** denir.

8.2.Karmaşık Sayılarda Dört İşlem

8.2.1.Toplama : $z_1=a+ib$ ve $z_2=c+id$ iki kompleks sayı olsun.Bu durumda;

$$z_1+z_2 = (a + ib) + (c + id) = \underbrace{(a + c)}_e + i \underbrace{(b + d)}_f = e + if \text{ olur. Yani } z_1, z_2 \in \mathbf{C} \text{ ise } z_1+z_2 \in \mathbf{C}' \text{ dir.}$$

Buna göre, $\mathbf{C}$ kümesi toplama işlemine göre kapalıdır.

8.2.2.Çıkarma: $z_1 = a + ib$ ve $z_2 = c + id$ iki kompleks sayı iken;

$$z_1 - z_2 = (a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d) = u - i.v \text{ yine bir karmaşık sayıdır.}$$

$z_1, z_2 \in \mathbf{C} \rightarrow z_1 - z_2 \in \mathbf{C}$ 'dir. Yani karmaşık sayılar kümesi çıkarma işlemine göre

kapalıdır.(i birimi genellikle matematikte kullanılırken j birimi genellikle Elektrik-Elektronik ve benzeri alanlarda kullanılır).

Örnek.8.2: $-2i + (4 - 3i) = 4 - 5i$

$$(-1 + i) + (2 - 5i) = (-1 + 2) + i(1 - 5) = 1 - 4i$$

$$(3 - 2i) + (4 + i) = (3 + 4) + i(-2 + 1) = 7 - i$$

8.2.3.Çarpma:

$z_1 = a + ib$ ve $z_2 = c + id$ iki kompleks sayı iken ;

$z_1 \cdot z_2 = (a + ib) \cdot (c + id) = (a \cdot c + i \cdot a \cdot d + i \cdot b \cdot c + i^2 \cdot b \cdot d) = (a \cdot c - b \cdot d) + i(a \cdot d + b \cdot c) = m + i \cdot n$ yine bir karmaşık sayıdır. Yani karmaşık sayılar kümesi çarpma işlemine göre kapalıdır. Buna göre ;

$$z_1, z_2 \in \mathbf{C} \rightarrow z_1 \cdot z_2 \in \mathbf{C} \text{ 'dir.}$$

Örnek.8.3:

$$(2 - 3i) \cdot (4 + i) = (2 \cdot 4 + 3) + i(2 - 12) = (8 + 3) + i(-10) = 11 + i10$$

8.2.4. Bir Karmaşık Sayının Eşleniği

Bir karmaşık sayının eşleniği, sayının imajiner kısmının işareti değiştirilerek bulunur.

$z = a + ib$ bir karmaşık sayı iken $a - i \cdot b$ sayısına **z sayısının eşleniği** denir ve;

$\bar{z}$ ile gösterilir. Buna göre; $z = a + ib \rightarrow \bar{z} = a - ib$ olur.

8.2.5. Bölme : $z_1 = a + ib$ ve $z_2 = c + id$ iki karmaşık sayı iken;

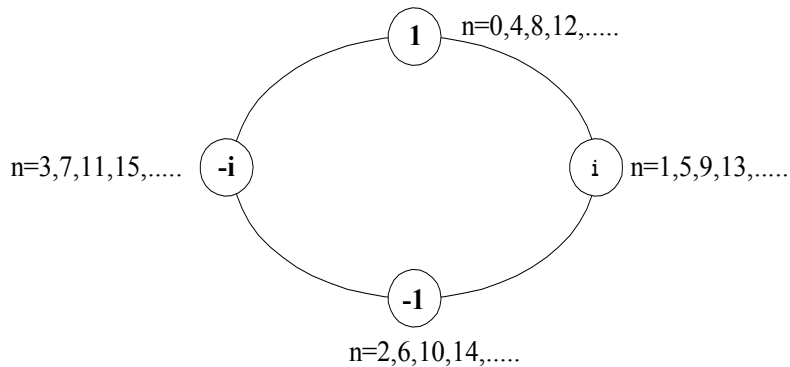
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + i \cdot b}{c + i \cdot d} = \left(\frac{a + i \cdot b}{c + i \cdot d} \right) \cdot \left(\frac{c - i \cdot d}{c - i \cdot d} \right) = \frac{(a \cdot c + b \cdot d) + i \cdot (b \cdot c - a \cdot d)}{c^2 + d^2}$$
$$\underbrace{\frac{(a \cdot c + b \cdot d)}{c^2 + d^2}}_p + i \cdot \underbrace{\frac{(b \cdot c - a \cdot d)}{c^2 + d^2}}_q = p + i \cdot q$$

Örnek.8.4: $\frac{2 - 3i}{1 - i} = ?$

Çözüm.8.4: $\left(\frac{2 - 3i}{1 - i} \right) \cdot \left(\frac{1 + i}{1 + i} \right) = \frac{5 - i}{1 + 1} = \frac{5 - i}{2} = \frac{5}{2} - \frac{i}{2}$

8.3. i ‘nin kuvvetleri: i^n , n’in alabileceği değerlere göre aşağıdaki değerleri alır.

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$ olduğundan i^n ‘nin alabileceği değerlerde buna göre belirlenebilir.



Örnek.8.5: $i^{29} = i^{28} \cdot i = (i^4)^7 \cdot i = (1^7) \cdot i = i$

$$i^{43} = i^{40} \cdot i^3 = (i^4)^{10} \cdot i^3 = (1)^{10} \cdot i^3 = 1 \cdot (-1) \cdot i = -i$$

8.4.İkinci Derece Denklemler: $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri $\Delta = b^2 - 4.a.c < 0$ iken reel değildir. Bu denklemin kökleri karmaşıktır.

Örnek .8.6: $x^2 - 2x + 5 = 0$ denkleminin köklerini bulunuz.

Çözüm.8.6: $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (5) = 4 - 20 = -16 < 0$

$$x_{1,2} = \frac{2 \mp \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \mp 4i}{2} \Rightarrow x_1 = 2 + 2i \text{ ve } x_2 = 2 - 2i \text{ olur.}$$

8.4.1. Karmaşık Çarpanlar

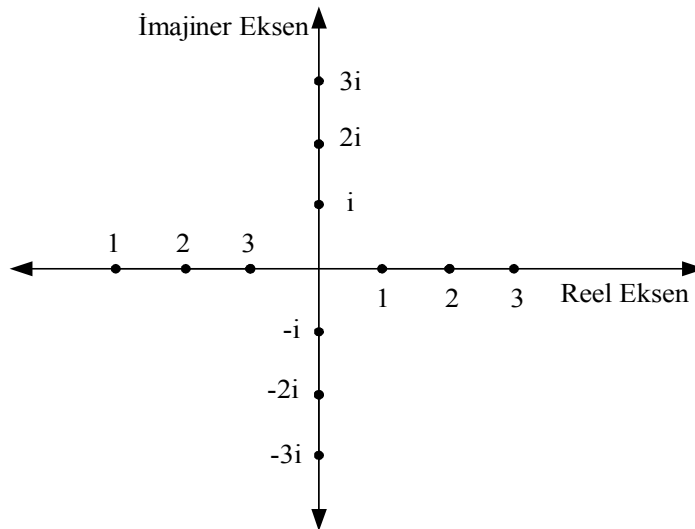
Örnek .8.7: $x^2 + 9 = x^2 - 9 \cdot i^2 = x^2 - (3i)^2 = (x - 3i)(x + 3i)$

Örnek.8.8: $4x^2 + 25 = 4x^2 - 25 \cdot i^2 = (2x)^2 - (5i)^2 = (2x - 5i)(2x + 5i)$

8.5. Karmaşık Sayıların Grafiği

8.5.1. Karmaşık Düzlem

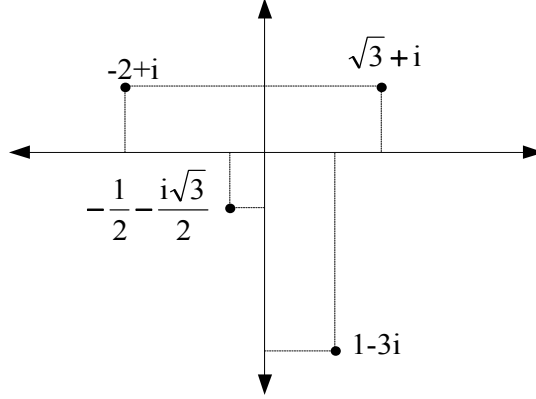
Kartezyen formdaki bir karmaşık sayı bilindiği gibi reel kısım a ve imajiner kısım ib olmak üzere iki kısımdan oluşmaktadır. Yani, bir karmaşık sayının gösterimi için yine kartezyen koordinat sistemini kullanacağız. Kartezyen koordinat sistemindeki yatay eksene reel eksen düşey eksene ise imajiner eksen adı verilir. Yani bir karmaşık sayının reel kısmını oluşturan sayıların imajiner eksene aynı kartezyen koordinatlarda olduğu gibi yerleştiriyoruz. İşte elde edilen bu yeni düzleme **Karmaşık Düzlem** adı verilir. (Şekil.8.1)



Şekil.8.1 : Karmaşık Düzlem

Örnek.8.9: $-2+i, \sqrt{3}+i, -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ve $1-3i$ sayılarını karmaşık düzlemde gösteriniz

Çözüm.8.9:



Örnek.8.10: $z_1 = -5+4i$ ve $z_2 = 4+5i$ $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = ?$

Çözüm.8.10: $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{\sqrt{(-5)^2 + (4)^2}}{\sqrt{4^2 + 5^2}} = \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{41}} = 1$

Örnek.8.11: $z = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i \Rightarrow |z^8| = ?$

Çözüm.8.11: $|z^8| = |z|^8$ özelliğinden; $|\sqrt{2} - \sqrt{2}i|^8$

$$\left(\sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} \right)^8 = (\sqrt{4})^8 = \left(4^{\frac{1}{2}} \right)^8 = 4^4 = 256$$

Örnek.8.12: $3x - iy + xi - y = 3 - 5i$ olması için $(x, y) = ?$

Çözüm.8.12: $3x - y + (x - y)i = 3 - 5i$

$$3x - y = 3$$

$$x - y = -5$$

$$2x = 8 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow y = +9 \Rightarrow (x, y) = (4, +9)$$

Örnek.8.13: $\left| \frac{z-2}{z+2} \right| = 3$ ifadesinin karmaşık düzlemde görüntüsü nedir?

Çözüm.8.13: $\left| \frac{z-2}{z+2} \right| = 3 \Rightarrow |z-2| = 3 \cdot |z+2|$

$z = x + iy$ olduğuna göre; $z-2 = x+iy-2 = (x-2)+iy$ ve $z+2 = x+iy+2 = (x+2)+iy$

$$|z-2| = \sqrt{(x-2)^2 + y^2} \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 3 \cdot \sqrt{(x+2)^2 + y^2}$$

$$|z+2| = \sqrt{(x+2)^2 + y^2} \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 9 \cdot \sqrt{(x+2)^2 + y^2}$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 9x^2 + 36x + 36 + 9y^2$$

$$8x^2 + 8y^2 + 40x + 32 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 5x + 4 = 0$$

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + (y-0)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

Örnek.8.14: $z = 3 - 4i$ ise $|z^{-1}| = ?$

Çözüm.8.14: 1.Yol; $|z^{-1}| = \frac{|1|}{|z|} = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{1}{5}$

2.Yol; $|z^{-1}| = |z|^{-1} = \left(\sqrt{3^2 + (-4)^2}\right)^{-1} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$

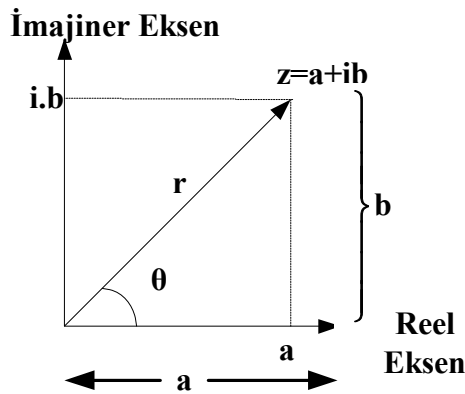
Örnek.8.15: $z = \sqrt{3} - 2 \Rightarrow |z^{-3}| = ?$

Çözüm.8.15: 1.Yol; $|z^{-3}| = \frac{|1|}{|z^3|} = \frac{1}{|z^3|} = \frac{1}{|z|^3} = \frac{1}{\left(\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-2)^2}\right)^3} = \frac{1}{7^{3/2}}$

2.Yol; $|z^{-3}| = |z|^{-3} = \left(\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-2)^2}\right)^{-3} = (\sqrt{7})^{-3} = \left(7^{1/2}\right)^{-3}$

8.6. Bir Karmaşık Sayının Trigonometrik Formu

Karmaşık düzlemin 1. Bölgesinde herhangi bir $z = a + ib$ karmaşık sayısını gözönüne alalım. Bu noktayı orjin ile birleştiren vektörde yarıçap vektörü (r) diyelim. Ayrıca reel eksenin pozitif yönü ile r yarıçap vektörü arasında kalan dar açıyı da θ ile gösterelim .(Şekil.8.2).



Şekil.8.2. $z = a + i.b$ karmaşık sayısının trigonometrik formu

θ dar açısının trigonometrik fonksiyonlarından $\sin \theta = \frac{b}{r}$, $\cos \theta = \frac{a}{r}$ olarak bulunur.

Buna göre; $b = r \cdot \sin \theta$ ve $a = r \cdot \cos \theta$ ’ dır. Bu değerler $z = a + ib$ karmaşık sayısında a ve b yerine yazılırsa; $a + ib = r (\cos \theta + i \sin \theta) = r (\cos \theta + i \sin \theta)$ ifadesine $z = a + ib$ karmaşık sayısının **trigonometrik formu** denir. $b = r \cdot \sin \theta$ ve $a = r \cdot \cos \theta$ ’ dır. Bu değerler $a + ib$ karmaşık sayısında a ve b yerine yazılırsa;

$a + ib = r \cdot \cos \theta + i \cdot r \cdot \sin \theta = r \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)$ ifadesine $a + ib$ karmaşık sayısının **kutupsal formu** denir ve $r \angle \theta$ ile gösterilir. Burada r yarıçapı mutlak değer veya bir karmaşık sayının modülü olarak bilinir. Pythagorean Teoreminden;

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ olarak bulunur. ($r > 0$) θ açısı $z = a + ib$ karmaşık sayısının **argümanı**

olarak adlandırılır ve $\tan \theta = \frac{b}{a}$ oranından yararlanılarak; $\theta = \arctan \frac{b}{a}$ olarak elde edilir.

Kutupsal formun bir diğer gösterimide **$r \cdot \text{cis } \theta$** ’ dır. $r \cdot \text{cis } \theta$ ’ da $i = \sqrt{-1}$ olur.

8.7. Kutupsal Formda Aritmetik İşlemler:

8.7.1.Çarpma:

Kutupsal formdaki kompleks sayıların çarpımı aşağıdaki gibi yapılır.

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1 \angle \theta_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \\ z_2 &= r_2 \angle \theta_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \text{ iki karmaşık sayı olsun. Buna göre;} \\ z_1 \cdot z_2 &= r_1 \angle \theta_1 \cdot r_2 \angle \theta_2 = [r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)] \cdot [r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)] \\ &= r_1 \cdot r_2 (\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + i \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 + i^2 \sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + i \cos \theta_1 \cdot \sin \theta_2) \\ &= r_1 \cdot r_2 [(\underbrace{\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2}_{\cos(\theta_1 + \theta_2)} + i(\underbrace{\sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \cdot \sin \theta_2}_{\sin(\theta_1 + \theta_2)})] \\ &= r_1 \cdot r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] = r_1 \cdot r_2 \cdot \text{cis}(\theta_1 + \theta_2) = \mathbf{r_1 \cdot r_2 \angle (\theta_1 + \theta_2)} \end{aligned}$$

Örnek.8.16:

a) $(1/2 \angle 30^\circ) \cdot (2 \angle 60^\circ) = ?$

$$1/2 \angle 30^\circ \cdot 2 \angle 60^\circ = 1/2 \cdot 2 \angle (30^\circ + 60^\circ) = 1 \angle 90^\circ = 1(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ) = i$$

b) $(3/2 \angle 75^\circ) \cdot (5/4 \angle 45^\circ) = (3/2) \cdot (5/4) \angle (75^\circ + 45^\circ) = 15/8 \angle 120^\circ$

$$= 15/8 (\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) = 15/8 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right)$$

8.7.2.Bölme:

Kutupsal formdaki $r_1 \angle \theta_1$ ve $r_2 \angle \theta_2$ sayılarının bölmesi;

$$\begin{aligned}\frac{r_1 \angle \theta_1}{r_2 \angle \theta_2} &= \frac{r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)}{r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)} = \frac{r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)}{r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)(\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)} \\&= \frac{r_1 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - i \cos \theta_1 \sin \theta_2 + i \sin \theta_1 \cos \theta_2 - i^2 \sin \theta_1 \sin \theta_2)}{r_2 (\cos^2 \theta_2 - i^2 \sin^2 \theta_2)} \\&= \frac{r_1 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + i \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i (\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2)}{r_2 (\cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2)}\end{aligned}$$

$$\frac{r_1}{r_2} = [\cos(\theta_2 + \theta_1) + i \sin(\theta_2 + \theta_1)] = \frac{r_1}{r_2} \text{cis}(\theta_1 - \theta_2) = \frac{r_1}{r_2} \angle (\theta_1 - \theta_2)$$

Örnek.8.17: $\frac{3 \angle 45}{2 \angle 15} = ?$

Çözüm.8.17:

$$\begin{aligned}\frac{3 \angle 45^\circ}{2 \angle 15^\circ} &= \frac{3 \angle 45^\circ - 15^\circ}{2} = \frac{3 \angle 30^\circ}{2} = \frac{3(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)}{2} \\&= \frac{3}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{i.3}{4}\end{aligned}$$

8.8. Euler Formu (Üstel Form):

Karmaşık sayıları aşağıdaki şekillerde ifade etmiştik;

$z = a + ib$ şekline kartezyen form

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ şekline trigonometrik form

$z = r \angle \theta$ şekline kutupsal form denir.

Karmaşık sayının bir diğer şeklide üstel formudur ve Euler formülüyle verilir.

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (\text{Euler Formülü})$$

Euler Formülü olarak bilinen bu ifade trigonometrik formda yerine yazılırsa;

$$z = r \cdot e^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

olur. İşte bu yazılışa karmaşık sayının **Üstel Formu** denir.

8.9.Üstel formda aritmetik işlemler:

8.9.1.Çarpma:

Üslerin kurallarını kullanarak üstel formdaki iki karmaşık sayının çarpımını yapalım.

$$z_1 = r_1 \cdot e^{i\theta_1} \quad \text{ve} \quad z_2 = r_2 \cdot e^{i\theta_2} \quad \text{olsun. Buna göre;}$$
$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

8.9.2.Bölme: Üs kurallarını kullanarak üstel formdaki iki karmaşık sayının bölümünü

yapalım. $z_1 = r_1 \cdot e^{i\theta_1}$ ve $z_2 = r_2 \cdot e^{i\theta_2}$ iki karmaşık sayı olsun.

Böylece; $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$ olarak bulunur.

Örnek.8.18: a) $2(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$ karmaşık sayısını üstel formda ifade ediniz.

Çözüm.8.18:a) $r = 2$ ve $\theta = 135^\circ$ olduğundan radyana çevirirsek;

$$r = 2, \theta = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow z = r \cdot e^{i\theta} = 2 \cdot e^{\frac{i3\pi}{4}}$$

Örnek.8.19: b) $5(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ)$ karmaşık sayısını üstel formda ifade ediniz.

Çözüm.8.19: b) $r = 5$ ve $\theta = 240^\circ$ ise $r \cdot e^{i\theta} = 5 \cdot e^{\frac{4\pi}{3}}$

8.10. Karmaşık Üsler

$z = a + ib$ karmaşık sayısını göz önüne alalım. $z^n = (a + ib)^n$ ifadesi z karmaşık sayısının n . kuvveti olarak adlandırılır ve De' Moivre Teoremi kullanılarak hesaplanabilir Şöyle ki ;

$$z^n = (r \angle \theta)^n = r^n \quad \text{(Kutupsal Form)}$$

$$z^n = (a + ib)^n \quad \text{(Kartezyen Form)}$$

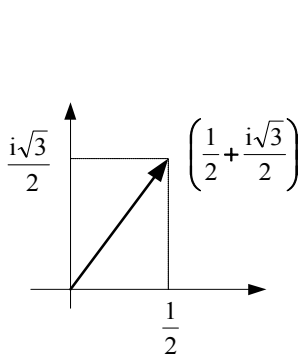
$$z^n = (a + ib)^n = r^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n \quad \text{(Trigonometrik Form)}$$

$$z^n = (r \cdot e^{i\theta})^n = r^n e^{i \cdot n \cdot \theta} = r^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n \quad \text{(Üstel Form)}$$

olur ve r yarıçapı ile θ argümeni belirlenerek istenilen karmaşık sayının n . kuvveti bulunur.

Örnek.8.20: $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{100} = ?$

Çözüm.8.20: $r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{100} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{100}} = ?$



$$\tan \theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \text{Arc tan } \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{100} = (r \cdot e^{i\theta})^{100} = r^{100} \cdot e^{i \cdot \theta \cdot 100} = 1^{100} \cdot e^{i \cdot 100 \cdot \frac{\pi}{3}}$$

$$= 1 \cdot \left(\cos \frac{100\pi}{3} + i \sin \frac{100\pi}{3} \right) = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

8.11.Karmaşık Kökler: $z^n = a + ib$ ifadesi n. dereceden bir denklemleri ifade ederken $z^n - (a + ib) = 0$ denkleminin köklerini bulmak yani $a + ib$ karmaşık sayısının n. kökünü bulmak için De Moivre Teoremi'nden yararlanılır. Şöyle ki;

$$z^n = a + ib \Rightarrow z = (a + ib)^{\frac{1}{n}} = (r \angle \theta)^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \angle \frac{\theta}{n}$$

$$z_{k+1} = r \left[\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right] \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (0 \leq k \leq n-1) \text{ ifadesi bulunur.}$$

Böylece, $0 \leq k \leq n-1$ için n tane kök bulunur. Burada esas ölçü sözkonusu olduğundan θ yerine $\theta + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) alınmıştır. Bilindiği üzere, $\theta = \theta + 2.k.\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) 'dir.

$$z^n = a + ib \Rightarrow z_{k+1} = (a + ib)^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} (\cos \theta + i \sin \theta)^{\frac{1}{n}}$$

üstel formda ifade edecek olursak;

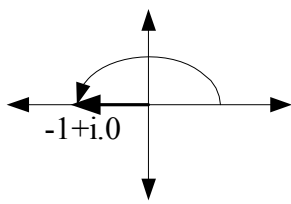
$$z^n = r \cdot e^{i\theta} \Rightarrow z = (r \cdot e^{i\theta})^{\frac{1}{n}} = (r)^{\frac{1}{n}} (e^{i\theta})^{\frac{1}{n}}$$

$$z_{k+1} = (r)^{\frac{1}{n}} \cdot (e^{i\theta})^{\frac{1}{n}} = (r)^{\frac{1}{n}} \cdot \left[\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right] \quad (k \in \mathbb{Z}) \text{ burada;}$$

z_{k+1} ifadesi k'nın 0'dan başlaması halinde $z_1, z_2, \dots, z_n$ köklerini ifade etmesi amacıyla kullanılmaktadır.

Örnek.8.21: -1 sayısının dört kökünü bulunuz.

Çözüm.8.21: -1'in dört kökünü bulmak demek $z^4=-1$ denklemini çözmek veya $z^4+1=0$ denklemini çözmek demektir.



$$z^4 = -1 + i.0 \text{ ise } r = \sqrt{(-1)^2 + (0)^2} = 1$$

$$\text{Tg } \theta = \frac{0}{-1} = 0 \text{ ise } \theta = \text{Arctg} \theta = \pi$$

$$z^4 = -1 + i.0 \text{ ise } z = (-1 + i.0)^{\frac{1}{4}} \text{ ve } z^n = r.e^{i.\theta} \quad z = (r.e^{i.\theta})^{\frac{1}{n}} \text{ olur. Buna göre;}$$

$$z_{k+1} = r^{\frac{1}{n}} . e^{i \left[\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right]} \quad l=1 \left[\cos\left(\frac{(\pi + 2k\pi)}{4}\right) + i.\sin\left(\frac{(\pi + 2k\pi)}{4}\right) \right]$$

$$k = 0 \text{ için } z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i.\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + i.\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$k = 1 \text{ için } z_2 = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i.\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i.\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$k = 2 \text{ için } z_3 = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i.\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i.\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$k = 3 \text{ için } z_4 = \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i.\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - i.\frac{1}{\sqrt{2}}$$

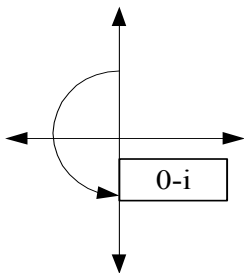
$$k = 4 \text{ için } z_5 = \cos\left(\frac{9\pi}{4}\right) + i.\sin\left(\frac{9\pi}{4}\right) = z_1$$

Not : 4 kök varsa $\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$ kökler arasında $\frac{\pi}{2}$ radyanlık fark vardır ve $z_5 = z_1$ 'dir.

Örnek.8.22: -i sayısının 6 kökünü bulunuz.

Çözüm.8.22: -i sayısının kökünü bulmak demek $z^6 = -i$ denkleminin köklerini bulmak veya

$z^6 + i = 0$ denkleminin köklerini bulmak demektir.



$$r = \sqrt{(-1)^2 + (0)^2} = 1$$

$$\text{Tg} \theta = \frac{-1}{0} = -\infty \rightarrow \theta = \text{Arctg}(-\infty) = \frac{3\pi}{2} \rightarrow n = 6, r = 1, \theta = \frac{3\pi}{2}$$

$$z_{k+1} = 1^{\frac{1}{6}} . e^{i \left[\frac{\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)}{6} \right]} = \cos\left(\frac{\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)}{6}\right) + i.\sin\left(\frac{\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)}{6}\right)$$

$$k = 0 \text{ için } z_1 = \cos\left(\frac{3\pi}{12}\right) + i.\sin\left(\frac{3\pi}{12}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + i.\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$k = 1 \text{ için } z_2 = \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i.\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i.\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$k = 2 \text{ için } z_3 = \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + i.\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i.\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$k = 3 \text{ için } z_4 = \cos\left(\frac{15\pi}{12}\right) + i.\sin\left(\frac{15\pi}{12}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - i.\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$k = 4 \text{ için } z_5 = \cos\left(\frac{19\pi}{12}\right) + i.\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + i.\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$k = 5 \text{ için } z_6 = \cos\left(\frac{23\pi}{12}\right) + i.\sin\left(\frac{23\pi}{12}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i.\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$k = 6 \text{ için } z_7 = \cos\left(\frac{27\pi}{12}\right) + i.\sin\left(\frac{27\pi}{12}\right) = \cos\frac{3\pi}{12} = z_1$$

6 köklü bir denklemin kökleri arasında $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ yani $\frac{\pi}{3}$ radyanlık bir fark vardır.

7. denklemin kökü 1. denklemin kökü ile aynıdır.

Örnek.8.23: $z = -3$ ise z 'nin küp köklerini bulunuz.

Çözüm.8.23 : -3 sayısının küpkökünü bulmak demek $z^3 = -3$ denkleminin köklerini bulmak veya $z^3 - 3 = 0$ denkleminin köklerini bulmak demektir.

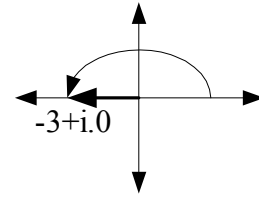
$$r = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = 3 \rightarrow \text{Tg}\theta = \frac{0}{-3} = 0 \rightarrow \theta = \text{Arctg}(0) = \pi$$

$$z = -3 = 3(\cos \pi + i.\sin \pi) \text{ olur. Buna göre;}$$

$$z_0 = \sqrt[3]{3}(\cos \frac{\pi}{3} + i.\sin \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt[3]{3}}{2}(1 + i\sqrt{3})$$

$$z_1 = \sqrt[3]{3}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + 1.\frac{2\pi}{3}\right) + i.\sin\left(\frac{\pi}{3} + 1.\frac{2\pi}{3}\right)\right] = \sqrt[3]{3}(\cos \pi + i.\sin \pi) = -\sqrt[3]{3}$$

$$z_2 = \sqrt[3]{3}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + 2.\frac{2\pi}{3}\right) + i.\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2.\frac{2\pi}{3}\right)\right] = \frac{\sqrt[3]{3}}{2}(1 - i\sqrt{3})$$



Örnek.8.24: $z^6 + 1 = 0$ denkleminin köklerini bulmaya çalışalım.

Çözüm.8.24:

$$z^6 = -1 \Rightarrow r = 1 \Rightarrow \theta = \pi$$

$$k = 0 \Rightarrow z_1 = 1^{1/6} \left(\cos \frac{\pi}{6} - j \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

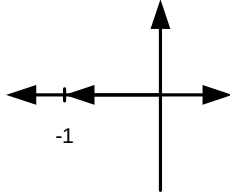
$$k = 1 \Rightarrow z_2 = 1^{1/6} \left(\cos \frac{3\pi}{6} - j \sin \frac{3\pi}{6} \right)$$

$$k = 2 \Rightarrow z_3 = 1^{1/6} \left(\cos \frac{5\pi}{6} - j \sin \frac{5\pi}{6} \right)$$

$$k = 3 \Rightarrow z_4 = 1^{1/6} \left(\cos \frac{7\pi}{6} - j \sin \frac{7\pi}{6} \right)$$

$$k = 4 \Rightarrow z_5 = 1^{1/6} \left(\cos \frac{9\pi}{6} - j \sin \frac{9\pi}{6} \right)$$

$$k = 5 \Rightarrow z_6 = 1^{1/6} \left(\cos \frac{11\pi}{6} - j \sin \frac{11\pi}{6} \right)$$

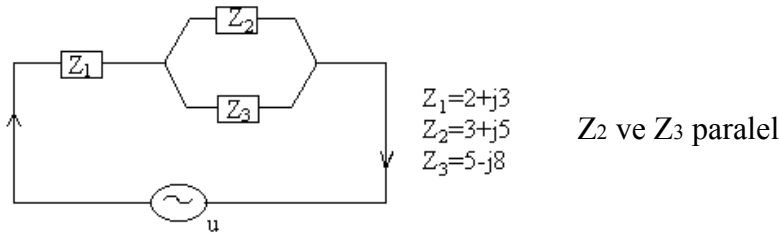


8.12.Karmaşık Sayıların Elektrik Devrelerine Uygulanması :

8.12.1. Elektrik Devrelerle İlgili Çözümlü Örnekler

Örnek.8.25: Şekildeki devrenin eşdeğer empedansı nedir?

Çözüm.8.25:



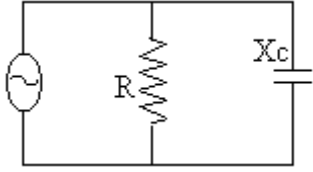
$$\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \Rightarrow Z_{23} = \frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_2 + Z_3} = \frac{(3 + j5)(5 - j8)}{(3 + j5) + (5 - j8)} = \frac{15 - j24 + j25 + 40}{8 - j3}$$

$$\frac{1}{Z_{23}} = \frac{55 + j1}{8 - j3} = \frac{440 + j165 + j8 - 3}{73} = \frac{437 + j173}{73} = 5.9 + j2.3$$

$$(8 + j3)$$

$$Z_{eş} = Z_1 + Z_{23} = 2 + j3 + 5.9 + j2.3 = 7.9 + j5.3 \Omega$$

Örnek.8.26: $R=6\Omega$ 'luk dirence bir kondansatör paralel olarak bağlanıyor. Kondansatörün reaktansı $Z_2=-j20$ 'dur. Buna göre;



a-) Kol akımlarını bulunuz.

b-) Devre akımını bulunuz.

c-) Devre empedansını bulunuz.

Çözüm.8.26: Kaynak gerilimi $U=60$ V

$$Z_1 = 6 + j.0 \Rightarrow Z_2 = 0 - j.20 \Rightarrow U = 60 + j.0$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{Z_1} = \frac{60 + j.0}{6 + j.0} = \frac{60 \angle 0^\circ}{6 \angle 0^\circ} = 10 \angle 0^\circ$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{60 + j.0}{0 - j.20} = \frac{60 \angle 0^\circ}{20 \angle -90^\circ} = 3 \angle 90^\circ$$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = (10 + j.0) + (0 + j.3) = 10 + j3$$

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{60}{10 + j3} = \frac{600 - j.0}{10 + j3} = \frac{600 - j.180}{10^2 + j^2} = \frac{600 - j.180}{109} = 5,5 - j.1,65\Omega$$

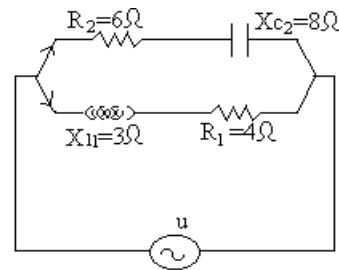
Örnek.8.27: Şekildeki devrede $R_1=4\Omega$ $X_{L1}=3\Omega$ $R_2=6\Omega$ $X_{C2}=8\Omega$

$U=150$ V olduğuna göre;

a-) I_1 akımını bulunuz.

b-) I_2 akımını bulunuz.

c-) I_3 akımını bulunuz.



Çözüm.8.27:

$$Z_1 = R_1 + j.X_{L1} \quad \text{ve} \quad Z_2 = R_2 - j.X_{C2} \quad \text{olsun.}$$

$$Z_1 = 4 + j3 \Rightarrow Z_2 = 6 - j8 \Rightarrow U = 150 + j0$$

a-)

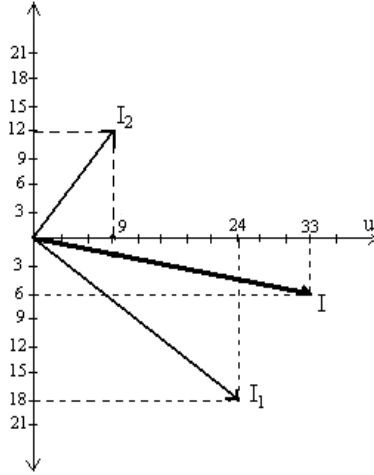
$$I_1 = \frac{U}{Z_1} = \frac{150 + j0}{4 + j3} = \frac{600 - j450}{4^2 + 3^2} = \frac{600 - j450}{25}$$

$$I_1 = 24 - j18 \quad I_1 = |I_1| \angle \text{tg}^{-1} \frac{14}{24} = 30$$

b-)

$$I_2 = \frac{U}{Z_2} = \frac{150 + j0}{6 + j8} = \frac{900 - j1200}{6^2 + 8^2} = \frac{900 - j1200}{100}$$

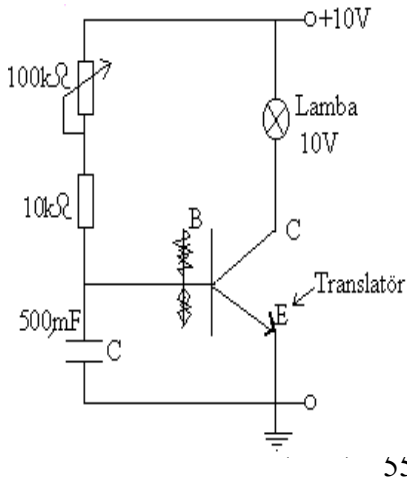
$$I_2 = 9 - j12 \quad I_2 = |I_2| \angle \tan^{-1} \frac{12}{9} = 15$$



c-) $I = I_1 + I_2 = (24 - j18) + (9 + j12) = 33 - j6$

Örnek.8.28 : Şekildeki devrede lamba ne zamanyanar?

Çözüm.8.28:



Transistörün iletme geçmesi için C kondansatörünün üzerindeki gerilimin $0,1V$ 'a ulaşması gerekiyor.

Bir RC - seri devresinde kondansatör uçlarındaki gerilim değeri; Değerler yerine konulursa ;

$$(110k\Omega = 110 \times 10^3 \Omega, 500\mu F = 500 \times 10^{-6} F)$$

$$0,7 = 10(1 - e^{-\frac{t}{110 \times 10^3 \times 500 \times 10^{-6}}}) = 10(1 - e^{-\frac{t}{55}}) = 10 - 10e^{-\frac{t}{55}}$$

$$\frac{t}{55} \text{ olur. } -0,07257069 = \frac{-t}{55} \text{ 'den } t = 3,99 \text{ bulunur. Yani, enerji}$$

verildikten $t = 3,99$ sn sonra lamba yanar.

ALİŞTIRMALAR

1) $\left(-\frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1999} = ?$

2) $z^5 = -\sqrt{3} + 1$ denklemini çözünüz.

3) $(-\sqrt{3} + j)^{1999} = ?$

4) $z^5 = -j - 1$ denklemini çözünüz.

5) $\left(-\frac{1}{2}j - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1453} = ?$

6) $z^6 = \sqrt{3} - j$ denklemini çözünüz.

7) $z^5 = -j + 1$ denklemini çözünüz.

8) $z^4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j$ denkleminin köklerini bulunuz.

9) $z^6 + 64 = 0$ denkleminin köklerini bulunuz.

10) $z^4 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}j$ denklemini çözünüz.

11) $z^2 = \sqrt{3}j - 1$ denklemini çözünüz.

12) $z^3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j$ denkleminin köklerini bulunuz.

9. BÖLÜM

9. LİMİT VE TÜREV

Türevi tanımlamak için limit kavramı kullanılır. Bu nedenle, türevden önce limit ve limitin özellikleri ile süreklilik kavramı bu bölümde ele alınmıştır.

9.1. Limitin Tanımı ve Anlaşılması

Limiti daha iyi anlayabilmek için aşağıdaki fiziksel örneği ele alalım.

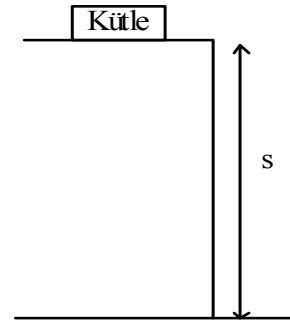
Örnek.9.1

Bir cisim yüksek bir yerden düşüyor ve t zamanında s yolunu alıyor ve t 'ye bağlı;

$$s = f(t) = 4.9 t^2$$

olarak veriliyor. Buna göre ;

- $t = 0$ ve $t = 4$ sn. arasındaki, yani ilk saniyedeki ortalama hızı bulunuz.
- $t = 1$ sn. 'deki ani hızı bulunuz.
- cebirselsel olarak gösteriniz ki; $V = \lim_{t \rightarrow 1} V_{\text{ort}} = 9.80 \text{ m / sn}$



Şekil.9.1. Cismin Şekli

Çözüm.9.1:

a) Ortalama hız, yoldaki değişimin zamandaki değişime oranıdır. Yani;

$V_{\text{ort}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ olup Δ fark operatörüdür. Şimdi cismin ilk 4 sn. boyunca hareketini, $s = 4.9 t^2$ formülü

ile aşağıdaki tabloda verelim(Tablo9.1).

Tablo.9.1. Cismin ilk 4 sn. boyunca hareketi

t(zaman)	0	1	2	3	4
s(yol)	0	4,9	19,6	44,1	78,4

Buna göre, cismin 0 ile 1 sn. arasındaki ortalama hızı tablodaki verilerden;

$$V_{\text{ort}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{4.9 - 0}{1 - 0} = 4.9 \text{ m/sn. olarak bulunur.}$$

b) $t = 1$ sn. esnasındaki ani hızı bulalım.

Yukarıdaki tablodan da görüldüğü gibi cismin hızı sürekli olarak artmaktadır ve bu ani hız

$V_{\text{ort}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ formülü ile hesaplanamaz. Çünkü, herhangi bir anda $\Delta s = 0$, $\Delta t = 0$ olur ve

$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{0}{0}$ belirsizdir. Böylece, ani hız limit kavramını kullanarak çok küçük bir zaman aralığında

t 'nin yaklaşık olarak 1 sn. alınmasıyla belirlenebilir.

Bunun için t'yi 0 ile 1 sn. arasındaki bir değer ve $s=4.90t^2$ 0 ile 4.9 m arasındaki uzaklık değeri alınırsa 1 sn. ile t sn. arasındaki ortalama hız; $V_{ort} = \frac{4.90 - s}{1 - t} = \frac{4.90 - 4.90t^2}{1 - t}$ formülü kullanılarak t=0.5, t=0.9, t=0.99, t=0.999 ve t=0.9999 için V_{ort} değeri aşağıdaki gibi bulunur.

(sn) t	0,5	0,9	0,99	0,999
(m/sn) V_{ort}	7,35	9,31	9,75	9,795

Örneğin, t=0.99 sn. anındaki V_{ort} şöyle bulunur:

$$V_{ort} = \frac{4.90 - 4.90(0.99)^2}{1 - 0.99} = \frac{0.0975}{0.01} = 9.75 \text{ m/sn.}$$

Eğer yukarıdaki tabloya devam edersek t'nin 1'e yaklaşması halinde ($t \rightarrow 1$), V_{ort} 9.80'e yaklaşacaktır ($V_{ort} \rightarrow 9.80$). Bu durum limit kavramı kullanılarak şu şekilde ifade edilir;

$$\lim_{t \rightarrow 1} V_{ort} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{4.90 - 4.90t^2}{1 - t} = 9.80 \text{ m/sn ve } t=1 \text{ sn.'deki ani hız;}$$

$$v = \lim_{t \rightarrow 1} V_{ort} = 9.80 \text{ m/sn olarak bulunur.}$$

c) Cebirsel olarak $V = \lim_{t \rightarrow 1} V_{ort} = 9.80 \text{ m/sn}$ olduğunu gösterecek olursak;

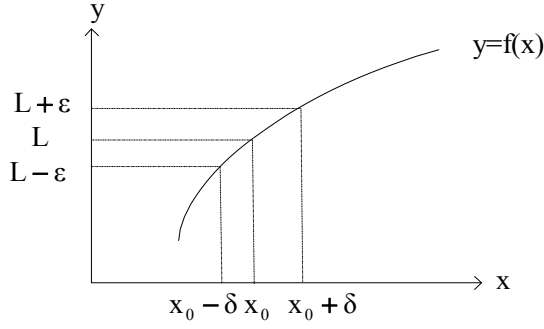
$$V = \lim_{t \rightarrow 1} V_{ort} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{4.90 - 4.90t^2}{1 - t} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{4.90(1 - t^2)}{1 - t}$$

$$V = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{4.90(1 - t)(1 + t)}{(1 - t)} = \lim_{t \rightarrow 1} 4.90(1 + t) = 9.80 \text{ m/sn bulunur.}$$

İncelediğimiz bu örnek bize limit kavramı hakkında bilgi vermesi açısından önemlidir. Şimdi de limit kavramını bir fonksiyonun limiti olarak tanımlayalım.

Tanım.9.1: $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $x_0 \in A$, $x \neq x_0$ olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için $\exists \delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa $\exists, |x - x_0| < \delta$ iken $|f(x) - L| < \varepsilon$ kalıyorsa $L \in \mathbb{R}$ sayısına f fonksiyonunun limiti denir ve; $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ veya $x \rightarrow x_0$ için $f(x) \rightarrow L$ şeklinde

gösterilir. Bir başka deyişle, tanım kümesinde ve x_0 'ın δ komşuluğunda olan noktaların görüntülerinin L'nin ε - komşuluğu içinde kalması demektir. (Şekil.9.2)



Şekil 9.2. Limitin tanımına ait grafik

Not: $f(x)$ bir polinom fonksiyon ise;

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

şeklinde x yerine fonksiyonda x_0 yazılarak bulunur.

Örnek.9.2:

$$1) \lim_{x \rightarrow -1} (3x - 4) = 3(-1) - 4 = -7$$

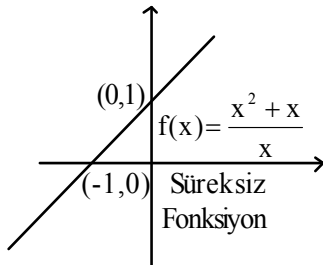
$$2) \lim_{x \rightarrow 3} x^3 - 3x^2 + 5x - 1 = (3)^3 - 3(3)^2 + 5(3) - 1 = 14$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x} = ?$$

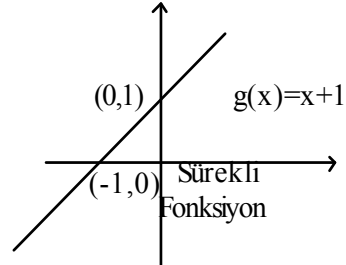
$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x+1) = 0 + 1 = 1$$

Bu örnekte dikkat edilecek nokta şudur;

$f(x) = \frac{x^2 + x}{x}$ iken $g(x) = x+1$ idi. Grafik olarak gösterecek olursak;



Şekil 9.3. $f(x) = \frac{x^2 + x}{x}$ fonksiyonunun grafiği



Şekil 9.4. $g(x) = x+1$ fonksiyonunun grafiği

$f(0) = \frac{0}{0}$ tanımsız olup $x = 0$ noktasında kaldırılabilir süreksizliğe sahiptir (şekil.9.3).

Buna karşılık cebirsel işlemlerde elde ettiğimiz $g(x)=x+1$ fonksiyonu $\forall x \in \mathbb{R}$ noktasında süreklidir. $f(0) \neq g(0)$ 'dır. Bu örneklerden şu sonuç çıkar. Eğer, $f(x)$ tanımlı olduğu aralıktaki her noktada sürekli bir fonksiyon ise fonksiyonun herhangi bir noktadaki limiti o noktadaki fonksiyonun değerine eşittir. Bu ilerde sunacağımız süreklilik kavramı ile daha da pekişecektir.

Örnek. 9.3:

$$1-) \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x^3 - 2} = \sqrt{3^3 - 2} = \sqrt{25} = 5$$

$$2-) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 + x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x + 0 = 2x$$

9.2. $x \rightarrow \infty$ için $\frac{P(x)}{Q(x)}$ limiti :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$Q(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + a_{k-2} x^{k-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

polinom fonksiyonlar olsunlar. Burada, $d(P(x)) = n$ ve $d(Q(x)) = k$ 'dır. Buna göre,

i) $d(P(x)) < d(Q(x))$ yani $n < k$ ise ;

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$$

ii) $d(P(x)) > d(Q(x))$ yani $n > k$ ise ;

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$$

iii) $d(P(x)) = d(Q(x))$ yani $n = k$ ise ;

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n}{a_k}$$

$$\text{Örnek.9.4:i) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(5+\frac{1}{x})}{x \cdot x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(5+\frac{1}{x})}{x} = 0 \left[x \rightarrow \infty \text{ için } \frac{c}{x} \rightarrow 0 \text{ (c=sbt)} \right]$$

Pratik kural : $P(x) = 5x+1 \Rightarrow d(P(x))=1$ ve $Q(x) = x^2 \Rightarrow d(Q(x))=2$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \dots \text{ (I özelliği)}$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1}{3x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(2 + \frac{1}{x^2})}{x^2(3 - \frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{x^2}}{3 - \frac{1}{x}} = \frac{2}{3}$$

Pratik kural : (II özelliği) $d(P(x)) = d(Q(x)) = 2$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1}{3x^2 - x} = \frac{2}{3}$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 2x - 1}{x^2 - 3x + 1} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} = \frac{x^2(5x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2})}{x^2(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow \infty} 5x = \infty$$

Pratik kural : $P(x) = 5x^3 + 2x - 1 \Rightarrow d(P(x)) = 3$ ve $Q(x) = x^2 - 3x + 1 \Rightarrow d(Q(x)) = 2$ ise

$$d(P(x)) > d(Q(x)) \text{ olduğundan; } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 2x - 1}{x^2 - 3x + 1} = \infty$$

Tanım.9.2: $y=f(x)$ verilsin. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x_0 + \varepsilon)$ ifadesi f fonksiyonunun

$x=x_0$ noktasındaki sağdan limiti olarak tanımlanır.

Tanım.9.3: $y=f(x)$ verilsin. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x_0 - \varepsilon)$ ifadesi f fonksiyonunun

$x=x_0$ noktasındaki soldan limiti olarak tanımlanır.

Teorem.9.1: $y=f(x)$ fonksiyonunun $x=x_0$ noktasında limitinin olabilmesi için gerek ve yeter şart; $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ olmasıdır.

Teorem.9.2: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ve buna bağlı olarak $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\beta x} = \frac{\alpha}{\beta}, \text{ dir.}$$

9.3.Limitle İlgili Teoremler: $f:A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $g:A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları verilsin. $x_0 \in A$ noktasında; $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1$ ve $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_2$ diyelim. Buna göre;

Teorem.9.3: $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \mp g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_1 + L_2$

Teorem.9.4: $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x).g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x). \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_1.L_2$

Teorem.9.5: $\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$

Teorem.9.6: $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere; $\lim_{x \rightarrow x_0} [k.f(x)] = k. \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = k.L_1$ 'dir.

Örnekler:

1) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{5^{\frac{1}{x-2}}} = ?$

Çözüm: $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{5^{\frac{1}{x-2}}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(2 + \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{5^{\frac{1}{2+\varepsilon-2}}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{5^{\frac{1}{\varepsilon}}} = 0$

2) $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} + \cos x + e^x, & x \geq 0 \\ \frac{x}{|x|} + 10^{\frac{1}{x}} + 2x + 2, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = ?$

Çözüm: $\lim_{x \rightarrow 0^-} 10^{\frac{1}{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(0 - \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 10^{\frac{1}{0-\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 10^{-\frac{1}{\varepsilon}} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(0 + \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{0 + \varepsilon}{|0 + \varepsilon|} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\varepsilon} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} 2x + 2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(0 - \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2(0 - \varepsilon) + 2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(0 + \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{0 + \varepsilon}{|0 + \varepsilon|} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\varepsilon} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(0 + \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \cos(0 + \varepsilon) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(0 + \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{(0+\varepsilon)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{|x|}{x} + \cos x + e^x \right) = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x}{|x|} + 10^{\frac{1}{x}} + 2x + 2 \right) = -1 + 0 + 0 + 2 = 1$$

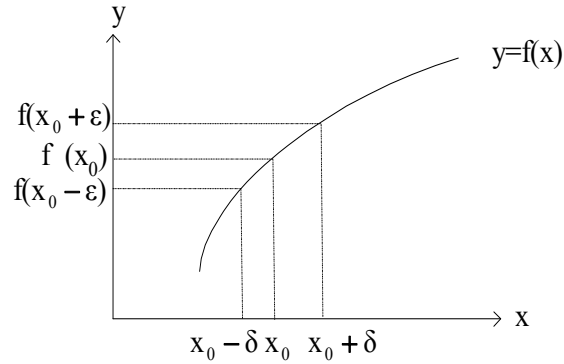
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \text{ olduğundan } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ yoktur.}$$

9.4. Süreklilik: Süreklilik kavramı, limit kavramı ile içiçe tanımlanan ve matematik anlamda bir fonksiyonun grafiğinin verilen tanım bölgesinde kesiksiz olması olarak tanımlanır. Süreklilik, noktasal ve bölgesel olmak üzere ikiye ayrılır. Şimdi bunları sırasıyla açıklayalım.

Tanım.9.4: $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, $x \neq x_0$ olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için $\exists \delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa, öyle ki $|x - x_0| < \delta$ iken $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ kalıyorsa ;

f fonksiyonu $x = x_0$ noktasında süreklidir denir ve $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ şeklinde gösterilir.

Bu sürekliliğe aynı zamanda noktasal süreklilik denir. Bir başka deyişle tanım kümesinde ve x_0 'ın δ komşuluğunda olan noktaların görüntülerinin $f(x_0)$ 'ın ε - komşuluğu içinde kalması demektir. (Şekil.9.5)



Şekil 9.5. Sürekliliğin grafik ifadesi

Tanım.9.5: $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu $\forall x \in A$ noktasında sürekli ise f fonksiyonu A bölgesinde süreklidir denir ve bu sürekliliğe bölgesel süreklilik denir. Bu tanımlara göre $y = f(x)$ fonksiyonun $x = x_0$ noktasında aşağıdaki durumlarda süreksiz olacaktır.

- i. $f(x_0)$ yoksa, (Yani, f fonksiyonu x_0 noktasında tanımlı değilse)
- ii. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ yoksa, (Yani, f fonksiyonun x_0 noktasında limiti yoksa)
- iii. $f(x_0)$ var, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ var fakat; $f(x_0) \neq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ise (Yani f fonksiyonun x_0 'daki değeri x_0 'daki limitine eşit değilse.)

Tanım.9.6: $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A, x \neq x_0$ olsun. Eğer; $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ (Yani, fonksiyonun sağdan limiti o noktadaki değere eşitse) oluyorsa f fonksiyonu $x = x_0$ noktasında sağdan süreklidir denir.

Tanım.9.7: $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A, x \neq x_0$ olsun. Eğer; $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ (Yani, fonksiyonun soldan limiti o noktadaki değere eşitse) oluyorsa f fonksiyonu $x = x_0$ noktasında soldan süreklidir denir.

Teorem.9.7: $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A, x \neq x_0$ olsun. f fonksiyonunun $x = x_0$ noktasında sürekli olabilmesi için gerek ve yeter şart;

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

olmasıdır. Yani; f fonksiyonu x_0 noktasında hem sağdan hemde soldan sürekli ve bunlar eşitse, f fonksiyonu noktasında tam süreklidir veya sadece süreklidir denir.

Not: $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ($a_n \neq 0$) n . dereceden polinom fonksiyonu $\forall x \in \mathbb{R}$ noktasında tanımlı olduğu gibi $\forall x \in \mathbb{R}$ noktasında da süreklidir. Yani;

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \text{ her zaman doğrudur.}$$

9.4.1 Süreklilikle İlgili Teoremler

$f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları $x_0 \in A$ noktasında sürekli ise;

Teorem.9.8: $f \mp g$ fonksiyonları da $x_0 \in A$ noktasında süreklidir.

Teorem.9.9: $f.g$ fonksiyonu da $x_0 \in A$ noktasında süreklidir.

Teorem.9.10: $k \in \mathbb{R}$ (k sabit sayı olmak üzere); $k.f$ ve $k.g$ fonksiyonları da $x_0 \in A$ noktasında süreklidir.

Teorem.9.11: $g(x_0) \neq 0$ olmak üzere $\frac{f}{g}$ fonksiyonu da $x_0 \in A$ noktasında süreklidir.

Teorem.9.12: $f(x_0) \geq 0$ ise $\sqrt{f}$ fonksiyonu da $x_0 \in A$ noktasında süreklidir.

Teorem.9.13: $|f|$ ve $|g|$ fonksiyonları da $x_0 \in A$ noktasında süreklidir.

Sonuç: $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $x_0 \in A$ noktasında tanımsız ise bu noktada süreksizdir.

Teorem.9.14: $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ise alttan ve üstten sınırlıdır. $\sup f[a, b]$ ve $\inf f[a, b]$ değerlerini en az bir noktada alır. Yani; $f(x_0) = \sup f[a, b]$, $f(x_0) = \inf f[a, b]$ olacak şekilde $x_0 \in [a, b]$ ve $x_1 \in [a, b]$ sayıları mevcuttur.

Tanım.9.8: f fonksiyonun $\sup f$ ve $\inf f$ değerlerine sahip olması halinde bu değerlere sırasıyla $\max_{[a, b]} f$ ve $\min_{[a, b]} f$ denir ve mutlak maksimum veya mutlak minimum olarak adlandırılır.

9.5. Eğim ve Türev

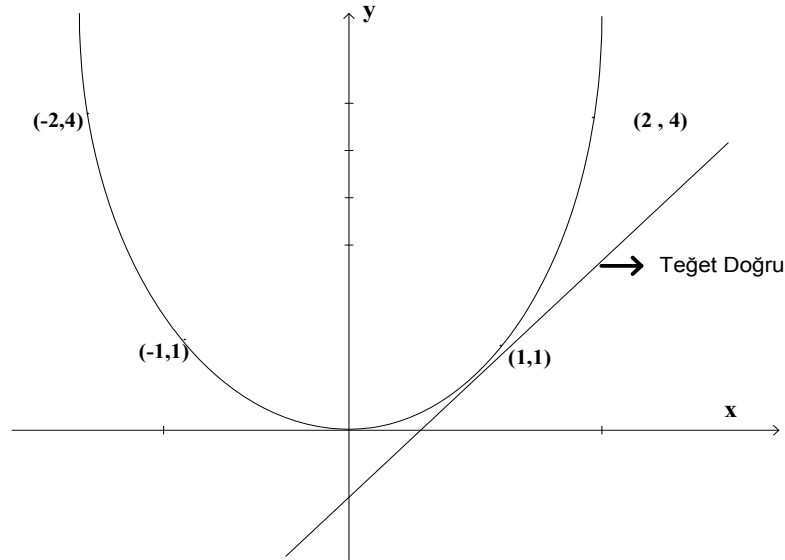
Bir fonksiyonun türevi limit kavramı kullanılarak tanımlanır. Bu nedenle bir fonksiyonun türevine, fonksiyonun temsil ettiği eğrinin üzerinde herhangi bir noktadaki teğet doğrunun eğimi gözü ile bakabiliriz. Şimdi bunu bir örnek ile açıklayalım;

Örnek9.5:

- i) $f(x)=x^2$ parabolünün $x=1$ noktasındaki teğet doğrusunun eğimini bulunuz
- ii) $y = f(x)=x^2$ eğrisi üzerindeki herhangi bir (x,y) noktasındaki eğim formülünü bulunuz.

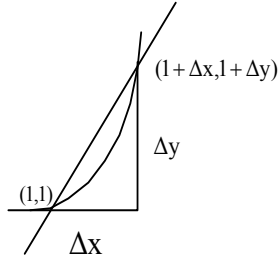
Çözüm.9.5: i) İlk önce eğim ifadesini tanımlayalım : $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ 'dir.

Şimdi de $y = x^2$ parabolünü ve $x=1$ noktasındaki teğet doğruyu çizelim:



Şekil 9.6 $f(x)=x^2$ parabolü

Eğim = $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ formülü ile eğimin belirlenebilmesi için iki noktanın biliniyor olması gerekirken, biz sadece (1,1) noktasına sahibiz. Bu nedenle aşağıdaki şeklimizi göz önüne alalım:



$$1 + \Delta y = f(1 + \Delta x) = (1 + \Delta x)^2 = 1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$1 + \Delta y = 2\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$\Delta y = 2\Delta x + (\Delta x)^2 \text{ elde edilir.}$$

eğim = $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ formülünde bu son değeri yerine yazarsak;

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\Delta x + (\Delta x)^2}{(\Delta x)} = \frac{\Delta x(2 + \Delta x)}{(\Delta x)} = 2 + \Delta x$$

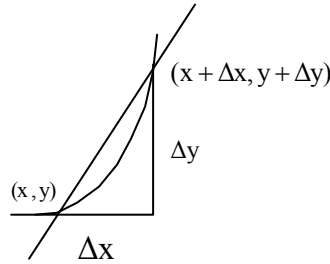
Δx ve Δy , x ve y gibi değişkendirler. Buradan; $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 + \Delta x$ ($\Delta x \neq 0$)

Böylece teğet doğrunun eğimi; $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2 + \Delta x) = 2 + 0 = 2$

olarak bulunur. Bu bulunan ani hızı daha önceki örnekte bulduğumuz ani hızla karşılaştırsak notasyon farklı aynı fakat işlem aynıdır

ii) $y = f(x) = x^2$ eğrisi üzerindeki herhangi bir (x, y) noktasındaki eğim formülünü bulalım.

Bir noktadaki eğim bu noktadaki teğet doğrunun eğimi anlamındadır. Aşağıdaki şekil (x, y) noktasını içeren eğrinin bir kısmını göstermektedir. (x, y) noktası civarında bir değişken nokta seçelim. İki nokta arasında y 'deki fark Δy , x 'deki fark Δx olsun. Buna göre, değişken noktanın koordinatları $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ olur.



Şekil 9.8 $y = f(x) = x^2$ parabolünün küçük bir parçası

Δy ifadesini elde etmeye çalışırsak; $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ iken; $\Delta y = f(x + \Delta x) - y$ olur. $y = f(x)$ değeri yerine yazılırsa;

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \text{ elde edilir. (1)'deki işlemi buna göre tekrar yaparsak;}$$

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 \text{ ve buradan;}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2 + \Delta x)}{\Delta x} = (2x + \Delta x), (\Delta x \rightarrow 0)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x + 0 = 2x$$

Bu işlem matematikte Δ işlemi olarak bilinir. Bu son formül $y=f(x)=x^2$ parabolü üzerindeki herhangi bir (x,y) noktasındaki eğimini bulmak için kullanılır.

Örneğin; $x=1$ noktasındaki eğim; $m = 2x = 2.(1) = 2$ olarak bulunur.

Sonuç itibarı ile bu son formül y' nin x' e göre türevi olarak bilinir ve $f'(x)=2x$ şeklinde yazılır. Buna göre, bu formül x itibarı ile y 'nin ani değişim oranını ifade eder.

Böylece tek değişkenli bir $y = f(x)$ fonksiyonunun türevi olan $f'(x)$;

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \text{ olarak tanımlanır}$$

ve y' , $\frac{dy}{dx}$, $D_x y$, f' sembolleri ile gösterilir. Bu sembollerden $\frac{dy}{dx}$ en yaygın kullanılanıdır.

Türev geometride eğim,fizikte ise ani hız anlamındadır.

Örnek9.6: Türevin tanımını kullanarak $y=f(x)=3x^2+2$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

$$\begin{aligned} \text{Çözüm.9.6: } \Delta y &= f(x+\Delta x) - f(x) = [3(x+\Delta x)^2 + 2(x+\Delta x)] - (3x^2 + 2x) \\ &= 3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 2x + 2\Delta x - 3x^2 - 2x \\ &= 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 2\Delta x \end{aligned}$$

$\Delta y = 3(\Delta x)^2 + 6x\Delta x + 2\Delta x$ olarak bulunur. Buna göre;

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3(\Delta x)^2 + 6x\Delta x + 2\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(3\Delta x + 6x + 2)}{\Delta x} \quad (\Delta x \neq 0)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 3\Delta x + 6x + 2 = 3.0 + 6x + 2 = 6x + 2$$

$f'(x) = 6x+2$ ifadesi $f(x) = 3x^2+2x$ fonksiyonunun temsil ettiği eğrinin üzerinde herhangi bir (x,y) noktasındaki eğimi veren formüldür.

Örnek 9.7: $y = f(x) = mx+b$ fonksiyonunun türevini türev tanımını kullanarak bulunuz.

Çözüm 9.7: $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ ifadesini bulalım;

$$\Delta y = [m.(x+\Delta x) + b] - [m.x + b] = m.x + m.\Delta x + b - m.x - b = m.\Delta x$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{m\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} m = m$$

Böylece, $y=f(x)=mx+b$ fonksiyonunun türevi m sabitine eşittir. $f(x) = mx+b$ fonksiyonunun grafiği bir doğruyu temsil eder ve bu doğrunun eğimi m sabitine eşittir.

9.5.1 Polinom Fonksiyonların Türevi:

1) Sabit fonksiyonların türevi: $y=f(x)=c$ ($c = \text{sbt}$) fonksiyonunun türevi;

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = c - c = 0 \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0 \text{ ise; } f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

O halde; $f(x) = c$ ise $f'(x) = 0$ veya $y = c$ ($c = \text{sbt}$) ise $y' = 0$ 'dır. Örneğin; $y = \frac{3}{5} \Rightarrow y' = 0$

2) $y=f(x)=x^n$ fonksiyonunun türevi:

$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^n - x^n$ iken $(x+\Delta x)^n$ ifadesi Binom Açılımı kullanılarak ;

$$(x + \Delta x)^n = x^n + nx^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n$$

olarak bulunur. Bu değer Δy ifadesinde yerine yazılırsa;

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = x^n + nx^{n-1} \Delta x + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n - x^n$$

$$\Delta y = nx^{n-1} \Delta x + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x (nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} \Delta x + \dots + (\Delta x)^{n-1})}{(\Delta x)^2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} \Delta x + \dots + (\Delta x)^{n-1} \text{ ve böylece;}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} \Delta x + \dots + (\Delta x)^{n-1}$$

ve böylece; $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1}$

Bir başka şekilde ifade etmek gerekirse; $y = x^n \Rightarrow y' = nx^{n-1}$ 'dir.

Örnek 9.8: $y = 3x^4 \Rightarrow y' = ?$ $y' = 3 \cdot 4 \cdot x^{4-1} = 12x^3$

9.5.2 Bir sabitle bir fonksiyonun çarpımının türevi

$f(x) = c \cdot u(x)$ ise $u = u(x)$, ($c = \text{sbt}$) $\Rightarrow f'(x) = c \cdot u'$ olur.

İspat: $y = f(x) = c \cdot u(x)$ olsun.

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = c \cdot u(x+\Delta x) - c \cdot u(x) = c[u(x+\Delta x) - u(x)] = u(x+\Delta x) - u(x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = c \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \text{ olur. Buna göre; } y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} c \cdot \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = c \cdot \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) \text{ elde edilir.}$$

Örnek 9.9: $f(x) = 3x^4 - 2x^3 \Rightarrow f'(x) = ?$

Çözüm 9.9: $f'(x) = 3(x^4)' - 2(x^3)' = 3(4x^3) - 2(3x^2) = 12x^3 - 6x^2$

9.5.3 İki fonksiyonun toplamının türevi:

İki fonksiyonun toplamının türevi fonksiyonların türevleri toplamına eşittir. Yani;

$u = u(x)$ ve $v = v(x)$ olmak üzere;

$f(x) = u(x) + v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$

veya; $y = u + v \Rightarrow y' = u' + v'$ dir.

İspat: $y = f(x) = u(x) + v(x)$ ise $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

$\Delta y = [u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x)] - [u(x) + v(x)]$

$\Delta u = u(x + \Delta x) - u(x)$ } olmak üzere; $\Delta y = [u(x + \Delta x) - u(x)] + [v(x + \Delta x) - v(x)] = \Delta u + \Delta v$
 $\Delta v = v(x + \Delta x) - v(x)$ }

O halde; $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$ ' dir.

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = u'(x) + v'(x)$$

Sonuç: Biraz önce iki fonksiyon için ispat edilen yukarıdaki kural ikiden fazla fonksiyon için şu şekilde ifade edilir. Fonksiyonların toplamının türevi fonksiyonların türevleri toplamına eşittir.

$y = f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 4x + 7$ ise $y' = ?$

$y' = 5(3x^2) - 3(2x^1) + 4(x^0) - 0 = 15x^2 - 6x + 4$

9.6. Türevin Anlaşılması

Bu bölümde türevin daha iyi anlaşılması için bazı önemli fiziksel modeller tanımlanacaktır.

1.Eğim : $y = f(x)$ tek değişkenli bir fonksiyon iken $y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$, fonksiyonunun

belirttiği eğri üzerinde herhangi bir noktadaki eğim için bir formülü belirtir.

2.Hız : $s = f(t)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Burada s düz bir doğru üzerinde bir nesnenin aldığı yol ve t zamandır. Buna göre;

$v = s' = \frac{ds}{dt}$ ifadesi nesnenin herhangi bir zamandaki hızı için formülü verir.

3. İvme : $v = f(t)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Burada v , bir nesnenin düz bir doğru boyunca hızını ve t zamanı belirtir. Buna göre;

$$a = v' = \frac{dv}{dt} \text{ ifadesi bir nesnenin herhangi bir zamandaki ivmesini veren formüldür.}$$

4 . Akım : $q = f(t)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Burada, q bir elektrik akımında bir noktadaki coulomb yükü , t ise saniye cinsinden zamandır. Buna göre;

$$I = q' = \frac{dq}{dt} \text{ ifadesi ise herhangi bir zamandaki amper cinsinden akımı veren formüldür.}$$

5. Güç : $W = f(t)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Burada, W , tüketilen enerji veya bir zaman aralığında yapılan iştir. Buna göre;

$$P = W' = \frac{dW}{dt} \text{ ifadesi herhangi bir zamanda güç çıkışını veren formüldür. } W, \text{ joule}$$

ve t saniye cinsinden ölçüldüğünde P' nin birimi watt olur.

6. Sıcaklık: $T = f(x)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Burada, T , cismin sıcaklığı ve x kesin bir doğrultudaki uzaklıktır. Buna göre;

$$T' = \frac{dT}{dx} = f'(x) \text{ ifadesi } x \text{ doğrultusunda sıcaklığın oranını veren formüldür}$$

7. Gerilim (Potansiyel Fark): $I = f(t)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Burada I devre içerisindeki amper cinsinden akım ve t saniye cinsinden zamandır. Buna göre;

$$V = LI' = L \left(\frac{dI}{dt} \right) \text{ ifadesi } L \text{ bobini üzerindeki gerilimi veren formüldür.}$$

Şimdi farklı uygulamalarla türevin kullanımını ifade eden birkaç örneği inceleyelim.

Örnek9.10: $y = -x^2 + 6x - 8$ parabolü verilsin.

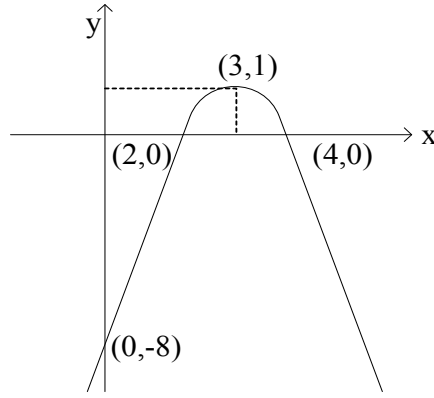
- a) Herhangi bir x noktasındaki eğim formülünü bulunuz.
- b) Parabolün köşe nokta koordinatlarını bulup grafiğini çiziniz.
- c) Köşe noktasında parabolün teğet denklemini bulunuz.

Çözüm.9.10: a) $y = -x^2 + 6x - 8$ ise $y' = -2x + 6$ ifadesi herhangi bir x noktasındaki eğimi veren formüldür.

b) Köşe nokta eğimin sıfır olduğu noktadır. Bu nedenle;

$$y' = 0 \Rightarrow y' = -2x + 6 = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ ve } y = -(3)^2 + 6(3) - 8 = 1$$

Buna göre parabolün köşe noktası; $T(3, 1)$ ve grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil.9.9. $y=-x^2+6x-8$ grafiği

c) $x = 2$ noktasında parabolün teğet denklemini bulalım:

$y' = -2x + 6$ ifadesinde $x=2$ değerini yerine yazarsak;

$$y' = -2(2) + 6 = 2 = m \text{ ve } x = 2 \text{ için } y' = -2^2 + 6 \cdot 2 - 8 = 0$$

O halde eğimi ve bir noktası belli olan doğru denkleminde;

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow (x_0, y_0) = (2, 0) \text{ ve } m = 2 \Rightarrow y - 0 = 2(x - 2)$$

$y = 2x - 4$ doğrusu $x = 2$ noktasındaki teğetin denklemdir.

Örnek.9.11: Bir roket dik olarak yukarı doğru fırlatılıyor. Roketin yeryüzünden uzaklığı

$s = 245t - (4,9)t^2$ ile veriliyor. Burada, t saniye cinsindendir.

a) Hız formülünü bulunuz.

b) Kaç saniye sonra roket en yüksek noktaya ulaşır ve ne kadar yol alır?

c) Herhangi bir t zamanında ivmenin formülünü bulunuz.

Çözüm.9.11: a) Hız formülünü veren ifade s' yi türetmekle elde edilir. Buna göre;

$$V = s' = \frac{ds}{dt} = 245 - 9.80t \text{ 'dır.}$$

b) En yüksek noktada hız sıfırdır. Buna göre;

$$V = 245 - 9.8t = 0 \Rightarrow t = \frac{245}{9.80} = 25 \text{ sn.}$$

Bundan sonra $t = 25$ sn. değerini $s = 245t - 4.9t^2$ ifadesinde yerine yazarsak;

$$s = f(t) = 245 \cdot (25) - 4.9 \cdot (25)^2 = 3063 \text{ m. roketin aldığı yolu verir.}$$

c) Herhangi bir t anındaki ivme V hızını türeterek elde edilir. Buna göre;

$$a = V' = \frac{dv}{dt} = -9.80 \text{ m/sn}^2. \text{ Bilindiği gibi ivme yerçekiminden dolayı sabittir.}$$

Bu ivme s' nin ikinci türevinden elde edilmektedir. Yüksek mertebeden türevler sonraki konularda ele alınacaktır.

Örnek 9.12: Bobin içeren bir elektrik devrede q yükü coulomb cinsinden zamana bağlı olarak $q=0.5t^2-0.01t^3$ ile veriliyor.

- a) Herhangi bir t anındaki akım formülünü bulunuz?
- b) $t=1$ ve $t=10$ sn'de akım değerini bulunuz?
- c) Eğer $L=0.040$ H (*henry*) ise bobin üzerindeki voltajın formülünü bulunuz?

Çözüm 9.12:a) $I=q'=\frac{dq}{dt}=1t-0.03t^2$

b) $t=1$ ve $t=10$ sn'deki I değerleri;

$$t=1 \text{ sn} \Rightarrow I=1(1)-0.03(1)^2=0.97 \text{ Amper}$$

$$t=10 \text{ sn} \Rightarrow I=1(10)-0.03(10)^2=7 \text{ Amper}$$

c) $L=0.040$ H ise; $V = L.I' = L \left(\frac{dI}{dt} \right) = (0.040) (1-0.06t) = 0.04-0.0024t$

9.7. Çarpım ve Bölüm Türevleri:

9.7.1. Çarpım Formülü: u ve v x'in fonksiyonu olsun. Yani; $u=u(x)$, $v=v(x)$ olsun. Bu durumda; $y = f(x) = u.v$ ise $y'=f'(x)=u.v'+u'.v$ dir. Bir başka deyişle iki fonksiyonun çarpımının türevi ile diğerinin çarpımının toplamıdır.

Örnek 9.13: $f(x) = (3x^2-1)(5x-3) \Rightarrow f'(x)=?$

Çözüm 9.13: $\left. \begin{array}{l} u=u(x)=3x^2-1 \\ v=v(x)=5x-3 \end{array} \right\} f'(x) = u.v'+u'.v$

$$f'(x) = (3x^2-1).(5) + (6.x).(5x-3) = 15x^2-5+30x^2-18x = 45x^2-18x-5$$

veya parantezlerin açılmasıyla;

$$f(x)=15x^3-9x^2-5x+3 \text{ ise } f'(x)=45x^2-18x-5 \text{ olarak bulunur.}$$

9.7.1.1. Çarpım Formülünün İspatı:

$y=f(x)=u(x).v(x)$ iken; $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ tanımından;

$$\Delta y=[u(x+\Delta x)][v(x+\Delta x)]-u(x).v(x)$$

$$\Delta u=u(x+\Delta x)-u(x) \Rightarrow u(x+\Delta x)=u(x)+\Delta u$$

$$\Delta v=v(x+\Delta x)-v(x) \Rightarrow v(x+\Delta x)=v(x)+\Delta v$$

Bu son değerleri sırasıyla $u(x+\Delta x)$ ve $v(x+\Delta x)$ ifadeleri yerine yazarsak;

$$\Delta y=[u(x)+\Delta u][v(x)+\Delta v]-u(x).v(x)=u(x).v(x)+\Delta u.v(x)+\Delta u.\Delta v+u(x)\Delta v-u(x)\Delta v$$

$$\Delta y=u(x).\Delta v+v(x).\Delta u+\Delta u.\Delta v \text{ bulunur.}$$

Buradan; $\frac{\Delta y}{\Delta x} = u(x) \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta \Delta$ olur ve;

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = u(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v$$

$\Delta x \rightarrow 0$ için $u(x)$ ve $v(x)$ değişmez fakat $\Delta u \rightarrow 0, \Delta v \rightarrow 0$ 'a yaklaşırlar. Böylece;

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = u(x) \cdot v'(x) + v(x) \cdot u'(x) + u'(x)(0) \text{ ise } y' = u' \cdot v + v' \cdot u \text{ olarak bulunur.}$$

9.7.2. Bölüm Formülü: $u=u(x)$ ve $v=v(x)$ olmak üzere;

$$y = f(x) = \frac{\Delta u}{\Delta v} \text{ fonksiyonunun türevi; } y' = f'(x) = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2} \text{ şeklindedir.}$$

Örnek 9.14: $f(x) = \frac{x^3 - 2}{2x}$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

Çözüm 9.14: $u=x^3-2$ ise $u'=3x^2$ ve $v=2x$ ise $v'=2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} = \frac{3x^2 \cdot (2x) - (x^3 - 2) \cdot 2}{2x^2} \\ \text{Buna göre;} \\ f'(x) &= \left(\frac{6x^3 - 2x^3 + 4}{4x^2} \right) = \frac{4x^3 + 4}{4x^2} = \frac{x^3 + 1}{x^2} \end{aligned}$$

9.7.2.1. Bölüm Formülünün İspatı

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} \\ y = f(x) &= \frac{u(x)}{v(x)} \text{ iken; } \Delta u = u(x + \Delta x) - u(x) \text{ ise } u(x + \Delta x) = \Delta u + u(x) \\ \Delta v &= v(x + \Delta x) - v(x) \text{ ise } v(x + \Delta x) = \Delta v + v(x) \end{aligned}$$

değerlerini Δy 'de yerine yazarsak;

$$\begin{aligned} \Delta y &= \frac{\Delta u + u(x)}{\Delta v + v(x)} - \frac{u(x)}{v(x)} \\ &= \frac{[v(x)] [\Delta u + u(x)] - [\Delta v + v(x)] u(x)}{v(x) \cdot [\Delta v + v(x)]} \\ \Delta y &= \frac{v(x) \Delta u + u(x) v(x) - \Delta v \cdot u(x) - u(x) v(x)}{v(x) \cdot [\Delta v + v(x)]} \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v(x) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} - u(x) \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x) \cdot [\Delta v + v(x)]}$$

$\Delta x \rightarrow 0$ için $\Delta u \rightarrow 0$ ve $\Delta v \rightarrow 0$ olur. Buna göre;

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v(x) \cdot u'(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)[v(x) + 0]}$$

$$y' = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2} \quad \text{olarak bulunur.}$$

9.7.3. $y=x^n$ ifadesinin genişletilmesi : n negatif tamsayı alınarak bölüm formülünden;

$$y = x^n = x^{-m} = \frac{1}{x^m} \quad (m = \text{pozitif tamsayı})$$

$$\text{ise; } y' = \frac{(0) \cdot x^m - 1 \cdot x^{m-1}}{x^{2m}} = \frac{-x^{m-1}}{x^{2m}} = -x^{m-1-2m}$$

$$y' = -x^{(-m-1)} = -n \cdot x^{n-1} \quad (n = -m)$$

$$\text{Eğer, } y = x^n \text{ ise } y' = n \cdot x^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

Örnek 9.15: $s = \frac{2}{t^2} - \frac{3}{t^3}$ ise $s' = \frac{ds}{dt} = ?$

$$s = 2t^{-2} - 3t^{-3} \text{ yazarsak;}$$

Çözüm 9.15: $\frac{ds}{dt} = (-2) \cdot 2 \cdot t^{-3} + 3 \cdot 3 \cdot t^{-4} = -4 \cdot t^{-3} + 9 \cdot t^{-4} = -\frac{4}{t^3} + \frac{9}{t^4}$ olur.

9.8. Zincir Kuralı: y, u 'nun bir fonksiyonu ve u 'da x 'in bir fonksiyonu iken y' nin x 'e göre türevi y 'nin u 'ya göre türevi ile u 'nun x 'e göre türevinin çarpımıdır. Yani; $y=y(u)$,

$u=u(x)$ iken; $\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$ şeklinde tanımlanır.

Örnek 9.16: $y=(5x^2-2x+1)^3$ ise $y'=\frac{dy}{dx}=?$

Çözüm 9.16: $u=5x^2-2x+1$ olarak alırsak $y=u^3$ olur. Buna göre;

$$\frac{dy}{du} = 3 \cdot u^2 \text{ ve } \frac{du}{dx} = 10x - 2 \text{ olur. Bu değerleri } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \text{ ifadesinde yerine yazarsak;}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (3u^2)(10x - 2) = 3(5x^2 - 2x + 1)^2 \cdot (10x - 2)$$

9.8.1. Zincir Kuralının İspatı : $y=f(u(x))$ fonksiyonunu göz önüne alalım ;

$u=u(x)$ ve $f=f(u)$ olsun.

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$ özdeşliği $x, \Delta x$ ile $y, \Delta y$ ile ve $u, \Delta u$ ile değiştirilirse doğrudur.

$\Delta x \rightarrow 0$ için $\Delta y \rightarrow 0$ ve $\Delta u \rightarrow 0$ olacağından; $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right)$

Bu çarpımın limiti, limitlerin çarpımına eşit olacağından;

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \quad \text{yani; } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{'dir.}$$

Buna göre; $y=u^n, u=u(x)$ iken ; $\frac{dy}{dx} = y' = n.u^{n-1} \cdot (u')$ ($n \in \mathbb{Q}$)

İspat: $y=u^{p/q}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $u=u(x)$ ve p, q tamsayılardır.

$y=u^{p/q}$ iken her iki tarafın q .ncü kuvveti alınır; $y^q = u^p$ olur.

Her iki tarafın zincir kuralına göre türevini alırsak;

$$q \cdot y^{q-1} \cdot (y') = p \cdot u^{p-1} \cdot (u') \quad \text{ve buradan } y' = \frac{p \cdot u^{p-1} \cdot (u')}{q \cdot y^{q-1}} \quad \text{olur.}$$

Bu ifadede $y=u^{p/q}$ yerine yazarsak; $y' = \frac{p \cdot u^{p-1} \cdot (u')}{q \cdot u^{(p/q) \cdot (q-1)}} = \frac{p}{q} \cdot u^{\left(\frac{p}{q} - 1\right)} \cdot u' \quad \text{bulunur.}$

Örnek 9.17: $f(x) = \sqrt[3]{x} \Rightarrow f'(x) = ?$

Çözüm 9.17 :

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot x^{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} x^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Örnek 9.18: $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = ?$

Çözüm 9.18 : $y=(x^2+1)^{-1/2}$ olarak düzenlersek;

$$u=x^2+1, u'=2x \text{ olur. Buna göre; } y' = -\frac{1}{2} \cdot (x^2+1)^{-\frac{3}{2}} \cdot (2x) = (x^2+1)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-x) = \frac{-x}{(\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$$

Örnek 9.19: $f(h) = (h^2 - 1) \cdot (\sqrt{3 - 2h})$ ise $f'(h) = ?$

Çözüm 9.19: $h^2 - 1 = u$, $\sqrt{3 - 2h} = v$ dersek; $f(h) = u \cdot v$, $u = u(h)$, $v = v(h)$ olur. $f'(h)$ değerini bulabilmek için çarpım kuralını kullanırsak; $f'(h) = u \cdot v' + u' \cdot v$ den;

Örnek 9.20: $w = \sqrt{\frac{p}{p-2}} \Rightarrow w' = \frac{dw}{dp} = ?$

Çözüm 9.20:

$$w = \left(\frac{p}{p-2} \right)^{1/2} \text{ yazarsak;}$$

$$w' = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{p-2} \right)^{-1/2} \left[\frac{-2}{(p-2)^2} \right] \text{ olur. Daha basit bir şekilde yazarsak;}$$

$$w' = - \frac{\sqrt{p-2}}{(p-2)^2 \sqrt{p}} = - \frac{\sqrt{p(p-2)}}{p(p-2)^2} = - (p-2)^{-3/2} \cdot p^{-1/2} = - \frac{1}{(p-2)^{3/2} p^{1/2}}$$

olarak bulunur.

Şimdiye kadar verilen formülleri basit bir tablo ile ifade edersek;

Tablo 9.1. Bazı fonksiyonların türevleri

Fonksiyon $y=f(x)$	Türevi $y' = f'(x)$	Fonksiyon $u = u(x)$ $y = f(u)$	Türevi $y' = f'(u)$
$f(x) = c$ (sabit) $\rightarrow$	$f'(x) = 0$	$y = u^n \rightarrow$	$y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
$f(x) = x^n$ (neQ) $\rightarrow$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$	$y = \sin u \rightarrow$	$y' = u' \cdot \cos u$
$f(x) = \ln x \rightarrow$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$y = \cos u \rightarrow$	$y' = -u' \cdot \sin u$
$f(x) = \sin x \rightarrow$	$f'(x) = \cos x$	$y = \ln u \rightarrow$	$y' = \frac{1}{u} \cdot u'$
$f(x) = \cos x \rightarrow$	$f'(x) = -\sin x$	$y = u \cdot v \rightarrow$	$y' = u' \cdot v + u \cdot v'$
$f(x) = a^x$ ($a > 0$) $\rightarrow$	$f'(x) = a^x \cdot \ln a$	$y = \frac{u}{v} \rightarrow$	$y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
$f(x) = e^x \rightarrow$	$f'(x) = e^x$	$y = a^u \rightarrow$	$y' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
		$y = e^u \rightarrow$	$y' = e^u \cdot u'$

9.9. Kapalı Fonksiyonların Türevi: $y=f(x)$ formunda y , x 'in terimlerinde direkt olarak ifade edilebilir. Yani y , x 'in açık bir fonksiyonudur. Değişken sayısı iki iken bu bir formül veya bir denklem ile ifade edilir. Yani bir değişken diğerinin terimlerinde direkt olarak ifade edilemez, bu durumda bir değişken diğerinin kapalı bir fonksiyonu olarak tamamlanır. Kapalı bir fonksiyon bazen değişkenlerin birine göre çözülebilir ve diğer değişkene göre açık bir fonksiyon olarak ifade edilirse de bu her zaman mümkün olmaz.

Bu tanımlar ışığında iki değişken için kapalı bir fonksiyonu denklem formunda;

$F(x,y)=0$ şeklinde tanımlayabiliriz. Bu tanımlama n-değişken için;

$$F(\underbrace{x, y, u, v, \dots}_{n \text{ tane}}) = 0 \quad \text{şeklinde genişletilebilir.}$$

Şimdi açık ve kapalı fonksiyonlarda örnekler verelim.

- 1) $3x-y=5$ doğrusunu göz önüne alalım. Bu formda y , x 'in kapalı bir fonksiyonu olarak tanımlanmıştı. Bu denklem $y=3x-5$ için çözüldüğünde y , x 'in bir açık fonksiyonu olarak ifade edilebilir.
- 2) $I.R=16$ formülünü göz önüne alırsak; bu formda I , R 'nin kapalı bir fonksiyonu olarak tanımlanmıştır. Bu denklem $I=16/R$ için çözülrse, I , R 'nin açık bir fonksiyonu olur.
- 3) $x^2+y^2=9$ çemberini göz önüne alalım. Bu denklem y 'yi x 'in kapalı bir fonksiyonu olarak tanımlar. Bu denklem ; $y = \pm\sqrt{16-x^2}$ için çözüldüğünde x 'in $y = \sqrt{16-x^2}$, $y = -\sqrt{16-x^2}$ gibi iki açık fonksiyonu tanımlamış olur.
- 4) $s^3+s^2t-t^3=0$ denklemi de s 'yi t 'nin kapalı bir fonksiyonu olarak tanımlanır. Fakat bu denklemi s için çözmek ve s 'yi t 'nin bir açık fonksiyonu olarak ifade etmek çok güçtür. Bu nedenle bu fonksiyon için kapalı formda çalışmak daha kolaydır. Bu nedenle kompleks kapalı fonksiyonları açık fonksiyonlara dönüştürmek mümkün değildir. Kapalı bir fonksiyonun türevi ise aşağıdaki kural uygulanarak bulunur.

$f(x,y)=0$ denklem formundaki iki değişkenli kapalı fonksiyonu verildiğinde;

$y' = \frac{dy}{dx}$ türevi bu denklemin her bir terimi x 'e göre türetilerek bulunur.

Örnek 9.21: $3x^2 - 4x - 2y + 3 = 0 \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = ?$

Çözüm 9.21: $6x \cdot (1) - 4 - 2 \frac{dy}{dx} = 0$ veya $6x - 4 - 2y' = 0$
 $6x - 4 = 2y' \Rightarrow y' = 3x - 2$ olarak bulunur.

Örnek 9.22: $I.R=16$ formülünü ele alalım.a) $I' = \frac{dI}{dR}$ türevini kapalı formda bulunuz.

b) I' türevini açık formda bulunuz.(a) ve (b) yanıtlarının aynı olduğunu gösteriniz.

Çözüm:a)

$$I' = \frac{dI}{dR} = I \cdot (1) + R \cdot I' = 0$$

$$\text{Buradan; } RI' = -I \Rightarrow \underline{\underline{I' = -\frac{I}{R}}}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } I \cdot R = 16 & \Rightarrow I = \frac{16}{R} \\ & \Rightarrow I = 16 \cdot R^{-1} \Rightarrow I' = -16R^{-1-1} = -16R^{-2} = -\frac{16}{R^2} \end{aligned}$$

$I' = \frac{dI}{dR}$ kapalı formda elde edilen türevde $I = \frac{16}{R}$ değerini yerine

yazarsak;
$$I' = \frac{\frac{16}{R}}{R} = -\frac{16}{R^2} \text{ olur.}$$

Örnek9.23: $x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = ?$

$$2x(1) + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \text{ ise } 2y \cdot \frac{dy}{dx} = -2x \text{ veya } 2y \cdot y' = -2x$$

Çözüm.9.23:

olur. Buradan, $y \cdot y' = -x$ veya $y' = \frac{-x}{y}$ bulunur.

Örnek9.24: $s^3 + s^2t - t^3 = 0 \Rightarrow s' = \frac{ds}{dt} = ?$

$$3s^2 \cdot \frac{ds}{dt} + 2s \frac{ds}{dt} t + s^2 - 3t^2(1) = 0 \Rightarrow 3s^2 \cdot s' + 2ss' \cdot t + s^2 - 3t^2 = 0$$

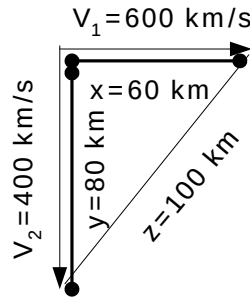
Çözüm.9.24:

$$s' \cdot [3s^2 + 2st] = 3t^2 - s^2 \Rightarrow s' = \frac{3t^2 - s^2}{3s^2 + 2st}$$

Örnek.9.25: İki uçak hava alanına doğru aynı irtifada uçuyorlar. İlk uçak hava alanının 60 km doğusunda ve hızı 600 km/s gitmektedir. İkinci uçak ise hava alanının 80 km güneyinde ve hızı 400 km/s gitmektedir. Buna göre uçaklar arasındaki mesafe hangi hızla azalır.

Çözüm.9.25 : Şekilde uçakların hızları ve hava alanına uzaklıkları gösterilmiştir. Uzaklık sürekli olarak değişmekte ve belirli bir zamanda uzaklık değerleri bilinse bile bir değişken ile tanımlamak gerekir.

x : İlk uçağın havaalanına uzaklığı.
y : İkinci uçağın havaalanına uzaklığı.
z : İki uçak arası mesafe.



Şekilde de görüldüğü gibi pisagor teoreminden, $x^2 + y^2 = z^2$

Buradan $z = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{80^2 + 60^2} = 100 \text{ km/h}$

$x^2 + y^2 = z^2$ denklemi de uzaklıklar arasındaki bağıntıyı her bir terime göre türev olarak, t 'ye göre türevini alarak bulabiliriz.

Buna göre ;

$$\begin{aligned} 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} &= 2z \frac{dz}{dt} \\ 2xx' + 2yy' &= 2zz' \\ xx' + yy' &= zz' \end{aligned}$$

Burada ; $\frac{dx}{dt} = x' \Rightarrow x'$ 'in t 'ye göre değişimi olup

$$\frac{dx}{dt} = x' \Rightarrow \text{İlk uçağın hızı} = 600 \text{ km/h}$$

Aynı şekilde y 'de t 'ye göre değişim olup

$$\frac{dy}{dt} = y' \Rightarrow \text{İkinci uçağın hızı} = 400 \text{ km/h}$$

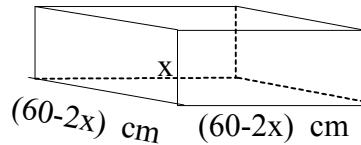
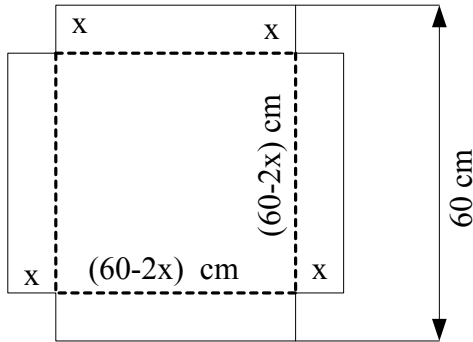
$$\frac{dz}{dt} = z' \Rightarrow \text{Uçakların birbirine yaklaşma hızıdır.}$$

Böylece $xx' + yy' = zz'$ denkleminden z' çekilip diğer bilinenler yerine yazılırsa ;

$$60(60) + 80(400) = 100z' \Rightarrow z' = 680 \text{ km/h}$$

Örnek.9.26: Kenar uzunluğu 60cm olan kare şeklindeki bir metal levhanın köşelerinden kare şeklinde parçalar kesilip atılıyor ve geri kalan kısım ile üstü açık kutu yapılıyor. Kutu hacminin maksimum olması için kesilen parçanın uzunluğu ne olmalıdır.

Çözüm.9.26 :



- 1) Maksimum. hacmi bulmak için değişkene x diyelim.

2)Denklemimiz,

$$V = (\text{Taban Alanı}) \cdot (\text{Yükseklik})$$

$$V = (60 - 2x)^2 \cdot x$$

3)Her iki tarafın türevini alırsak,

$$V' = \frac{dV}{dx} = x(2)(60 - 2x)(-2) + (60 - 2x)^2 = 0$$

$$= -4x(60 - 2x)(-2) + (60 - 2x)^2 = 0$$

$$= (60 - 2x)(-4x + 60 - 2x) = 0$$

$$= (60 - 2x)(60 - 6x) = 0$$

4)Her bir çarpanı sıfıra eşitlersek ;

$$60 - 2x = 0 \text{ ise } x = 30 \text{ cm}$$

$$60 - 6x = 0 \text{ ise } x = 10 \text{ cm olur.}$$

5)1.Türev tablosunun değişimi incelenerek;

x	$-\infty$	10	30	$+\infty$			
y'	- - -	○	+	+	+	○	- - -
y		1600	0				
		maksimum	minimum				

(10,1600) maksimum hacim değeri, yani $x = 10$ cm iken hacim 16000 cm^3 'dür.

Örnek.9.27: Çarpımları 100 olan, toplamaları en küçük pozitif iki sayı nedir.

Çözüm.9.27 : Sayılardan birisine x , diğerine y diyelim.

x : 1.pozitif sayı ve y : 2.pozitif sayı olsun. $x \cdot y = 100$ ise $y = \frac{100}{x}$ olur.Buna göre;

İki sayının toplamı ; $S = x + \frac{100}{x}$ bulunur. S' nin türevi alınıp sıfıra eşitlenerek;

$$\frac{dS}{dx} = 1 - \frac{100}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 100 \Rightarrow x = \pm 10 \text{ bulunur. Pozitif rakamları istediğimiz için}$$

$$(-10)'u \text{ değil, } (+10)'u \text{ alırız. Diğer rakam } \Rightarrow y = \frac{100}{10} = 10 \text{ olur.}$$

9.10.Yerel (Lokal) Maksimum ve Minimumlar ve Ortalama Değer Teoremleri

Daha önce kapalı aralıklarda sürekli fonksiyonların mutlak maksimum ve minimumlarını incelemiştik. Ancak (özellikle türevi olan fonksiyonlar için) yerel maksimum ve minimumlar daha önemlidir. Şimdi bunları tanımlayalım.

$f : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin ve $x_0 \in A$ olsun.

U , x_0 noktasının uygun bir komşuluğu olmak üzere, her $x \in U \cap A$ için

$$f(x_0) \geq f(x)$$

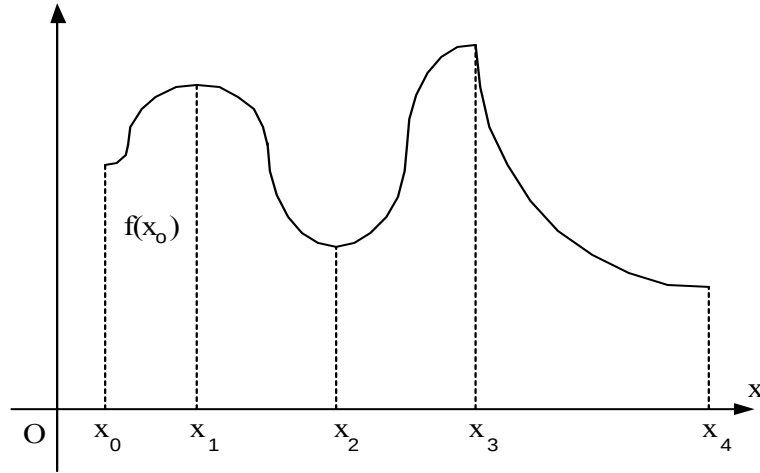
ise, x_0 noktasına f fonksiyonunun A kümesi üzerindeki yerel (veya lokal) bir maksimum noktası, $f(x_0)$ değerine yerel bir maksimum değeri denir.

Benzer şekilde U , x_0 noktasının uygun bir komşuluğu olmak üzere, her $x \in U \cap A$ için

$$f(x_0) \leq f(x)$$

ise, x_0 noktasına f fonksiyonunun A üzerindeki yerel bir minimum noktası ve $f(x_0)$ değerine yerel bir minimum değeri denir. A kümesinin bir (a,b) aralığı olması halinde $U \cap A$ kümesi, x_0 noktasının $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ şeklinde bir ε -komşuluğu olarak alınabilir.

(Bu durumda $U = U \cap A$ yani; $U \subset A$ sağlanabilir). Yerel bir maksimum veya minimum noktasına (veya değerine) bir ekstremum noktası (veya değeri) da denir. Aşağıdaki şekilde x_0 , x_2 ve x_4 noktaları yerel minimum noktaları, x_1 ve x_3 noktaları da yerel maksimum noktalarıdır.



Şekil.9.6. Maksimum ve minimum noktalar

Türevi olan fonksiyonlarda yerel ekstremumlar için çok kullanışlı bir şart vermek mümkündür.

Teorem 9.14: $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $(A = (a,b))$ türevi olan bir fonksiyon olsun ve $x_0 \in (a,b)$ yerel bir ekstremum (maksimum yada minimum) nokta olsun. Bu durumda $f'(x_0) = 0$ dır.

İspat. Teoremi maksimum için gösterelim. (Minimum için benzer şekilde gösteriniz).

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\lambda(x) \quad , \quad \lambda(x_0) = f'(x_0) \text{ yazabiliriz.}$$

$\lambda(x_0) = 0$ olduğunu göstermek istiyoruz.

Önce $\lambda(x_0) > 0$ olduğunu varsayalım.

$U = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset (a,b)$ üzerinde $f(x_0) \geq f(x)$, $(x \in A)$ olsun. λ fonksiyonu x_0 da sürekli olduğundan, ε gerektiğinde daha da küçültülerek, $x \in U$ için $\lambda(x) > 0$ olması sağlanabilir. Şimdi U içinde $x > x_0$ şeklinde bir nokta seçersek $(x_0 < x < x_0 + \varepsilon)$,

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\lambda(x) > f(x_0)$$

olur. Bu da $f(x_0)$ ın U daki maksimumluğa ters düşer. Şimdi $\lambda(x_0) < 0$ olduğunu varsayalım.

$U = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset (a,b)$ üzerinde $f(x_0)$ maksimum ve $\lambda(x) < 0$ olsun.

$x_0 - \varepsilon < x < x_0$ şeklindeki bir x noktasında

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\lambda(x) > f(x_0)$$

olur ve bu da $f(x_0)$ ın U daki maksimumluğa ters düşer. O halde;

$$\lambda(x_0) = f'(x_0) = 0 \text{ olmak zorundadır.}$$

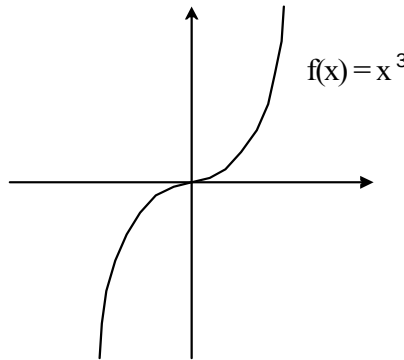
Not: $f : (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ türevi olan bir fonksiyon olsun. Eğer $x_0 \in (a,b)$ noktası için $f'(x_0) = 0$ ise, bu noktada fonksiyonun bir ekstremumu olması gerekmez.

Örneğin, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = x^3$

fonksiyonunu alalım. Bu fonksiyonun türevi vardır ve $x_0 = 0$ noktasında $f'(x_0) = 0$ dır.

Ancak $\varepsilon > 0$ olmak üzere $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ için, $f(x) < 0$ ve $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ için $f(x) > 0$

olduğundan, $f(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasında bir ekstremumu olmaz. (Şekil.9.7)

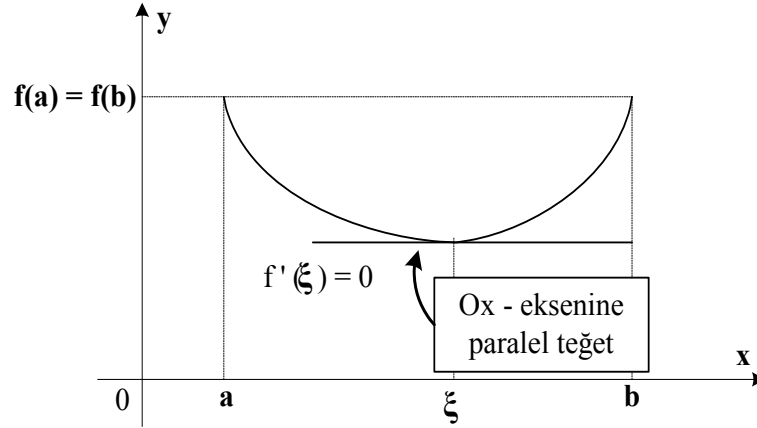


Şekil.9.7. $f(x)=x^3$ grafiği

Teorem 9.15. Rolle Teoremi: $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $(a < b)$ fonksiyonu sürekli ve $x \in (a, b)$ noktalarında türe ve sahip olsun. Bundan başka, $f(a) = f(b)$ olsun.

Bu durumda $f'(\xi) = 0$ olacak şekilde bir $\xi \in (a, b)$ noktası vardır.

Ispat.



Şekil.9.8. Rolle teoreminin grafik gösterimi

$f(a) = f(b) = c$ diyelim. Fonksiyon tüm aralıkta sabitse, türevi sıfır olup, istenilen özellikte bir ξ noktası vardır. Eğer fonksiyon sabit değilse, o zaman $[a, b]$ 'deki mutlak maksimum veya minimum değeri c den farklı bir sayı olacaktır. $f(a) = f(b) = c$ olduğundan bu ξ noktası (a, b) açık aralığındadır.

Bu ekstremum (maksimum yada minimum) aynı zamanda yerel bir ekstremum olduğundan önceki teoremi f fonksiyonunun (a, b) açık aralığına kısıtlanmışına uyguladığımızda $f'(\xi) = 0$ elde edilir.

Yani Rolle teoremine göre, kapalı bir aralıkta sürekli, aralığın iç noktalarında türevi olan bir fonksiyon aralığın uç noktalarında aynı değeri alırsa, bu fonksiyonu temsil eden eğrinin Ox -eksenine paralel bir teğeti vardır.

Örnek 9.26: $f(x) = 3x^{10} - 5x^9 + 6x^3 - x^2 - 3x + 3$ fonksiyonunun $[0, 1]$ 'de yatay teğeti var mıdır?

Çözüm 9.26: Fonksiyon polinom fonksiyon olduğundan $[0, 1]$ aralığında sürekli ve $(0, 1)$ aralığında türetilebilir bir fonksiyondur. Bundan başka $f(0) = f(1) = 3$ olduğundan Rolle teoremi koşulları sağlanmış olur. Rolle teoremine göre en az bir $c \in (0, 1)$ için $f'(c) = 0$ dır.

Dolayısıyla $(0, 1)$ aralığında en az bir c noktasında fonksiyonun yatay teğeti vardır.

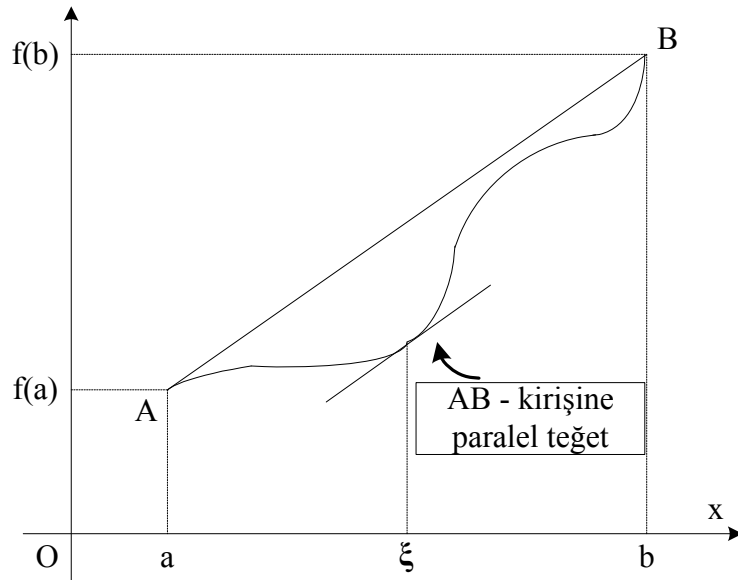
O halde; $f'(x) = 30x^9 - 45x^8 + 18x^2 - 2x - 3 = 0$

denkleminin $(0, 1)$ aralığında en az bir kökü vardır.

Teorem 9.16:(Ortalama Değer Teoremi): $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, ($a < b$) fonksiyonu sürekli ve (a, b) aralığında türe ve sahip olsun. Bu durumda;

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) \text{ olacak şekilde bir } \xi \in (a, b) \text{ vardır.}$$

İspat.



Şekil.9.9. Ortalama Değer teoreminin grafik gösterimi

$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$ olsun. $F(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ de sürekli ve (a, b) de türe ve sahiptir. Bundan başka $F(a) = F(b) = 0$ dır. O halde Rolle teoremine göre $F'(\xi) = 0$ olacak şekilde bir $\xi \in (a, b)$ noktası vardır.

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ olduğundan}$$

$$0 = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ yani } f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ elde edilir.}$$

Ortalama değer teoremine göre, kapalı bir aralıkta sürekli, aralığın iç noktalarında türevi olan bir fonksiyonunun grafiğinin, uç noktalarını birleştiren kirişine paralel bir teğeti vardır.

Not: a ile b arasındaki bir ξ sayısı, $0 < \theta < 1$ olmak üzere $a + \theta \cdot (b - a)$ şeklinde ifade edilebilir. $b - a = h$ denilecek olursa, ortalama değer teoremi şu şekli alır:

$$f(a + h) - f(a) = h \cdot f'(a + \theta \cdot h)$$

Yukarıdaki teoremin çok önemli bir neticesi şudur.

Teorem 9.17. Ortalama Değer Teoreminin Genişlemesi

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve (a, b) de türeve sahip olsun.

Eğer her $x \in (a, b)$ için $f'(x) = 0$ ise, fonksiyon sabittir.

İspat. x_1 ve x_2 ($x_1 < x_2$) $[a, b]$ aralığında iki nokta olsun. Yukarıdaki teoremi f fonksiyonunun $[x_1, x_2]$ aralığına kısıtlanışına uygularsak, $x_1 < \xi < x_2$ olmak üzere;

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) \quad (1)$$

yazabiliriz. $f'(\xi) = 0$ olduğundan, (1) eşitliğinden $f(x_1) = f(x_2)$ elde edilir.

Teorem 9.18. Genelleştirilmiş Ortalama Değer Teoremi

f ve g fonksiyonları $[a, b]$ aralığında sürekli ve (a, b) de türeve sahip olsunlar. Bundan başka $x \in (a, b)$ için $g'(x) \neq 0$ olsun. Bu durumda $g(a) \neq g(b)$ dır ve

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

olacak şekilde bir $\xi \in (a, b)$ sayısı vardır.

Not: $g(x) = x$ için ilk ortalama değer teoreminin elde edildiğine dikkat ediniz.

İspat: $g(a) \neq g(b)$ olması Rolle teoreminin bir sonucudur. (Aksi halde arada bir noktada $g'(x) = 0$ olurdu). Şimdi yardımcı fonksiyon olarak;

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} (g(x) - g(a))$$

alalım. $F(x)$ $[a, b]$ aralığında süreklidir ve (a, b) aralığında türevi vardır. Bundan başka ;

$$F(a) = F(b) = f(a)$$

dır. O halde Rolle teoremine göre bir $\xi \in (a, b)$ noktasında $F'(\xi) = 0$ olur.

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(x)$$

olduğundan, ξ noktasında;

$$f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(\xi) = 0 \quad \text{yani ;} \quad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad \text{elde edilir.}$$

$\xi = a + \theta (b - a)$, $(0 < \theta < 1)$ yazılabilir. $b - a = h$ dersek, yukarıdaki eşitlik

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{g(a + h) - g(a)} = \frac{f'(a + \theta h)}{g'(a + \theta h)} \quad \text{şeklinde ifade edilebilir.}$$

Teorem.9.18 yardımıyla L'Hospital kuralı olarak bilinen bir limit bulma kuralı ispatlanabilir.

Teorem 9.19: f ve g fonksiyonlarının (a,b) aralığında türevleri olsun, $x_0 \in (a,b)$ için $f(x_0)=g(x_0)=0$ olsun. f' ve g' fonksiyonları x_0 noktasında sürekli olsunlar ve $g'(x_0) \neq 0$ olsun.

Bu durumda; $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$ 'dır.

İspat. $x_n \in (a,b)$, $x_n \neq x_0$, $x_n \rightarrow x_0$ olmak üzere (x_n) dizisi verilsin.

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(x_0)}{g(x_n) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} , \quad (x_n < \xi_n < x_0 \text{ veya } x_0 < \xi_n < x_n)$$

$x_n \rightarrow x_0$ için $\xi_n \rightarrow x_0$ olup, f' ve g' x_0 'da sürekli olduklarından $x_n \rightarrow x_0$ için

$$f'(\xi_n) \rightarrow g'(x_0) \quad \text{ve} \quad g'(\xi_n) \rightarrow g'(x_0) \neq 0$$

$$\text{O halde; } \lim_{x_n \rightarrow x_0} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \quad \text{yani} \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \text{ elde edilir.}$$

Örnek 9.27: $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x)=x^3+1$; $g(x)=x^2-1$ olsun. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+1}{x^2-1}$ nedir?

Çözüm.9.27: $x=-1$ için $f(-1)=0$, $g(-1)=0$ dır.

$$f'(x) = 3x^2 , \quad f'(-1) = 3 \Rightarrow g'(x) = 2x , \quad g'(-1) = -2 \neq 0 \quad \text{dır.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+1}{x^2-1} = \frac{f'(-1)}{g'(-1)} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2} \text{ olur.}$$

NOT L'Hospital kuralının uygulamasında $f'(x_0) = g'(x_0) = 0$ şeklinde bir durumla

karşılaşılabılır. Ancak, önemli olan $\lim_{\xi \rightarrow x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ limitinin var olup olmadığıdır. f' ve g'

fonksiyonlarının x_0 da sürekliliği ve $g'(x_0) \neq 0$ koşulları, sadece limit tayinini kolaylaştırmak için kullanılmıştır. f' ve g' fonksiyonlarının türevleri varsa, $f'(x_0) = g'(x_0) = 0$ halinde, kural

tekrar uygulanarak $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)}$ limitinin mevcut olup olmadığı araştırılabilir (ve bu işlem

sürdürülebilir).

Örnek 9.28: $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=x^4-2x^2+1$ ve $g(x)=x^3-3x+2$ olmak üzere;

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ limitini bulalım.}$$

$$f(1) = g(1) = 0$$

Çözüm 9.28: $f'(x) = 4x^3 - 4x$ ve $g'(x) = 3x^2 - 3$ olur.
 $f'(1) = 0$ $g'(1) = 0$

$$f''(x) = 12x^2 - 4 \quad \text{ve} \quad g''(x) = 6x \quad \text{olup,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{12x^2 - 4}{6x} = \frac{4}{3} \text{ olduğundan;}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{4}{3} \text{ bulunur.}$$

Örnek 9.29: $f: \mathbb{R} - \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{(x-1)^3}{x^4 - 2x^3 + 2x - 1} \text{ olduğuna göre } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ limitini hesaplayalım.}$$

Çözüm 9.29: $x \rightarrow 1$ için $\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır. L'Hospital teoremine göre bu limit (eğer varsa)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)^2}{4x^3 - 6x^2 + 2} \text{ limitine eşittir. Bu durumda } \frac{0}{0} \text{ belirsizliği vardır. Bu nedenle L'Hospital}$$

teoremi bir defa daha uygulanırsa $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{6(x-1)}{12x^2 - 12x}$ limiti bulunur. Bu durumda L'Hospital

$$\text{teoremini uygularsak } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6}{24x - 12} = \frac{1}{2} \text{ bulunur. O halde ; } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{2}$$

Not: L'Hospital teoreminin uygulamaları bir sonraki bölümde belirsiz şekillerle incelendiğinden burada daha fazla örnek vermeyeceğiz.

9.10.1.Taylor Teoremi: Ortalama değer teoremlerinin genelleştirilmiş bir şekli sayılabilecek olan ve türevleri hakkında bilgi sahibi olduğumuz bir fonksiyonun kendisi hakkında bilgi sahibi olmamızı sağlayan bu teorem hem teori hem de uygulama açısından büyük önem taşır.

Teorem 9.20:

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında C^{n+1} sınıfından olsun. Bu durumda $\xi \in (a, b)$ sayısı

$$\text{ için ; } f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(x-a) - \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

ve $G(x) = (x-a)^{n+1}$ ($F : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, $G : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$) fonksiyonlarına Genelleştirilmiş Ortalama Değer Teoremini uygulayalım.

Öyle bir $\xi \in (a, b)$ vardır ki;

$$\frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} \quad \text{olur.}$$

$$F'(x) = f'(x) - f'(a) - \frac{f''(a)}{2!}2(x-a) - \dots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}n(x-a)^{n-1}$$

$F(a) = G(a) = 0$ ve $G'(x) = (n+1)(x-a)^n$ olduğundan

$$\frac{F(b)}{G(b)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{f'(\xi) - f'(a) - f''(a)(\xi-a) - \dots - \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(\xi-a)^{n-1}}{(n+1)(\xi-a)^n} \quad \text{olur.}$$

Şimdi, $F' : [a, \xi] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $G' : [a, \xi] \rightarrow \mathbb{R}$

(Türev fonksiyonlarının kısıtlanmışını da aynı sembolle gösteriyoruz) fonksiyonlarına Teorem 9.18' i uygulayalım.

$$\xi_2 \in (a, \xi) \text{ olmak üzere } \frac{F'(\xi) - F'(a)}{G'(\xi) - G'(a)} = \frac{F''(\xi_2)}{G''(\xi_2)} \quad \text{olur.}$$

$$F'(a) = G'(a) = 0 \quad \text{ve} \quad F''(x) = f''(x) - f''(a) - \dots - \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(n-1)(x-a)^{n-2}$$

$G''(x) = (n+1).n.(x-a)^{n-1}$ olduğundan;

$$\frac{F(b)}{G(b)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{F''(\xi_2)}{G''(\xi_2)} = \frac{f''(\xi_2) - f''(a) - \dots - \frac{f^{(n)}(a)}{(n-2)!}(\xi_2-a)^{n-2}}{(n+1).n.(\xi_2-a)^{n-1}} \quad \text{olur.}$$

Şimdi, $F'' : [a, \xi_2] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $G'' : [a, \xi_2] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarına aynı işlemi uygulayalım ve böyle devam edelim.

$$\frac{F(b)}{G(b)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{F''(\xi_2)}{G''(\xi_2)} = \dots = \frac{F^{(n)}(\xi_n)}{G^{(n)}(\xi_n)} \dots \dots \dots (1)$$

olur. Son olarak; $F^{(n)} : [a, \xi_n] \rightarrow \mathbb{R}$

$$F^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a)$$

$$G^{(n)} : [a, \xi_n] \rightarrow \mathbb{R}$$

$G^{(n)}(x) = (n+1).n.\dots.2.(x-a)$ fonksiyonlarına Teorem 9.18' i uygulayalım.

$$\xi_{n+1} \in (a, \xi_n) \text{ için } \frac{F^{(n)}(\xi_n) - F^{(n)}(a)}{G^{(n)}(\xi_n) - G^{(n)}(a)} = \frac{F^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{G^{(n+1)}(\xi_{n+1})} \text{ olur.}$$

$$F^{(n)}(a) = G^{(n)}(a) = 0 \text{ olduğundan } \frac{F^{(n)}(\xi_n)}{G^{(n)}(\xi_n)} = \frac{F^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{G^{(n+1)}(\xi_{n+1})} \text{ elde edilir.}$$

$$F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) \text{ ve } G^{(n+1)}(x) = (n+1)! \text{ olduğundan}$$

$$\frac{F^{(n)}(\xi_n)}{G^{(n)}(\xi_n)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!} \dots\dots\dots(2)' \text{ dir.}$$

$$(1) \text{ ve } (2) \text{ eşitlikleri karşılaştırılırsa; } \frac{F(b)}{G(b)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!} \text{ yani;}$$

$$\frac{f(b) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(b-a) - \dots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n}{(b-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!}$$

Bu ise , $\xi_{n+1} = \xi \in (a, b)$ diyecek olursak,

$$f(b) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(b-a) - \dots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \text{ yani;}$$

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \text{ demektir.}$$

Not.1: İspattan görüldüğü üzere (Teorem.9.18' in son uygulamasında $f^{(n+1)}$ türevinin (a,b) açık aralığında varlığı yeterlidir. Yani teoremin hipotezi şöyle zayıflatılabilir:

- i)f, $[a,b]$ üzerinde C^n sınıfından olsun.(n.mertebeden sürekli fonksiyon)
- ii) $f^{(n+1)}$, (a,b) de mevcut olsun. ((n+1).mertebeden türevlenebilsin)

Not.2: $b-a = h > 0$ ve $\xi = a + \theta h$ ($0 < \theta < 1$) diyecek olursak Taylor açılımı şu şekli alır:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

Not.3: Taylor açılımında a ve b nin rolleri değiştirilebilir. Yani (Not.1' deki koşullar altında) öyle bir $\xi \in (a, b)$ sayısı vardır ki

$$f(a) = f(b) + \frac{f'(b)}{1!}(a-b) + \frac{f''(b)}{2!}(a-b)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(b)}{n!}(a-b)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(a-b)^{n+1}$$

eşitliği geçerlidir.

$a-b=h < 0$ ve $\xi = b + \theta h$ ($0 < \theta < 1$) dersek, f fonksiyonu a noktasının $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$) gibi bir çevresinde bu şekilde ifade edilebiliyorsa, yani $|h| < \varepsilon$ için;

$f(a + h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} h^n$ oluyorsa, f fonksiyonu a nın çevresinde Taylor serisine açılabilir

denir. Aslında her mertebeden türevi olan bir fonksiyon için;

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} h^n$ serisi daima oluşturulabilir. Ancak böyle bir serinin a noktasının bir

komşuluğunda yakınsak olması gerekmeyebileceği gibi, yakınsak olması halinde $f(a+h)$ değerine yakınsaması da gerekmez. Şimdi bu serinin fonksiyona yakınsaması için bir yeter şart verelim.

Teorem.9.21:Kalanlı Taylor Teoremi

f: (c,d) → IR $(n+1)$. mertebeden türevi olan bir fonksiyon, $a \in (c,d)$ ve $a + h \in (c,d)$

olsun. Uygun bir $K \in \mathbb{R}^+$ ve her $n \in \mathbb{N}$ ve her $x \in (c,d)$ için;

$|f^{(n)}(x)| \leq K$ olsun. Bu durumda;

$$f(a + h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} h + \frac{f''(a)}{2!} h^2 + \dots \text{ olur.}$$

İspat: $R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta h)}{(n+1)!} h^{n+1}$ olduğundan $|R_{n+1}| \leq K \cdot \frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!}$ olur.

$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{|h|^m}{m!}$ serisi yakınsak olduğundan, genel terimi sıfıra gider,

yani, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ olur. Buradan ;

$\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1} = 0$ elde edilir. Bu durumda yukarıda söylediğimiz gibi

$$f(a + h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} h + \frac{f''(a)}{2!} h^2 + \dots \text{ olur.}$$

9.11.Bir Seri Yardımıyla Bir Fonksiyonun Tarifi:

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \text{ fonksiyonu seriye açılırsa;}$$

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \text{ olur.}$$

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ (c=sabit)(x=değişken)}$$

serisine Kuvvet serisi denir.

Farz edelim ki. $f(x)$

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_{n-1}x^{n-1} + \dots \quad (*)$$

kuvvet serisi yardımıyla ifade edilsin.

$$x=0 \text{ için } f(0)=c_0$$

$$f'(x) = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \dots$$

$$f'(0) = c_1$$

$$f''(x) = 2c_2 + 6c_3x + 12c_4x^2 + \dots$$

$$f''(0) = 2c_2$$

$$f'''(x) = 3.(2)c_3 + 4(3)(2)c_4x + \dots$$

$$f'''(0) = 6c_3 = 3.2.c_3$$

bu şekilde devam edilip c_i sabitleri f fonksiyonu ve türevleri cinsinden;

$$c_0 = f(0) \Rightarrow c_1 = f'(0) \Rightarrow c_2 = \frac{f''(0)}{2} \Rightarrow c_3 = \frac{f'''(0)}{2.3} \Rightarrow \dots \Rightarrow c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

olarak bulunur ve bu değerler (*) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

serisi elde edilir. İşte bu seriye $y=f(x)$ fonksiyonunun $x=0$ civarındaki kuvvet serisi yada **Maclaurent serisi denir**. $x=0$ 'da tanımlı olmayan veya Maclaurent serisine açılmayan fonksiyonlar ($f(x)=\ln x$ gibi), $x=a$ civarında Taylor serisine açılır.Yani, $f(x)$, x 'in kuvvetleri yerine $(x-a)$ 'nın kuvvetleri cinsinden yazılır.Taylor serisi de yine kuvvet serileri kullanılarak formülze edilir.Varsayalım ki;

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n + \dots$$

kuvvet serisi yardımıyla ifade edilsin.Buradan;

$$f(a)=c_0 \text{ olup devam edilirse;}$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= c_1 + 2c_2(x-a) + \dots \dots \dots f'(a) = c_1 \\
f''(x) &= 2c_2 + 3.2.c_3(x-a) + \dots \dots \dots f''(a) = 2c_2 \\
f'''(x) &= 3.2.c_3 + 4.3.2.c_4(x-a) + \dots \dots \dots f'''(a) = 3.2.c_3 \\
&\dots \dots \dots
\end{aligned}$$

$$f^{(n)}(x) = n!.c_n + \dots \dots \dots f^{(n)}(a) = n!.c_n$$

bulunur. Böylece, $y=f(x)$ fonksiyonunun $x=a$ civarındaki kuvvet serisi yada **Taylor serisi** elde edilir. $x=0$ 'da tanımlı olmayan veya Maclaurent serisine açılmayan fonksiyonlar

($f(x)=\ln x$ gibi), $x=a$ civarında Taylor serisine açılır. Yani, $f(x)$, x 'in kuvvetleri yerine $(x-a)$ 'nın kuvvetleri cinsinden yazılır. Taylor Serisi;

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots \dots \dots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + \dots \dots$$

olarak tanımlanır.

Örnek.9.30: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$ fonksiyonunu mac-laurent serisine açınız.

$$\text{Çözüm.9.30: } \left. \begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f'(0) &= 1 \\ f''(0) &= 0 \\ f'''(0) &= -1 \end{aligned} \right\} \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \dots \dots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$f(x) = \cos x \Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} \Rightarrow f(x) = e^x \Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Örnek.9.31: $f(x) = \frac{1}{1+x}$ fonksiyonunu mac-laurent serisine açınız.

Çözüm.9.31:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{1+x} \Rightarrow f(0) = 1 \\
f'(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow f'(0) = -1 \\
f''(x) &= \frac{2(x+1)}{(x+1)^3} \Rightarrow f''(0) = 2 \\
f'''(x) &= \frac{-2.2(x+1)}{(x+1)^3} \Rightarrow f'''(0) = -4 \\
f^{iv}(x) &= \frac{4.2.(x+1)}{(x+1)^3} \Rightarrow f^{iv}(0) = 8 \\
f^v(x) &= \frac{-8.2.(x+1)}{(x+1)^3} \Rightarrow f^v(0) = -16
\end{aligned}$$

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + f''(0) \cdot \frac{x^2}{2!} + f'''(0) \cdot \frac{x^3}{3!} + \dots + f^n(0) \cdot \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + 2 \frac{x^2}{2!} + (-4) \frac{x^3}{3!} + 8 \frac{x^4}{4!} + (-16) \frac{x^5}{5!} + \dots +$$

- Bir Taylor serisi ancak yakınsaklık aralığındaki noktaların fonksiyon altındaki görüntülerini bulmak için kullanılır.

Örnek.9.32: $f(x)=\ln x$ fonksiyonunu $x=1$ civarında Taylor serisine açıp $\ln 2$ değerini 7 terim için yaklaşık belirleyiniz.

Çözüm.9.32: $f(x)=\ln x$ ise $f(1)=\ln 1=0$ ve türevlerin değerleri;

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f(1) = 1 \Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(1) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow f'''(1) = 2 \Rightarrow f^{IV}(x) = \frac{-6}{x^4} \Rightarrow f^{IV}(1) = -6$$

$$f^V(x) = \frac{24}{x^5} \Rightarrow f^V(1) = 24 \Rightarrow f^{VI}(x) = \frac{-120}{x^6} \Rightarrow f^{VI}(1) = -120$$

şeklinde bulunur. Bu değerler;

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + \dots$$

$a=1$ alınarak Taylor serisinde yerine yazılırsa;

$$\ln x \cong f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(1)(x-1)^n}{n!} + \dots$$

$$\ln x \cong 0 + (x-1) - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 - \frac{6}{4!}(x-1)^4 + \frac{24}{5!}(x-1)^5 + \dots + \frac{f^{(n)}(1)(x-1)^n}{n!} + \dots$$

gerekli sadeleştirmeler yapılarak;

$$\ln x \cong (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^5}{5} + \dots + \frac{(x-1)^n}{n} + \dots$$

olarak bulunur. Bu son ifadede $x=2$ yazılırsa ilk 7 terim için $\ln 2$ değeri yaklaşık olarak;

$$\ln 2 \cong (2-1) - \frac{1}{2}(2-1)^2 + \frac{(2-1)^3}{3} - \frac{(2-1)^4}{4} + \frac{(2-1)^5}{5} - \frac{(2-1)^6}{6} + \frac{(2-1)^7}{7}$$

$$\ln 2 \cong 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = 0.759524 \text{ bulunur ki bu değer } \ln 2 = 0.693147 \text{ değeri ile}$$

karşılaştırıldığında iyi bir yaklaşım olmaz. Daha yaklaşık değerler bulmak için daha fazla terim hesaba katılmalıdır.

9.11.1.Kalanlı Taylor Serisi Örnekleri:

Bir seride sonsuz terim vardır.Yakınsaklık aralığındaki bir noktanın f fonksiyonu altındaki görüntüsünü seri yardımıyla bulmak istediğimizde sonsuz terimi toplamamız gerekiyor.Bu nedenle serinin ancak sonlu tane terimi yardımıyla bu görüntü bulunur.Tabii ki bu değer gerçek değer değil belli oranda hatalı değerdir.Bu hataya kesme hatası denir.f fonksiyonunun x_0 civarındaki Taylor serisi;

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \dots$$

n tane terim alalım

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \underbrace{R_n}_{\text{kesme hatası}}$$

R_n :kalan terim ya da atılan terim

Gerçek f(x) değeri=Hesaplanan değer+ R_n

Buna göre R_n bulunursa kesme hatası bulunmuş demektir.

$$R_n = f^{(n)}(\xi) \frac{(x - x_0)^n}{n!} \quad \xi \in (x_0, x)$$

$f^{(n)}(\xi) \leq M$ olacak şekilde bir M sayısı vardır.

$$|R_n| \leq \left| M \cdot \frac{(x - x_0)^n}{n!} \right|$$

O halde taylor serisinde ilk n terimin toplamı f(x) olarak alındığında yapılan maksimum kesme hatası ;

$$\left| M \cdot \frac{(x - x_0)^n}{n!} \right| \text{ olur.}$$

Örnek.9.32: $e^x = 1 + x + \dots + \frac{x^n}{n!}$ serisinde e sayısını milyonda birden küçük bir hatayla hesaplamak için kaç terim hesaba katılmalıdır.

Çözüm.9.32: $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$ ilk n terimi aldığımızda yapılan hata nedir?

$$|R_n| \leq \left| M \cdot \frac{1}{n!} \right| \Rightarrow \left. \begin{matrix} x=1 \\ x=0 \end{matrix} \right\} \quad (0,1) \text{ de } M=3 \text{ olur.}$$

Burada R_n 'in milyonda birden küçük kalması için kaçınıcı terime kadar işlem yapılır.

$$|R_n| \leq \left| M \cdot \frac{1}{n!} \right| \leq 0,000001 \Rightarrow \left| 3 \cdot \frac{1}{n!} \right| \leq 0,000001$$

$$n! \geq 3 \cdot 10^6 \Rightarrow n=10 \text{ alabilir. } 10!=3.628.880$$

O halde e^x serisinin 10 terimini alarak e 'yi milyonda 1 hata ile hesaplarız.

Örnek.9.33: $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$

Serisinde maksimum hatanın milyonda 5'den küçük kalması için kaçınıcı terime kadar işlem yapılmalıdır?

Çözüm.9.33: $|R_n| \leq \left| M \cdot \frac{x^n}{n!} \right|$

$f(x)=\sin x$ 'in max. değeri 1'dir.

$$|R_n| \leq 0,000005 \text{ kalması için;}$$

$$\left| M \cdot \frac{x^n}{n!} \right| \leq 5 \cdot 10^{-6} \Rightarrow M=1 \text{ ve } \left| \frac{x^n}{n!} \right| \leq 5 \cdot 10^{-6} \text{ yazarız. } x=1,5708 \text{ alınır.}$$

$n=11$ almalıyız. Yani ilk 11 tane terime kadar açmalıyız. Bu da $\frac{x^9}{9!}$ 'de biter.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$$

10. BÖLÜM

10. TÜREVİN UYGULAMALARI

10.1. Hız ve İvme

Daha önceki bölümlerde değindiğimiz hız ve ivme kavramlarını, bu bölümde, yüksek mertebeden türevlerin anlaşılması açısından genişleterek ele alalım.

Örnek 10.1: Bir yolcu treni fren yaparak bir istasyona yaklaşıyor. Trenin fren yaptığı andan itibaren kat ettiği mesafe $s=120t-t^2$ ile veriliyor. Burada t , 0 ile 60 sn. arasında değişiyor. Buna göre;

i) Başlangıç ve bitiş hızlarını bulunuz.

ii) Başlangıç ve bitiş ivmeyi bulunuz

Çözüm 10.1: i) Hız, kat edilen mesafenin (yol) zamana göre birinci türevine eşittir. Yani;

$$v = s' = \frac{ds}{dt} = 120 - 2t$$

Buna göre, başlangıç hızı $t=0$ sn. anındaki hızdır;

$$v = 120 - 2 \cdot (0) = 120 \text{ m / sn}$$

Bitiş hızı ise $t=60$ sn. esnasındaki hızıdır. Yani;

$$v = 120 - 2 \cdot (60) = 0 \text{ m / sn} \text{ .Böylece, tren 60 sn.'de durur.}$$

ii) İvme hızın birinci türevine eşittir. Yani;

$$a = v' = \frac{dv}{dt} = -2 \text{ m / sn}$$

Burada ivme değeri sabit olduğundan başlangıç ve bitiş ivmesi aynıdır.

10.2.Yüksek Mertebeden Türevler:Yukarıdaki örneklerde anlaşılacağı gibi ivme yolun zamana göre ikinci türevine eşittir. Bu şu şekilde ifade edilebilir:

$$a = s'' = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right) = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Genelleştirecek olursak; $y=f(x)$ fonksiyonu verildiğinde y 'in türevinin türevine $y=f(x)$ fonksiyonun ikinci mertebeden türevi denir ve;

$$y'' = f''(x) = \text{ve} \quad \frac{d^2y}{dx^2} , \quad D_x^2 y$$

sembolleri ile gösterilir.

Benzer olarak üçüncü mertebeden türev;

$$y''' = f'''(x) = \text{ve } \frac{d^3y}{dx^3}, \quad D_x^3 y \text{ sembolleri ile gösterilir.}$$

Aynı mantıkla n. mertebeden türev;

$$y^n = f^n(x) = \text{ve } \frac{d^n y}{dx^n}, \quad D_x^n y \text{ sembolleri ile gösterilir.}$$

Örnek 10.2: Bir çark θ açısı yaparak dönüyor ve bu dönüş $\theta = 0.004t^{5/2} + 0.1t^2$ formülleriyle veriliyor. Burada, t saniye cinsinden zamandır. Buna göre;

i) $t=4$ sn.'deki w açısal hızını bulunuz.

ii) $t=4$ sn.'deki α açısal ivmesini bulunuz.

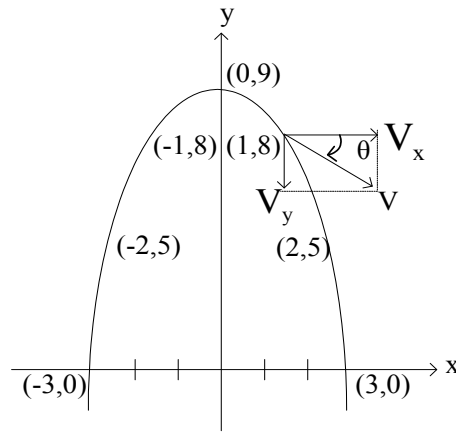
Çözüm 10.2: Açısal hız θ açısal sapmanın türevidir.

Yani; $w = \theta' = \frac{d\theta}{dt} = 0.1t^{3/2} + 0.2t \Rightarrow t = 4$ sn.'deki; $w = 0.1(4)^{3/2} + 0.2(4) = 1.6$ rad/sn.

α açısal ivmesi, w açısal hızının türevine veya θ 'nın ikinci türevine eşittir.

$$\alpha = w' = \frac{dw}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0.15t^{1/2} + 0.2 \Rightarrow t = 4 \text{ sn.'de; } \alpha = 0.15(4)^{1/2} + 0.2 = \underline{\underline{0.5 \text{ rad/sn}^2}}$$

Örnek 10.3: Bir cisim verilen bir parabolün bir bölümünde $x=t$, $y=9-t^2$ parametrik denklemleri ile hareket ediyor. $t=1$ sn.'deki hız bileşenlerini ve bileşke hızı bulunuz. (Şekil.10.1)



Şekil 10.1. $y=9-t^2$ parabolü

Çözüm 10.3: x doğrultusundaki vektör bileşeni V_x ve; $V_x = \frac{dx}{dt}$

y doğrultusundaki bileşeni V_y ve; $V_y = \frac{dy}{dt}$ olur.

Buna göre; $V_x = \frac{dx}{dt} = 1$ ve $V_y = \frac{dy}{dt} = -2t$ bulunur.

$t=1$ sn. 'deki değerler ise; $V_x=1$ m/sn ve V_x eğri boyunca sabittir. $V_y=-2(1)=-2$ m/sn

$t=1$ sn. 'deki bileşke hız; V bileşke hızının büyüklüğü (şiddeti) Pisagor Teoreminden;

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5} \cong 2.2 \text{ m/sn.}$$

θ negatif açısının değeri ise ; $\theta = \text{Arc tan} \frac{y}{x} = \text{Arc tan} \frac{(-2)}{1} = -63.4^\circ$ olarak bulunur.

10.3. Maksimum, Minimum ve Büküm Noktaları

Bir önceki bölümde türevin geometrik anlamını, eğrinin herhangi bir noktasındaki eğim için bir formül olarak tanımlamıştık. Birinci türev veya eğim pozitif iken eğri artan bir grafik çizerken, negatif durumda eğri azalan bir grafik çizer. Eğer eğri bir yerel maksimum veya yerel minimum noktada döndüğünde, bu noktalarda teğet yatay bir doğru ve birinci türev veya eğim; $y' = f'(x) = 0$ 'dır. Bu noktalar basit olarak maksimum veya minimum noktalar olarak adlandırılırlar. $y' = 0$ olan noktalar kritik noktalar olarak adlandırılırlar.

İkinci türev ise eğimin değişim oranıdır ve eğrinin bükümlülüğü hakkında bilgi verir. İkinci türev pozitif iken, türev fonksiyonu (eğim) azalan ve eğri aşağı doğru bükümlüdür. Eğrinin büküldüğü ve bükümlülüğün değiştiği noktada bükülme sıfır ve bu noktada ikinci türev $y'' = f''(x) = 0$ 'dır. Bu nokta matematikte büküm noktası olarak bilinir.

Eğrilerin temel özelliklerini açıklaması açısından aşağıdaki örneği irdeleyelim.

Örnek 10.4: $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$ fonksiyonu verilsin.

a) Bu fonksiyonun maksimum ve minimum noktalarını bulunuz.

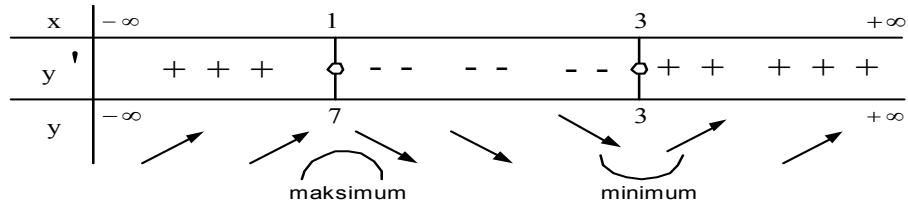
b) Fonksiyonun belirttiği eğrinin büküm noktasını bulunuz ve grafiğini çiziniz.

Çözüm 10.4: Bir maksimum veya minimum noktada birinci türev 0'a eşittir.

Yani; $y' = f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0$ olur. Bu denklem x 'e göre çözülürse;

$$3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow x=3 \text{ ve } x=1 \text{ elde edilir.}$$

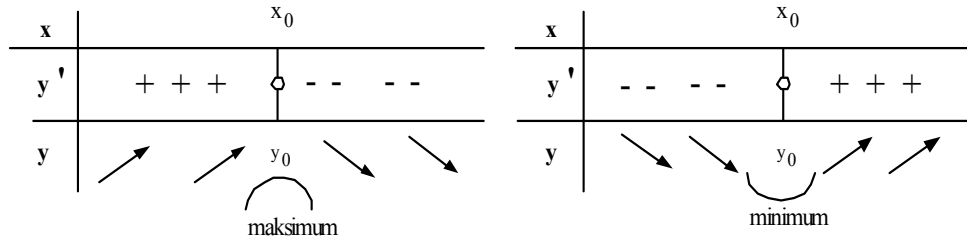
$x=1$, $x=3$ noktalarında $y' = 0$ 'dır. Bu nedenle bu noktalar sabit noktalar. Bu noktalardan hangisinin minimum, hangisinin maksimum olduğunu belirlemek için aşağıdaki gibi bir tablo düzenleyip y ve y' değerleri araştırılır.



Tablodan da görüldüğü gibi $x=1$ noktası maksimum noktadır. Çünkü, fonksiyon $x=1$ noktasının solunda artar iken $x=1$ noktasının sağında azalan bir grafik çizer. Bu, $x=1$ noktasının maksimum nokta olduğunu gösterir.

10.3.1. I. Türev Testi:

Eğer birinci türev bir sabit noktada pozitiften negatife işaret değiştirirse bu nokta yerel maksimum noktadır. Sabit noktada birinci türev negatiften pozitive işaret değiştirirse bu nokta yerel minimum noktadır.



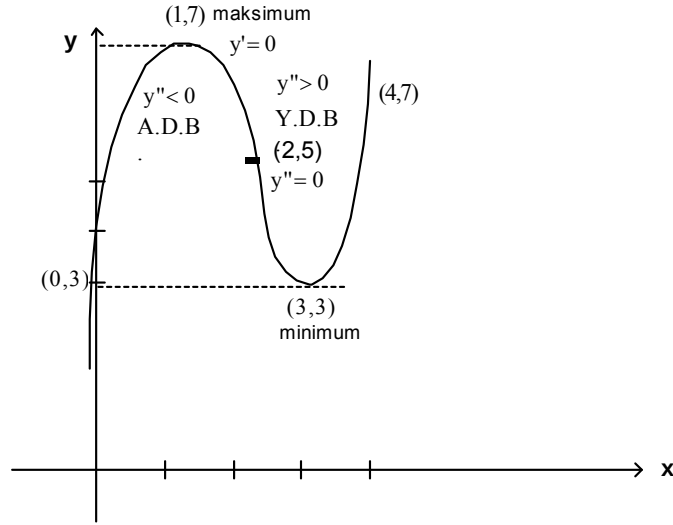
Bir büküm noktasında $y'' = f''(x) = 0$ dır. $y''=6x-12=0 \Rightarrow 6x-12=0 \Rightarrow x=2$

$x=2$ noktasında eğimin değişim oranı sıfırdır. Yani bükülme sıfırdır. $x=2$ noktasının büküm noktasını belirlemek için bükümlülüğün değişip değişmediğini kontrol etmek gerekir. Bunu aşağıdaki gibi basit bir tablo ile görelim;

x	1	2	3
y''	-6	$\circ$	6

$y''(1)=6 \cdot (1)-12=-6$
 $y''(3)=6 \cdot (3)-12=6$

Görüldüğü gibi $x=2$ noktasında y'' işaret değiştirmektedir. Bu $x=2$ noktasının büküm noktası olduğunu gösterir.(Şekil-10.2)



Şekil.10.2. $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$ fonksiyonunun grafiği

10.3.2. II.Türev Testi: Eğer x_0 gibi kritik bir noktada y'' negatif ise eğri aşağı doğru bükümlüdür ve x_0 bir yerel maksimum noktadır. Eğer x_0 gibi kritik bir noktada y'' pozitif ise eğri yukarı doğru bükümlüdür ve x_0 bir yerel minimum noktadır. Eğer y'' bir kritik noktada işaret değiştirirse bu nokta bir büküm noktasıdır.Tablo ile ifade edecek olursak;

x	$-\infty$	x_0	∞	x	$-\infty$	x_0	∞
y''	+	+	+	y''	-	-	-
y	YukarıDoğru Bükümlü	y_0 BükümNoktası	AşağıDoğru Bükümlü	y	AşağıDoğru Bükümlü	y_0 BükümNoktası	YukarıDoğru Bükümlü

şeklinde gösterebiliriz.

10.4. Ekstremler (Maksimum veya Minimum Noktalar)

10.4.1. Maksimum ve Minimum ile ilgili Çözümlü Örnekler

1) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{x-3}{x^2+7}$ fonksiyonunun ekstremumlarını inceleyiniz.

$$\text{Çözüm: } f'(x) = \frac{x^2+7-(2x)(x-3)}{(x^2+7)^2} = \frac{x^2+7-2x^2+6x}{(x^2+7)^2} = \frac{-x^2+6x+7}{(x^2+7)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 6x + 7 = 0$$

$$(x+1)(x-7) = 0 \quad \text{olur ve buradan } x=-1 \text{ ve } x=7 \text{ bulunur.}$$

x	$-\infty$	-1	7	$+\infty$
y'	- - -	o	+	- - -
y	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{14}$	0
		minimum	maksimum	

$$f''(x) = \frac{(-2x+6)(x^2+7)^2 - (-x^2+6x+7)(2(x^2+7))2x}{(x^2+7)^4}$$

$$= \frac{(-2x+6)(x^2+7) - (-x^2+6x+7)2x}{(x^2+7)^3} = \frac{-6x^2-28x+42}{(x^2+7)^3}$$

$$f''(-1) = \frac{1}{8} > 0 \quad \text{ve} \quad f''(7) = \frac{-1}{392} < 0 \quad x = -1 \text{ minimum nokta} \quad x = 7 \text{ maksimum nokta}$$

2) $f(x) = x.e^{\frac{1}{x}}$ fonksiyonunun ekstremumlarını inceleyiniz.

Çözüm: $f(x) = x.e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow T.A = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = 1.e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2}.e^{\frac{1}{x}}.x = 0 \Rightarrow f'(x) = e^{\frac{1}{x}}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 0$$

$$e^{\frac{1}{x}} \neq 0 \Rightarrow \frac{x-1}{x} = 0 \Rightarrow x = 1 \quad \text{ise} \quad (1, e) \text{ minimum noktadır.}$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	+	-	+	+
y			e	
			minimum	

3) $f(x) = \ln\left(\frac{2x-1}{x-2}\right)$ fonksiyonunun varsa ekstremumlarını bulunuz.

Çözüm: $f'(x) = \frac{\left(\frac{2x-1}{x-2}\right)'}{\left(\frac{2x-1}{x-2}\right)} = 0 \quad f'(x) = \left[\frac{2(x-2) - (2x-1)}{(x-2)^2}\right] \frac{(x-2)}{(2x-1)} = 0$

$$f'(x) = \frac{2x-4-2x+1}{(x-2)^2} \cdot \frac{(x-2)}{(2x-1)} = 0 \quad \text{ise} \quad f'(x) = \frac{-3(x-2)}{(x-2)^2(2x-1)} = 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{(x-2)(2x-1)} = 0$$

$f'(x) \quad \forall x$ için negatiftir. Extremum yoktur.

4) $y = x^x$ 'in varsa ekstremumlarını inceleyiniz.

Çözüm: $\ln y = \ln x^x$

$$\ln y = x \cdot \ln x \Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln x + \frac{1}{x} \cdot x \Rightarrow y' = y(\ln x + 1)$$

$$\Rightarrow y' = x^x(\ln x + 1) = 0$$

$$x^x \neq 0 \Rightarrow \ln x + 1 = 0 \text{ ise } \ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1} = -\frac{1}{e}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{e}$	$+\infty$
y'	- - -	0	+ + +
y	$+\infty$	$\left(-\frac{1}{e}\right)^{\left(-\frac{1}{e}\right)}$	$+\infty$

minimum

5) $y = e^x \cdot \cos x$ fonksiyonunun sabit noktalarını inceleyiniz.

Çözüm: $y' = e^x \cdot \cos x - \sin x \cdot e^x = 0$

$$e^x \cdot (\cos x - \sin x) = 0$$

$$e^x \neq 0 \Rightarrow (\cos x - \sin x) = 0 \text{ ise } \cos x = \sin x \Rightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{4}$$

6) $y = e^{x^2-2x}$ fonksiyonun ekstremum noktalarını inceleyiniz.

Çözüm: $y' = (2x-2) \cdot e^{x^2-2x} = 0$

$$e^{x^2-2x} \neq 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ olur.}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	- - -	0	+ + +
y	$+\infty$	$\frac{1}{e}$	$+\infty$

minimum

7) $y = x^2 \cdot \ln x$ fonksiyonun ekstremum noktalarını inceleyiniz.

Çözüm:

$$y' = 2x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot x^2 = x \cdot (2 \ln x + 1) = 0$$

$$x = 0 \text{ ve } 2 \ln x = -1 \text{ ise } \ln x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

x	0	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$+\infty$
y'	- - -	+	+
y	$-\infty$	$-\frac{1}{2e}$ minimum	$+\infty$

8) $y = x^3 + 3x^2 + 3x - 2$ fonksiyonunun ekstremum noktalarını bulunuz.

Çözüm: $y' = 3x^2 + 6x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = -1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+	+	+
y	$-\infty$	5	$+\infty$

ekstremanyoktur.

9) $y = x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 12x$ fonksiyonunun ekstremumlarını bulunuz.

Çözüm: $y' = 3x^2 + 9x - 12 = 0$

$x^2 + 3x - 4 = 0$ ise $(x-1)(x+4) = 0$ ve buradan $x_1 = 1$ $x_2 = -4$ bulunur.

x	$-\infty$	-4	1	$+\infty$
y'	+	+	-	-
y	$-\infty$	56	$-\frac{13}{2}$	$+\infty$

maksimum nokta minimum nokta

$(-4, 56)$ maksimum nokta $\left(1, -\frac{13}{2}\right)$ minimum nokta

Başka bir deyişle ; $y'' = 6x + 9$

$y''(-4) = -15 < 0 \Rightarrow (-4, 56)$ maksimum nokta

$y''(1) = 15 > 0 \Rightarrow \left(1, -\frac{13}{2}\right)$ minimum nokta

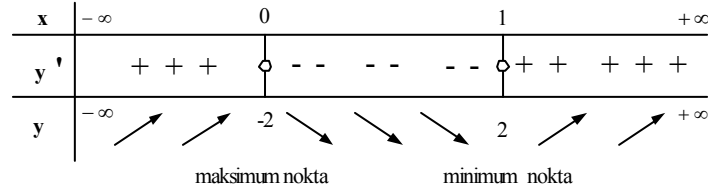
10) $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ fonksiyonunun ekstremumlarını inceleyiniz.

Çözüm: $y' = \frac{(2x-2)(x-1) - 1(x^2 - 2x + 2)}{(x-1)^2} = 0$

$$y' = \frac{2(x-1)^2 - x^2 + 2x - 2}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow y' = \frac{2x^2 - 4x + 2 - x^2 + 2x - 2}{(x-1)^2} = 0$$

$$\Rightarrow y' = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow y' = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0$$

$$\Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = 2$$



$(0, -2)$ maksimum $(2, 2)$ minimum veya;

$$y'' = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2-2x)}{(x-1)^4}$$

$$y''(0) = -2 < 0 \Rightarrow (0, -2) \text{ maksimum}$$

$$y''(2) = 2 > 0 \Rightarrow (2, 2) \text{ minimum nokta olarak bulunur.}$$

11) $y = x^4 - 2x^2 + 3$ fonksiyonunun ekstremumlarını 2.Türev yardımıyla bulunuz.

Çözüm: $y' = 4x^3 - 4x = 0 \rightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = -1$

$$y'' = 12x^2 - 4 \Rightarrow y''(0) = 12 \cdot 0^2 - 4 = -4 < 0 \Rightarrow (0, 3) \text{ maksimum nokta}$$

$$y''(1) = 8 > 0 \Rightarrow (1, 2) \text{ minimum nokta}$$

$$y''(-1) = 8 > 0 \Rightarrow (-1, 2) \text{ minimum nokta}$$

12) Neptün Oşinografi Enstitüsü'nde bir grup deniz biyoloğu soyu tükenmekte olan korunan bazı balina türlerinin ölçümünde gelecek on yıllarda daha dikkatli olunmasını önerdiler.

Koruma altına alındıktan sonra yapılan ölçümler, bu türün beklenen popülasyonu

$$N(t) = 3t^2 + 2t^2 - 10t + 600 \quad (0 \leq t \leq 10)$$

$N(t)$, t yıl sonundaki popülasyonun durumu olmak üzere, $t=2$ ve $t=6$ olduğunda balina popülasyonunun artış hızını bulunuz. Yapılan ölçümlere göre balina popülasyonu 8 yıl sonra ne büyüklüğe erişecektir?

Çözüm: Balina popülasyonunun herhangi bir t zamanındaki artışı şöyle verilir

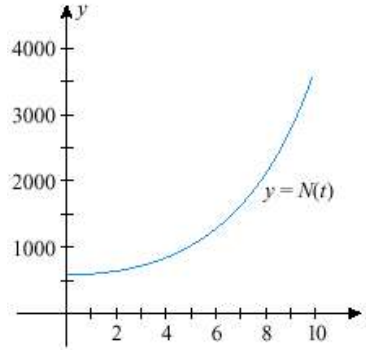
$$N'(t) = 9t^2 + 4t - 10$$

Özel olarak $t=2$ ve $t=6$ olduğunda balina popülasyonunun artış hızı;

$$N'(2) = 9(2)^2 + 4(2) - 10 = 34$$

$$N'(6) = 9(6)^2 + 4(6) - 10 = 338 \text{ olarak elde edilir}$$

Buna göre, balina popülasyonu her iki yılda 34, her 6 yılda da 338 artış gösterecektir. Balina popülasyonu sekiz yıl sonunda $N(8) = 3(8)^3 + 2(8)^2 - 10(8) + 600 = 2184$ balina olacaktır. $N(t)$ fonksiyonunun grafiği Şekil .10.3’de verilmiştir.



Şekil.10.3. $N(t)$ ile verilen t yıl sonraki balina popülasyonu.

13) Bir roketin yüksekliği (feet olarak) t saniyede uçuşu ile verilir

$$s = f(t) = -t^3 + 96t^2 + 195t + 5 \quad (t \geq 0)$$

- Roketin herhangi bir t anındaki v hızını bulun.
- Roketin hızını $t=0, 30, 50, 65$, ve 70 olduğunda bulun. Sonuçlarınızı açıklayın.
- b 'deki sonuçları kullanarak ve roketin yörüngesinde hızın sıfır olduğu noktayı düşünerek roketin en büyük yüksekliğini bulunuz.

Çözüm:a) Roketin bir t anındaki hızı şöyle verilir

$$v = f'(t) = -3t^2 + 192t + 195$$

b) Roketin hızı $t=0, 30, 50, 65$ ve 70 olduğunda;

$$f'(0) = -3(0)^2 + 192(0) + 195 = 195$$

$$f'(30) = -3(30)^2 + 192(30) + 195 = 3255$$

$$f'(50) = -3(50)^2 + 192(50) + 195 = 2295$$

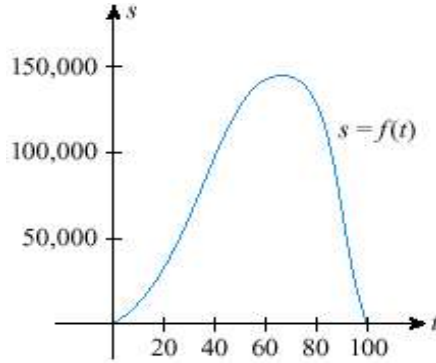
$$f'(65) = -3(65)^2 + 192(65) + 195 = 0$$

$$f'(70) = -3(70)^2 + 192(70) + 195 = -1065$$

veya 195, 3255, 2295, 0 ve -1065 fit saniye (ft/sec). Buna göre, roket $t=0$ da 195 ft/s ilk hıza sahiptir ve $t=30$ 'daki hızı 3255 ft/s'dir. Uçuşun 50. saniyesinde roketin hızı $t=30$ 'daki hızdan daha düşük olan 2295 ft/s'dir. Bunun anlamı roketin hızının daha sonra öğreneceğimiz gibi en yüksek hızına ulaştıktan sonra giderek azalmasıdır.

Yavaşlama sürer: $t=65$ 'te hız 0'dır ve $t=70$ 'te -1065 ft/s'dir. Bu sayı bize roketin uçuşun 70. saniyesinde dünyaya saniyede 1065 fit hızla çarptığını söyler.

c) (b)'deki sonuçlar roketin hızının $t=65$ iken sıfır olduğunu gösterir. Bu anda roketin yüksekliği maksimum olup; $s = f(65) = -(65)^3 + 96(65)^2 + 195(65) + 5 = 143,655$ fit



Şekil.10.4.t saniye uçuşta $f(t)$ ile verilen roketin yüksekliği

14)Milyonlarca dolar satışı yapılan bir DVD film satışının yayınlandıktan sonraki t yılda satış oranı ; $S(t) = 5t/(t^2 + 1)$ ile veriliyor.Buna göre;

a) Bir t zamanında değişen satış oranını bulunuz.

b) $t=0$ iken DVD satışları ne hızda değişir. Yayınlandıktan iki yıl sonra ne hızda değişir?

Çözüm:a) t zamanında değişen satışların oranı $S'(t)$ ile verilir. Çarpım türevini kullanarak ;

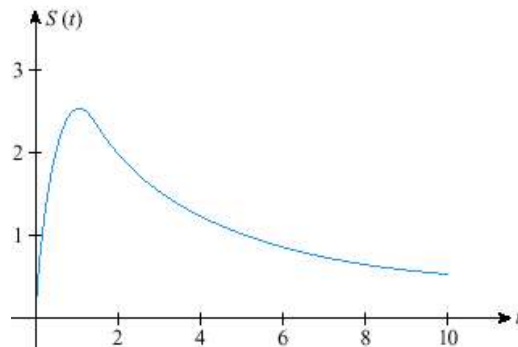
$$S'(t) = \frac{d}{dt} \frac{5t}{t^2 + 1} = 5 \frac{d}{dt} \frac{t}{t^2 + 1} = 5 \frac{(t^2 + 1)(1) - t(2t)}{(t^2 + 1)^2} = 5 \frac{t^2 + 1 - 2t^2}{(t^2 + 1)^2} = \frac{5(1 - t^2)}{(t^2 + 1)^2}$$

elde ederiz

b)Yayınlandıktan sonra bir zamandaki DVD satışlarının değişim oranı şöyle verilir

$$S'(2) = \frac{5(1 - 4)}{(4 + 1)^2} = -\frac{3}{5} = -0.6$$

Bu oran yılda 600,000 \$'lık bir azalışı gösterir. S fonksiyonunun grafiği Şekil ..10.5'de gösterilmiştir.



Şekil .10.5. DVD satışlarının değişim oranı

10.4.2. Bükümlülük ile ilgili Çözümlü Örnekler

1) $y = \frac{1}{6}(x^3 - 6x^2 + 5x + 6)$ artan ,azalan olduğu aralıkları , varsa maksimum ve minimum noktaları bulup bükümlülüğünü inceleyiniz?

Çözüm: $f'(x) = y' = \frac{1}{6}(3x^2 - 12x + 9) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 3)$

$$f''(x) = y'' = \frac{1}{2}(2x - 4) = x - 2$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 3) = 0 \text{ ise } (x-3)(x-1) = 0 \text{ ve buradan } x=1 ; x=3 \text{ bulunur.}$$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
y'	+	0	0	+
y	$-\infty$	1	-1	$+\infty$

maksimum nokta minimum nokta

$(-\infty, 1)$ ve $(3, \infty)$ aralıklarında fonksiyon artan iken $(1, 3)$ aralığında fonksiyon azalır veya 2. türev testinden ;

$$f''(1) = -1 < 0 \text{ Yerel Maksimum ve } f''(3) = 1 > 0 \text{ Yerel Minimum bulunur.}$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y''	-	0	+
y	Aşağı Doğru Bükümlü	Büküm Noktası	Yukarı Doğru Bükümlü

2) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$ fonksiyonunun bükümlülüğünü inceleyiniz?

Çözüm: $f'(x) = 2x \cdot e^{-x} - x^2 \cdot e^{-x} = e^{-x}(2x - x^2)$

$$f''(x) = (2 - 2x)e^{-x} - (2x - x^2)e^{-x}$$

$$= 2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2xe^{-x} + x^2e^{-x} = (2 - 4x + x^2)e^{-x}$$

$$e^{-x} > 0 \text{ olduğundan } f''(x) = 0 \text{ olması için } ; x^2 - 4x + 2 = 0 \text{ 'dan;}$$

$$x_1 = 2 + \sqrt{2} \text{ ve } x_2 = 2 - \sqrt{2} \text{ bulunur}$$

x	$-\infty$	$2 - \sqrt{2}$	$2 + \sqrt{2}$	$+\infty$
y''	+	+	+	+
y	YukarıDoğru Bükümlü	$f(2 - \sqrt{2})$ AşağıDoğru Bükümlü	$f(2 + \sqrt{2})$ YukarıDoğru Bükümlü	
		Büküm Noktası	Büküm Noktası	

$(-\infty, 2 - \sqrt{2})$ ve $(2 + \sqrt{2}, \infty)$ Yukarı Doğru iken $(2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$ Aşağı Doğru Bükümlüdür.

3) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ bükümlülüğünü inceleyiniz?

Çözüm: $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ ise $f''(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0$ ise $x = \pm 1$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y''	+	+	+	+
y	YukarıDoğru Bükümlü	$\ln 2$ AşağıDoğru Bükümlü	$\ln 2$ YukarıDoğru Bükümlü	
		Büküm Noktası	Büküm Noktası	

$(-\infty, -1)$ ve $(1, \infty)$ Yukarı Doğru Bükümlü iken $(-1, 1)$ Aşağı Doğru Bükümlüdür.

4) $y = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x + 1$ fonksiyonunun bükümlülüğünü inceleyiniz?

Çözüm: $y' = 4x^3 - 18x^2 + 24x - 8$

$y'' = 12x^2 - 36x + 24 = 0$

$x^2 - 3x + 2 = 0$ ise $(x - 1)(x - 2) = 0$ ve $x_1 = 1; x_2 = 2$ bulunur.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
y''	+	+	+	+
y	YukarıDoğru Bükümlü	0 AşağıDoğru Bükümlü	1 YukarıDoğru Bükümlü	
		Büküm Noktası	Büküm Noktası	

$(-\infty, 1)$ aralığında fonksiyon yukarı doğru bükümlüdür.

$(1, 2)$ aralığında fonksiyon aşağı doğru bükümlüdür.

$(2, \infty)$ aralığında fonksiyon yukarı doğru bükümlüdür.

$(1, 0)$ ve $(2, 1)$ noktaları büküm noktalarıdır.

10.5. Asimptotlar

10.5.1. Tanımlar:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ ise $x = a$ Düşey Asimptot

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a$ ise $y = a$ Yatay Asimptot

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty \Rightarrow$ Eğik Asimptot olabilir.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty \Rightarrow$ Eğik Asimptot yok.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - a.x] = b \Rightarrow y = ax + b$ Eğik asimptot

10.5.2. Asimptotlar ile ilgili Çözümlü Örnekler:

1) $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1}$ fonksiyonunun asimptotlarını bulunuz.

Çözüm: $x^2 + 1 \quad \forall x$ için $\neq 0$ dır . Yani düşey asimptot yoktur.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1} = 1 \Rightarrow y = 1$ yatay asimptot. Eğik asimptot yoktur.

2) $y = \frac{2x^2 - 2x + 3}{x + 3}$ fonksiyonunun asimptotlarını inceleyiniz.

Çözüm: $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 - 2x + 3}{x + 3} = \pm\infty \quad x = -3$ doğrusu düşey asimptot.

Payın derecesi paydanın derecesinden 1 büyük olduğunda eğik asimptot olabilir. Bunu bulmak için ;

1.Yol :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 2x + 3}{x + 3} \right) / x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 2x + 3}{x + 3} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - 2.x] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 2x + 3}{x + 3} - 2x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 2x + 3 - 2x.(x + 3)}{x + 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-8x + 3}{x + 3} = -8 \quad \text{Öyleyse, } y=2x-8 \text{ eğik asimptottur.}$$

2.Yol : Pay paydaya bölünürse ;

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 - 2x + 3 & \frac{x+3}{2x-8} \\ \hline -2x^2 + 6x & \\ \hline -8x + 3 & \\ \hline -8x + 24 & \\ \hline 27 & \end{array} \quad y = 2x - 8 \text{ eğik asimptottur}$$

3) $y = \frac{x^3 + 2}{x^2 - 1}$ fonksiyonunun asimptotlarını bulunuz.

Çözüm: $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = +1 ; x = -1$

$x = +1$
 $x = -1$ doğruları düşey asimptottur.

Yatay asimptot yoktur. Payın derecesi paydadan büyük olduğu için;

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 2 & \frac{x^2 - 1}{x} \\ \hline x^3 - x & \\ \hline x + 2 & \end{array} \quad y=x \text{ doğrusu eğik asimptottur.}$$

4) $y = \left(\frac{x-2}{x} \right) \cdot e^{\frac{1}{x}}$ fonksiyonunun asimptotlarını bulunuz.

Çözüm: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x-2}{x} \right) \cdot e^{\frac{1}{x}} = -\infty \cdot e^{\infty} = -\infty \Rightarrow x = 0$ doğrusu düşey asimptot.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x} \right) \cdot e^{\frac{1}{x}} = 1 \cdot e^0 = 1 \quad y = 1 \text{ doğrusu yatay asimptottur.}$$

5) $y = \ln \left(\frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x - 4} \right)$ fonksiyonunun tanım aralıklarını, asimptotlarını, ekstremumlarını bulunuz.

Çözüm: Tanım Aralığı $= \ln \left(\frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x - 4} \right) > 0 \Rightarrow \text{T.A.} = (-\infty, -2) \cup (-1, 2) \cup (4, \infty)$

$$y = \ln u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u} \text{ idi . Buradan ; } y' = \left(\frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x - 4} \right)' \bigg/ \left(\frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x - 4} \right) = 0$$

$$y' = \frac{[2x(x^2 - 3x - 4) - (2x - 3)(x^2 - 4)](x^2 - 3x - 4)}{(x^2 - 3x - 4)^2} \cdot \frac{(x^2 - 3x - 4)}{(x^2 - 4)} = 0$$

$$y' = \frac{2x^3 - 6x^2 - 8x - 2x^3 - 8x + 3x^2 - 12}{(x^2 - 3x - 4)(x^2 - 4)} = 0$$

$$y' = \frac{-3x^2 - 12}{(x^2 - 3x - 4)(x^2 - 4)} = 0 \rightarrow \begin{matrix} -3x^2 - 12 = 0 \\ -3x^2 = 12 \end{matrix}$$

$x^2 = -4$ ise $x \in \mathbb{R}$ yoktur. Extremum yoktur.

x	$-\infty$	-2	-1	2	4	$+\infty$
$x^2 - 4$	+	+	+	+	+	+
$x^2 - 3x - 4$	+	+	+	+	+	+
$\frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x - 4}$	+	+	+	+	+	+

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln\left(\frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x - 4}\right) = \ln 1 = 0 \rightarrow y=0 \text{ doğrusu yatay asimptot.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \infty \Rightarrow x = -2 \quad \text{Düşey asimptot.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \infty \Rightarrow x = -1 \quad \text{Düşey asimptot.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty \Rightarrow x = 2 \quad \text{Düşey asimptot.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \infty \Rightarrow x = 4 \quad \text{Düşey asimptot.}$$

10.6. Belirsiz Şekiller

10.6.1.Tanım:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} k(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow x_0} l(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} j(x) = 1 \text{ olsun. Bu durumda;}$$

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = [\infty - \infty]$$

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot k(x)] = [0 \cdot \infty]$$

$$3) \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{k(x)}{l(x)} \right] = \left[\frac{0}{0} \right]$$

$$4) \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

Üstel Belirsizlikler:

$$5) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{k(x)} = \left[\infty^0 \right]$$

$$6) \lim_{x \rightarrow x_0} k(x)^{l(x)} = \left[0^0 \right]$$

$$7) \lim_{x \rightarrow x_0} j(x)^{f(x)} = \left[1^\infty \right]$$

olarak tanımlanır.(3) ve (4) nolu belirsizliklerde L'hospital Teoremi uygulanır.

Teorem.10.1: f ve g, (a,b) aralığında sürekli türevlere sahip iki fonksiyon olsun.

$x_0 \in (a,b)$ noktasında $f(x_0) = g(x_0) = 0$ ve f' ve g' fonksiyonları da x_0 noktasında

sürekliliğe $g'(x_0) \neq 0$ olsun. Budurumda; $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$ olup yine

$\left[\frac{0}{0} \right]$ veya $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$ belirsizlik devam ederse bu kural sonuç alınana kadar tekrarlanır.

10.6.2. Belirsiz Şekiller İle İlgili Çözümlü Örnekler

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1} \right] \text{ limitini hesaplayınız?}$$

$$\text{Çözüm: } \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1} \right] = (\infty - \infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x-1-\log x}{(x-1) \cdot \log x} \right] = \left[\frac{0}{0} \right] \quad (\text{Payda Eşitlesek})$$

$\left[\frac{0}{0} \right]$ olduğuna göre L'hospital kuralına göre;

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1-\log x)'}{((x-1) \cdot \log x)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\log x + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x \cdot \log x + (x-1)}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x \cdot \log x + x - 1} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

$$\text{Yine L'hospital uygularsak; } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)'}{[x \cdot \log x + x - 1]'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\log x + 1 + 1} = \frac{1}{2}$$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{k/x}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{k/x} = 1^\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{k/x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k}{x} \cdot \ln(1+x) = 0 \cdot \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\frac{x}{k}} = \left[\frac{0}{0} \right] \quad (\text{L'hospital uygulanırsa})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln(1+x))'}{\left(\frac{x}{k}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{k}} = k$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{k/x} = k \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{k/x} = e^k$$

$\ln = b \Rightarrow a = e^b$ özelliğinden faydalandık.

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{x} + 1\right)^x$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{x} + 1\right)^x = 1^\infty$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{2}{x} + 1\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln\left(\frac{2}{x} + 1\right) = (0 \cdot \infty)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left[\ln\left(\frac{2}{x} + 1\right)\right]'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-2/x^2}{\frac{2}{x} + 1}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-2/x^2}{x+2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{2}{x^2} \cdot \frac{x}{(x+2)} \bigg/ -\frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x \cdot (x+2)} \cdot x^2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x+2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \quad (\text{Yine L'Hospital})$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x)'}{(x+2)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{2}{x} + 1\right)^x = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{x} + 1\right)^x = e^2$$

4) $\lim_{x \rightarrow e} (\ln x)^{\ln(x-e)}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim_{x \rightarrow e} (\ln x)^{\ln(x-e)} = 1^\infty$

$$\Rightarrow y = (\ln x)^{\ln(x-e)} \Rightarrow \ln y = \ln(x-e) \cdot \ln(\ln x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow e} \ln y = \lim_{x \rightarrow e} \ln(x-e) \cdot \ln(\ln x) = (0 \cdot \infty)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln(x-e)}{\frac{1}{\ln(\ln x)}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \quad (\text{L'Hospital Uygulanırsa})$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow e} \frac{[\ln(x-e)]'}{\left[\frac{1}{\ln(\ln x)} \right]'} = \lim_{x \rightarrow e} \frac{\frac{1}{x-e}}{\frac{-\frac{1}{x \cdot \ln x}}{\ln^2(\ln x)}} = \lim_{x \rightarrow e} -\frac{x \cdot \ln x \cdot \ln^2(\ln x)}{x-e} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

Yine L'Hospital Uygulanırsa)

$$= \lim_{x \rightarrow e} \left(-\frac{\ln x \cdot \ln^2(\ln x) + \ln^2(\ln x) + 2 \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)}{\underbrace{1}_{\theta(x)}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow e} \theta(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow e} \ln y = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow e} y = e^0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow e} (\ln x)^{\ln(x-e)} = e^0 = 1$$

5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} \right)^x$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} \right)^x = (1)^\infty$

$$y = \left(e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} \right)^x \Rightarrow \ln y = x \cdot \ln \left(e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \ln y = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \left(e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} \right) = (0 \cdot \infty)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0} \right] \quad (\text{L'Hospital Uygulanırsa})$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\cancel{x^2} (e^{\frac{1}{x}} + 1)}{-\cancel{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}} + 1 = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}} + 1 = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \ln y = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} y = e^2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} \right)^x = e^2$$

6) $\lim_{x \rightarrow e} (\ln^2 x)^{\frac{1}{1-\ln x}}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim_{x \rightarrow e} (\ln^2 x)^{\frac{1}{1-\ln x}} = (1^\infty)$

$$y = \lim_{x \rightarrow e} (\ln^2 x)^{\frac{1}{1-\ln x}} \Rightarrow \ln y = \lim_{x \rightarrow e} \frac{1}{1-\ln x} \cdot \ln(\ln^2 x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow e} \ln y = \lim_{x \rightarrow e} \frac{1}{1-\ln x} \cdot \ln(\ln^2 x) = (0 \cdot \infty)$$

$$= \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln(\ln^2 x)}{1-\ln x} = \left[\frac{0}{0} \right] \text{ L'Hospital Uygulanırsa; } = \lim_{x \rightarrow e} \frac{\frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x}}{-\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow e} -\frac{\frac{2}{x} / \ln x}{1/x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow e} -\frac{2}{x \cdot \ln x} / 1/x = \lim_{x \rightarrow e} -\frac{2}{x \cdot \ln x} \cdot \frac{x}{1} = \lim_{x \rightarrow e} -\frac{2}{\ln x} = -2$$

$$\Rightarrow \ln y = -2 \Rightarrow y = e^{-2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow e} (\ln^2 x)^{\frac{1}{1-\ln x}} = \frac{1}{e^2}$$

7) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x-a}{\sin x - \sin a}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x-a}{\sin x - \sin a} = \left[\frac{0}{0} \right] \text{ (L'hospital Uygulanırsa)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos a} = \sec a$

8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \left[\frac{0}{0} \right] \text{ (L'hospital Uygulanırsa)}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] \text{ (L'hospital Uygulanırsa)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(3x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \left[\frac{0}{0} \right] \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(6x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$$

9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left[\frac{0}{0} \right]$ (L'hospital Uygulanırsa)

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \left[\frac{0}{0} \right] \text{ (L'hospital Uygulanırsa)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \left[\frac{0}{0} \right] \text{ (L'hospital Uygulanırsa)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

10) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + 5x^4}{2x + x^3 + 3x^4}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + 5x^4}{2x + x^3 + 3x^4} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$ (L'hospital Uygulanırsa)

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3 + 5x^4)'}{(2x + x^3 + 3x^4)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{20x^3}{12x^3 + 3x^2 + 2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \text{ (L'hospital Uygulanırsa)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{60x^2}{36x^2 + 6x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{120x}{72x + 6} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \text{ (L'hospital Uygulanırsa)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{120}{48} = \frac{5}{3}$$

11) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2}{x+1} \right]$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2}{x+1} \right] = [\infty - \infty]$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(x+1) - x^2(x-1)}{(x^2-1)} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 - x^3 + x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{2x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{2} = 2$$

12) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 + x - 30}{\sqrt{x-1} - 2}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 + x - 30}{\sqrt{x-1} - 2} = \left[\frac{0}{0} \right]$ (L'hospital uygulanırsa...)

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x^2 + x - 30)'}{(\sqrt{x-1} - 2)'} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x+1}{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}} = \frac{11}{\frac{1}{4}} = 44$$

13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(1-e^x)}{(1+x) \log(1-x)}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(1-e^x)}{(1+x) \log(1-x)} = \left[\frac{0}{0} \right]$ (L'hospital uygulanırsa...)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x(1-e^x))'}{[(1+x) \log(1-x)]'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x(1-e^x) - e^{2x})}{\log(1-x) - \frac{(1+x)}{(1-x)}} = \frac{-1}{-1} = 1$$

14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{\sin 2x}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{\sin 2x} = \left[\frac{0}{0} \right]$ (L'hospital uygulanırsa...)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{3x} - e^{-3x})'}{(\sin 2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3e^{3x} + 3e^{-3x}}{2 \cos 2x} = \frac{6}{2} = 3$$

15) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^x$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^x = (1^\infty)$ ise $y = \left(1 - \frac{3}{x}\right)^x \Rightarrow \ln y = \ln \left(1 - \frac{3}{x}\right)^x$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln y = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(1 - \frac{3}{x}\right)^x = (0 \cdot \infty)$$

$$\ln y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 - \frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0} \right] \rightarrow \text{L' hospital Uygulanırsa } \ln y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\ln \left(1 - \frac{3}{x}\right) \right)'}{\left(\frac{1}{x} \right)'}$$

$$\begin{aligned}
\ln y &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x^2} / 1 - \frac{3}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x^2} / \frac{x-3}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x(x-3)}}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^2}{x(x-3)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x}{x-3} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \\
&\rightarrow \text{L' hospital Uygulanırsa ; } = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(-3x)'}{(x-3)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3}{1} = -3 \\
\Rightarrow \ln y &= -3 \Rightarrow y = e^{-3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} y = \frac{1}{e^3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^x = \frac{1}{e^3}
\end{aligned}$$

16) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1) \cdot \cot x = ?$

Çözüm: $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1) \cdot \cot x = (0 \cdot \infty)$ ise $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{\tan x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{1} = 1$

17) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{x-1} \right) = ?$

Çözüm: $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{x-1} \right) = (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x-1 - x \cdot \ln x}{(x-1) \cdot \ln x} \right) = \left[\frac{0}{0} \right]$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\left(1 - \frac{\ln x}{x} \right)}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - \ln x}{x+1} = +\frac{1}{2}$$

18) $\lim_{x \rightarrow 0} (\log x)^x = ?$

Çözüm: $\lim_{x \rightarrow 0} (\log x)^x = [\infty^0]$ ise $y = \lim_{x \rightarrow 0} (\log x)^x$

$$\ln y = \lim_{x \rightarrow 0} \ln (\log x)^x = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln (\log x) = (0 \cdot \infty) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln (\log x)}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\ln x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x}{\ln x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \text{ L' hospital Uygulanırsa ; }$$

$$\ln y = \lim_{x \rightarrow 0} -x = 0 \text{ ise } y = e^0 = 1$$

19) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} = ?$

Çözüm: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} = [0^0]$

$$\ln y = \sin x \cdot \ln x = [\infty \cdot \infty] \Rightarrow \ln y = \frac{\ln x}{\csc x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

$$\ln y = \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \left[\frac{0}{0} \right] \Rightarrow \ln y = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{2 \cdot \cos x}{\sin^3 x}} = 0 \text{ ise } y = 1 = e^0$$

20) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}$ limitini bulunuz.

Çözüm: $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = [\infty^0] \Rightarrow \ln y = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x^{\frac{1}{x}}$

$$\ln y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \ln x = [0 \cdot \infty] \Rightarrow \ln y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \text{ ise}$$

$$\ln y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{1}} = 0 \Rightarrow y = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

10.7. Diferansiyel

Tanım: $\frac{dy}{dx}$ sembolünde görülen dx ve dy büyüklüklerini açıklayalım: $y = f(x)$ olmak üzere; dx büyüklüğüne “ x ” bağımsız değişkeninin diferansiyeli denir. dy büyüklüğü $dy = f'(x)dx$ olarak tanımlanıp “ y ” bağımlı değişkeninin diferansiyeli denir. Eşitlikte de görüldüğü gibi dy diferansiyeli “ x ”’in ve dy ‘nin fonksiyonudur.

Teorem: f ve g türevlenebilen fonksiyonlar ise;

i) $d(f \mp g) = df \mp dg$

ii) $d(f \cdot g) = gdf + fdg$

iii) $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2} \quad (g \neq 0)$

10.7.1. Diferansiyelin Geometrik Yorumu

$y = f(x)$ fonksiyonu $x = x_0$ 'da türevlenebilen bir fonksiyon olup, x_0 'in civarında grafiği aşağıdaki şekilde olsun.

$$|PH| = \Delta x \text{ ve } |QH| = \Delta y$$

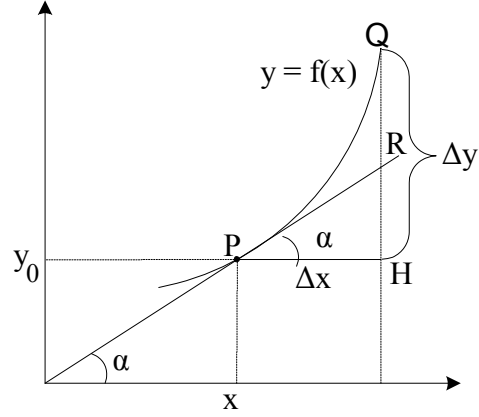
$$|RH| = f'(x_0)|PH|$$

$$|RH| = f'(x_0)\Delta x$$

$$|RH| = f'(x_0)dx \Rightarrow \Delta x = dx$$

$$\tan \alpha = f'(x_0) = \frac{|RH|}{|PH|}$$

$$\forall x \text{ için } |RH| = f'(x)dx = dy$$



Şekil 10.2. Diferansiyelin geometrik yorumu

$|RH| = dy$ olduğundan $|RH|$ f 'nin x_0 'daki diferansiyeldir. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ oranı için öyle bir $\varepsilon \rightarrow 0$

sayısı seçelim ki; $\Delta x \rightarrow 0$ iken $\varepsilon \rightarrow 0$ olsun. Buna göre ; $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \varepsilon$ dir

$\Rightarrow \Delta y = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon.\Delta x \Rightarrow \Delta y \cong dy$ olur. Bunu birkaç örnekle açıklayalım.

Örnek: Bir çemberin yarıçapı 6cm'den 6,25cm'ye değiştirilirse çemberin yarıçapındaki artış miktarı ne kadar olur?

Çözüm:

$$\Ç = 2\pi r \rightarrow \Ç' = 2\pi \Rightarrow \frac{d\Ç}{dr} = 2\pi \Rightarrow d\Ç = 2\pi.dr = 2\pi.(0,25) = 0,5\pi$$

Örnek: Bir dairenin yarıçapı 8,4m'den 5m'ye değiştirilirse dairenin alanındaki azalma miktarı ne kadar olur?

Çözüm:

$$A = \pi.r^2 \rightarrow A' = 2\pi r \Rightarrow \frac{dA}{dr} = 2\pi r \Rightarrow dA = 2\pi r dr = 2\pi.5(3,4) = 34\pi$$

Örnek: Bir kürenin yarıçapı 2,5cm'den 3,8cm'ye değiştirilirse kürenin hacmindeki artış ne kadar olur?

Çözüm:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow V' = 4\pi r^2 \Rightarrow \frac{dV}{dr} = 4\pi r^2 \Rightarrow dV = 4\pi r^2 dr = 4\pi.4^2(1,3) = 83,2\pi$$

11. BÖLÜM

11.GRAFİK ÇİZİMİ VE ÇÖZÜMLÜ ÖRNEKLER

11.1.Giriş: Maksimum,minimum ve bükümlülüğün incelenmesi,asimptotların araştırılması ve varsa belirsizliklerin giderilmesi gibi grafik çizimi için gerekli olan konular bir önceki bölümde anlatıldığından bu bölümde verilmeyecektir. Bu bölümde, grafik çiziminin temel adımları ile çeşitli fonksiyonların grafikleri çözümlü örneklerle ele alınacaktır.

11.2. Grafik Çizimi Temel Adımları

$y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğini çizmek için aşağıdaki adımlar uygulanır.

- i-) Tanım aralığı bulunur.
- ii-) Tanım aralığının uç noktalarında limitler araştırılır.(Asimptotlar varsa bulunur.)
- iii-) Grafiğin eksenleri kestiği noktalar varsa bulunur.
- iv-) $x = 0$ için y varsa bulunur ve $y = 0$ için varsa x bulunur.
- v-) Maksimum,minimum ve bükümlülük incelenir.
- vi-) Bütün bu bilgiler genel bir tabloda toplanır.
- vii-) Grafik çizilir.

11.3. Çözümlü Örnekler

1) $f(x) = \frac{10}{x^2 + 1}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz?

Çözüm: i-) $T.A = IR = (-\infty, \infty)$

ii-) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10}{x^2 + 1} = 0$ ve $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10}{x^2 + 1} = 0$ ise $y = 0$ yatay asimptot.

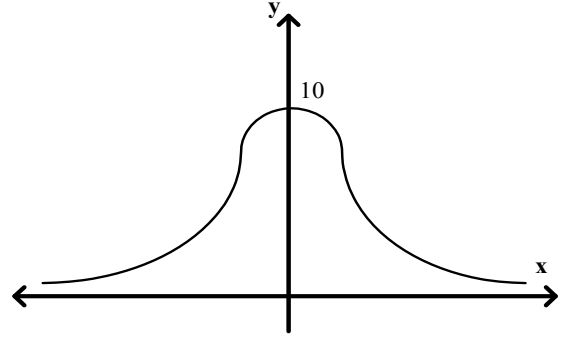
iii-) $x = 0$ için $y = 10$ ve $y = 0$ için $\frac{10}{x^2 + 1} = 0 \Rightarrow 10 \neq 0 \Rightarrow x$ - eksenini kesmez.

iv-) $f'(x) = \frac{(10)' \cdot (x^2 + 1) - (x^2 + 1)' \cdot 10}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow \frac{-20x}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow f'(x) = -20x = 0 \Rightarrow x = 0$

v)Tablo:

x	$-\infty$		0		∞
y'	+	+	0	-	-
y	0		10		0

vi)Grafik



2) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:i-) $T.A = IR^+ = (0, \infty)$

ii-) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ ise $y=0$ doğrusu yatay

asimptot. $x = 0$ 'da sağdan düşey asimptot vardır.

iii-) $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow 1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$

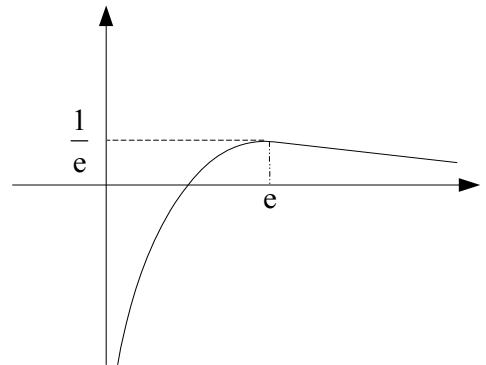
$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x(1 - \ln x)}{x^4} \Rightarrow f''(x) = \frac{-3x + 2x \cdot \ln x}{x^4} \Rightarrow f''(e) = \frac{-3e + 2e \cdot \ln e}{e^4}$

$\Rightarrow f''(e) = \frac{-e}{e^4} = -\frac{1}{e^3} < 0$ ise $(e, \frac{1}{e})$ maksimum noktadır.

v)Tablo:

x	0	1	e		∞
y'	+	+	0	-	-
y	$-\infty$	0	$\frac{1}{e}$		0

vi)Grafik



3) $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm: i-) $T.A = \mathbb{R} - \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$

ii-) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2} = -\infty$ ve $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2} = \infty$ Eğik asimptot olabilir.

1.Yol:

$$\begin{array}{r} x^2 - 4x + 3 \quad \left| \begin{array}{l} x - 2 \\ x - 2 \end{array} \right. \\ \hline \mp x^2 \pm 2x \\ -2x + 3 \\ \hline \pm 2x \mp 3 \\ \hline 0 \end{array} \quad y = x - 2 \text{ Eğik asimptot.}$$

2.Yol: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x + 3}{x(x - 2)} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - 1 \cdot x] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2} - x \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x + 3 - x^2 + 2x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x + 3}{x - 2} = -2 \text{ ise } y = x - 2 \text{ eğik asimptot.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(2 - \varepsilon)^2 - 4(2 - \varepsilon) + 3}{2 - \varepsilon - 2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^2 - 1}{-\varepsilon} = +\infty$$

$x = 2$ 'de düşey asimptot vardır.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(2 + \varepsilon)^2 - 4(2 + \varepsilon) + 3}{2 + \varepsilon - 2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon} = -\infty$$

iii) $x = 0$ için $y = -\frac{3}{2}$ ve $y = 0$ için $x^2 - 4x + 3 = 0$ ise $(x - 1)(x - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \quad x_2 = 3$

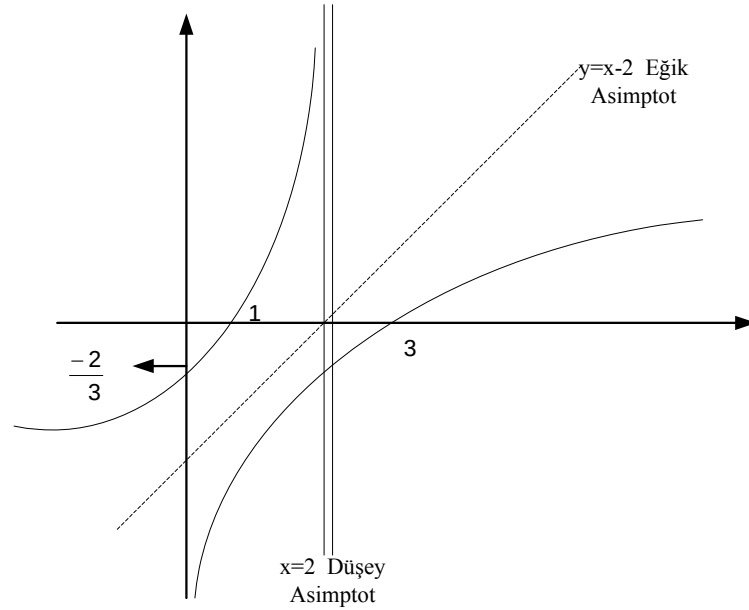
$$\text{iv) } y' = \frac{(x^2 - 4x + 3)' \cdot (x - 2) - (x - 2)' \cdot (x^2 - 4x + 3)}{(x - 2)'} = 0$$

$$y' = \frac{(2x - 4)(x - 2) - (x^2 - 4x + 3)}{(x - 2)^2} = 0 \Rightarrow y' = x^2 - 4x + 5 = 0 \rightarrow \text{Ekstremum yoktur.}$$

v)Tablo

x	$-\infty$		1	2	3	∞
y'	+	+	+	+	+	+
y	$-\infty \nearrow -\frac{3}{2}$	$\nearrow 0$	$\nearrow \infty$	$-\infty \nearrow 0$	$\nearrow \infty$	

vi)Grafik



4) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:i-) $T.A = IR = (-\infty, \infty)$

ii) $x^2 + 1 \neq 0$ olduğundan , f fonksiyonu her $x \in R$ için sürekli ve türevi olan bir fonksiyondur.

$$x \in IR \text{ için } f(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{(-x)^2 + 1} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = f(x)$$

olduğundan , f çift fonksiyondur. Bu nedenle , fonksiyonun grafiği 0y- eksenine göre simetriktr.

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1 \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

olduğundan $y=1$ doğrusu yatay asimptottur.

$$\text{iv) } f'(x) = \frac{2x(x^2 + 1) - 2x(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} = 0$$

$$x = 0 \text{ için } f'(x) = 0 \text{ dir. } x < 0 \text{ için } f'(x) < 0 \text{ ve } x > 0 \text{ için } f'(x) > 0$$

olduğundan $x = 0$ noktasında (yerel) minimum vardır. $\min f(x) = f(0) = -1$ dir.

$$f''(x) = \frac{4(x^2 + 1)^2 - 4x \cdot 2(x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^4} = \frac{-12x^2 + 4}{(x^2 + 1)^3}$$

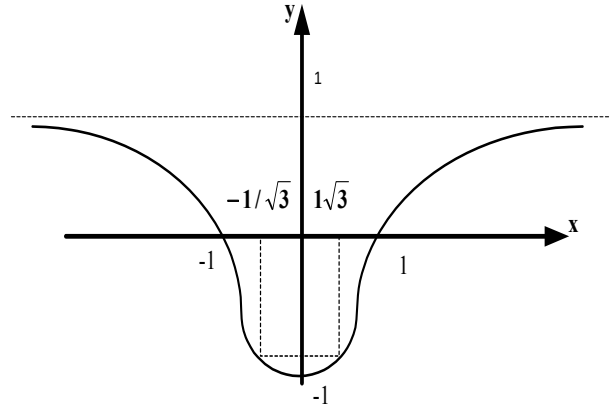
$$f''(x) = 0 \text{ dan } -12x^2 + 4 = 0 \quad x^2 = \frac{1}{3}, \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{2}, \quad f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{2} \text{ olur.}$$

v)Tablo

x	$-\infty$	-1	0	1	∞		
y'	-	-	-	0	+	+	+
y	-1	0	-1	0	1		

x	$-\infty$	$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$+\infty$							
f''	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-
f	Konkav	-1/2	B.N.	Konveks	-1/2	B.N.	Konkav				

vi)Grafik



5) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 11$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

i) $T.A = (-\infty, \infty)$

ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + 3x^2 - 9x - 11 = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 + 3x^2 - 9x - 11 = \infty$

iii) $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x^2 + 2x - 3)$ $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow$

$x_1 = -3$, $x_2 = 1$ ve $f(-3) = 16 > 0 \Rightarrow f(1) = -16 < 0$ olur.

iv) $f''(x) = 6x + 6$ ve $6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1$ B.N $f(-1) = 0$

v) $x = 0$ için $f(0) = -11$

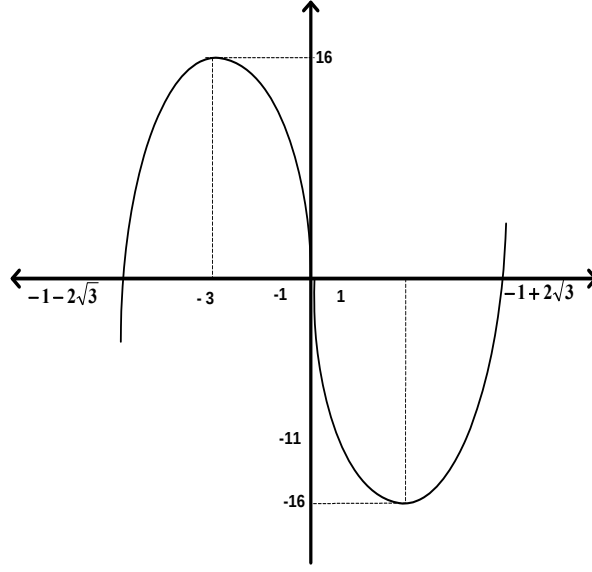
$y = 0$ için $x^3 + 3x^2 - 9x - 11 = 0$ için $x_1 = -1$, $x_2 = -1 - 2\sqrt{3}$, $x_3 = -1 + 2\sqrt{3}$

vi)Tablo

x	$-\infty$	$-1-2\sqrt{3}$	-3	-1	0	1	$-1+2\sqrt{3}$	$+\infty$
y'	+	+	0	-	-	0	+	+
y''	-	-	-	0	+	+	+	+
y	$-\infty$	0	16	0	-11	-16	0	$+\infty$

$\nearrow$ $\nearrow$ Max T.N $\searrow$ B.N $\searrow$ Min T.N $\nearrow$ $\nearrow$

vii) Grafik



6) $f : \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{-2x^2 + 7x - 8}{x - 2}$ grafiğini çiziniz.

Çözüm:i) $T.A. = \mathbb{R} - \{2\}$

ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2 + 7x - 8}{x - 2} = \infty$ Eğik Asimptot olabilir.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2 + 7x - 8}{x(x - 2)} = -2 \quad m = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-2x^2 + 7x - 8}{x - 2} - (-2)x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - 8}{x - 2} = 3 \quad n = 3$$

ise $y = -2x + 3$ Eğik Asimptottur.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2 + 7x - 8}{x - 2} = -\infty \Rightarrow y = -2x + 3 \Rightarrow \text{Eğik Asimptot}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2x^2 + 7x - 8}{x - 2} = -\infty \text{ ve } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-2x^2 + 7x - 8}{x - 2} = +\infty \text{ ise } x = 2 \text{ Düşey Asimptottur.}$$

$$\text{iii) } f'(x) = \frac{(-4x + 7)(x - 2) - (-2x^2 + 7x - 8)}{(x - 2)^2} = \frac{-2x^2 + 8x - 6}{(x - 2)^2}$$

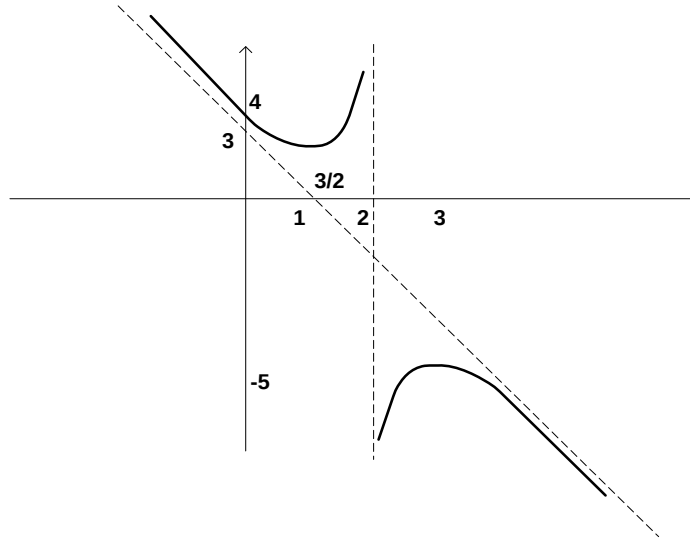
$$f'(x) = 0 \text{ , } -2x^2 + 8x - 6 = 0 \rightarrow x = 1 \text{ , } x = 3$$

$$\text{iv) } x = 0 \text{ için } f(0) = 4$$

v)

x	$-\infty$	0	1	2	3	$+\infty$	
f'	- - -		○ + + +		+ + + ○ - - -		
f	$+\infty$	4	3	$+\infty$	$-\infty$	-5	$-\infty$

vi) Grafik



7) $f(x) = x.e^{\frac{1}{x}}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:i) $T.A. = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x.e^{\frac{1}{x}} = -\infty$ Eğik Asimptot Olabilir.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x.e^{\frac{1}{x}}}{x} = 1 \Rightarrow m = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - m.x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x.e^{\frac{1}{x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{1}{x^2}.e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = 1 \quad n = 1 \quad y = x + 1 \text{ eğik asimptottur}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x.e^{\frac{1}{x}} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} x.e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \infty \Rightarrow x = 0 \text{ 'da sağdan Düşey Asimptot vardır.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x.e^{\frac{1}{x}} = \infty \Rightarrow y = x + 1 \text{ Eğik Asimptottur.}$$

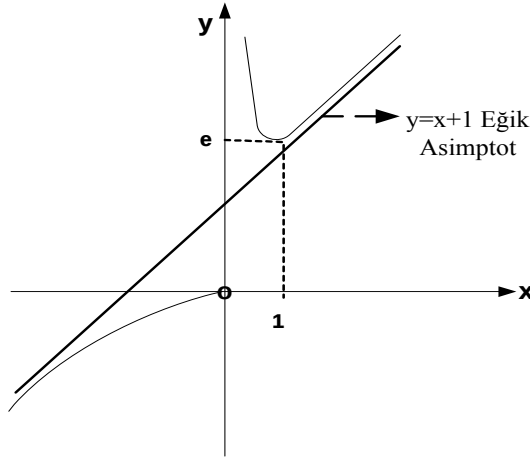
$$\text{iii) } f'(x) = e^{1/x} - \frac{x}{x^2} \cdot e^{1/x} = e^{1/x} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = \left(\frac{x-1}{x}\right) e^{1/x} \text{ ise } x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow f(1)=e$$

$$\text{iv) } f''(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot e^{1/x} \left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2} \cdot e^{1/x} = \frac{1}{x^3} \cdot e^{1/x} = 0 \quad \text{Kök Yok.}$$

v)Tablo

x	$-\infty$	0			1			$+\infty$			
f'	+	+	+		-	-	-	○	+	+	+
f''	-	-	-		+	+	+		+	+	+
f	$-\infty$	0			$+\infty$			e	$+\infty$		
		Aşağı Doğru						Min			
		Konkav									

vi) Grafik



8) $f(x) = e^{-x^2}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:i) $T.A. = (-\infty, \infty)$

ii) $x \in \mathbb{R}$ için $f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x)$ olduğundan f çift fonksiyondur.

f'nin grafiği -0y eksenine göre simetriktir.

iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x^2} = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} = 0$ ise $y=0$ doğrusu yatay asimptottur.

iv) $f'(x) = -2xe^{-x^2}$ olup $e^{-x^2} > 0 \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0$ (Sabit Nokta)

v) $f''(x) = -2e^{-x^2} + (-2x) \cdot (-2x)e^{-x^2} = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$

$f'' = -2 < 0$ yerel maksimum. $f(0) = 1$ mutlak maksimum.

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 4x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

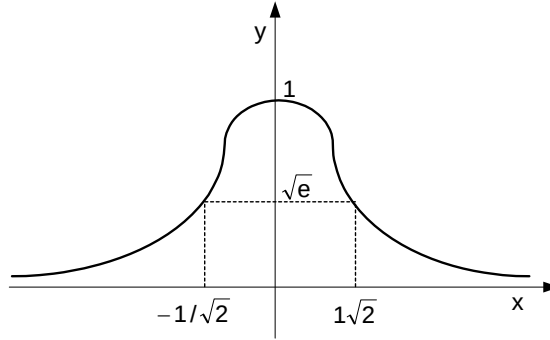
$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{-\frac{1}{2}} \rightarrow \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right) \text{ Konveks} \rightarrow \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{-\frac{1}{2}}\right) \text{ Büküm Noktası}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{-\frac{1}{2}} \rightarrow \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ Konkav} \rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{-\frac{1}{2}}\right) \text{ Büküm Noktası}$$

vi)Tablo

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	+	+	-
f	0	1 Max	0

vii)Grafik



9) $f(x) = x^2 \cdot \ln x$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:i) $T.A. = (0, \infty)$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-2x^{-3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{-2x^{-2}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot \ln x = \infty \quad \text{Eğik Asimptot Olabilir.} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \cdot \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln x = \infty \quad \text{Eğik Asimptot yok.}$$

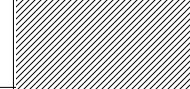
$$\text{iii) } f'(x) = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \cdot \ln x + x = x(2 \ln x + 1) = 0$$

$$2 \ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -e^{-\frac{1}{2}} \quad \text{ise } y = e^{-\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{e}}$$

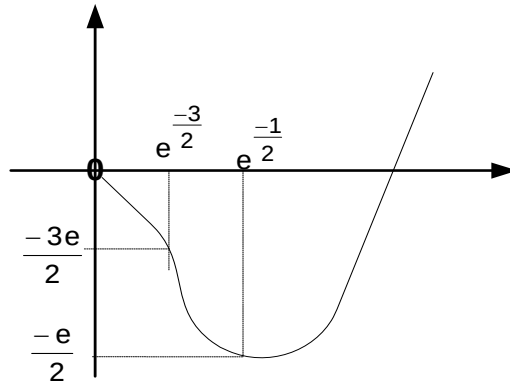
$$\text{iv) } f''(x) = (2 \ln x + 1) + x \cdot \frac{2}{x} = 2 \ln x + 3 = 0 \Rightarrow x = e^{-\frac{3}{2}}$$

$$\text{v) } x=0 \text{ için } y \text{ tanımsız ve } y=0 \text{ için } x^2 \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

vi)

x	$-\infty$	0	$e^{-3/2}$	$e^{-1/2}$	1	$+\infty$
y'			- - -	- - - 	+ + +	+ + +
y''			- - - 	+ + +	+ + +	 + + +
y						
			B.N	$-\frac{1}{2e}$	0	$+\infty$
				Yerel Max		

vii)Grafik



$$10) y = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x - 3} \quad \text{fonksiyonunun grafiğini çiziniz.}$$

$$\text{Çözüm: i) } T.A. = \mathbb{R} - \{-3, 1\} = (-\infty, -3) \cup (-3, 1) \cup (1, \infty)$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x - 3} = 1 \quad y = 1 \quad \text{Yatay Asimptottur.}$$

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x - 3} = +\infty \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x - 3} = -\infty \Rightarrow x = -3 \quad \text{Düşey Asimptottur.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x - 3} = +\infty \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x - 3} = -\infty \Rightarrow x = 1 \quad \text{Düşey Asimptottur.}$$

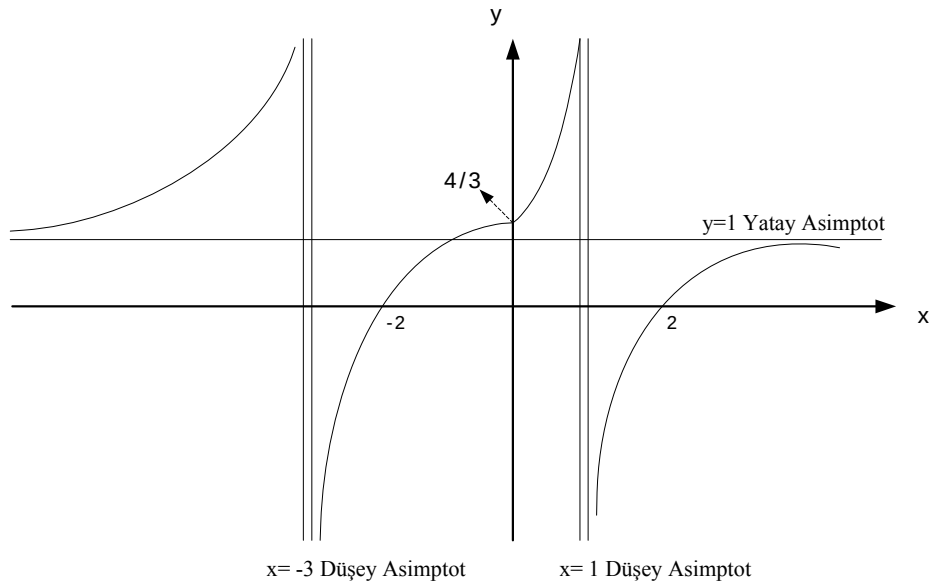
$$\text{iv) } x = 0 \text{ için } y = \frac{4}{3} \Rightarrow y = 0 \text{ için } x = \mp 2$$

$$v) y' = \frac{(2x)(x^2 + 2x - 3) - (2x + 2)(x^2 - 4)}{(x^2 + 2x - 3)^2} = 0 \quad \text{ise} \quad y' = 2x^2 + 2x + 8 = 0 \quad \Delta < 0$$

vi) Tablo

x	$-\infty$	-3	-2	0	1	2	$+\infty$
y'	+	+	+	+	+	+	+
y	1	$+\infty$	$-\infty$	0	$4/3$	$+\infty$	$-\infty$

vii) Grafik



11) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ fonksiyonunun değişimini inceleyin ve grafiğini çiziniz.

Çözüm: i) T.A = $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

$$ii) \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 3x^2 - 9x + 2 = -\infty \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 - 3x^2 - 9x + 2 = \infty$$

$$iii) \quad x=0 \text{ için } y=2 \text{ iken } y=0 \text{ için } x=?$$

$$x^3 - 3x^2 - 9x + 2 = (x + 2)(x^2 - 5x + 1) = 0$$

$$x^2 - 5x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_1 = \frac{5 + \sqrt{21}}{2} \cong 4.25 \quad x_2 = \frac{5 - \sqrt{21}}{2} \cong 0.25$$

$$x + 2 = 0 \text{ ise } x_3 = -2$$

$$iv) \quad y' = 3x^2 - 6x - 9 = 0$$

$$\text{veya} \quad y'' = 6x - 6$$

$$3(x^2 - 2x - 3) = 0$$

$$y''(-1) = 6 \cdot (-1) - 6 = -12 < 0 \Rightarrow x = -1 \quad \text{max}$$

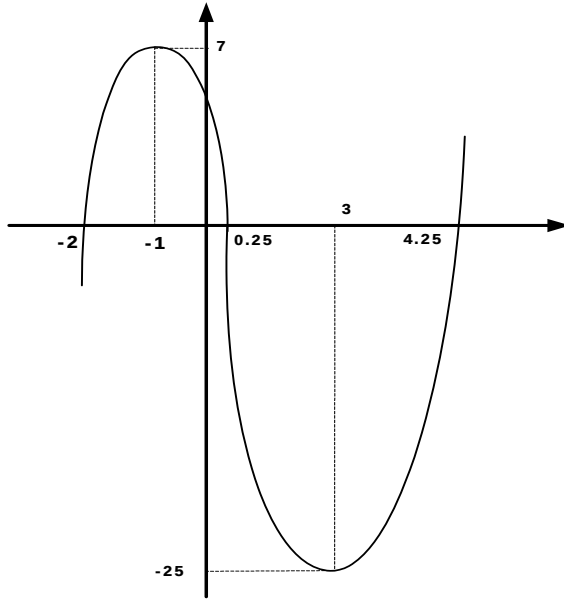
$$x_1 = -1 \quad x_2 = 3$$

$$y''(3) = 6 \cdot 3 - 6 = 12 > 0 \Rightarrow x = 3 \quad \text{min}$$

v) Tablo

x	$-\infty$	-2	-1	0	0.25	3	4.25	$+\infty$
y'		+	+	+		-	-	-
y	$-\infty$	0	7	2	0	-25	0	$+\infty$

vi)Grafik



12) $f(x) = \ln\left(\frac{x-2}{x^2-1}\right)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:i) $T.A = \frac{x-2}{x^2-1} > 0 \Rightarrow T.A = (-1,1) \cup (2,\infty)$

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
x-2	-	-	-	-	+
x^2-1	+	+	+	+	+
$\frac{x-2}{x^2-1}$	-	+	-	+	+

ii) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \ln\left(\frac{x-2}{x^2-1}\right) = +\infty$ $x=-1$ 'de sağdan ve $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln\left(\frac{x-2}{x^2-1}\right) = +\infty \Rightarrow x=+1$ 'de soldan

düşey asimptottur.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \ln\left(\frac{x-2}{x^2-1}\right) = -\infty \Rightarrow x=2, \text{de sađdan dűşey asimptot var.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{x-2}{x^2-1}\right) = -\infty \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

iii) $x=0$ için $y=\ln 2$ ve $y=0$ için $\ln\left(\frac{x-2}{x^2-1}\right)=0 \Rightarrow \frac{x-2}{x^2-1}=e^0$

$x-2=x^2-1 \Rightarrow x^2-x+1=0 \Rightarrow \Delta=1^2-4.1.1=-3<0$ x-yoktur. Grafik x-eksenini kesmez.

$$\text{iv) } y' = \left(\frac{x-2}{x^2-1} \right)' \bigg/ \left(\frac{x-2}{x^2-1} \right) = 0 \Rightarrow y' = \frac{x^2-1-2x(x-2)}{(x^2-1)^2} \cdot \frac{(x^2-1)}{x-2} = 0$$

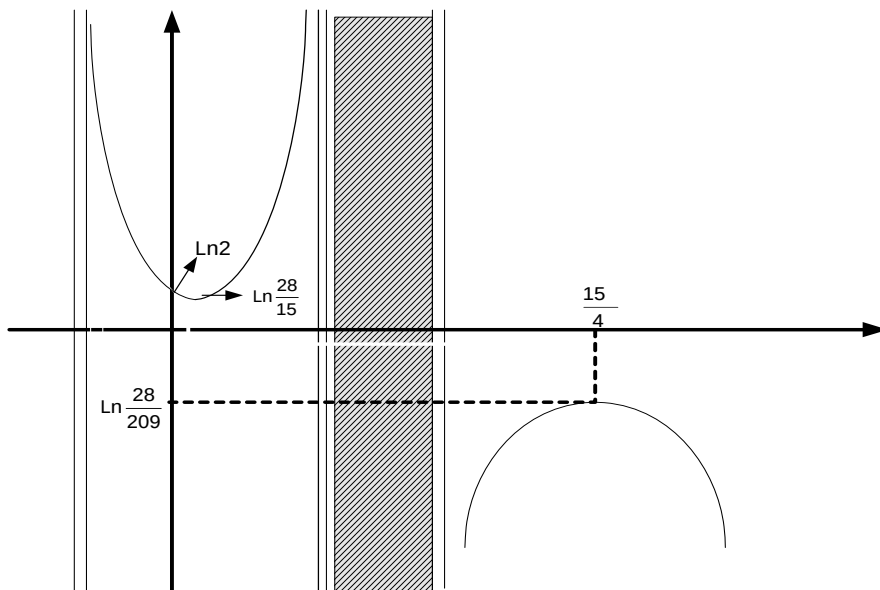
$$\text{ve } y' = \frac{-x^2 + 4x - 1}{(x-2)(x^2-1)} = 0 \Rightarrow y' = -x^2 + 4x - 1 = 0$$

$$x_1 = \frac{-4 + \sqrt{12}}{2 \cdot (-1)} \cong \frac{1}{4} \text{ ve } x_2 = \frac{-4 - \sqrt{12}}{2 \cdot (-1)} \cong \frac{15}{4}$$

v) Tablo

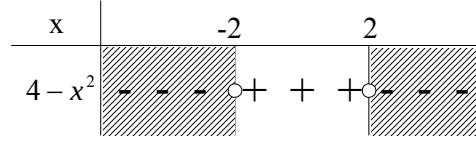
x	$-\infty$	-1	0	1/4	1	2	15/4	$+\infty$					
y'			-	-	-		+	+	+		-	-	-
y			$-\infty$	$\ln 2$	$\ln 28/15$	$+\infty$		$-\infty$	$\ln 28/209$	$-\infty$			

v) Grafik



13) $f(x) = \ln(4 - x^2)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:i) T.A = $4 - x^2 > 0$ olmalıdır. T.A = $(-2, 2)$



ii) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \ln(4 - x^2) = -\infty \Rightarrow x = -2$ 'de sağdan

$\lim_{x \rightarrow 2^-} \ln(4 - x^2) = -\infty \Rightarrow x = 2$ 'de soldan düşey asimptot var.

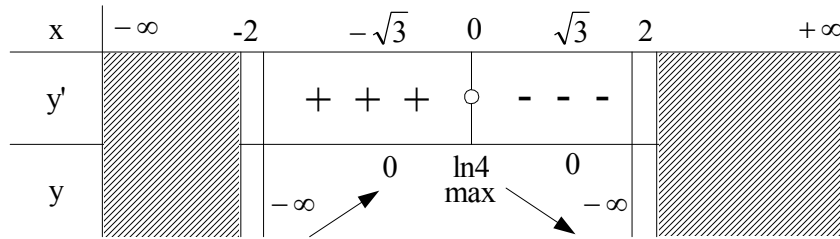
iii) $x = 0$ için $y = \ln 4$ ve $y = 0$ için $\ln(4 - x^2) = 0$

$\Rightarrow 4 - x^2 = e^0 \Rightarrow 4 - x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x_1 = +\sqrt{3} \quad x_2 = -\sqrt{3}$

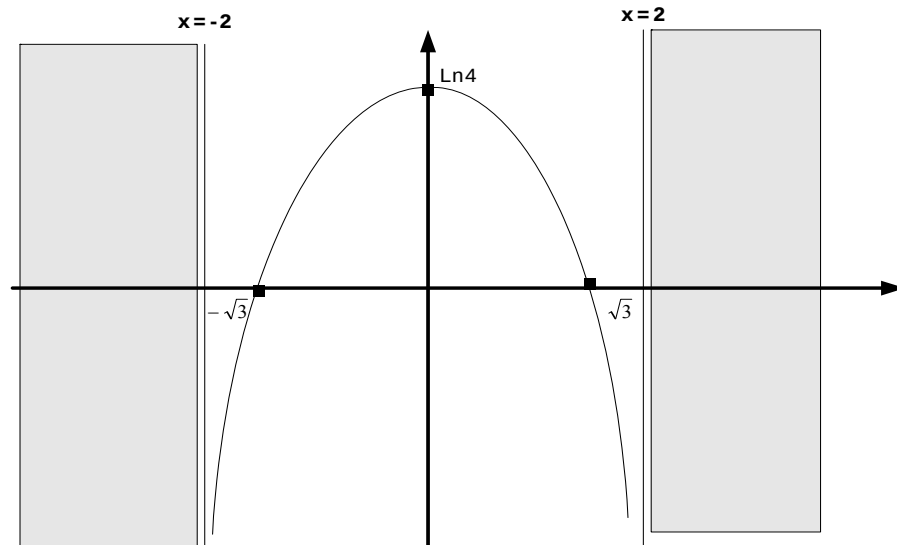
iv) $y' = \frac{(4 - x^2)'}{4 - x^2} = -\frac{2x}{4 - x^2} = 0 \Rightarrow \frac{-2x}{4 - x^2} = 0 \Rightarrow y' = -2x = 0 \Rightarrow x = 0$

$y = \ln 4$ $(0, \ln 4)$ Ekstremum noktasıdır.

v)



vi) Grafik



14) $f(x) = e^{x^2-1}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm: i) T.A = $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^2-1} = \infty$ E.A.O
 $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{x^2-1} = \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x^2-1}}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \text{ ise } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x \cdot e^{x^2-1}}{1} = \infty \cdot \infty = \infty \text{ Eğik Asimptot Yok}$$

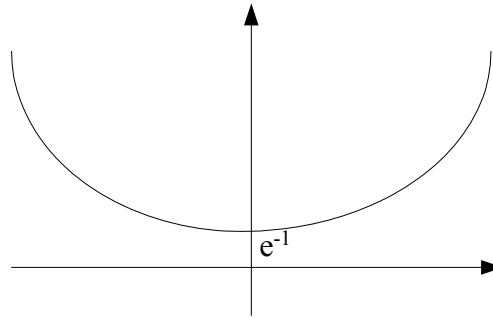
iii) $x=0$ için $y = e^{-1}$ ve $y=0$ için $e^{x^2-1} = 0 \Rightarrow x$ -eksenini kesmez.

$$\text{iv) } y' = 2x e^{x^2-1} = 0 \Rightarrow e^{x^2-1} = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

v) Tablo

x		0	
y'	- - -	o	+ + +
y		e^{-1}	

vi) Grafik



15) $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm: i) T.A = $\frac{x+1}{x-1} > 0$ olmalıdır.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
x+1	- - -	o	+ + +	+ + +
x-1	- - -	- - -	o	+ + +
$\frac{x+1}{x-1}$	+ + +	- - -	- - -	+ + +

$$T.A = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 0$ ve $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 0 \Rightarrow y=0$ doğrusu yatay asimptottur.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -\infty \Rightarrow x=-1 \text{ 'de soldan}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = +\infty \Rightarrow x=1 \text{ 'de sağdan düşey asimptot var.}$$

iii) $x=0$ için $y=\ln(-1)$ y-eksenini kesmez.

$$y=0 \text{ için } \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 0 \Rightarrow \frac{x+1}{x-1} = e^0 \Rightarrow x+1 = x-1 \Rightarrow 1 \neq -1 \text{ x-eksenini kesmez.}$$

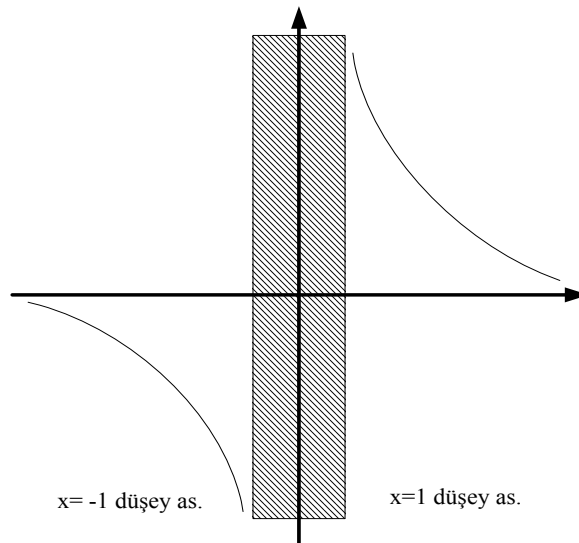
iv) $y' = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)' / \left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 0$ ise $\frac{1 \cdot (x-1) - 1 \cdot (x+1)}{(x+1)^2} \cdot \frac{(x-1)}{(x+1)} = 0$

$$\frac{-2}{(x-1)(x+1)} = 0 \Rightarrow \text{Türev her yerde negatiftir. Ekstreum yoktur.}$$

v)

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'	- - -			- - -
y	0	$-\infty$	$+\infty$	0

vi)



16) $f(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm: i) $T.A = \mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$

ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x^2-1}} = 1 \Rightarrow y=1$ yatay asimptottur.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x^2-1}} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} e^{\frac{1}{x^2-1}} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} e^{\frac{1}{x^2-1}} = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ve } x = +1 \text{ doğruları düşey asimptottur.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{1}{x^2-1}} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{1}{x^2-1}} = \infty$$

iii) $x=0$ için $y = e^{-1} = \frac{1}{e} \Rightarrow y=0$ için $e^{\frac{1}{x^2-1}} \neq 0 \Rightarrow x$ -eksenini kesmez.

$$\text{iv) } y = e^{\frac{1}{x^2-1}} \Rightarrow y' = \left(\frac{1}{x^2-1} \right)' \cdot e^{\frac{1}{x^2-1}} = 0 \Rightarrow \frac{-2x}{(x^2-1)^2} \cdot e^{\frac{1}{x^2-1}} = 0$$

$\Rightarrow e^{\frac{1}{x^2-1}} \neq 0$ olduğundan $\frac{-2x}{(x^2-1)^2} = 0$ olmak zorundadır. Buradan; $y' = -2x = 0 \Rightarrow x=0$

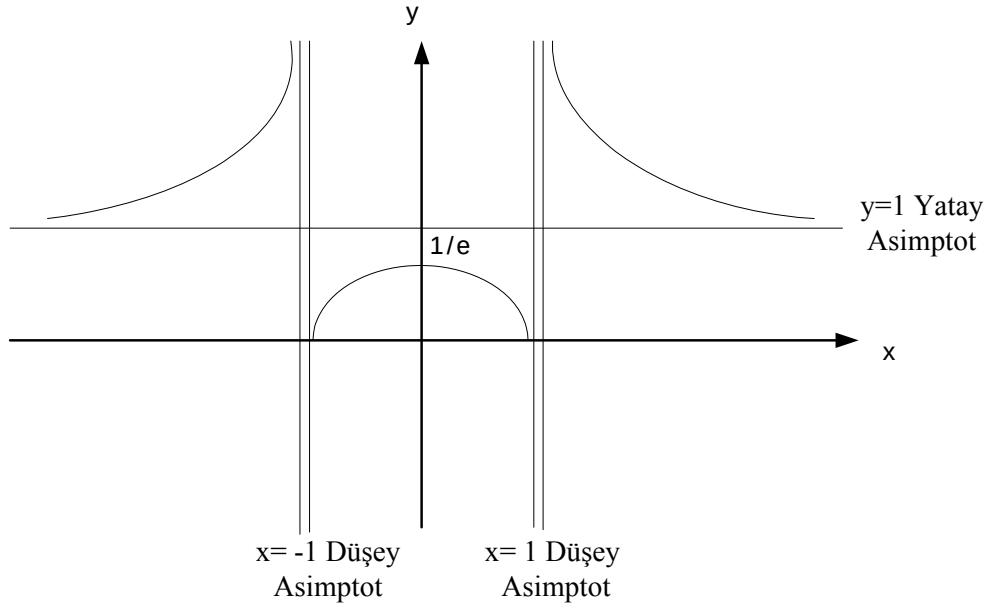
x	0				
y'	+	+	+	○	-
y	$\frac{1}{e}$ max				

NOT: $x=-1$ 'in sağında ve $x=+1$ 'in solundaki limitlerin 0 çıktığına dikkat ediniz

v)

x	$-\infty$	-1			0	1	$+\infty$		
y'	+	+	+	+	○	-	-	-	-
y	1	$+\infty$			0	$\frac{1}{e}$	0	$+\infty$	1

vi)Grafik



17) $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 2}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

i) T.A = $\mathbb{R} - \{x - 2 = 0\} = \mathbb{R} - \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$

ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 2} = -\infty$ Eğik Asimptot olabilir.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 2} = \infty$$

1.Yol : $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 6x + 5}{x - 2} \right) / x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 6x + 5}{x(x - 2)} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - 1 \cdot x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 2} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 6x + 5 - x \cdot (x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x + 5}{x - 2} = -4$$

$y = x - 4$ Eğik Asimptottur.

2.Yol

$$\begin{array}{r}
 x^2 - 6x + 5 \quad \left| \begin{array}{l} x - 2 \\ x - 4 \end{array} \right. \\
 \hline
 \mp x^2 \pm 4x \\
 -4x + 5 \\
 \hline
 \pm 4x \mp 8 \\
 \hline
 -3
 \end{array}
 \Rightarrow y = x - 4 \text{ Eğik Asimptottur.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 2} = +\infty \Rightarrow x=2 \text{ 'de sağdan ve soldan düşey asimptot var.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 2} = -\infty$$

$$\text{iii) } x=0 \text{ için } y = -\frac{5}{2} \text{ ve } y=0 \text{ için } \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 2} = 0$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \text{ ise } (x-1)(x-5) = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \quad x_2 = 5$$

$$\text{iv) } y' = \frac{(2x-6)(x-2) - (x^2 - 6x + 5)}{(x-2)^2} = 0$$

$$y' = \frac{2x^2 - 4x - 6x + 12 - x^2 + 6x - 5}{(x-2)^2} = 0$$

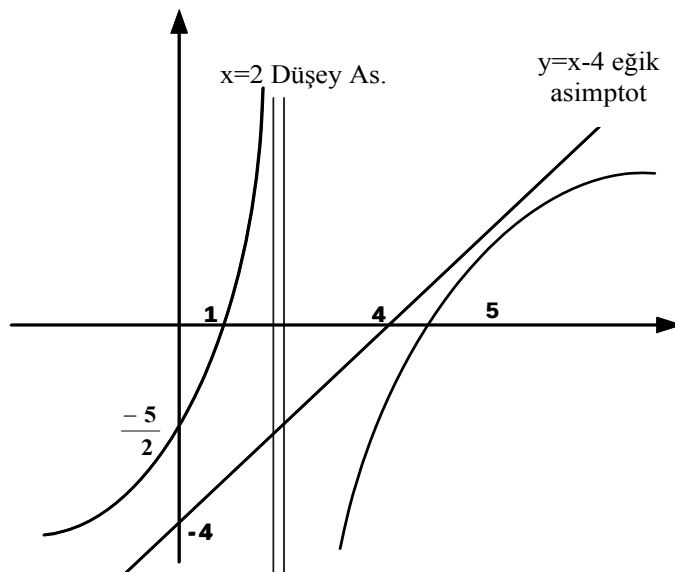
$$y' = x^2 - 4x + 7 = 0 \Rightarrow \Delta = 4^2 - 4 \cdot 7 = -12 < 0$$

Türev her yerde aynı işarete sahiptir. Ekstreum yoktur.

v) Tablo

x	$-\infty$	0	1	2	5	$+\infty$
y'	+ + +				+ + +	
y	$+\infty$	$-\frac{5}{2}$	0	$+\infty$	$-\infty$	0

vi) Grafik



18) $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm: i) $T.A = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ ve $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow y = 0$ doğrusu yatay asimptot

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = 0$ ve $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x = 0$ doğrusu düşey asimptot

iii) $x = 0$ için y – yoktur y – eksenini grafik kesmez.

$y = 0$ için $\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow 1 \neq 0$ x – eksenini grafik kesmez.

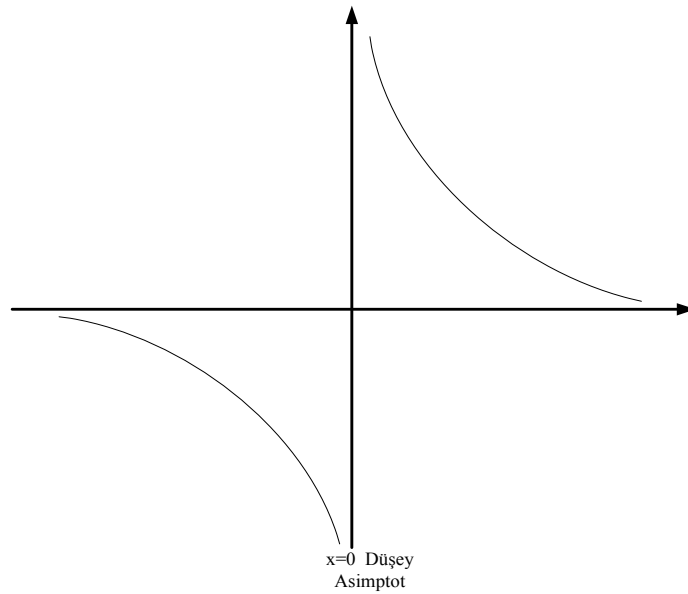
iv) $y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} < 0$ ($\forall x$ için) Türev fonksiyonu her zaman negatiftir.

$y' = 0 \Rightarrow -\frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow -1 \neq 0$ Reel kök yok yani ekstremum yoktur.

v) Tablo

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'	- - -			- - -	
y	0	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$ 0

v) Grafik



19) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm: i) $T.A = \frac{1}{x} > 0 = (0, \infty)$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln\left(\frac{1}{0 + \varepsilon}\right) = \infty \Rightarrow x = 0$ noktasında sağdan düşey asimptot vardır.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$ Eğik asimptot olabilir. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ L'hospital uygulanırsa.

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(-\frac{1}{x}\right)' / \left(\frac{1}{x}\right)}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{x^2} / \frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{x}{1} = 0 \quad y = 0 \quad \text{yatay asimptot.}$$

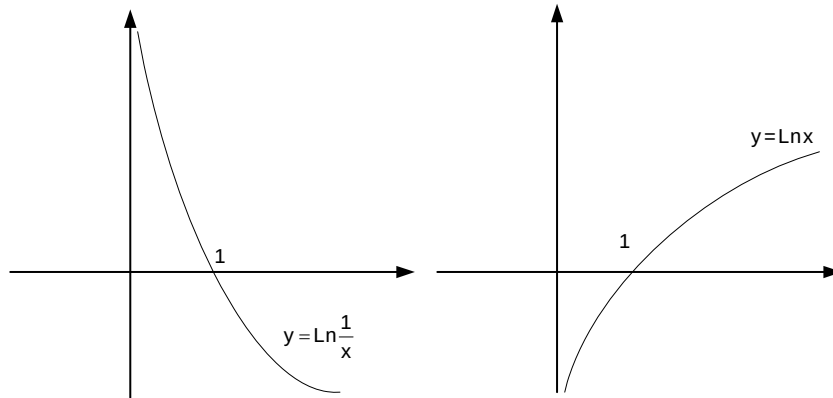
$$\text{iii) } y' = \left[\ln\left(\frac{1}{x^2}\right) \right]' = (1/x)' / (1/x) = \left(-\frac{1}{x}\right)' / \left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$y' = -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{x}{1} = -\frac{1}{x} < 0 \quad \forall x \text{ için türev negatiftir. (} x > 0 \text{ olduğundan)}$$

iv)

x	0	1	$+\infty$
y'	-	-	-
y	$+\infty$	0	$-\infty$

v) Grafik



20) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm: i) $x^2 + 1 \neq 0$ olduğundan $f, \forall x \in \mathbb{R}$ için tanımlıdır. T.A. $= (-\infty, +\infty)$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ii) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1 \end{array} \right\} y=1 \text{ yatay asimptot}$$

$$\text{iii) } x = 0 \text{ için } y = -1$$

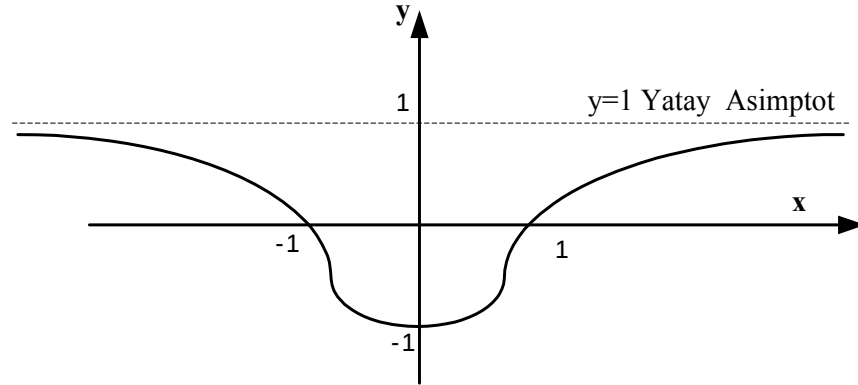
$$y = 0 \text{ için } x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1 \quad (1,0), (-1,0) \quad x_2 = -1$$

$$\text{iv) } f'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0 \quad (0, -1)$$

v)

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'		- - -	o	+ + +	
y	1	0	-1 min	0	1

vi) Grafik



21) $f: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{-2x^2 + 7x - 8}{x - 2}$ fonksiyonunun grafiğini çizin.

Çözüm: i) T.A. $= (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$

ii) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$ $x=2$ 'de soldan düşey asimptot

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty \Rightarrow x=2$ 'de sağdan düşey asimptot

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ olduğundan eğik asimptot vardır.

$$\begin{array}{l} -2x^2 + 7x - 8 \quad \left| \begin{array}{l} x-2 \\ -2x+3 \end{array} \right. \\ \hline \pm 2x^2 \pm 4x \\ \hline \mp 3x \pm 6 \\ \hline 2 \end{array} \Rightarrow y = -2x+3 \text{ doğrusu eğik asimptot}$$

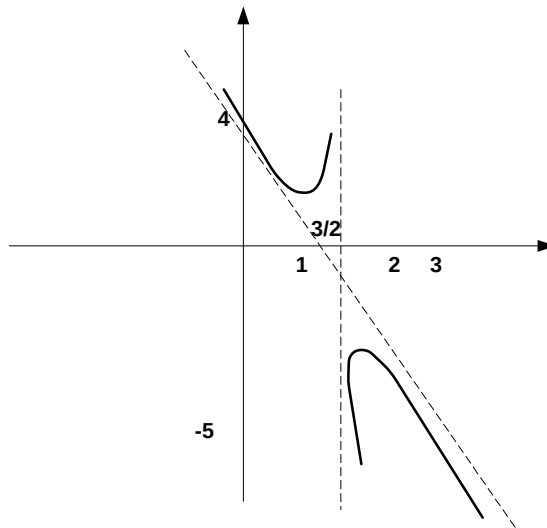
iii) $x=0$ için $y=4$
 $y=0$ için x yok $\Rightarrow x$ - eksenini grafik kesmez

$$iv) f'(x) = \frac{-2x^2 + 8x - 6}{(x-2)^2} = 0 \Rightarrow x=1, x=3.$$

v)

x	$-\infty$	0	1	2	3	$+\infty$	
y'		- - -	$\circ$	+	+	- - -	
y	$+\infty$	4	3 min	$+\infty$	$-\infty$	-5 max	$-\infty$

vi) Grafik



Hatırlatma: $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$e^x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$e^x \neq 0 \text{ ve } e^0 = 1 \Rightarrow (e^x)' = e^x \Rightarrow (e^u)' = u' \cdot e^u \Rightarrow \begin{array}{l} x \rightarrow -\infty \text{ için } e^x \rightarrow 0 \\ x \rightarrow +\infty \text{ için } e^x \rightarrow \infty \end{array}$$

$$1) e^x \cdot e^y = e^{x+y} \quad 2) \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y} \quad 3) e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

22) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm: i) $T.A. = (-\infty, +\infty)$

ii) $x = 0$ için $y = 1$

$y = 0$ için x yoktur. x - eksenini kesmez.

iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x^2} = 0$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

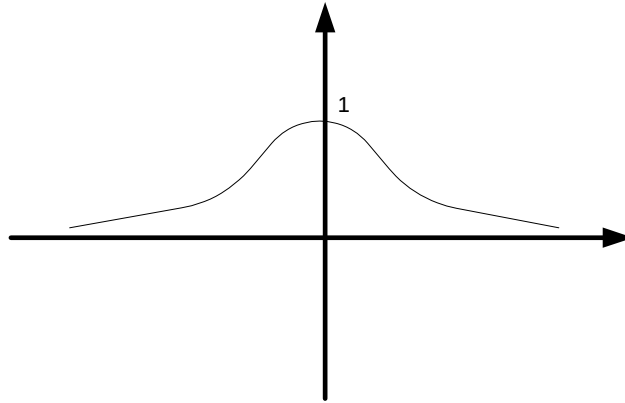
$y = 0$ yatay asimptottur.

iv) $y = e^{-x^2} \Rightarrow y' = -2x \cdot e^{-x^2} = 0 \Rightarrow e^{-x^2} \neq 0 \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0$

v)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		+	+	+	-
y	0		1		0
			max		

vi) Grafik



23) $y = e^{1/x}$ eğrisini çiziniz.

Çözüm: i) $T.A. = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

ii) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{1/x} = 1 \Rightarrow y = 1$ Yatay asimptot. $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = +\infty \Rightarrow x = 0$ Düşey asimptot.

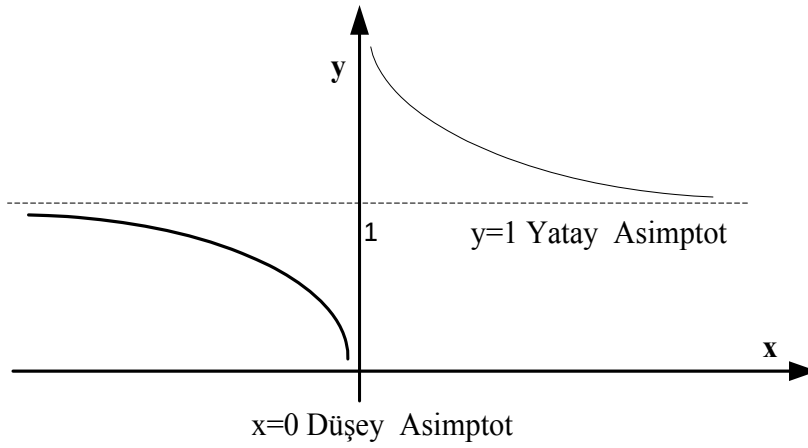
$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{0+h}} = +\infty \Rightarrow x = 0$ 'da sağdan düşey asimptot vardır. $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x} = \lim_{h \rightarrow 0} e^{\frac{1}{0-h}} = 0$

iii) $y' = -\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}} = 0 \Rightarrow y$ daima negatif. $\left(e^{\frac{1}{x}} \neq 0 \right)$

iv) Tablo

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	- - -		- - -
y	1 $\searrow$ 0	0 $\nearrow$ $+\infty$	$+\infty$ $\searrow$ 1

vi) Grafik



24) $y = \log \frac{x-3}{x-2}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm: i) $\frac{x-3}{x-2} > 0$ olmalıdır. T.A. $= (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$x-3$	- - -	- - -	○ + + +	
$x-2$	- - -	○ + + +	+ + +	
$\frac{x-3}{x-2}$	+ + +	- - -	+ + +	

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow \mp \infty} \log \frac{x-3}{x-2} = 0 \Rightarrow y = 0 \quad \text{Yatay Asimptot}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \log \frac{x-3}{x-2} = +\infty \Rightarrow x = 2 \quad \text{Düşey Asimptot.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \log \frac{x-3}{x-2} = -\infty \Rightarrow x = 3 \quad \text{Düşey Asimptot.}$$

$$\text{iii) } x = 0 \text{ için } y = \log 3/2 = 0,4055$$

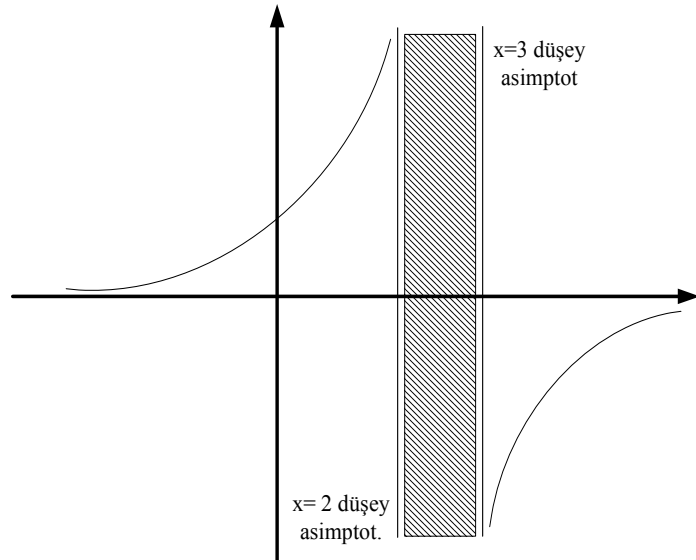
$$y = 0 \text{ için } \log (x-3) / (x-2) = 0 \text{ ise } (x-3) / (x-2) = 1 \Rightarrow x-3 = x-2 \text{ x-eksenini kesmez.}$$

$$\text{iv) } y' = \frac{\left(\frac{x-3}{x-2} \right)'}{\frac{x-3}{x-2}} = \frac{1}{(x-2)(x-3)} = 0$$

v)

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
y'	+	+	+	+
y	0	$+\infty$	$-\infty$	0

vi) Grafik



25) $y = x^3 - 3x$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm: i) T.A. = $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x) = +\infty$

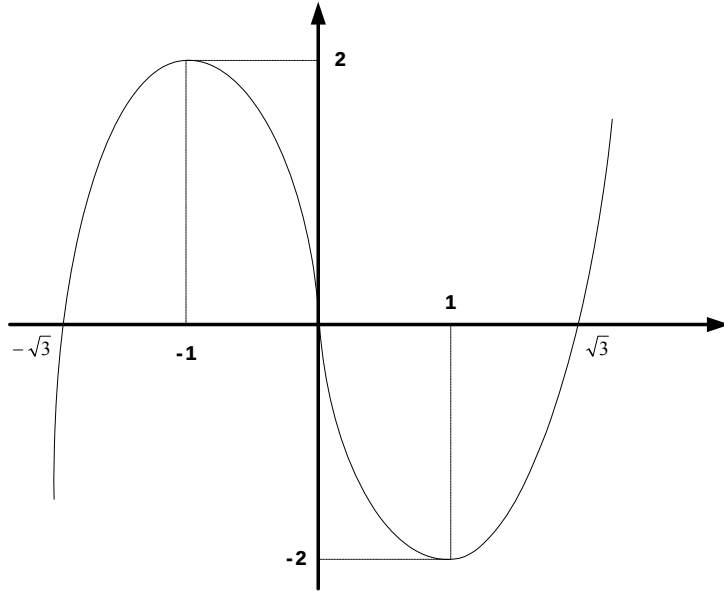
iii) $x = 0$ için $y = 0$ ve $y = 0$ için $x^3 - 3x = 0$ ise $x_1 = 0$; $x_2 = -\sqrt{3}$; $x_3 = \sqrt{3}$

iv) $y' = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x_1 = -1$ $x_2 = 1$ (Sabit Nokta)

v) Tablo

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$					
y'		+	+	+	○	-	-	-	○	+	+	+
y	$-\infty$	0	2	0	2	0	$+\infty$					

v) Grafik



12.BÖLÜM

12. MATEMATİKTE MATLAB İLE İŞLEMLER

MATLAB; (**MAT**rix **LAB**oratory); ilk defa 1985’de C.B Moler tarafından matematik ve özellikle de matris esaslı matematik ortamında kullanılmak üzere geliştirilmiş yüksek performanslı bir teknik programlama dilidir. İlk sürümleri FORTRAN diliyle hazırlanmış olmakla beraber son sürümleri (2002 yılı itibariyle 6.5 dir) C dilinde hazırlanmıştır.

MATLAB, sayısal analiz, matris ve dizi işlemleri, sinyal işleme, algoritma geliştirme, C, C++, Java ve İnternet ile ilişik programlama ve grafiksel kullanıcı ara yüzü (Graphical User Interface -GUI) formulu program yazma gibi sayısal işlemleri, kullanımı kolay bir grafik ara yüzü üzerinden, diğer programlama dillerindeki geleneksel kodlamaya karşın matematiksel denklem yazma kolaylığını da sağlamaktadır.

MATLAB farklı sahalardaki kişilerden gelen taleplerle kendini geliştirmiş ve şu an 500.000’nin üzerindeki endüstri, devlet ve akademik kurumlarda kullanılmaktadır. Yurt dışında üniversitelerde lineer cebir, nümerik analiz gibi temel derslerden, devre analizi, otomatik kontrol gibi bölüm derslerine ve araştırma alanlarına kadar yayılmıştır.

İş sahalarında MATLAB programlama dili, araştırma ve mühendislik alanlarında karşılaşılan problemlere pratik ve çabuk sonuçlar sunmaktadır. MATLAB’ı kullanan firmaların başında, Boeing, DaimlerChrysler, Motorola, NASA, Texas Instruments, Toyota, Quantum ve Saab gelmektedir.

Ayrıca MATLAB, “Araç Kutusu” (“Toolbox”) olarak nitelendirilen özellikler içerir. Bu özellikler, program yazmaya gerek kalmadan içerdiği hazır fonksiyon dosyalarıyla; dış aygıtlarla gerçek zamanlı çalışma, M-Dosya işleme ve derleme, iletişim kurma ve işleme, veri tabanı oluşturma, denetleme ve besleme, arama-ölçme, dijital sinyal işleme, Excel bağlantısı kurma, finansal zaman serilerini açma, görüntü işleme, aygıt denetleme, rapor oluşturma, güç sistemleri modelleme, lineer olan ve olmayan kontrol sistemleri dizaynı, robot kontrolü, dinamik sistem simülasyonu, sistem tanımlama, yapay sinir ağları modelleme, bulanık mantık ve daha fazlası durumları da inceler ve çözüm üretimi sağlar (M. Uzunoğlu, A. Kızıl, Ö. Çağlar Onar, 2002).

12.1. MATLAB’da Karmaşık Sayılar ve Karmaşık Sayı İşlemleri

Karmaşık sayılarla ilk kez, ikinci veya daha yüksek dereceden tek değişkenli denklemlerin çözümlerinde karşılaşmıştır. Genel şekli $ax^2 + bx + c = 0$ tipinde olan denklemlerin kökleri Δ (diskriminant) yöntemi ile bulunur.

Negatif bir sayının kare kökü reel sayılarla tanımlanamaz. Negatif sayıların kare köklerinin bulunabilmesi ve böylece denklem köklerinin hesabına devam edilebilmesi için Karmaşık sayılar bulunmuştur.

Karmaşık sayı operatörü $\sqrt{-1}$, i harfi ile gösterildiği gibi, bilhassa elektrik mühendisliğinde kullanılan akım sembolü ile karışmaması için, j harfi ile de gösterilebilir.

Örnek:

```
>> a= 3+4i
```

```
a =
```

```
3.0000 + 4.0000i
```

Karmaşık değişkenleri oluşturmanın diğer bir yolu da, “complex” fonksiyonu kullanmaktır.

```
>> a= 3;
```

```
>> b=4;
```

```
>> c=complex (a,b)
```

```
c =
```

```
3.0000 + 4.0000i
```

12.2. MATLAB’da Trigonometrik Fonksiyonlar:Aşağıdaki tabloda MATLAB’da kullanılan belli başlı trigonometrik fonksiyonlara ve işlevlerine yer verilmiştir.(Tablo.12.1)

Tablo 12.1: MATLAB’da kullanılan belli başlı trigonometrik fonksiyonlar

Fonksiyon	İşlevi
sin (x)	x açısının sinüsünü verir.
sinh (x)	x açısının sinüs-hiperbolikini verir.
asin(x)	sinüsü x olan açıyı verir.
asinh (x)	sinüs-hiperbolik x olan açıyı verir.
cos (x)	x açısının kosinüsünü verir.
cosh (x)	x açısının kosinüs-hiperbolikini verir.
acos (x)	kosinüsü x olan açıyı verir.
acosh (x)	kosinüs -hiperbolik x olan açıyı verir.
tan (x)	x açısının tanjantını verir.
tanh (x)	x açısının tanjant-hiperbolikini verir.

atan (x)	tanjantı x olan açıyı verir.
atanh (x)	tanjant-hiperbolik x olan açıyı verir.
atan (x,y)	tanjantı x/y olan açının dördüncü bölgedeki eşdeğerini verir.
sec (x)	x açısının sekantını verir. (1/ cos (x))
sech (x)	x açısının sekant-hiperbolikini verir. (1/ cosh (x))
asec (x)	sekantı x olan açıyı verir.
asech (x)	sekant-hiperbolik x olan açıyı verir.
csc (x)	x açısının kosekantını verir. (1/ sin(x))
csch (x)	x açısının kosekant-hiperbolikini verir. (1/ sinh (x))
acsc (x)	kosekantı x olan açıyı verir.
acsch (x)	kosekant-hiperbolik x olan açıyı verir.
cot (x)	x açısının kotanjantını verir.
coth (x)	x açısının kotanjant-hiperbolikini verir.
acot (x)	kotanjantı x olan açıyı verir.
acoth (x)	kotanjant-hiperbolik x olan açıyı verir.

MATLAB’da tanımlı tüm bu fonksiyonlar için girilecek acı değerleri raydan cinsinden olmalıdır.

Örnek: 60°’nin kosinüsünü hesaplayacak olursak,

```
>> a=cos (pi/3)
```

```
a =
```

```
0.5000
```

değeri bulunur.

Derece-radyan dönüşümünü aşağıdaki örnekte olduğu gibi fonksiyonu girerken de yapmak mümkündür.

```
>> a=cos (60*pi/180)
```

```
a =
```

```
0.5000
```


12.3. MATLAB’da Üstel ve Logaritmik Fonksiyonlar

Aşağıdaki tabloda, MATLAB’da tanımlanmış üstel ve logaritmik fonksiyonlara yer verilmiştir.

Tablo .12.2. MATLAB’da tanımlanmış üstel ve logaritmik fonksiyonlar

Fonksiyon	İşlevi
Exp (x)	Logaritmik e sayısının (2.71828) x. Kuvvetini hesaplar.
Log (x)	x sayısının e tabanındaki doğal logaritmasını hesaplar.
Log10 (x)	x sayısının 10 tabanındaki logaritmasını hesaplar.
Log2 (x)	x sayısının 2 tabanındaki logaritmasını hesaplar.
Sqrt (x)	x sayısının karekökünü alır.
x^y	x sayısının y. Kuvvetini hesaplar.

MATLAB’da logaritmik işlemlerde taban olarak sadece e (doğal logaritma tabanı), 2 ve 10 sayıları kullanılabilir. Farklı bir sayının taban olarak kullanılabilmesi mümkün değildir. Bu tip hesaplamaları yaparken logaritmik dönüşümlerden yararlanılır.

Örnek: $\log_b a$ sayısı, $\frac{\ln(a)}{\ln(b)}$ şeklinde ya da $\frac{\log_{10}(a)}{\log_{10}(b)}$ şeklinde ifade edilir. Bu dönüşümleri kullanarak, istenilen sayıyı taban olarak belirlemek mümkündür.

12.4. MATLAB’da Dizi ve Matrislere Ait İşlem Ve Fonksiyonlar

12.4.1. Basit Matrislerin Girilmesi

MATLAB’da matris girişinin en basit yolu, matris elemanlarını tam liste halinde girmektir. Matris elemanları, oluşturulan bir değişken isminden sonra eşittir (=) işareti konularak girilirler. Tüm matris elemanları, köşeli parantezler ([]) arasında girilirler. Aynı satırda bulunan elemanlar, aralarına boşluk veya virgül (,) konularak birbirinden ayrılırlar. Bir satıra ait elemanların girişi bitip, bir alt satırdaki elemanların girişine başlamak içinse, noktalı virgül (;) kullanılır. Aşağıda geçerli bir matris girişi verilmiştir.

```
>> X=[1 4 7; 2 5 8; 3 6 9]
```

X =

```
1   4   7
2   5   8
3   6   9
```

Matris elemanlarını komut penceresinde girerken, bir satır bittikten sonra “enter” tuşuna basılırsa , bir alt satıra ait elemanların girilmesine başlanır.

```
>> A=[1 2 3
```

```
4 5 6
```

```
7 8 9]
```

```
A =
```

```
1    2    3
```

```
4    5    6
```

```
7    8    9
```

Burada dikkat edilmesi gereken nokta, en son satıra ait elemanları da girdikten sonra köşeli parantezin kapatılması gerektiğidir. Matris elemanları, herhangi bir üstel, trigonometrik, Karmaşık MATLAB ifadesinden yararlanılarak yapılan bazı işlemlerin sonuçlarından oluşabilir.

```
>> Z=[log(-5) sqrt(9) exp(sin(pi/6))]
```

```
Z =
```

```
1.6094 + 3.1416i  3.0000      1.6487
```

Girilen matrisin elemanları, parantez içine yazılacak konumları ile ifade edilirler.

Örnek: bu matriste Z(2) elemanı 3.0000’dır. Bu yöntemi kullanarak çeşitli değişken atamaları yapılabilir ve bu yolla matrisler genişletilebilir.

```
>> Z(5)=real(Z(1))
```

```
Z =
```

```
1.6094 + 3.1416i  3.0000      1.6487      0      1.6094
```

Yukarıdaki giriş, matrisin beşinci elemanını, birinci elemanının reel kısmı olarak tanımlamıştır. Böylece matris 1×3 boyutundan 1×5 boyutuna otomatik olarak genişletilmiştir. Matrisin dördüncü elemanına ilişkin bir giriş yapılmadığı için, MATLAB bu elemana 0 değerini atamıştır.

Geniş matrisleri iki nokta üst üste (:) kullanarak daraltmak mümkündür. Aşağıdaki **örnekte** önce dört satırlı bir matris tanımlanmış ve bu matrisin ilk üç satırından oluşan diğer bir matris yapılandırılmıştır.

```
>> A=[1 2 3; 4 5 6; 7 8 9; 10 11 12]
```

```
A =
```

```
1    2    3
```

```
4    5    6
```

```

7   8   9
10  11  12
>> A=A(1:3,:)
A =
1   2   3
4   5   6
7   8   9

```

Aslında, “:”,matrislerin satır veya sütunlarına erişmek için kullanılır. Yukarıdaki **örnekte** de A matrisinin 1’den 3’e kadar olan sütunları görüntülenmiştir. Aşağıda ise bir matrisin herhangi bir satır ya da sütununa erişim için kullanılan “:” işlemcisine ait örnekler verilmiştir. Herhangi bir satıra ulaşmak için satır numarasının ardından “:” girilir. Bir sütuna ulaşmak içinse, “:” den sonra ilgili sütun numarası girilir.

```

>> a=[1 1 1; 3 5 6; 9 5 6]; a (1,:)
ans =
1   1   1
>> a(:,3)
ans =
1
6
6

```

12.4.2. Bir Matrisin Transpozesi

Lineer cebir uygulamalarında sıkça kullanılan transpoze (**Devrik**) işlemi, MATLAB’da kesme işareti (') ile (Shift+2) tanımlanmıştır. Transpoze ile matrisin satırları, eleman sıralamaları korunacak şekilde sütunlarına dönüştürülürler. Benzer şekilde satır vektörleri sütun vektörlerine ve sütun vektörleri de satır vektörlerine çevrilirler.

Karmaşık elemanları bulunan matrislerin transpozeleri alınırken MATLAB’da bu elemanların eşleniklerini alır.

Örnek:

```
>> a=[2 4 6];
```

```
>> b=a'
```

```
b =
```

```
2
```

```
4
```

```
6
```

12.4.3.Bir Matrisin Tersi (İnversi)

A, $n \times n$ boyutunda bir kare matris ve I birim matris olmak üzere, $A*B = B*A = I$ eşitliğini sağlayan B matrisine A matrisinin tersi denir ve A^{-1} ile gösterilir. Sadece kare matrislerin tersi alınabilir. Tekil matrislerin tersleri yoktur. MATLAB’da bir A matrisinin tersini almak için `inv (A)` veya A^{-1} komutları işletilir.

Örnek:

```
>> A=[1 3 3;1 4 3;1 3 4];
```

```
>> inv (A)
```

```
ans =
```

```
7 -3 -3
```

```
-1 1 0
```

```
-1 0 1
```

Matrisin doğruluğunu kontrol amacıyla matris soldan ve sağdan tersi ile çarpılır.

Sonuç birim matris olmalıdır.

```
>> A*A^-1
```

```
ans =
```

```
1 0 0
```

```
0 1 0
```

```
0 0 1
```

```
>> inv (A)*A
```

```
ans =
```

```
1 0 0
```

```
0 1 0
```

```
0 0 1
```

12.4.4. Bir Matrisin Determinantı

MATLAB’da bir A matrisinin determinantını bulmak için, $\det(A)$ komutu girilir. Determinantları, matris boyutları arttıkça çözmek zorlaşır. Bu gibi durumlarda MATLAB’da tek bir komut kullanarak bu işlemi yapmak mümkündür. Sadece kare matrislerin tanımlı olduğu unutulmamalıdır.

Örnek:

```
>> A=[1 3 3;1 4 3;1 3 4];  
>> det(A)  
ans =  
1
```

12.4.5. Bir Matrisin Rankı

Bir matriste, $r \times r$ boyutundaki kare minörlerin en az bir tanesi sıfırdan farklı, fakat $(r+1) \times (r+1)$ boyutundaki kare minörlerin tamamı sıfır ise bu matrisin rankı r ’dir.

MATLAB’da matrislerin ranklarının hesaplanabilmesi için tanımlanmış ve genel kullanımı “rank (matris adı)” şeklinde olan özel bir hazır fonksiyon tanımıdır.

Örnek:

```
>> a=[1 2 3; 4 5 6; 7 8 9];  
>> det(a)  
ans =  
0  
>> size(a)  
ans =  
3 3  
>> rank(a)  
ans =  
2
```

Rankı bulunmak istenen geniş matrisler, elemanter satır işlemler kullanılarak öncelik satırca indirgenmiş forma getirilirler. MATLAB’da bir matrisi bu forma getirmek için, “rref” fonksiyonu kullanılır.

12.4.6. Matrislerde Dört İşlem

12.4.6.1. Matrislerde Toplama ve Çıkarma İşlemi

Boyutları eşit iki matris, “+” ve “-” sembollerini kullanarak MATLAB’da toplanabilir veya çıkarılabilir. Boyutları farklı iki matris için bu işlemler yapılamaz.

Örnek:

```
>> a=[1 2 3; 4 5 6];
>> b=[2 4 6; 8 10 12];
>> c=a+b
c =
     3     6     9
    12    15    18
```

12.4.6.2. Matrislerde Çarpma İşlemi

MATLAB’da çarpma işlemi, “*” sembolü ile gösterilir. Lineer cebir kurallarına göre $A*B$ işleminin tanımlı olabilmesi için, A matrisinin sütun sayısının B matrisinin satır sayısına eşit olması gerekir. Bu kurala uymayan matrisler için çarpma işlemi tanımlı değildir.

Örnek:

```
>> A=[1 2; 3 4; 8 9];
>> B=[2 3 4; 6 7 8];
>> C=A*B
C =
    14    17    20
    30    37    44
    70    87   104
```

Boyutları aynı iki matrisi $A.*B$ şeklinde de çarpabilmek mümkündür. Bu durumda matrisler eleman elemana çarpılacaktır.

Örnek:

```
>> A=[1 2; 3 4];
>> B=[2 2; 2 2];
>> D=A.*B
D =
     2     4
     6     8
```

12.4.6.3. Matrislerde Bölme İşlemi

MATLAB’da matrislerin bölünmesi için “/” (sağdan bölme) ve “\” (Soldan bölme) işlemcileri kullanılır.

Örnek: >> a=3; b=6;

>> a/b,b/a

ans =

0.5000

ans =

2

Eş boyutlu matrisleri eleman elemana bölmek için, bu işlemcileri “./” ve “.\” şeklinde noktalı olarak kullanmak gerekir.

Örnek:

>> x=[2 4;6 8];

>> x/2==x./2

ans =

1 1

1 1

12.4.7. Bir Matrisin n. Kuvveti

Bir A matrisi için yürütülecek $A.^n$ işlemi, n bir skaler olmak üzere, A matrisindeki her bir elemanın tek tek n. Kuvvetini alacaktır. Nokta üs (^) kullanılmadığı takdirde A matrisinin n. kuvveti alınır. Bu durum için A matrisinin kare matris olması gerekir.

MATLAB’da matrisler arası $C=A.^B$ işlemi her iki matris aynı boyutlu olmak şartıyla tanımlıdır.

Örnek:

>> A=[1 2 3; 2 5 7; 3 2 1];

>> B=[1 1 1; 2 2 2; 3 3 3];

>> C=A.^B

C =

1 2 3

4 25 49

27 8 1

12.4.8. Bir Matrisin Özdeğeri

$x \neq 0$ ve bir sütun vektörü ve A bir kare matris olmak üzere, $Ax=\lambda x$ denklemini sağlayan λ 'ya A matrisinin öz değeri ve karakteristik değeri denilir. MATLAB'da bir matrise ait öz değerlerin bulunması için iki farklı yöntem kullanılır.

Herhangi bir A matrisinin öz değerlerini bulmak için, `eig (A)` komutu işletilir.

Örnek:

```
>> A=[3 2; 3 -2];  
>> eig (A)  
ans =  
    4  
   -3
```

Bir matrise ait karakteristik polinomun kökleri de o matrise ait öz değerleri verir.

Örnek:

```
>> a=[3 2; 3 -2];  
>> x=poly (a)  
x =  
    1   -1  -12  
>> y=roots (x)  
y =  
    4  
   -3
```

Burada “poly (a)” fonksiyonu, a matrisinin karakteristik denklemini ve “roots(x)” karakteristik denklemin köklerini verirler. A bir kare matris ve λ , A 'nın bir öz değeri olmak üzere, $Ax=\lambda x$ eşitliğini sağlayan x vektörüne, λ öz değerine karşılık gelen öz vektör yada karakteristik vektör denir. MATLAB'da öz vektörleri buldurabilmek için “eig” fonksiyonu aşağıdaki örnekte olduğu gibi iki giriş değişkenli olarak kullanılmalıdır. Buradaki y değişkenine, matrise ait öz vektörler atanacaktır.

Örnek:

```
>> [x,y]=eig (a)
```

```
x =
```

```
0.8944 -0.3162
```

```
0.4472 0.9487
```

```
y =
```

```
4 0
```

```
0 -3
```

12.4.9. Dizi ve Matrisler İçin Tanımlı Bazı Fonksiyonlar

Herhangi bir MATLAB uygulamasının temeli dizilerdir. MATLAB’da dizi ve matrislerle ilgili çok sayıda hazır fonksiyon bulunmaktadır. Bunlar;

Tablo.12.3: MATLAB’da dizi ve matrislerle ilgili fonksiyonlar

Fonksiyon	İşlevi
max (x)	x dizisinin en büyük elemanını bulur.
min (x)	x dizisinin en küçük elemanını bulur.
mean (x)	x dizisine ait elemanların ortalamasını bulur.
Median (x)	x dizisinin ortadaki elemanını bulur.
std (x)	x dizisine ait standart sapmasını bulur.
sort (x)	x dizisinin elemanlarını büyükten küçüğe doğru sıralar.
sum (x)	x dizisinin elemanlarının seri toplamını bulur.
prod (x)	x dizisinin elemanlarının seri çarpımını bulur.
Cumsum (x)	x dizisinin elemanlarının kümülatif toplamından oluşan yeni bir dizi yaratır.
diff (x)	x dizisinin elemanlarının farklarından oluşan yeni bir dizi yaratır.

Bu fonksiyonların tümü satır veya sütun vektörlere uygulandıklarında beklenen sonuçları verirler.

Örnek:

```
>> a=[1 3 5 8 6];  
>> max (a)  
ans =  
      8  
>> min (a)  
ans =  
      1  
>> mean (a)  
ans =  
    4.6000  
>> median (a)  
ans =  
      5  
>> std (a)  
ans =  
    2.7019  
>> sort (a)  
ans =  
      1      3      5      6      8  
>> sum (a)  
ans =  
     23  
>> prod (a)  
ans =  
     720  
>> cumsum (a)  
ans =  
      1      4      9     17     23  
>> diff (a)  
ans =  
      2      2      3     -2
```

12.5. MATLAB’da Polinomlar

12.5.1. Polinomların Girilmesi

MATLAB’da satır vektörleri, üst dereceleri azalan sırada olmak üzere polinom katsayılarını temsil ederler.

Örnek: $x^5 - 2x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x + 4 = 0$ denkleminin katsayıları,

```
>> p=[1 -2 2 3 1 4]
```

p =

```
1 -2 2 3 1 4
```

şeklinde girilir.

12.5.2. Polinom Köklerinin Bulunması

Polinomun köklerinin bulunması için “roots” komutu girilir. Bir önceki Örnek köklerini bulacak olursak;

```
>> p=[1 -2 2 3 1 4]
```

p =

```
1 -2 2 3 1 4
```

```
>> cozum=roots (p)
```

cozum =

```
1.5336 + 1.4377i
```

```
1.5336 - 1.4377i
```

```
-1.0638
```

```
-0.0017 + 0.9225i
```

```
-0.0017 - 0.9225i
```

Böylece, beşinci dereceden olan bu polinomun Karmaşık ve reel 5 adet kökü bulunmuş olur.

MATLAB’da polinomların köklerini bulmanın diğer bir yolu da “solve” fonksiyonunu kullanmaktır. Bu fonksiyon, sembolik ifadeler veya eşitliklerin karakter dizisi olarak saklandığı değişkenlere ait denklemlerin çözümünde kullanılır.

Örnek: ax^2+bx+c polinomunun köklerinin bulunması için,

```
>> s='a*x^2+b*x+c'
```

```
s =
```

```
a*x^2+b*x+c
```

```
>> solve(s)
```

```
ans =
```

```
[ 1/2/a*(-b+(b^2-4*a*c)^(1/2))]
```

```
[ 1/2/a*(-b-(b^2-4*a*c)^(1/2))]
```

s ifadesinde bulunan herhangi bir değişkenin, diğerleri cinsinden eşit olan ifadeyi benzer bir yöntemle bulmakta mümkündür. Bu tip çözümler için öncelikle sembolik değişkenleri “smys” komutuyla tanımlamak gerekir.

Örnek:

```
>> s='a*x^2+b*x+c';
```

```
>> syms a b c x
```

```
>> c=solve(s,c)
```

```
c =
```

```
-a*x^2-b*x
```

Aynı zamanda “solve” komutunu kullanarak, çok sayıda denklemden oluşan sistemlerin köklerini de bulmak mümkündür.

Örnek: $3y+4x=12$ ve $x+y=3$ olan iki bilinmeyenli denklem sisteminin çözümünün bulunması;

```
>> [x,y]=solve('3*y+4*x=12','x+y=3')
```

```
x =
```

```
3
```

```
y =
```

```
0
```

MATLAB’da bir polinomun kökleri bilindiği takdirde, o polinoma ait katsayılar da azalan üst derecelerine göre buldurulabilirler.

Örnek: $x_1=2$ ve $x_2=2$ gibi iki katlı kökü bulunan bir polinomun katsayılarının bulunması;

```
>> poly ([2;2])
```

```
ans =
```

```
1 -4 4
```

Söz konusu polinom, $x^2-4x+4=0$ 'dur. Herhangi bir değişkenin azalan üs katsayıları ile oluşturulmuş bir polinomun, değişkenin herhangi bir değeri için, değerini bulmak için iki giriş değişkenli “polyval(x,y)” fonksiyonu kullanılır. Burada x, söz konusu polinomu, y ise polinom değişkeninin değerini ifade eder.

Örnek: $P=s^3-2s^2+5s$ polinomunun $s=5$ için değeri;

```
>> P=[1 -2 5 0];
```

```
>> polyval (P,5)
```

```
ans =
```

```
100
```

12.5.3. Bir Polinomun Türevi

MATLAB’da bir polinomun türevinin azalan üs derecelerine göre sıralanmış katsayılarını buldurmak için “polyder” fonksiyonu kullanılır.

Örnek: $P=s^3-2s^2+5s$ polinomunun türevinin bulunması;

```
>> P=[1 -2 5 0];
```

```
>> turev=polyder (P)
```

```
turev =
```

```
3 -4 5
```

Söz konusu polinomun türevi; $\frac{dp}{ds} = 3s^2-4s+5$ ’dir.

12.5.4. Polinomlarda Çarpma ve Rasyonel Polinomlar

İki polinomun çarpımı ile elde edilen bir polinoma ait katsayılar, “conv” fonksiyonu ile bulunur.

Örnek: $f(x)=x^2+2x+3$ ve $g(x)=4x^2+5x+6$ polinomların çarpılması;

```
>> f=[1 2 3]; g=[4 5 6];
```

```
>> h=conv (f,g)
```

```
h =
```

```
4 13 28 27 18
```

söz konusu polinomun sonucu, $h(x)=4x^4+13x^3+28x^2+27x+18$ 'dir.

İki polinomun çarpımı sonucunu, ters komvülasyon işlemine tabi tutarak çarpan polinomlarının katsayılarını “deconv” komutu ile bulabiliriz.

Örnek:

```
>> s=deconv (h,f)
```

```
s =
```

```
4 5 6
```

```
>> p=deconv (h,g)
```

```
p =
```

```
1 2 3
```

Transfer fonksiyonlarında kullanılan rasyonel polinomların pay ve paydalarının ayrı ayrı girilmesi gerekir. Rasyonel polinomları basit kesirlere ayırmak için “residue” fonksiyonu kullanılır. m pay, n payda olmak üzere iki giriş değişkenine sahiptir.

Örnek:

```
>> m=[1 -10 100]; n=[1 10 100 0];
```

```
>> [x,y,z]=residue (m,n)
```

```
x =
```

```
0.0000 + 1.1547i
```

```
0.0000 - 1.1547i
```

```
1.0000
```

```
y =
```

```
-5.0000 + 8.6603i
```

```
-5.0000 - 8.6603i
```

```
0
```

```
z =
```

```
[ ]
```

Söz konusu polinomun sonucu; $\frac{m(x)}{n(x)} = \frac{1.1547i}{x+5-8,660i} + \frac{-1.1547i}{x+5+8,660i} + \frac{1}{x}$ 'dir. Eğer pay, paydadan büyük olsaydı, cevaba z polinomu da eklenecekti. Bir ölçüm sonucu elde edilen verilere ilişkin bir eğri uydurulması isteniyorsa, “polyfit” komutu kullanılarak istenilen derecede bir polinom, söz konusu verilerin bir fonksiyonu olarak hesaplatılabilir.

Örnek:

```
>> x=[1 2 3 4 6 7];
>> y=[1 7 26 124 225 316];
>> c=polyfit(x,y,2)
c =
    6.4286    2.5714   -16.5714
>> polyval(c,4)
ans =
    96.5714
```

12.6. MATLAB’da Lineer Denklem Sistemleri

Lineer denklem sistemlerinde tüm bilinmeyenler birinci derecedendir. Lineer denklem sistemlerinin çözümünde kullanılan bazı yöntemleri ele alacak olursak;

12.6.1. Katsayılar Matrisinin Tersi Yardımıyla Çözüm

Lineer denklem sistemlerinin çözümünde, bu yolu kullanabilmek için, katsayılar matrisinin determinantı sıfırdan farklı olmalıdır.

Diğer bir şart da, katsayılar matrisinin kare matris olması gerekir. $Ax=B$ şeklinde genel biçimi belirtilen bu denklemin çözümün için, eşitliğin her iki tarafı soldan A^{-1} (inv (A)) ile çarpılır. Sol tarafta bilinmeyenler vektörü yalnız bırakılmış olur, sağ tarafta ise bilinmeyenler vektörüne eşiti olarak $A^{-1}*B$ kalır. Denklemin çözümünü bu ifade verir.

Örnek: Aşağıdaki denklem sisteminin çözümü;

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 2$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 3$$

>> A=[1 3 1; 2 -1 3; 1 2 -1]

A =

1 3 1

2 -1 3

1 2 -1

>> B=[2; 1; 3]

B =

2

1

3

>> x=inv(A)*B

x =

1.6667

0.3333

-0.6667

Burada $x_1 = 1,6667$, $x_2 = 0,3333$, $x_3 = -0,6667$ 'dir.

Bu denklem sistemi için, diğer bir çözüm metodu da $A \setminus B$ komutunu kullanmaktır.

>> x= A\B

x =

1.6667

0.3333

-0.6667

Bu denklemin çözümü, $x=B/A$ işlemi ile buldurulamaz. MATLAB, matris boyutlarının uyumsuzluğu ile ilgili bir hata verir. Aşağıdaki hata iletimi ekranda görülür.

>> B/A

??? Error using ==> /

Matrix dimensions must agree.

12.6.2 Genişletilmiş Matris Yöntemi İle Çözüm (Gauss Eliminasyon Yöntemi)

Bu yöntemi kullanabilmek için, katsayılar matrisinin, kare matris olması şartı yoktur. Genişletilmiş matris yönteminde katsayılar matrisine son sütun olarak eşitliğin sağ tarafındakiler ilave edilir. Genişletilmiş katsayılar matrisinin rankı, katsayılar matrisinin rankına eşit ise sistem çözülebilir.

Örnek:

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 + 7x_3 = 4$$

$$3x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 3$$

$$>> A = [1 \ 1 \ 2; 2 \ 0 \ 7; 3 \ 3 \ 6];$$

$$>> B = [1; 4; 3];$$

$$>> C = [A \ B]$$

$$C =$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 7 & 4 \\ 3 & 3 & 6 & 3 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 2 & 0 & 7 & 4 \\ 3 & 3 & 6 & 3 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 3 & 3 & 6 & 3 \end{matrix}$$

$$>> y = \text{rref}(C)$$

$$y =$$

$$\begin{matrix} 1.0000 & 0 & 3.5000 & 2.0000 \\ 0 & 1.0000 & -1.5000 & -1.0000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & 1.0000 & -1.5000 & -1.0000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$>> x = y(:, \text{end})$$

$$x =$$

$$2$$

$$-1$$

$$0$$

Bu örnekte oluşturulan C matrisi, arttırılmış katsayılar matrisidir. Bu matrise “rref” fonksiyonu uygulanarak satırca indirgenmiş formu Gauss-eliminasyon yöntemi ile hesaplatılmıştır. Satırca indirgenmiş formun rankının denklem sayısına eşit olduğu sistemlerde, bir tek çözüm vardır. Aşağıdaki denklem sistemi buna bir **örnektir**.

$$x_1 + 4x_2 - x_3 = 7$$

$$2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 9$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$3x_1 + 12x_2 + x_3 = 21$$

```
>> A=[1 4 -1; 2 3 -2; 1 1 1; 3 12 1];
```

```
>> B=[7; 9; 4; 21];
```

```
>> C=[A B];
```

```
>> y=rref(C)
```

```
y =
```

```
1    0    0    3
```

```
0    1    0    1
```

```
0    0    1    0
```

```
0    0    0    0
```

```
>> x=y(:,end)
```

```
x =
```

```
3
```

```
1
```

```
0
```

```
0
```

Bu denklem sisteminde, $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$ 'dır. Sistemin kare matris olmamasından dolayı katsayılar matrisinin inversi yöntemini çözümde kullanamayız. Bu durumda matris inversine alternatif olacak 3x4 boyutunda bir öninvers buldurma yoluna gidilebilir. MATLAB'da bu öninvers "pinv" fonksiyonu ile buldurulur.

Örnek: Yukarıdaki örneğin bu yöntemle çözümü;

```
>> A=[1 4 -1; 2 3 -2; 1 1 1; 3 12 1];
```

```
>> B=[7; 9; 4; 21];
```

```
>> x=pinv(A)*B
```

```
x =
```

```
3.0000
```

```
1.0000
```

```
-0.0000
```

12.6.3.Cramer Yöntemiyle Çözüm

$AX=B$ şeklindeki lineer denklem sistemlerinde katsayılar matrisi A , $n \times n$ boyutunda bir kare matris ve bu matrisin determinantı 0'dan farklı ise denklem sisteminin tek bir çözümü vardır ve bu çözüm yöntemi de cramer yöntemidir.

Örnek:

$$x+2y+z=5$$

$$2x+2y+2z=6$$

$$x+2y+3z=9$$

```
>> C=[1; 2; 1]; D=[2; 2; 2]; E=[1; 1; 3];
```

```
>> A=[C,D,E];
```

```
>> B=[5; 6; 9];
```

```
>> x=det ([B,D,E])/det (A)
```

x =

1

```
>> y=det ([C,B,E])/det (A)
```

y =

1

```
>> z=det ([C,D,B])/det (A)
```

z =

2

Ek.1.Çeşitli Örnekler

1) $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Bu tür sorularda eşitliğin bir tarafından hareketle diğer tarafı elde edilir.

$$\frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{1 - \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}}{1 + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}} = \frac{\frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}}{\frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}} = \frac{(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \cdot \frac{\cos^2 \theta}{1}}{\cos^2 \theta} = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \text{ olur.}$$

2) $\frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}$ olduğunu gösteriniz.

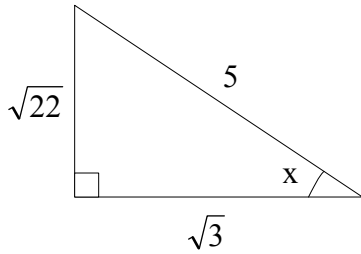
Çözüm:

$$\frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{\sin \theta (1 - \cos \theta)}{1 - \cos^2 \theta} = \frac{\sin \theta (1 - \cos \theta)}{\sin^2 \theta} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \text{ olur.}$$

$(1 - \cos \theta)$

3) $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ için $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{5}$ ise $\sin x, \tan x, \cot x, \sec x, \csc x$ nedir.

Çözüm: $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ demek x , 2. bölge açı demektir. $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{5}$ veriliyor.



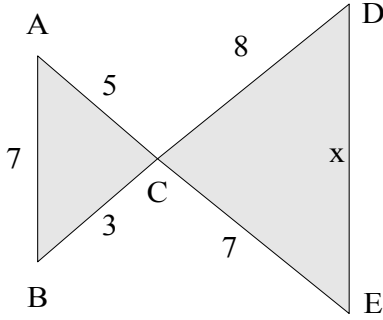
Burada uzunluk söz konusu olduğundan (-) alınmaz.

$$\sin x = \frac{\sqrt{22}}{5} \text{ (2.bölgede+)} \rightarrow \csc x = \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\frac{\sqrt{22}}{5}} = \frac{5}{\sqrt{22}}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sqrt{22}/5}{-\sqrt{3}/5} = -\sqrt{\frac{22}{3}} \rightarrow \sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{5}} = -\frac{5}{\sqrt{3}}$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{-\sqrt{\frac{22}{3}}} = -\sqrt{\frac{3}{22}}$$

4) Şekildeki x uzunluğunu bulunuz.



Çözüm:

$\triangle ABC$ 'de Cosinüs Teoremi

$$7^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos \hat{C}$$

$$15 = -30 \cdot \cos \hat{C} \Rightarrow \cos \hat{C} = -\frac{1}{2}$$

$\triangle DCE$ 'de Cosinüs Teoremi

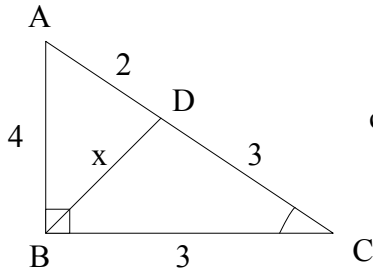
$$x^2 = 8^2 + 7^2 - 2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cos \hat{C}$$

$$x^2 = 8^2 + 7^2 - 2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$x^2 = 64 + 49 + 56 = 169 \Rightarrow x = 13$$

5) Aşağıdaki üçgende x uzunluğu nedir?

Çözüm:



$$\cos \hat{C} = \frac{3}{5} \text{ ise } x^2 = 3^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cos \hat{C}$$

$$x^2 = 3^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{3}{5} \Rightarrow x^2 = \frac{36}{5} \Rightarrow x = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

6) $\cot x = -\sqrt{3}$ denklemini çözelim.

Çözüm:

$-\pi - \frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6} +$
$+\pi + \frac{\pi}{6}$	$2\pi - \frac{\pi}{6} -$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sqrt{3}/2 \rightarrow \cos 30}{1/2 \rightarrow \sin 30}$$

$$\cot x = \cot \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{5\pi}{6}$$

$$\Rightarrow k=0 \text{ için } x_1=5\pi/6 \Rightarrow k=1 \text{ için } x_2=11\pi/6$$

$$\text{veya; } \cot x = \cot \frac{11\pi}{6} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{11\pi}{6}$$

7) $\tan\left(3x + \frac{\pi}{8}\right) = -\tan\left(x - \frac{\pi}{12}\right)$ denklemini çözünüz.

Çözüm: $\tan f(x) = \tan g(x) \Rightarrow f(x) = k\pi + g(x)$ kök formülü uygulanırsa;

$$\tan\left(3x + \frac{\pi}{8}\right) = \tan\left(-x + \frac{\pi}{12}\right) \Rightarrow 3x + \frac{\pi}{8} = k\pi + \left(-x + \frac{\pi}{12}\right)$$

$$\Rightarrow 4x = k\pi - \frac{\pi}{24} \Rightarrow \mathcal{C} = \left\{x \mid x = \frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{96}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

8) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ denklemini çözelim.

Çözüm: $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3} + \pi\right)$ olur. (- içeri alınırken cosinüslü ifadelerde π eklenir.)

$$\cos f(x) = \cos g(x) \Rightarrow f(x) = 2k\pi \mp g(x) \text{ olur.}$$

$$2x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi \mp \left(x - \frac{\pi}{3} + \pi\right)$$

$$2x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi \mp \left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$2x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \left(x + \frac{2\pi}{3}\right) \rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$2x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi - \left(x + \frac{2\pi}{3}\right) \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{3}$$

$$\mathcal{C} = \left\{x \mid x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

9) $2\cos^2 x = 1 + \sin x$ denklemini çözelim.

Çözüm: Bu tip denklemlerde her iki taraf aynı fonksiyon cinsinden yazılır. Burada $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ yazılabilir.

$$2(1 - \sin^2 x) = 1 + \sin x \Rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \quad \sin x = t \text{ dersek.}$$

$$2t^2 + t - 1 = 0 \Rightarrow (2t - 1)(t + 1) = 0 \Rightarrow 2t = 1 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow t + 1 = 0 \Rightarrow t_2 = -1$$

$$\begin{aligned} \sin f(x) &= \sin g(x) \Rightarrow f(x) = 2k\pi + g(x) \\ \sin f(x) &= \sin g(x) \Rightarrow f(x) = 2k\pi + (\pi - g(x)) \end{aligned}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \mathcal{C}_1 = \left\{x \mid x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \vee x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$\sin x = -1 \Rightarrow \mathcal{C}_2 = \left\{x \mid x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$$

10) $\sec x = 4 \cos x$ denklemini çözünüz.

Çözüm:

$$\sec x = 4 \cos x \Rightarrow \frac{1}{\cos x} = 4 \cos x \Rightarrow 1 = 4 \cos^2 x \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos x = \mp \frac{1}{2}$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \zeta_1 = \left\{ x \mid x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \zeta_2 = \left\{ x \mid x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

11) $2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm: $\cos x = t$ dersek.

$$2t^2 - 3t + 1 = 0 \\ (2t - 1)(t - 1) = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow t_2 = 1$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \mp \frac{\pi}{3} \Rightarrow \zeta_1 = \left\{ x \mid x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \vee x = 2k\pi + \frac{5\pi}{3} \right\}$$

$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi \Rightarrow \zeta_2 = \{x \mid x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

12) $\sin 6x + 2 \sin 4x + \sin 2x = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm:

$$\sin 6x + \sin 2x = 2 \cdot \sin\left(\frac{6x + 2x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{6x - 2x}{2}\right) = 2 \sin 4x \cdot \cos 2x$$

$$2 \sin 4x \cdot \cos 2x + 2 \sin 4x = 2 \sin 4x (\cos 2x + 1) = 0$$

$$2 \sin 4x = 0 \Rightarrow \sin 4x = 0 \Rightarrow \sin 4x = \sin k\pi \Rightarrow 4x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4}$$

$$\cos 2x = -1 \Rightarrow \cos 2x = \cos \pi \Rightarrow 2x = 2k\pi \mp \pi \Rightarrow x = k\pi \mp \frac{\pi}{2}$$

$$\zeta = \left\{ x \mid x = \frac{k\pi}{4} \vee x = k\pi \mp \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

bulunur.

14) $\sin x + \sqrt{3} \cdot \cos x = 1$ denklemini çözünüz.

Çözüm:

$$\left. \begin{array}{l} \cos x + a \sin x = b \\ \text{veya} \\ a \cos x + \sin x = b \end{array} \right\} \text{şeklindeki denklemlerde } a = \tan \theta \text{ yazılır.}$$

Bu örnekte; $\sqrt{3} = \tan 60^\circ$ yazılır.

$$\sin x + \tan 60^\circ \cdot \cos x = 1$$

$$\Rightarrow \sin x + \frac{\sin 60}{\cos 60} \cdot \cos x = 1 \Rightarrow \sin x \cdot \cos 60 + \cos x \cdot \sin 60 = \cos 60 \Rightarrow \sin(x + 60) = \frac{1}{2}$$

$$x + 60 = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow \sin(x + 60) = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow \sin(x + 60) = \sin \frac{5\pi}{6}$$

$$x + 60 = 2k\pi + \frac{9\pi}{6} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad \mathcal{C} = \left\{ x \mid x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \vee x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

15) $\sqrt{3} \cos 2x + \sin 2x = 2$ denklemini çözelim.

Çözüm:

$$\sqrt{3} = \tan \frac{\pi}{3} \Rightarrow \tan \frac{\pi}{3} \cdot \cos 2x + \sin 2x = 2$$

$$\frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} \cdot \cos 2x + \sin 2x = 2 \Rightarrow \sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos 2x + \cos \frac{\pi}{3} \cdot \sin 2x = 2 \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Rightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{2}$$

$$2x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow \mathcal{C}_1$$

$$2x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} \rightarrow \mathcal{C}_2$$

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 = \left\{ x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{12}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

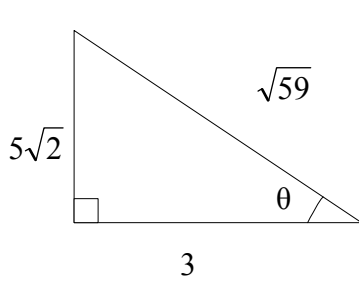
16) $\operatorname{cosec}^4 x - \cot^4 x = \operatorname{cosec}^2 x + \cot^2 x$ olduğunu gösterelim.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^4 x} - \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x} &= \frac{1 - \cos^4 x}{\sin^4 x} = \frac{(1 - \cos^2 x)(1 + \cos^2 x)}{\sin^4 x} = \frac{\sin^2 x \cdot (1 + \cos^2 x)}{\sin^4 x} \\ &= \frac{1 + \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \operatorname{cosec}^2 x + \cot^2 x \end{aligned}$$

17) $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ olmak üzere $\tan \theta = \frac{5\sqrt{2}}{3}$ ise $\sin 2\theta = ?$ $\cos 2\theta = ?$

Çözüm:



$$\sin \theta = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{59}} \Rightarrow \cos \theta = \frac{3}{\sqrt{59}}$$

$$\sin 2\theta = \sin(\theta + \theta) = \sin \theta \cdot \cos \theta + \cos \theta \cdot \sin \theta = 2 \sin \theta \cdot \cos \theta$$

$$\sin 2\theta = 2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta = 2 \cdot \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{59}} \cdot \frac{3}{\sqrt{59}} = \frac{30\sqrt{2}}{59}$$

$$\cos 2\theta = \cos(\theta + \theta) = \cos \theta \cdot \cos \theta - \sin \theta \cdot \sin \theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \left(\frac{3}{\sqrt{59}}\right)^2 - \left(\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{59}}\right)^2 = -\frac{41}{59}$$

18) $2 \sin x - \sec x = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm:

$$2 \sin x - \frac{1}{\cos x} = 0 \Rightarrow 2 \sin x \cos x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \sin 2x - 1 = 0 \Rightarrow \sin 2x = 1 \Rightarrow \sin 2x = \sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \rightarrow \mathcal{C} = \left\{x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

19) $\cot x + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2$ denklemini çözünüz.

Çözüm:

$$\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2 \Rightarrow \frac{(1 + \cos x) \cos x + \sin x \cdot \sin x}{\sin x (1 + \cos x)} = 2$$

$$\Rightarrow \cos^2 x + \cos x + \sin^2 x = 2 \sin x + 2 \sin x \cos x$$

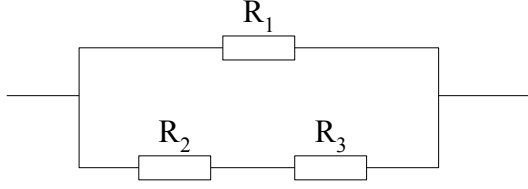
$$\Rightarrow \cos^2 x + \sin^2 x + \cos x = 2 \sin x + 2 \sin x \cos x$$

$$\Rightarrow \frac{1 + \cos x}{\sin x (1 + \cos x)} = 2 \Rightarrow \frac{1}{\sin x} = 2 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \mathcal{C} = \left\{x \mid x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \vee x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6}\right\}$$

20) Şekildeki devrenin toplam direnci $R = [R_1^{-1} + (R_2 + R_3)^{-1}]^{-1}$ olarak veriliyor.

Buna göre R' yi sadeleştiriniz.



Çözüm:

$$R = \frac{1}{[R_1^{-1} + (R_2 + R_3)^{-1}]} \text{ ve } R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + R_3}} = \frac{1}{\frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_1(R_2 + R_3)}}$$

böylece;

$$R = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \text{ olarak elde edilir.}$$

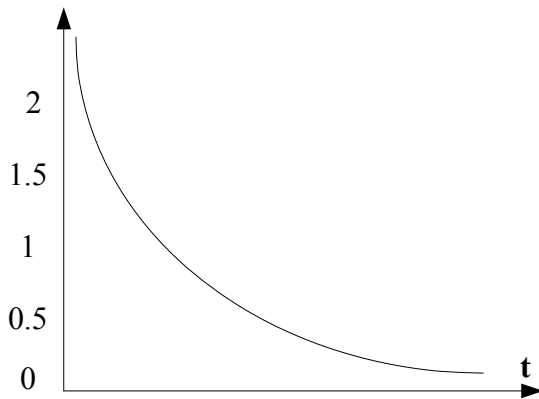
21) Şekildeki devrede V sabit gerilim kaynağı, R direnç ve C kondansatördür. Anahtar kapatıldıktan sonra devreden geçen akım;

$I = I_0 \cdot e^{\frac{-t}{RC}}$ denklemi ile bulunur. Burada I_0 ilk akımdır ve $I_0 = \frac{V}{R}$ ile bulunur. $V=100V$;

$R=5 \cdot 10^3 \Omega$ ve $C=200 \mu F$ ($0,2 \cdot 10^{-3} F$) olarak verildiğine göre, devreden geçen akımın $t=0$ ile $t=5$ sn aralığında değişimini çiziniz.

Çözüm: I için verilen eşitlik;

$$I = \frac{V}{R} \cdot e^{\frac{-t}{RC}} = \frac{100}{5 \cdot 10^3} e^{-t/(5 \cdot 10^3 \times 0,2 \cdot 10^{-3})} = 2e^{\frac{-t}{1}} = 2e^{-t}$$



22) $|z+1| = |z-2i|$ eşitliğinin doğruluk kümesi nedir?

Çözüm:

$$|x+iy+1| = |x+iy-2i|$$

$$|(x+1)+iy| = |x+i(y-2)|$$

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$$

$$\text{h.i.t.k.a} \rightarrow (x+1)^2 + y^2 = x^2 + (y-2)^2$$

$$\rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 = x^2 + y^2 - 4y + 4$$

$$2x + 4y - 3 = 0 \text{ doğrusudur.}$$

23) $f(x) = 3x^7 - 2x^6 + 5x^5 - x^4 + 3 \Rightarrow f(i) = ?$

$$\text{Çözüm: } i^7 = \underbrace{i^4}_{1} \cdot \underbrace{i^2}_{-1} \cdot i = -i \Rightarrow i^6 = \underbrace{i^4}_{1} \cdot \underbrace{i^2}_{-1} = -1 \Rightarrow i^5 = i^4 \cdot i = i$$

$$f(i) = 3(i)^7 - 2(i)^6 + 5(i)^5 - i^4 + 3 = -3i + 2 + 5i - 1 + 3 = 2i + 4$$

24) $z=x+iy$ olmak üzere $|z-(2-i)|=3$ noktalarını analitik düzlemde gösteriniz.

Çözüm:

$$|z-(2-i)| = 3 \Rightarrow |x+iy-(2-i)| = 3$$

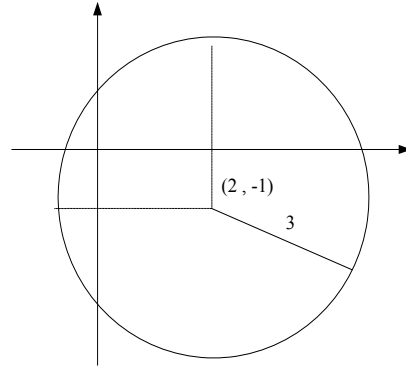
$$\Rightarrow |x-2+iy+i| = 3$$

$$\Rightarrow |(x-2)+i(y+1)| = 3$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} = 3$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$$

M(2,-1) olan ve r=3 olan çemberdir.



25) $z=x+iy$ için $|z-i| = |z+3|$ düzlemde ne belirtir?

Çözüm:

$$|z-i| = |z+3| \Rightarrow |x+iy-i| = |x+iy+3|$$

$$|x+i(y-1)| = |(x+3)+iy| \Rightarrow \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + y^2}$$

$$x^2 + (y-1)^2 = (x+3)^2 + y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 = x^2 + 6x + 9 + y^2$$

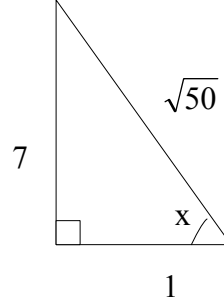
$$6x + 2y + 8 = 0 \Rightarrow 3x + y + 4 = 0$$

doğru belirtir.

26) $\sin(2\text{Arctg}7) = ?$

Çözüm:

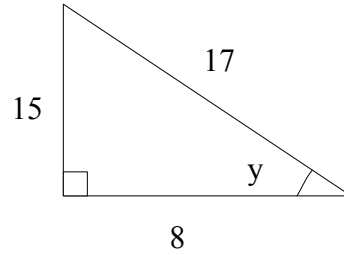
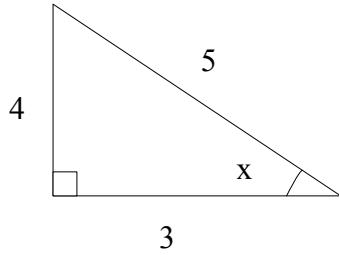
$$\begin{aligned} \sin(2\text{Arctg}7) &= \sin 2x \\ \sin 2x &= 2 \sin x \cos x \\ \text{Arctg}7 = x & \Rightarrow \sin x = \frac{7}{\sqrt{50}} \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{50}} \\ \text{tg}(\text{Arctg}7) &= \text{tg}x \Rightarrow \sin 2x = 2 \cdot \frac{7}{\sqrt{50}} \cdot \frac{1}{\sqrt{50}} \Rightarrow \\ 7 &= \text{tg}x \\ \sin(2\text{Arctg}7) &= \frac{7}{25} \end{aligned}$$



27) $A = \sin\left(\text{Arcsin}\frac{3}{5} + \arccos\frac{8}{17}\right) \Rightarrow A = ?$

Çözüm: $\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$

$$\begin{aligned} \sin \text{Arcsin} \frac{3}{5} &= \sin x & \cos \text{Arccos} \frac{8}{17} &= \cos y & \sin(x + y) &= \frac{3}{5} \cdot \frac{8}{17} + \frac{4}{5} \cdot \frac{15}{17} \\ \frac{3}{5} &= \sin x & \frac{8}{17} &= \cos y & \sin(x + y) &= \frac{24 + 60}{85} = \frac{84}{85} \end{aligned}$$



28) $y = x^2 - 2x - 8$ parabolü veriliyor .Buna göre;

- Eğim formülünü bulunuz.
- Parabolün köşe noktalarını bulup grafiğini çiziniz.
- $x = -1$ noktasındaki teğet ve normal denklemini çiziniz.

Çözüm : a) $y' = 2x - 2$

b) $y' = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0$

$x = 1$ (Tepe noktası apsisi)

$y = 1^2 - 2 \cdot 1 - 8 = -9$ (Tepe noktası ordinatı)

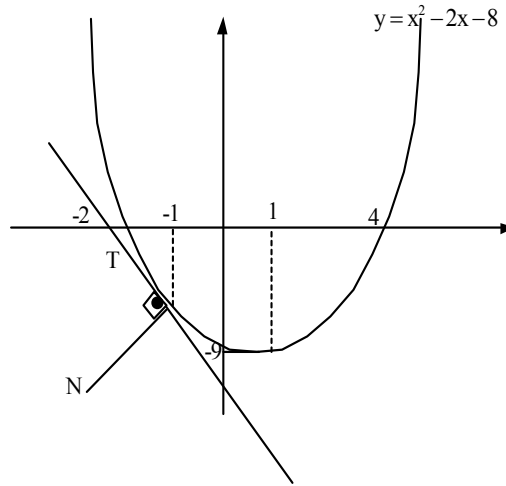
$T(1, -9)$ olur.

$x = 0$ için $y = -8 \Rightarrow (0, -8)$

$y = 0$ için $x^2 - 2x - 8 = 0$

$(x - 4)(x + 2) = 0$

$x_1 = -2, \quad x_2 = 4 \Rightarrow (-2, 0) \text{ ve } (4, 0)$



c) $y - y_0 = m(x - x_0)$

$$\left. \begin{array}{l} \text{T.D.} \Rightarrow y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \text{ idi.} \\ f(-1) = (-1)^2 - 2(-1) - 8 = -5 \\ f'(-1) = 2(-1) - 2 = -4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y - f(-1) = f'(-1)(x + 1) \\ y + 5 = -4(x + 1) \text{ T.D.} \\ y + 5 = 0.25(x + 1) \text{ N.D} \end{array}$$

29) $y = f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 5x - 2$ fonksiyonunun $x = -0.5$ noktasındaki teğet ve normal denklemini bulunuz.

Çözüm :

$$f(-1) = 2\left(\frac{-1}{2}\right)^4 - 3\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \frac{5(-1)}{2} - 2 = -\frac{41}{8}$$

$$f'(x) = 8x^3 - 6x + 5 \Rightarrow f'\left(\frac{-1}{2}\right) = 8\left(\frac{-1}{2}\right)^3 - \frac{6(-1)}{2} + 5 = 7$$

$$y - f\left(\frac{-1}{2}\right) = f'\left(\frac{-1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) \quad \text{T.D.}$$

$$y + \frac{41}{8} = 7\left(x + \frac{1}{2}\right) \quad \text{T.D} \quad \text{veya} \quad y + \frac{41}{8} = \frac{-1}{7}\left(x + \frac{1}{2}\right) \quad \text{N.D}$$

30) $f(x) = \frac{-3}{4}x^2 + \frac{5}{6}x - \frac{7}{8}$ fonksiyonunun türevini türevin tanımını kullanarak bulunuz.

Çözüm :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\frac{3}{4}(x + \Delta x)^2 + \frac{5}{6}(x + \Delta x) - \frac{7}{8} - \left(-\frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{6}x - \frac{7}{8}\right)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x\Delta x + \frac{3}{4}(\Delta x)^2 + \frac{5}{6}x + \frac{5}{6}\Delta x - \frac{7}{8} + \frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{7}{8}}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x \left(-\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}\Delta x + \frac{5}{6} \right)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{6}$$

31) $f(x) = -\frac{5}{8}x + \frac{7}{4}$ fonksiyonunun türevini türevin tanımını kullanarak bulunuz.

Çözüm :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\frac{5}{8}(x + \Delta x) + \frac{7}{4} - \left(-\frac{5}{8}x + \frac{7}{4} \right)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\frac{5}{8}x + \frac{-5}{8}\Delta x + \frac{7}{4} + \frac{5}{8}x - \frac{7}{4}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\frac{5}{8}\Delta x}{\Delta x} = \frac{-5}{8}$$

32) $y = 3^{x^2+3} \Rightarrow y' = ?$

Çözüm:

$$y = 3^{x^2+3} \Rightarrow y' = (2x)3^{x^2+3} \ln 3$$

33) $y = (\cos x)^{x^2} \Rightarrow y' = ?$

Çözüm: $\ln y = \ln(\cos x)^{x^2}$ **(h.i.t.l.a.)**

$$\ln y = x^2 \ln(\cos x)$$
 (L.ö.k)

$$\frac{y'}{y} = 2x \cdot \ln(\cos x) - x^2 \cdot \frac{\sin x}{\cos x}$$
 (h.i.t.t.a.)

$$y' = y(2x \cdot \ln(\cos x) - x^2 \cdot \tan x) \text{ ise } y' = (\cos x)^{(x^2)} [2x \cdot \ln(\cos x) - x^2 \tan x]$$

$$34) y = \cos^2 x - e^{2x} + x^2 - 3x \Rightarrow \frac{dx}{dy} = ?$$

$$\text{Çözüm: } \frac{dy}{dx} = -2 \cos x \cdot \sin x - 2e^{2x} + 2x - 3$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{-2 \cos x \cdot \sin x - 2e^{2x} + 2x - 3}$$

$$35) x = 1 - \sqrt{t} \text{ ve } y = 2^t - \ln(t^2 + 5) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = ?$$

Çözüm:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = 2^t \cdot \ln 2 - \frac{2t}{t^2 + 5} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2^t \ln 2 - \frac{2t}{t^2 + 5}}{-\frac{1}{2\sqrt{t}}}$$

$$x = 1 - \sqrt{t} \Rightarrow \sqrt{t} = 1 - x \\ \Rightarrow t = (1 - x)^2$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2^{(1-x)^2} \cdot \ln 2 - \frac{2(1-x)^2}{(1-x)^4 + 5}}{\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$36) y = (x^2 - 3x)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow y' = ?$$

$$\text{Çözüm: } \ln y = \ln(x^2 - 3x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\ln y = \frac{1}{x} \cdot \ln(x^2 - 3x)$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x^2} \ln(x^2 - 3x) + \frac{2x - 3}{(x^2 - 3x)} \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = y \cdot \left[-\frac{1}{x^2} \ln(x^2 - 3x) + \frac{2x - 3}{x(x^2 - 3x)} \right]$$

$$y' = (x^2 - 3x)^{(1/x)} \left[-\frac{1}{x^2} \ln(x^2 - 3x) + \frac{2x - 3}{x(x^2 - 3x)} \right]$$

$$37) \quad x^2 + y^2 + 3xy - 4x^2y^3 + 5 = 0 \Rightarrow y' = ?$$

Çözüm:

$$2x + 2yy' + 3y + 3xy' - 8xy^3 - 12x^2 \cdot y^2 \cdot y' = 0$$

$$2x + 3y - 8xy^3 + y'(2y + 3x - 12x^2y^2) = 0$$

$$y'(2y + 3x - 12x^2y^2) = 8xy^3 - 2x - 3y$$

$$y' = \frac{8xy^3 - 2x - 3y}{2y + 3x - 12x^2y^2}$$

veya ;

$$\frac{d_y}{d_x} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{(2x + 3y - 8xy^3)}{2y + 3x - 12x^2y^2} = \frac{8xy^3 - 2x - 3y}{2y + 3x - 12x^2y^2}$$

$$F_x = \frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 3y - 8xy^3$$

$$F_y = \frac{\partial F}{\partial y} = 2y + 3x - 12x^2y^2$$

$$38) \quad \cos y + x^2e^y - e^x y + y^3 - x^3 + 3xy = 0 \Rightarrow y' = ?$$

Çözüm:

$$-\sin y \cdot y' + 2xe^y + x^2e^y \cdot y' - e^x y - e^x \cdot y' + 3y^2y' - 3x^2 + 3y + 3xy' = 0$$

$$2xe^y - e^x y + 3y - 3x^2 + y'(x^2e^y - \sin y - e^x + 3y^2 + 3x) = 0$$

$$y' = \frac{e^x y - 3y + 3x^2 - 2xe^y}{x^2e^y - \sin y - e^x + 3y^2 + 3x}$$

Ek.2.Denklemlerin Yaklaşık Çözüm Yöntemleri

Ek. 2.1. Köklerin Varlığı ve Tekliği:

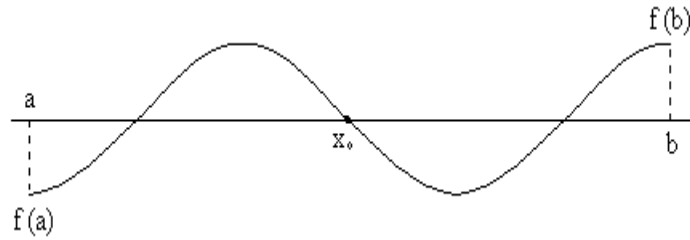
Bu bölümde bir bilinmeyenli denklemlerin yaklaşık çözüm metotları verilecektir. Bu metotlara geçmeden önce yapılması gereken şey köklerin varlığı, bulundukları aralıkların tespiti ve bu aralıkların mümkün olduğu kadar daraltılmasıdır. $f(x)$ cebirsel veya transandant fonksiyon olmak üzere bir bilinmeyenli bir denklem her zaman;

$$f(x) = 0 \dots\dots\dots(1)$$

şeklinde yazılır. Böyle bir denklemi çözmek için şu iki hususa dikkat edilmelidir.

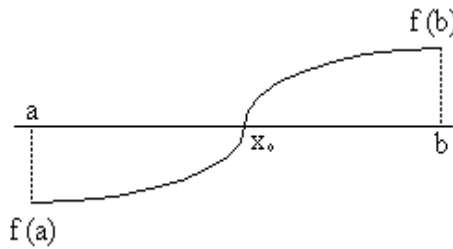
- i) (1) denkleminin köklerinin varlığını, tekliğini ve bu köklerin bulundukları aralıkları belirlemek için bir kritere ihtiyaç vardır. $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve $f(a) \cdot f(b) < 0$ ise $f(x) = 0$ denkleminin $[a, b]$ 'ye ait en az bir kökü vardır.

Geometrik Anlamı : Sürekli bir fonksiyonun grafiğinin bir parçasına ait uç noktaları Ox-eksenini en az bir noktada keser.

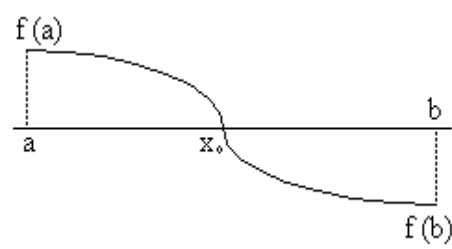


Şekil.Ek.2..1

- ii) Fazla olarak $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ 'de monoton ise, $[a, b]$ 'de $f(x) = 0$ 'ın tek kökü vardır.



Şekil.Ek.2..2.a



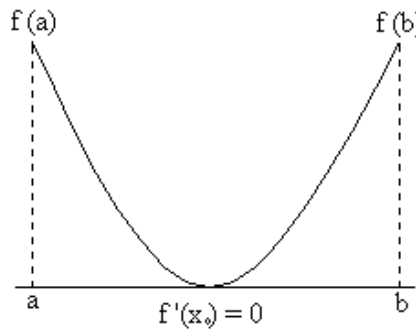
Şekil.Ek.2..2.b

$f(a) \cdot f(b) < 0$, f sürekli ve f monoton ise $x_0 \in [a, b]$ tektir.

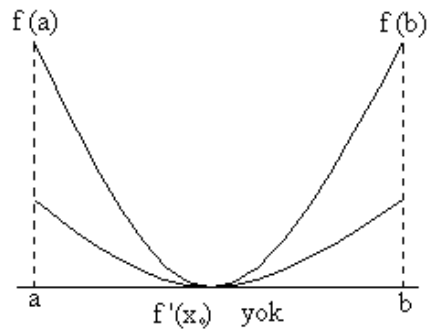
Buna göre, (1) denkleminin reel köklerinin tespiti için $f(x)$ 'in monoton olduğu aralıkları tespit etmek yeterlidir.

Örneğin ; x_1 ve x_2 ($x_1 < x_2$) için $f'(x) = 0$ olsun. Böylece, tespit edilen $(-\infty, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, +\infty)$ aralıklarında $f(x)$ sürekli ve bu aralıkların uç noktalarında $f(x)$ zıt işaretli değer alıyorsa (1) denkleminin göz önüne alınan aralıklarda reel kökleri mevcuttur. Şayet, $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığı boyunca sürekli, monoton fakat bu aralığın uçlarında aynı işarete sahip ise (1) denkleminin $[a, b]$ 'de hiçbir reel kökü mevcut değildir.

Daha önceden de bilindiği gibi göz önüne alınan bir $[a, b]$ aralığında $f'(x) > 0$ ise $f(x)$ monoton artan, $f'(x) < 0$ ise $f(x)$ monoton azalandır. Ayrıca şu hususu da ihmal etmemek gerekir. $f(x)$ 'in $[a, b]$ aralığı boyunca işaret değiştirmediyse fakat bu aralığın belli bir x_0 noktasında $f'(x_0) = 0$ olduğunu farz edelim.



Şekil.Ek.2..3.a



Şekil.Ek.2..3.b

Aşikardır ki böyle bir durumda $f'(x_0)$ mevcut değildir. Bazen, $f'(x) = 0$ denklemini $f(x) = 0$ denkleminden daha basit olur ve kökleri ayırma problemiyle daha basit çözülebilir. Eğer (1) denklemini cebirsel ise $f'(x)$ 'de cebirsel ama derecesi bir azalır. (Şekil.3.a.b)

Örnek.Ek.2.1: $x^3 - x - 1 = 0$ denkleminin köklerinin bulundukları aralıkları ayırınız

Çözüm.Ek.2.1: $f(x) = x^3 - x - 1$ ise $f'(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow$ sürekli. Şimdide monoton aralıkları bulalım.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\infty$							
f'(x)	+	+	+	○	-	-	-	○	+	+	+
f(x)	Monoton Artan			$f(-\frac{1}{\sqrt{3}})$	Monoton Azalan			$f(\frac{1}{\sqrt{3}})$	Monoton Artan		

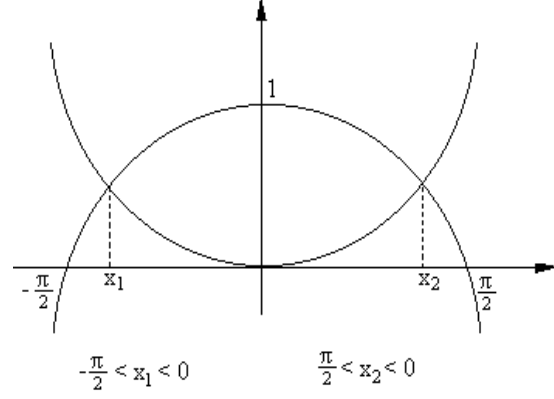
$\Rightarrow [\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty)$ arasında bir tek kök vardır.

$f(1) = -1 < 0$ ve $f(2) = 5 > 0$ Tek reel kök $[1, 2]$ aralığındadır.

$y = f(x)$ fonksiyonunun kolayca çizilebildiği hallerde $f(x) = 0$ denkleminin kökleri eğrinin Ox-eksenini kestiği noktalar bulunarak elde edilir.

Örnek.Ek.2..2: $\cos x - x^2 = 0$ denkleminin köklerinin bulunduğu aralıkları bulalım.

Çözüm.Ek.2..2: $y = \cos x$ ve $y = x^2$ fonksiyonlarının grafiği çizildiğinde bu iki eğrinin kesiştiği x_1 ve x_2 noktaları ki bu noktalar denklemin kökleri olup aşağıda verilen aralıkta bulunurlar(Şekil.4).



Şekil.Ek.2..4

Ek.2.2. Bir Denklemin Kökünün Yaklaşık Değerinin Hesabı:

$f(x) = 0$ denkleminin $[a, b]$ aralığında x_0 gibi bir kökünün olduğunu kabul edelim. x_0 kökü yerine $[a, b]$ aralığında bulunan herhangi bir c değerini yaklaşık kök alabiliriz. Mühim olan, neticedeki $x_0 - c$ hatasının göz önüne alınan problem için müsaade edilen hatayı aşmamasıdır. x_0 kökünün değeri bilinmediğinden $x_0 - c$ hatası da hesaplanamaz.

Bu nedenle, hatanın mutlak değeri için bir üst sınır belirleyeceğiz. Yani kökün verilen yaklaşık bir değerinin, mutlak hatasını inceleyeceğiz.

$$\Delta(c) > |x_0 - c| \quad (2)$$

$$x_0, [a, b] \text{ aralığında olacağından } a < x_0 < b \text{ yazılır.} \quad (3)$$

Buna göre, (2) ve (3) 'den $c, [a, b]$ 'nin neresinde olursa olsun;

$$\Delta(c) = b - a \quad (4)$$

alabiliriz. Eğer, a veya b , c 'nin yaklaşık değeri olarak alınırsa (bir alt tahmin) $x_0 \approx b$ $[b - a]$ olur. Şayet, c $[a, b]$ aralığının bir noktası olarak alınırsa x_0 kökünün altında mı, üstünde mi olduğunu anlamak mümkün değildir. Bu nedenle;

$$c = \frac{a + b}{2} \quad (5)$$

$$\text{orta nokta olarak alınırsa (3) gereğince; } \Delta(c) = \frac{(b - a)}{2} \quad (6) \text{ dır.}$$

Ek.2.3: Köklerin Bulunduğu Aralığın Mümkün Olduğu Kadar Daraltılması

Bu kısımda, bir denklemin yaklaşık kökünün daha iyi bir değerini bulmaya çalışacağız.

$\Delta(c) = b - a$ formülü gösteriyor ki $[a, b]$ aralığında bulunan x_0 kökü için c değerinin seçilmesinden meydana gelen hata $[\Delta(c) = b - a]$, $b - a$ uzunluğu küçülürken azalır.

Eğer $[a, b]$ aralığı x_0 kökünü ihtiva ediyorsa, bu aralık içinde bulunan ve x_0 'ı ihtiva eden daha küçük bir $[a_1, b_1]$ 'de bulunabilir.

$$(a \leq a_1 < x_0 < b_1 \leq b ; b_1 - a_1 < b - a)$$

Bu şekilde, $[a_1, b_1]$ aralığı kök için daha iyi bir yaklaşım belirtir. $c \neq x_0$ olmak üzere $[a, b]$ aralığında alınan bir c noktası ile, x_0 kökünü ihtiva eden $[a, c]$ veya $[c, b]$ aralıklarından biri $[a_1, b_1]$ olarak alınır. c noktasının seçimi için çeşitli metotlar kullanılır. Bu metotlar şunlardır.

Ek.2.3.1. Deneme Metodu :

Bu metotta, $[a, b]$ aralığında gelişigüzel bir c noktası seçilir. $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ ve $[c, b]$ aralıklarında hangisinin uç noktalarında ters işarete sahip olursa, o aralık $[a_1, b_1]$ olarak alınır. Metodun başarısı c noktasının seçimindeki isabete bağlıdır.

Ek.2.3.2. İkiye bölme Metodu :

Bu metodun değişik bir şekli aralığın ikiye ayrılmasıdır. Burada c , $[a, b]$ aralığının orta

noktası $c = \frac{(a+b)}{2}$ olarak alınır.

Örnek.Ek.2.3 : İkiye bölme metodunu uygulayarak $x^3 - x - 1 = 0$ denkleminin $[1, 2]$ aralığı içindeki kökünü geliştiriniz.

Çözüm.Ek.2.3: $f(x) = x^3 - x - 1$, $a = 1$, $b = 2$, $c = \frac{(1+2)}{2} = 1,5$

$$f(1) = -1 < 0, f(1,5) = 0,875 > 0, f(2) = 5 > 0 \text{ dır.}$$

$f(x)$ fonksiyonu $[1, 1,5]$ aralığında işaret değiştirdiğinden bu aralık $[a_1, b_1]$ aralığı olarak alınır. ($a_1 = a = 1$; $b_1 = c = 1,5$)

Örnek.Ek.2.4 : İkiye bölme metodunu uygulayarak $x \sin x - 1 = 0$ denkleminin kökünü $[0,2]$ ' de %0,01 hata ile hesaplayınız.

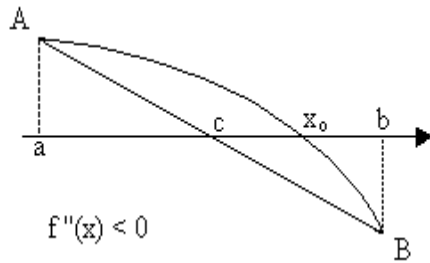
Çözüm.Ek.2.4:

	a_k	b_k	c_k	$F(c_k)$	İşaretleri		
					$f(c_k)$	$f(a_k)$	$f(b_k)$
0	0	2	1	-0,15852901	-	-	+
1	1	2	1,5	0,496242479	+	-	+
2	1	1,5	1,25	0,186230774	+	-	+
3	1	1,25	1,125	0,015051043	+	-	+
4	1	1,125	1,0625	-0,07182663	-	-	+
5	1,0625	1,125	1,09375	-0,02836172	-	-	+
6	1,09375	1,125	1,109375	0,00664277486	-	-	+
7	1,109375	1,125	1,1171875	0,004208034	+	-	+
8	1,109375	1,1171875	1,11328125	-0,00121649	-	-	+
9	1,11328125	1,1171875	1,115234375	0,001496	+	-	+
10	1,11328125	1,115234375	1,114257813	0,0001398	+	-	+

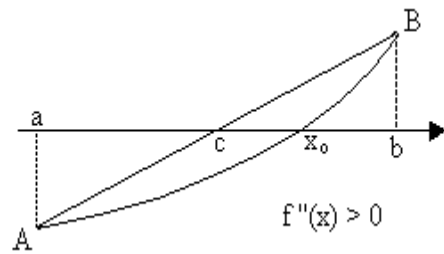
Deneme metodunda c noktası $f(x)$ fonksiyonunun özelliklerinden bağımsız olarak seçilmektedir. Şayet $f(x)$ fonksiyonunun özellikleri göz önüne alınacak olursa yaklaşım daha sıhhatli olur.

Ek.2.3.3. Kirişler (Değişken Kesen)Metodu:

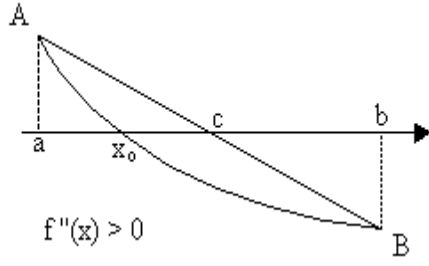
c noktasının seçimi olarak şekil.Ek.2..5.a.b.c.d' de görüldüğü gibi $y = f(x)$ eğrisinin $[a, b]$ aralığında kalan parçasına ait girişin Ox - eksenini kestiği nokta alınabilir.



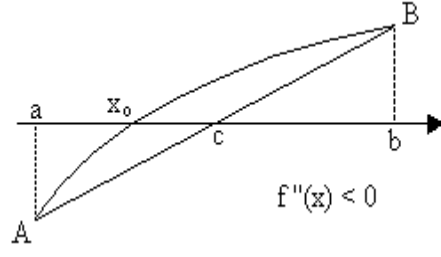
Şekil.Ek.2..5.a



Şekil.Ek.2..5.b



Şekil.5.c



Şekil.5.d

A $[a, f(a)]$ ve B $[b, f(b)]$ noktasındaki geçen doğrunun denklemi;

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a} \dots\dots\dots(7)$$

şeklinde olup bunun Ox- eksenini kestiği nokta;

$$c = a - \frac{b - a}{f(b) - f(a)} \quad f(a) = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)} \dots\dots\dots(8)$$

Buna göre , c , $[a, b]$ 'nin içindedir. Bir eğrinin eğriliği;

$$(k = \frac{|f''(x)|}{[1 - f'(x)^2]^{\frac{3}{2}}})$$

ne kadar küçük ise, eğri parçasının uçlarını birleştiren kirişin Ox- eksenini kestiği nokta esas köke o nispette yakın olur. Yani , $[a, b]$ aralığında $f'(x)$ 'in değeri büyük ve $f''(x)$ değeri küçük ise c yaklaşık değeri x_0 köküne yakın olur. $f(x)$ ve $f''(x)$ farklı işaretli ise c noktası $[a, b]$ aralığının bitim noktasına daha yakın, $f(x)$ ile $f''(x)$ aynı işaretli ise c noktası $[a, b]$ aralığına baş tarafına daha yakındır.

Örnek.Ek.2.5 : Kirişler metodunu kullanarak $x^3 - x - 1 = 0$ denkleminin $[1, 2]$ aralığı içindeki kökünü geliştiriniz.

Çözüm.Ek.2.5: $f(x) = x^3 - x - 1$, $f'(x) = 3x^2 - 1$, $f''(x) = 6x \Rightarrow (2)'$ de

$f'(x) > 0$, $f(1) < 0$, $f(2) > 0$ buna göre c noktası $[a_1, b_1]$ aralığının solundadır.

$(c < x_0 < b, a_1 = c, b_1 = b)$

$$c = 1 + \frac{2 - 1}{5 + 1} = \frac{7}{6} \approx 1.1$$

Bu nedenle, c yaklaşık değeri bir alt tahmindir. Böylece $[a_1, b_1] = [1, 1.2]$ olarak alınabilir.

Örnek.Ek.2.6 : Değişken Kesen: $a_0=0$, $b_0=2$, $f(0)=-1$, $f(2)=0,81859485$

$$c_0 = \frac{a_0 f(b_0) - b_0 f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)} = \frac{0f(2) - 2f(0)}{f(2) - f(0)} = \frac{2}{1,81859485} = 1,09975017$$

Çözüm.Ek.2.6: $f(c_0) = -0,02001921$

$$[a_1, b_1] = [1.09975017, 2] \Rightarrow c_1 = 1.12124074 \Rightarrow f(c_1) = 0.00983461$$

$$[a_2, b_2] = [1.09975017, 1.12124074] \Rightarrow c_2 = 1.11416120 \Rightarrow f(c_2) = 0.00000563$$

$$[a_3, b_3] = [1.09975017, 1.11416120] \Rightarrow c_3 = 1.11415714 \Rightarrow f(c_3) = 0.00000000$$

k	a_k	c_k	b_k	$f(c_k)$	İşaretleri		
					$f(c_k)$	$f(a_k)$	$f(b_k)$
0	0	1.09975017	2	-0,02001921	-	-	+
1	1.09975017	1.12124074	2	0,00983461	+	-	+
2	1.09975017	1.11416120	1.12124074	0,00000563	+	-	+
3	1.09975017	1.11415714	1.11416120	00000000	+	-	+

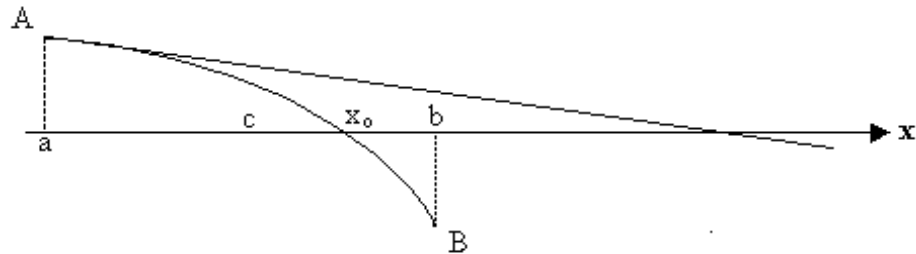
Ek.2.3.4. Teğetler (Newton-Raphson) Metodu : $[a, b]$ aralığının uçlarından birini z ile gösterelim. $[z, f(z)]$ koordinatlı noktadan geçen doğrular demetinin denklemi;

$$y - f(z) = k(x - z) \text{ olur.}$$

$k = f'(z)$ ise $y = f(x)$ eğrisinin $[z, f(z)]$ noktasındaki teğeti elde edilir. Teğetin Ox- eksenini kestiği noktanın apsisi;

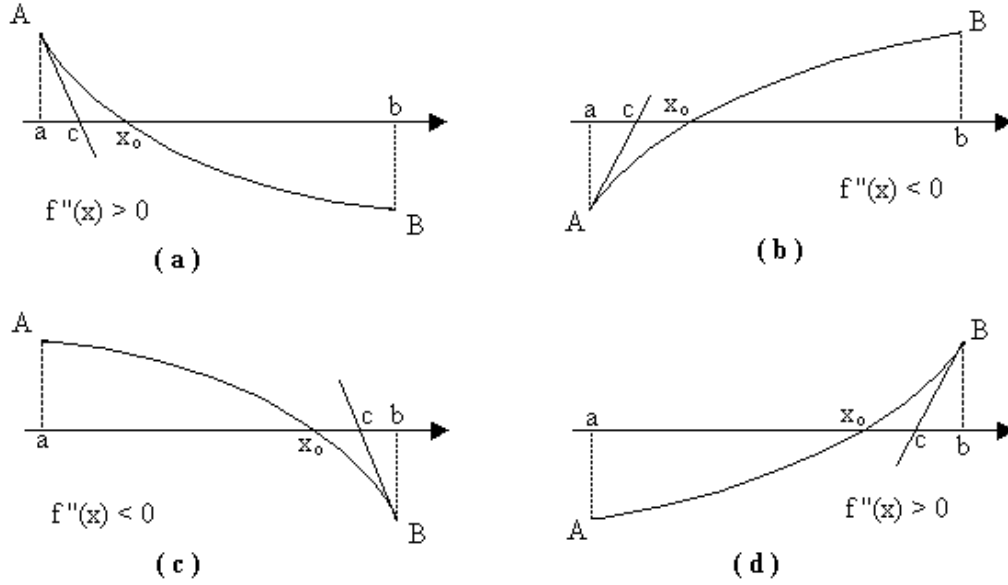
$$c = z - \frac{f(z)}{f'(z)} \dots\dots\dots(9)$$

$[a, b]$ fonksiyonunun eğriliği küçükse c noktası x_0 köküne o ölçüde yakındır. $z = a$ ve $z = b$ olmasına göre (9) denklemi değişik c değerleri verir. c noktası $[a, b]$ aralığının dışında bulunabilir. (Şekil.Ek.2..6)



Şekil.Ek.2..6

Halbuki teğet B den çizilmiş olsaydı c noktası $[a, b]$ aralığında bulunurdu. Burada önemli olan c 'nin $[a, b]$ aralığı içine düşmesidir. İkinci olarak, aralığın uçlarından hangisinin alınacağı hakkında aşağıdaki şekiller fikir verir. (Şekil.Ek.2..7.(a)(b)(c)(d)).



Şekil.Ek.2..7.(a)(b)(c)(d).

$f(z)$ ve $f''(z)$ işaretinin aynı olduğu noktadan çizilen teğetin Ox- eksenini kestiği c noktası $[a, b]$ aralığının içinde bulunur. Aynı zamanda c noktası x_0 ile z arasındadır.

Örnek.Ek.2.7: Newton-Raphson metoduyla $x^3 - x - 1 = 0$ denkleminin $[1, 2]$ aralığı içindeki kökünü geliştiriniz.

Çözüm.Ek.2.7: $f(x) = x^3 - x - 1$ ise $f'(x) = 3x^2 - 1$ ve $f''(x) = 6x$ olur.

Buna göre, $[1, 2]$ aralığında;

$$f'(x) > 0, \quad f(2) > 0, \quad f''(2) > 0$$

olduğundan teğet aralığı bitim noktasından çizilmelidir.

$$x = z = 2 \text{ olarak } f'(2) = 11 \text{ ve } (1 - 7)' \text{ den}$$

$$c = 2 - \frac{5}{11} \approx 1.6 \quad \text{bulunur.}$$

$c > x_0$ dır. O halde, yeni aralık $[1, 1.6]$ alınır.

Eğer köke iki uçtan birden yaklaşılsa daha çabuk ve sıhhatli çözüme gidilir. Bu da her iki metodun birden uygulanması ile olur.

Örnek.Ek.2.8: Newton-Raphson metoduyla $f(x)=x.\sin x-1$ denkleminin $[0, 2]$ aralığı içindeki kökünü geliştiriniz.

Çözüm.Ek.2.8: $f(0)<0$ $f''(1) > 0$

$$f(2)>0 \quad f''(2) < 0$$

$z=1$ seçelim. $f'(x) = \sin x + \cos x$
 $f''(x) = 2 \cos x - x \sin x$

$$c_0 = Z_0 = \frac{f(Z_0)}{f'(Z_0)} = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1 + \frac{0,15852901}{0,84147098450.540302305}$$

$$c_0 = 1 + \frac{0,15852901}{1,381773209} = 1,114728675$$

$$f(c_1)=-0,007937328 \quad f(1)<0, f(2)>0$$

$$c_2=-0,07937328 \quad \underbrace{[1,114728675,-2]}_{Z_1}$$

$$c_1 = Z_1 - \frac{f(Z_1)}{f'(Z_1)} = 1,114728675 - \frac{f(1,114728675)}{f'(1,114728675)}$$

$$= 1,114728675 + \frac{0,007937328}{1,388741345}$$

$$= 1,114728675 + 0,005715483325$$

$$c_1 = 1.120444158$$

$$f(c_1)=0,008729>0 \quad f(a_1)<0 \quad x_0 \cong 1,114728675[\%08]$$

$$\underbrace{[1,114728675;1.120444158]}_{Z_2}$$

Ek.2.3.5. Teğet – Kiriş Metodu

Farklı iki metodun birden uygulanması özelliğidir. Bu metot verilen denklemin sol tarafının ikinci türevinin aynı kalması halinde uygulanır. Bu durumda her iki yandan da köke yaklaşıldığı garanti edilebilir. Teğet, Ox- eksenini $y = f(x)$ eğrisinin konveks tarafında keserken, kiriş konkav tarafında keser.

Örnek.Ek.2.9 : Teğet - Kiriş metoduyla $x^3 - x - 1 = 0$ denkleminin $[1, 2]$ aralığı içindeki kökünü geliştiriniz.

Çözüm.Ek.2.9: $f(x) = x^3 - x - 1$, $f(1) = -1 < 0$, $f(2) = 5 > 0$

$$f'(x) = 3x^2 - 1 , \quad f''(x) = 6x, \quad f''(x) > 0 \quad \text{dır.}$$

Daha önceki hesaplamalarla $[a_1, b_1] = [1.1, 1.6]$ bulunur.

Örnek.Ek.2.10 : $f(x)=\ln x-5+x$ denkleminin kökünü teğetler, kirişler ve ikiye bölme metoduyla çözünüz?

Çözüm.Ek.2.10:

i) İkiye bölme metodu;

$$f(x)= \ln x-5+x$$

k	a_k	b_k	C_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	$f(c_k)$
1.	3	4	3,5	-0,90138	0,38629	-0,24723
2.	3,5	4	3,75	-0,24723	0,38629	0,07175
3.	3,5	3,75	3,625	-0,24723	0,07175	-0,08714
4.	3,625	3,75	3,6875	-0,08714	0,07175	-0,00755
5.	3,6875	3,75	3,71875	-0,00755	0,07175	0,03213
6.	3,6875	3,71875	3,703125	-0,00755	0,03213	0,01230
7.	3,6875	3,703125	3,6953125	-0,00755	0,01230	0,00237
8.	3,6875	3,6953125	3,69140625	-0,00755	0,00237	-0,00258
9.	3,69140625	3,6953125	3,693359375	-0,00237	0,00237	-0,0001

9. adımda onbinde 1 hatayla yani %0,01 hatayla bulundu, kök 3,693359375 dir.

ii) Teğetler metodu;

$$f(x)= \ln x-5+x$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad x_0 = 3 \quad \text{alalım.} \quad f'(x) = \frac{1}{x} + 1$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 3 - \frac{-0,90138}{1,33333} = 3,67603$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 3,67603 - \frac{-0,02213}{1,27203} = 3,69342$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 3,69342 - \frac{-0,00002}{1,27075} = 3,69343$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 3,69343 - \frac{-0,00001}{1,27075} = 3,69343$$

x_3 köktür yüzbinde bir (% 0,001) hata ile bulunmuştur. $x_3=3,69343$

iii) Kirişler yöntemi; $f(x) = \ln x - 5 + x$

k	a_k	b_k	c_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	$f(c_k)$
1.	3	4	3,70000	-0,90138	0,38629	0,00833
2.	3	3,7	3,69358	-0,90138	0,00833	0,00017
3.	3	3,69358	3,69343	-0,90138	0,00017	-0,00001

3. adımda yüzbinde bir (%0,001) hatayla kök bulunmuştur. Kök= 3,69343

Örnek.Ek.2.11 : $f(x) = e^x - 2 - x$ denkleminin kökünü teğetler, kirişler ve ikiye bölme metoduyla çözünüz?

Çözüm.Ek.2.11:

i) İkiye bölme metodu;

$$f(x) = e^x - 2 - x$$

k	a_k	b_k	c_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	$f(c_k)$
1.	1	2	1,5	-0,28171	3,38905	0,98168
2.	1	1,5	1,25	-0,28171	0,98168	0,24034
3.	1	1,25	1,125	-0,28171	0,24034	-0,04478
4.	1,125	1,25	1,1875	-0,04478	0,24034	0,09137
5.	1,125	1,1875	1,15625	-0,04478	0,09137	0,02174
6.	1,125	1,15625	1,140625	-0,4478	0,02174	-0,01199
7.	1,140625	1,15625	1,1484375	-0,01190	0,02174	0,00482
8.	1,140625	1,1484375	1,14453125	-0,01190	0,00482	-0,00356
9.	1,14453125	1,1484375	1,146484375	-0,00356	0,00482	0,00062
10.	1,14453125	1,146484375	1,14551875	-0,00356	0,00062	-0,00144
11.	1,14551875	1,146484375	1,146001563	-0,00144	0,00062	-0,00041
12.	1,146001563	1,146484375	1,146242969	-0,00041	0,00062	0,0001

12. adımda köke sağdan onbinde 1 (%0,001) hassasiyetle yaklaşıldı.

Buna göre, kök 1,146242969 dur.

ii) Teğetler metodu;

$$f(x) = e^x - 2 - x$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad x_0 = 1 \quad \text{alalım.} \quad f'(x) = e^x - 1$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{-0,28171}{1,71828} = 1,16394$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1,16394 - \frac{0,03858}{2,20252} = 1,14642$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1,14642 - \frac{0,00048}{2,14690} = 1,14619$$

$$f(x_3) = -0,000006$$

x_3 köktür % 0,0006 hassasiyetle hesaplandı.

iii) Kirişler yöntemi;

$$f(x) = e^x - 2 - x$$

k	a_k	b_k	c_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	$f(c_k)$
1.	1	2	1,07674	-0,28171	0,38905	-0,14164
2.	1,07674	2	1,11377	-0,14164	0,38905	-0,06795
3.	1,11377	2	1,13118	-0,06795	0,38905	-0,03186
4.	1,13118	2	1,13926	-0,03186	0,38905	-0,01480
5.	1,13926	2	1,14299	-0,01480	0,38905	-0,00685
6.	1,14299	2	1,14549	-0,00685	0,38905	-0,00150
7.	1,14549	2	1,14586	-0,00150	0,38905	-0,00071
8.	1,14603	2	1,14603	-0,00071	0,38905	-0,00035
9.	1,14611	2	1,14611	-0,00035	0,38905	-0,00017

9. adımda onbinde bir (%0,01) hassasiyetle köke yaklaşılmıştır. Kök= 1,14611

Ek.2.4. Denklemlerin Yaklaşık Çözümlerinde İterasyon Metotları

Bir denklemin kökü köklerin geliştirilmesi metotları ile belirlendikten sonra kökün belirli bir hassasiyetle yaklaşık değeri bulunmuş olur. $[a_0, b_0]$ ilk aralık iken köklerin geliştirilmesi metotlarından birini kullanarak daha küçük $[a_1, b_1]$ belirlenir. En son $[a_k, b_k]$ ($k=0, 1, \dots$) bulunur.

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k \leq \dots \leq x_0 \leq \dots \leq b_k$$

Bu aralığın ($[a_k, b_k]$) uçları x_0 kökünün yaklaşık birer çözümleri olur. (Burada $x_0 \approx a_k$ değeri x_0 'ın bir alt yaklaşımı $x_0 \approx b_k$ değeri de x_0 'ın bir üst yaklaşımıdır. Bu köklere yaklaşım istenilen hassasiyete gelene kadar devam edilir. Bu tür metotlara iteratif (ardışık) metot denir.

$a_k \rightarrow x_0$ veya $b_k \rightarrow x_0$ ise iteratif metot yakınsaktır denir.

Ek.2.5. Newton'un Karekök Algoritması: $f(x)=x^N - A=0$ denkleminin kökleri;

$$P_k = \frac{(N-1).P_{k-1} + A / P_{k-1}^{N-1}}{N} \quad (k=1,2,\dots)$$

A'nın n. kökünü verir. P_0 öğrenci tarafından seçilir.

Örnek.Ek.2.12: $x^2-5=0$ denkleminin yaklaşık çözümü nedir?

Çözüm.Ek.2.12: $N=2$; $A=5$

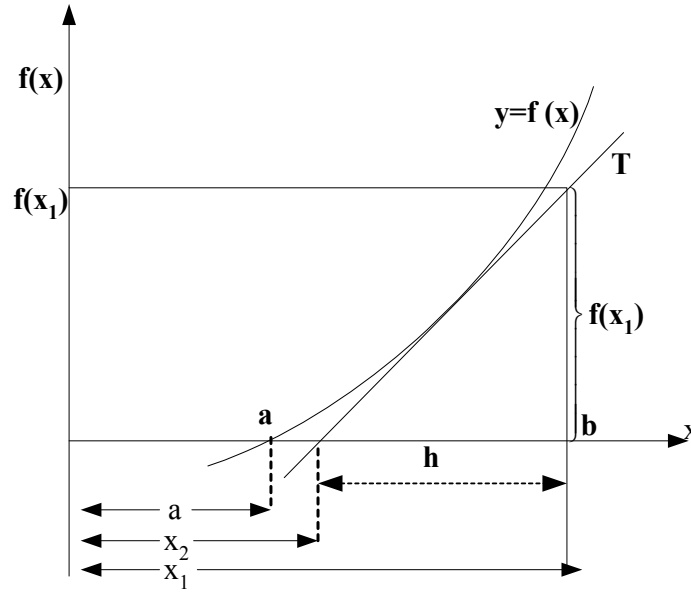
$$\begin{aligned} P_0 &= 2 \text{ alalım.} & P_1 &= \frac{2 + 5/2}{2} = 2,25 \\ & & P_2 &= \frac{2,25 + 5/2,25}{2} = 2,23611111 \\ & & P_3 &= \frac{2,23611111 + 5/2,23611111}{2} = 2,236037978 \\ & & P_4 &= \frac{2,236037978 + 5/2,236037978}{2} = 2,236067978 \end{aligned}$$

Ek.2.6. Newton-Raphson Metodu: Aşağıdaki şekli göz önüne alırsak;

$$m = f'(x_1) = \frac{f(x_1)}{h} \text{ olur.} \quad h = \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \text{ ve } x_2 = x_1 - h \text{ ise;}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \text{ olur ve buradan; } x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n=0,1,2,\dots) \text{ formülü elde}$$

edilir(Şekil.Ek.2..8).



Şekil.Ek.2..8. Newton-Raphson Metodunun grafik gösterimi

Örnek.Ek.2.13: $x^5 - 300 = 0$ denkleminin kökünü milyarda bir hassasiyetle çözünüz.

Çözüm.Ek.2.13: $A=300$; $P_0=3$; $N=5$; $N-1=4$

$$P_1 = \frac{4.P_0 + \frac{300}{(P_0)^{n-1}}}{N} = \frac{4.3 + \frac{300}{3^4}}{5} = 3,14074074$$

$$P_2 = \frac{4.P_1 + \frac{A}{P_1^4}}{5} = \frac{12,56296296 + \frac{300}{(3,14074074)^4}}{5} = 3,129220106$$

$$P_3 = \frac{4.P_2 + \frac{A}{P_2^4}}{5} = \frac{12,51688042 + \frac{300}{(3,129220106)^4}}{5} = 3,129134648$$

$$P_4 = \frac{4.P_3 + \frac{A}{P_3^4}}{5} = \frac{12,51653859 + \frac{300}{(P_3)^4}}{5} = 3,129134644$$

$$P_5 = \frac{4.P_4 + \frac{A}{P_4^4}}{5} = \frac{12,51653858 + \frac{300}{(P_4)^4}}{5} = 3,129134646$$

$$P_6 = \frac{4.P_5 + \frac{A}{P_5^4}}{5} = \frac{12,51653858 + \frac{300}{(P_5)^4}}{5} = 3,129134644$$

$$P_7 = \frac{12,51653858 + \frac{300}{(P_6)^4}}{5} = 3,129134646$$

$F(P_7) = 300.0000007 \Rightarrow F(P_6) = 299.9999997 \Rightarrow P = 3,129134645$ bulunur.

Ek.3.BİLGİSAYAR SAYI SİSTEMLERİ

Temel olarak bilgisayarları anlamamız için bilgisayarlarda kullanılan sayı sistemleri ve temel lojik fonksiyonları anlamamız gerekir.Bu bölümde sayı sistemleri anlatılmaktadır.

Hepimiz biliyoruz ki Ondalık sayı sistemi her gün kullandığımız sayı sistemidir,fakat bilgisayar dünyası İkili sayı sistemini kullanmaktadır.

Bütün bilgiler bilgisayarın içinde İkili olarak saklanmakta ve kullanılmaktadır.Bu bilgisayarın içindeki bilgilerin 0 ve 1 ile kodlanarak kısaltıldığı anlamına gelmektedir.Bu, 1 ve 0'ların depolandığı lojik kısımlara register(kaydedici) yada memory (hafıza) denmektedir.Register yada memory yerlerinin büyüklükleri çeşitli bilgisayar kullanımlarına çeşitli uygunluklar sağlamaktadır.

Mikrobilgisayarlar her bölümde 8 yada 16 İkili bit depolarlar.Büyük bilgisayarlar ise her bölümde 125 İkili bit depolayabilirler.

Bilgisayara bilgi girişlerini ikiliden farklı birkaç sayı sistemi ile yaparız çünkü İkili sayı sistemi ile bilgi girişi uzun sürüp bazı hatalar oluşabilmektedir.Çünkü çok fazla 1 ve 0 olduğundan bu tip sorunlar oluşabilmektedir.

Veriler bilgisayara Ondalık,Sekizlik,Onaltılık sayı sistemlerinde de girilmektedir.Sekizlik ve Onaltılık sayı sistemleri,İkili sayı sisteminden daha açık,kullanış kolaylığından dolayı daha sık kullanılmaktadır.Sayı sistemlerini ve birbirleriyle olan ilişkilerini anlamak bizim için çok önemlidir.

Ek.3.1.İkili(Binary) Sayı Sistemi

İkili sayı sisteminde 1 ve 0 olmak üzere 2 rakam bulunur.1'den büyük sayılar elde olarak bir sonraki basamağa geçer . Her basamak ana değerlerini temsil etmektedir.Temel olarak, Ondalık sayı sistemine baktığımızda birler basamağının basamak değeri 10^0 , onlar basamağının basamak değeri 10^1 , yüzler basamağının basamak değeri 10^2 olur ve diğer basamak değerleri aynı şekilde devam eder.İkili sayı sisteminde basamak değerleri aynı ondalıkdaki gibidir.Ondalık sayı sistemi için birler basamağının sayı değeri 2^0 , onlar basamağının sayı değeri 2^1 olarak gösterilir ve böyle devam eder.

Aşağıdaki şekilde birler basamağı en düşük değerlikli bit (LSB-Least Size Bit) ve en yüksek değerlikli bit(MSB- Least Size Bit) ye kadar olan bit değerleri gösterilmektedir.

Ek.3.2 İkiliden Ondalığa Çevirme

İkili sayı sisteminden Ondalık sayı sistemine çevrim basittir.Eğer basamakta 1 varsa bu basamağı işleme tabi tutar ve toplarız eğer 0 varsa bu basamakta işlem yapılmaz yani yoplamaya dahil edilmez. 11010 sayısını ele alalım!

Örnek Ek.3.1:(11010)₂ = (?)

Çözüm.Ek.3.1:(1×2^4) + (1×2^3) + (0×2^2) + (1×2^1) + (0×2^0) = 16 + 8 + 0 + 2 + 0 =26

İkili sayı sisteminde 1 ve 0 bulunur , bundan dolayı basamakta 0 varsa basamak değeri 0 ‘ a eşit olur. 2^4 ya da 16 ağırlıklı bitte 1 olduğundan çevrimdeki basamak değeri 16 ‘dır.

2^3 ya da 8 ağırlıklı bitte 1 olduğundan çevrimdeki basamak değeri 8 ‘ dir.

2^2 ya da 4 ağırlıklı bitte 0 olduğundan çevrimdeki basamak değeri 4 ‘ dür.

2^1 ya da 2 ağırlıklı bitte 1 olduğundan çevrimdeki basamak değeri 2 ‘ dir.

2^0 ya da 1 ağırlıklı bitte 0 olduğundan çevrimdeki basamak değeri 0 ‘ dir.

Basamak değerlerini birlikte topladığımızda 26 Ondalık sayısını elde ederiz.

Şimdi ise Ondalık sayının İkili sistemde karşılık geldiği değerini bulalım.

Örnek.Ek.3.2:167 ‘ yi İkiliye çeviriniz.

Çözüm.Ek.3.2: 167 içinde 2 ‘ nin en büyük katı olan 128 ‘ dir. Yani, 128 e ihtiyacımız var . Böylece İkili sayımızı en büyük değerlikli bitten başlayarak yazabiliriz.En büyük değerlikli bit 1 olur.Bir sonraki biit belirlerken 64 ü kullanırız , eğer 64 ağırlıklı bite 1 kayarsak sayının toplamı $128 + 64 > 167$ olacağından geçerli olmaz.Yani sonuç olarak bu bitin 0 olması gerekir.Bunu her bit için devam ettirirsek devam ettirirsek 32 nin gerekli olduğunu görürüz.Böylece 101 i elde etmiş oluruz.En yüksek değerlikli bitten başlayarak en düşük değerlikli bite gittiğimizi unutmamalıyız. 16 nın gerekmediğini görürüz.Böylece sayı 1010 olmuş olur.8 in gerekli olmadığını , 4 ün gerekli olduğunu görürüz ve sayı 101001 olur.2 ve 1 sayıları da gerekli olduğu görülünce İkili sayımızın 10100111 olduğu ortaya çıkar.

Bu yolla her Ondalık sayı İkili sayıya çevrilebilmektedir.Eğer pratik yapılırsa bu yolun diğer çevrim yolundan daha hızlı bir şekilde uygulandığı görülür.

Ek.3.3: Sekizlik Sayı Sistemi

Sekizlik yada 8 ‘ li sayı sistemi önemli bir sayı sistemidir.Bu sistemde 8 rakam (0,1,2,3,4,5,6,7) bulunmaktadır.En ağırlıklı rakam ise 7 dir.Sırayla saydığımızdan 0’ dan 7’ ye sayarız .Sonraki sayımda ise tekrar 0 a yani başlangıç bitine döneriz fakat elimizde.Elimizde bir elde biti vardır.Sonuçta sayı 10 ve bir – sıfır olarak okunur.Bu sayı Ondalık 8’e eşittir.Bu yöntemle devam ettiğimizde 0 dan 7 ye ve tekrar sıra 0’ a gelir. Sayı 7’yi her geçişte yani her 0’a dönüşte elde bir artar .

Ek.3.3.1. Sekizlikten Ondalığa Çevirme

1025 Sekizlik sayısını örnek aldığımızda , bu sayıyı bin yirmi beş şeklinde okumamalıyız.Sayı bir-sıfır-iki-beş olarak okunmalıdır.sayıyı Ondalığa çevirirsek ;

$$(1025)_8 = (1 \times 8^3) + (0 \times 8^2) + (2 \times 8^1) + (5 \times 8^0) = (533)_{10}$$

$$(1025)_8 = 512 + 0 + 16 + 5 = 533.$$

Ek.3.4.Onaltılık(Hexadecimal) Sayı Sistemi

Bu sistemde 16 rakam (dijit) bulunmaktadır.En ağırlıklı dijit ise 15 tir.Onaltılık sayı sisteminde 16 farklı sembol kullanılmaktadır.İlk on sembol 0-9 arası rakamlardır diğer 6 sembol ise a-f arası harflerdir.(0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F)

Ek.3.4.1.Onaltılıktan Ondalığa Çevirme

3AC2 Onaltılık sayısının Ondalığa çevrimi

$$(3 \times 4096 = 12288 + 10 \times 256 = 2560 + 12 \times 16 = 192 + 2 \times 1 = 2) = 15042 (10)$$

Ondalık sayıların Onaltılık sayılara çevrimi ile diğer sayı sistemlerine çevrimi arasında fark vardır. Bu fark, Onaltılık sayı sisteminde 9 dan büyük sayılar için A-F arası harfler kullanılmasından kaynaklanmaktadır.

Ek.3.5.İkiliden Sekizliğe ve Onaltılığa Çevrimler

Ek.3.5.1. İkiliden Sekizliğe Çevrim

İkili sayıların büyük miktarda 1 ve 0 kullanılarak temsil edilmesi gerekmektedir.Eğer İkiliden sekizliğe çevrim yaparsak sayı dijitlerinin 3 kat azaldığını görürüz çünkü her bir sekizlik dijit 3 bite eşit gelmektedir.Bütün Sekizlik dijitleri , 0 dan 7 ye , 3 bitle gösterilebilir.

000=0	010=2	100=4	110=6
001=1	011=3	101=5	111=7

Örnek olarak, 11011110001 İkili sayısı Sekizliğe 3 bit bir grup oluşturacak şekilde ayrılarak çevrilebilir. İkili sayıları, 3 bitlik gruplara ayırırken sayma en düşük değerlikli bitten başlar. Her örnekte, her sekizlik dijital için 3 bit kullanılmıştır.

Ek.3.5.2. İkiden Onaltılığa Çevrim

Eğer İkiden Onaltılığa çevrim yaparsak, sayı dijitallerinin 4 kat azaldığı görülür, çünkü bir Onaltılık dijital 4 bite eşittir. Bu tüm Onaltılık, 0 dan F e 4bitle gösterilebilir.

0000=0	0100=6	1010=A	1100=E
0001=1	0111=7	1011=B	1111=F

Örnek olarak, 110110011011 İkili sayısı Onaltılığa 4bitin bir grup oluşturacağı bir biçimde gruplandırılarak çevrilebilir. Bir Onaltılık dijital için 4 bit 1 grup oluşturur. İkili sayıları 4 bitlik gruplara ayırırken sayma en düşük değerlikli bit ile başlar.

Ek.3.6. Toplama

Ek.3.6.1. Sekizlik Sayıların Toplamı

Sekizlik 736 ve 215 sayılarını toplayalım.

En düşük ağırlıklı bit ilk önce toplanır. 6 ve 5 in toplamı 11 yapar fakat 8 den büyük olduğu için $(11 - 8 = 3)$ en düşük ağırlıklı bit 3 olur elde ise 1'dir. Elde (1), 3 ve 1 in toplamı 5 tir. Yani ikinci sütun toplamı 52dir. Son sütunda yada en yüksek değerlikli bitlerimizi topladığımızda ; $7 + 2 = 9$ olur. Elde 1 olur ve $(9 - 8 = 1)$ bu basamağa 1 yazılır. Diğer bit elde biti olduğundan direk sonuca aktarılır. Sonuç ise 1153(Sekizlik) olur.

Ek.3.6.2: Onaltılık Sayıların Toplanması

7AF ve 579 Onaltılık sayılarını toplayalım.

En düşük ağırlıklı bitten toplamaya başladığımızda $F+9 = 24$ tür. 16 dan büyük olduğu için elde 1 olur ve toplamın en düşük ağırlıklı biti 8 olur. $Elde+A+7=18$ 'dir, elde yine 1 olur ve toplama 2 yazılır. En son dijitalerde ise $Elde+7+5=D$ olur ve aynen toplama yazılır. İşlemin sonucu D28 (hex) olur.

Ek.3.6.3.İkili Sayıların Toplanması

1101 ve 1001 İkili sayılarını toplayalım.

Toplama metodu diğer sistemlerle aynıdır. $1+1=2$ 'dir. Toplam $0(2-2=0)$ ve elde 1'dir. Diğer dijitte elde $+0+0=1$ 'dir ve aynen toplama yazılır. Sonraki dijitte $1+0=1$ aynen toplama yazılır. Diğer dijitte $1+1=2$ 'dir, elde 1 ve toplama $(2-2=1)$ 1 yazılır. Diğer ve son dijit elde dijiti olduğu için elde aynen toplama yazılır. Sonuç ise 10110 (2) olur.

Ek.3.7.Çıkarma

Ek.3.7.1.Sekizlik Sayı Sisteminde Çıkarma

Yine, 512(8) sayısından 267(8) sayısını çıkartalım. 2'den 7 küçük olduğu için ödünç alma biti gerekmektedir ve bu bit sayesinde burada yeni bir sayı oluşmuştur, 12 (bir-iki) olarak okunur ve bu $8+2=10$ anlamına gelmektedir. Çünkü buradaki elde biti 8'e eşittir.

Örnek.Ek.3.3: 512(8) sayısından 267(8) sayısını çıkartalım.

Çözüm.Ek.3.3: $2-7 = 3$ tür. Çünkü 2 den 7 yi çıkartırken bir sonraki bitten bir 8 ödünç alırız. $2+8-7=3$ tür. Diğer basamakta ise 1 önceki bite ödünç verildiği için değeri 0 oldu. 0 dan 6 yı çıkarınca sonuç negatif olacağı için diğer basamakta yine bir 8 ödünç alırız ve sonuç $0+8-6=2$ olur. Sonraki basamakta 5 ten 1 ödünç aldığımız için $5-1=4$ olur. $4-2=2$ olur ve sonuca yazılır. Sonuç 228(Sekizlik) olur.

Ek.3.7.2. Onaltılık Sayı Sisteminde Çıkarma

Örnek.Ek.3.4: Sekizlik sayı sistemindeki aynı kuralları uygulayarak Onaltılık C37 sayısında Onaltılık 85E sayısını çıkaralım.

Çözüm.Ek.3.4: İlk basamakta bir sonraki basamaktan 1 ödünç almamız gerekmektedir. Böylece ilk basamaktaki sayı bir-yedi eksi E eşittir 9 ya da onluk sistemde düşünürsek $(16+7)-14=9$ bulunur. Bir sonraki basamaktaki sayı ilk basamaktaki sayıya 1 ödünç verdiği için 2 olmuştur, iki beşten küçük olduğu için bir sonraki basamaktan 1(yani 16) ödünç alınır. $16+2-5=13$ olur 13 ün karşılığı Onaltılık sayı sisteminde D olur. Son basamakta ise bir önceki basamağa 1 ödünç verdiği için sayı B olur. $B-8=3$ olur..(onluk sistemde düşünürsek $11-8=3$)

Ek.3.7.3.İkili Sayı Sisteminde Çıkarma

İkili sayı sisteminde çıkarma işleminde uygulanan kurallar diğer sistemdeki kurallarla aynıdır.

Örnek Ek.3.5: $(10011)_2$ 'den $(01101)_2$ 'y i çıkaralım.

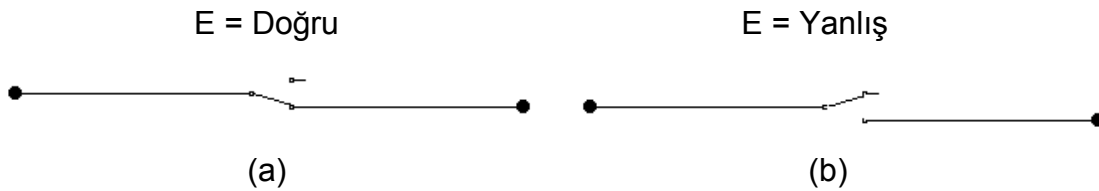
Çözüm.Ek.3.5:İlk basamakta $1-1=0$ ve ikinci basamakta $1-0=1$ sonuca aynen yazılır.Üçüncü basamakta sıfır birden küçüktür ve 4. basamaktan ödünç bir alamadığımız (çünkü 4.basamak 0) için 5. basamaktan bir(yani 2'lik) ödünç aldığımızda 4. basamak 1 ve 3. basamak yine 1 olur.3. basamakta $1-1=0$ olur ve 4.basamak yine $1-1=0$ olur.5. basamakta 0 kalır ve aynen sonuca aktarılır.Sonuç $10(2)$ olur.

Ek.4.BOOLEAN CEBRİ

Ek.4.1 Mantıksal Değişkenler:

Boolean cebri, mantıksal değişkenlerde kullanılır. Bir değişken, doğru değilse, 0 değişken, yanlış olmalıdır. Tersini düşünecek olursak eğer bir değişken, yanlış değilse, 0 değişken, doğru olmalıdır. Bu karakteristikten dolayı, Boolean cebri, ideal olarak iki duruma sahip olan değişkenlere uygundur, öyleyse bu değişkenler, “evet” ve “hayır” veya bir sayı için iki değer, “1” ve “0” olan sistemlerdir (Örneğin, ikili sayı sistemi). Örneğin; E, Erdem’i temsil eden bir değişken. E’nin iki değeri var: Eğer Erdem varsa, E, “Doğru”; Eğer Erdem yoksa, E, “Yanlış” olmuş olur.

Bir anahtar, ideal olarak iki konuma sahiptir. Çünkü; anahtar sadece açık veya sadece kapalıdır. (Şekil.1) Anahtar kapalı olduğu zaman, Erdem vardır (E=Doğru). Anahtar açık olduğunda ise, Erdem yoktur (E=Yanlış).



Şekil.1. Anahtar: (a) kapalı; (b) açık.

Anahtar kapalı konumda iken, bunun karşılığı; Doğru, evet, bir (1), HIGH (H), devam et vb... Anahtar açık konumda ise, bunun karşılığı; Yanlış, hayır, sıfır (0), LOW (L), dur vb... gibi olur.

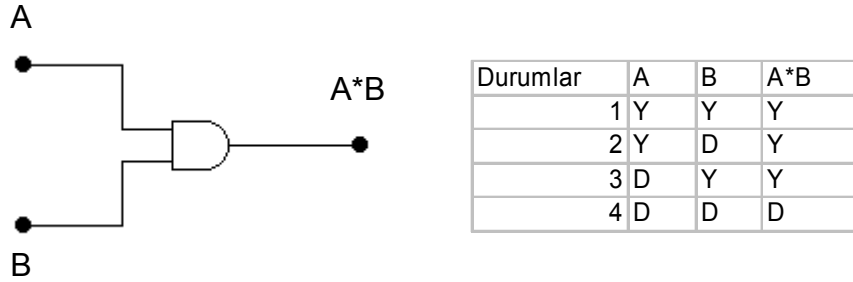
Ek.4.2. MANTIK (LOJİK) İŞLEMLER:

Sadece üç çeşit temel mantık işlemi vardır:

- 1- VE (AND); çarpma işlemi olarak bilinen bu işlem (.) şeklinde gösterilir.
- 2- VEYA (OR); toplama işlemi olarak bilinen bu işlem (+) şeklinde gösterilir.
- 3- DEĞİL (NOT); tersini alma veya tersleme işlemi de diye bilinen bu işlem (—) şeklinde gösterilir.

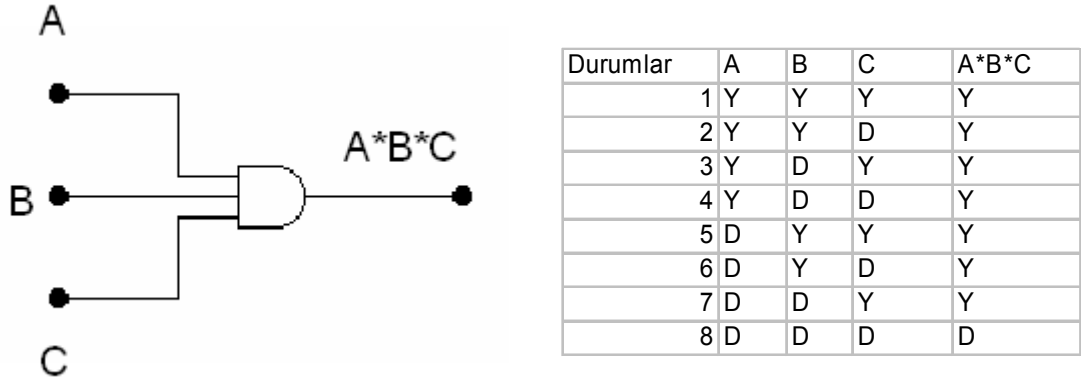
Ek.4.2.1. Ve (And) Fonksiyonu:

Şekil.2’de gösterilen AND kapısının doğruluk tablosunda iki giriş bulunmaktadır. A ve B, giriş değişkenleridir. A doğru VE B doğru olduğunda fonksiyon doğrudur. Aksi halde, fonksiyon her zaman yanlış olacaktır. Bir lojik kapının girişinde ve çıkışında olabilecek bütün durumlar doğruluk tablosunda gösterilmiştir. İki giriş vardır ve her giriş için iki durum vardır (Doğru ve Yanlış). Mevcut olan giriş sayısının ikinin kuvveti olarak yazılır. (x = giriş sayısı olmak üzere; 2^x tane durum vardır). Doğruluk tablosunda dört farklı konumdan sadece bir tanesinde iki girişte doğrudur. Bu yüzden VE fonksiyonu sadece A ve B doğru olduğu zaman doğrudur.



Şekil.2.İki girişli VE(AND) kapısı: a) Lojik sembolü b) Doğruluk tablosu

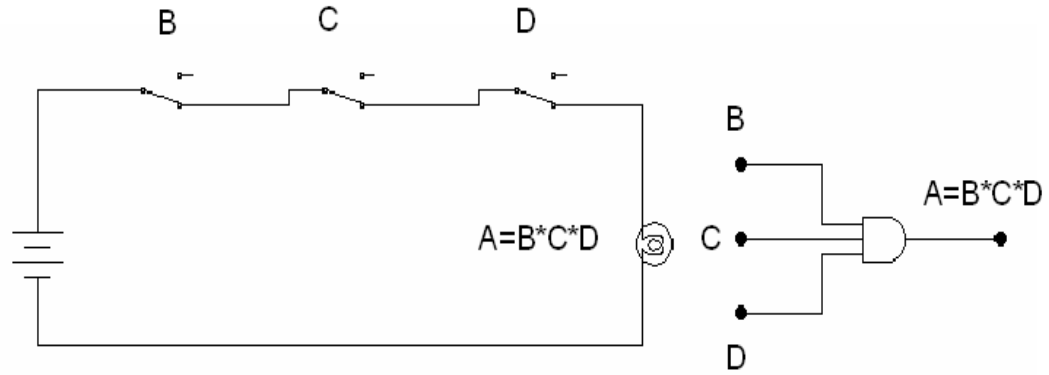
VE (AND) kapısı iki veya dah çok girişli olabilir. Şekil.3’te üç girişli VE kapısı ve doğruluk tablosu verilmiştir. Bu fonksiyonun doğru (1) olabilmesi için üç girişininde doğru olması gerekir (A=Doğru VE B=Doğru VE C=Doğru). Şimdi üç değişken girişi için sekiz farklı çıkış olasılığımız var ($2^3=8$).



Şekil.3. Üç girişli VE(AND) kapısı:a) Lojik sembolü b) Doğruluk tablosu

Örneğin; bir basketbol takımı düşünelim. Bu takımın oluşabilmesi için beş oyuncuya ihtiyacı vardır. Herhangi bir oyuncu veya birden fazla oyuncunun eksik olması demek takımın oluşamaması demektir. Sadece bir durumda takım oluşur bu da beş oyuncunun da takımda olmasıyla gerçekleşir.

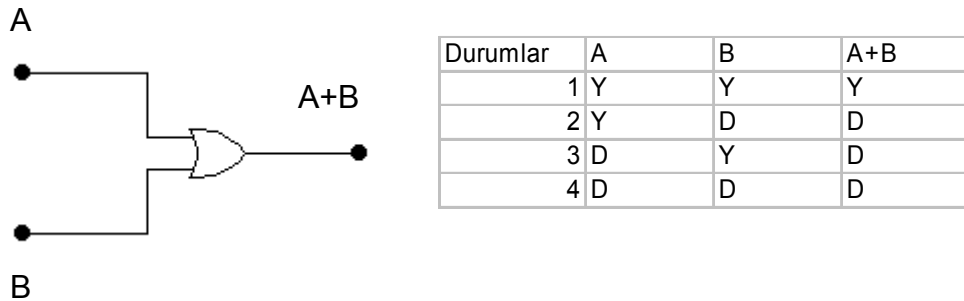
Bir örnek daha verecek olursak, bir devrede üç seri anahtar (B,C ve D), bu anahtarlara bağlı seri bir lamba (A) ve bir kaynak vardır. Biliyoruz ki bu lambanın yanması için üç anahtarında kapalı olması gerekiyor. Bunu Şekil.4’de de görebiliriz. Şekil.5’de de bu örneğin lojik şekli çizilmiştir.



Şekil.4. üç anahtarın sembolize ettiği VE fonksiyonu Şekil .5.Lojik sembolü

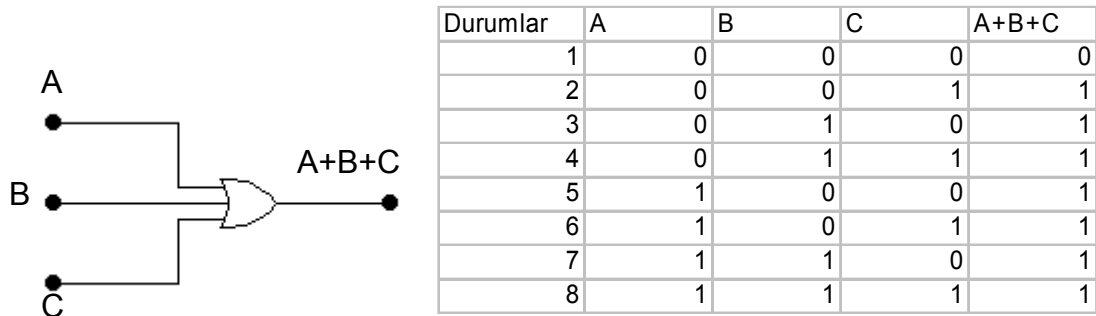
Ek.4.2.2. Veya (Or) Fonksiyonu:

Şekil 10-6’da iki girişli bir VEYA (OR) kapısı için, lojik sembolü ve doğruluk tablosu gösterilmiştir. Bu fonksiyonun doğru olabilmesi için, giriş değişkenlerinden en az birinin doğru olması lazım ki çıkış doğru olsun. Sadece her iki girişte yanlış olduğunda çıkışta yanlış oluyor.



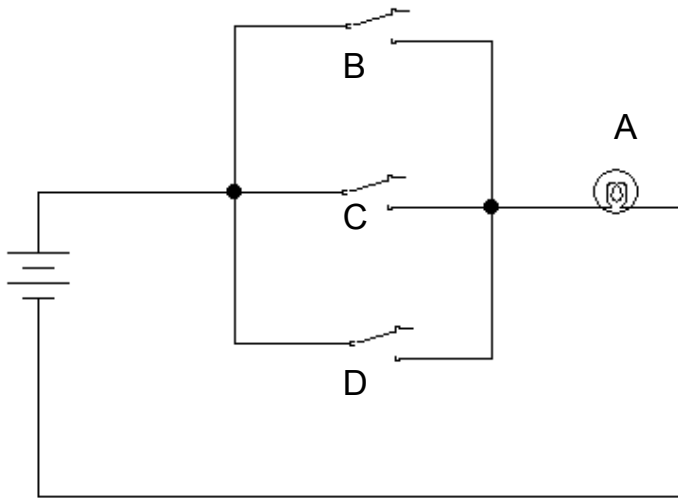
Şekil.6 İki girişli VEYA(OR) kapısı: a) Lojik sembolü b) Doğruluk tablosu

VEYA (OR) kapısı iki veya daha fazla girişi olabilir.Şekil.7’de üç girişli VEYA (OR) kapısının lojik sembolü ve doğruluk tablosunu görüyoruz. Değişkenlerin durumları için Bir(1) ve sıfır(0) kullanılmıştır. Üç girişimiz olduğundan girişlerin sekiz farklı konumu olabilir.($2^3=8$). “+” sembolü lojik anlamda VEYA anlamına gelir ve VEYA’nın yerine kullanılır($A+B+C = A$ VEYA B VEYA C). Lojik toplamada $1+0=1$ ve $1+1=1$ ’e eşittir. Bir VEYA(+) bir bu tür lojik işlemlerde ikiye eşit değildir.

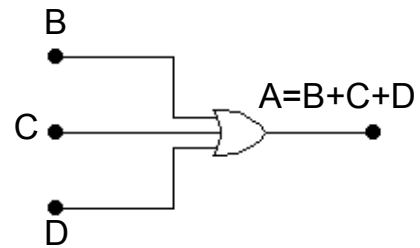


Şekil .7.Üç girişli VEYA(OR) kapısı: a) Lojik sembolü b) Doğruluk tablosu

Örneğin; bu devrede birbirine üç paralel anahtar, bunlara bağlı A lambası ve bir kaynak var. Biliyoruz ki, bu A lambasının yanması için en az bir anahtarın kapatılması gereklidir. Bunu Şekil.8’de de görebiliyoruz. Şekil.9’da da bu devrenin lojik sembolü verilmiştir.



Şekil.8 Üç anahtarın sembolize ettiği VEYA fonksiyonu

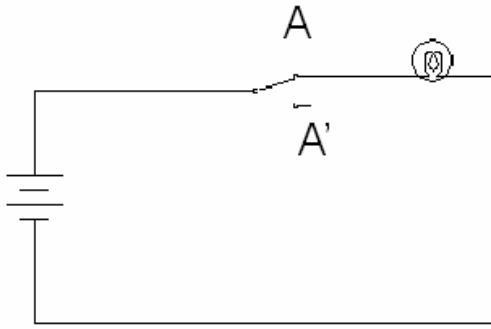


Şekil.9 Lojik sembolü

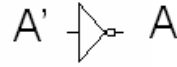
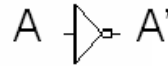
Ek.4.2.3. Değil (Not) Fonksiyonu:

Şekil.10'daki devrede anahtar kapatıldığında lamba yanar (doğru). Anahtar açıldığında devre açık devre olur ve lamba kapanır(Bu devre için anahtarı açmak"1", kapatmak"0"dır.). Bir giriş için iki farklı konum vardır("1" veya "0"). Tabi ki,buna bağlı olarak Lamba açık(doğru), lamba kapalı(yanlış) iki farklı çıkıştır.

Lojik devrelerde DEĞİL (NOT) fonksiyonu "tersleyici" diye de bilinir. Bu fonksiyonun sembolü Şekil.11'de görülmektedir. Tersleyicinin yaptığı işlem girişteki değişkenin tersini almaktır. Eğer giriş değişkeni "A" olarak ifade edilirse, çıkış "A'" (A DEĞİL) olarak ifade edilir. Bu ifadeleri zaten doğruluk tablosundan görebilirsiniz.



Şekil.10.DEĞİL fonksiyonunun örnek devresi



A	A'
0	1
1	0

Şekil.11.DEĞİL(NOT) kapısı

a)Lojik sembolü b)Doğruluk tablosu

Ek.4.3. Boolean Özdeşlikleri ve Kanunları

Aşağıda Boolean cebirinde yapılan işlemlerde kullanılan temel özdeşlikler listelenmiştir.

$$1 - A + 0 = A$$

$$2 - A + 1 = 1$$

$$3 - A + A = A$$

$$4 - A + A' = 1$$

$$5 - A \cdot 0 = 0$$

$$6 - A \cdot 1 = A$$

$$7 - A \cdot A = A$$

$$8 - A \cdot A' = 0$$

$$9 - A = (A')'$$

Boolean ifadelerinin sadeleştirilmesinde bu temel özdeşlikler dışında bazı kanunlar da kullanılır.

Şimdi de bu kanunları inceleyelim.

1) Yer Değiştirme Kanunu: Bir Boolean ifadesindeki değişkenlerin yer alış sıraları önemli değildir.

$$A \cdot B = B \cdot A$$

$$A + B = B + A$$

2) Birleşme Kanunu: Aynı tip işlemlerin uygulanış sırası önemli değildir.

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

3) Dağılım Kanunu: Parantezin dışındaki değişken parantezin içindeki terimlere dağılır.

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$$

4) Gereksizlik Kanunu

$$A + A \cdot B = A$$

$$A \cdot (A + B) = A$$

5) DeMorgan Kanunu

$$(A \cdot B \cdot C)' = A' + B' + C'$$

$$(A + B + C)' = A' \cdot B' \cdot C'$$

Ek.4.4. Boolean İfadelerinin Sadeleştirilmesi

Bu bölümde de yukarıda görmüş olduğunuz temel kuralları ve kanunları kullanarak Boolean ifadelerinin sadeleştirilmesini inceleyeceğiz.

Örnek.1 : $Y = A'BC + A'BC' + AC$ ifadesini sadeleştiriniz.

Çözüm.1: $Y = A'BC + A'BC' + AC$

$$Y = A'B(C + C') + AC \quad [(C + C') = 1]$$

$$Y = A'B + AC$$

Örnek.2 : $Y = [A'B' + (A+B)']$ ifadesini sadeleştiriniz.

Çözüm.2: $Y = [A'B' + (A+B)']$

$$Y = (A'B')' (A+B)''$$

$$Y = (A+B)(A+B')$$

$$Y = A \cdot A + A \cdot B' + A \cdot B + B \cdot B'$$

$$Y = A + A \cdot B' + A \cdot B + 0 \Rightarrow Y = A + A \cdot (B + B') \Rightarrow Y = A + A \cdot 1 \Rightarrow Y = A$$

Örnek.3 : $Y = (A' + B' + C' + D')'$ ifadesini sadeleştiriniz.

Çözüm.3: $Y = (A' + B' + C' + D')'$

$$Y = A'' \cdot B'' \cdot C'' \cdot D''$$

$$Y = A \cdot B \cdot C \cdot D$$

Örnek.4 : $Y = AB + BC + AC'$ ifadesini sadeleştiriniz.

Çözüm.4: $Y = AB + BC + AC'$

$$Y = AB (C + C') + BC + AC'$$

$$Y = ABC + ABC' + BC + AC'$$

$$Y = ABC + BC + ABC' + AC'$$

$$Y = BC (A + 1) + AC' (B + 1)$$

$$Y = BC + AC'$$

Örnek.5 : $Y = A (AB + C)$ ifadesini sadeleştiriniz.

Çözüm.5: $A \cdot (AB + C) = AAB + AC$

$$AAB + AC = AB + AC$$

$$AB + AC = A (B + C)$$

Örnek.6 : $Y = (B + AC)'$ ifadesini sadeleştiriniz.

Çözüm.6: $(B + AC)' = B' \cdot (AC)'$

$$B' \cdot (AC)' = B' \cdot (A' + B')$$

Ek.5.Diferansiyel Hesap, İntegral, Cebir, Diferansiyel Denklemler, Geometri, Trigonometri, Olasılık ve İstatistik alanlarında kullanılan temel özellikler, bağıntılar ve formüller.

Kitabımıza ek olarak hazırlanan bu bölümde, gerek kitapta yer alan konular ve gerekse diğer bilim dallarında yer alan belli başlı tanımlar, özellikler, özet bilgiler ve formüller verilmiştir. Bu ek bölümde Analiz, Cebir, Geometri, Diferansiyel, İntegral, Diferansiyel Denklemler, Analitik Geometri, Trigonometri, Logaritma, Fonksiyonlar ve benzeri Matematik dallarındaki temel tanımlar, özellikler, özet bilgiler ve formüllerin yanı sıra Mühendisliğin her branşında kullanılan temel bilgiler, Olasılık ve İstatistik dallarına ait 546 adet tanım,özellik,özet bilgi ve formülden oluşmuştur.

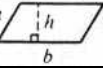
CEBİRSEL KURALLAR	1	Değişme Özelliği	Toplama	$a + b = b + a$
	2		Çarpma	$a.b = b.a$
	3	Birleşme Özelliği	Toplama	$a + (b + c) = (a + b) + c = (a + c) + b$
	4		Çarpma	$a.(b.c) = (a.b).c = (a.c).b = a.b.c$
	5	Dağılıma Özelliği		$a.(b + c) = a.b + a.c$
İŞARET KURALLARI	6	Toplama ve Çıkarma	$a + (- b) = a - (+ b) = a - b$	
	7		$a + (+ b) = a - (- b) = a + b$	
	8	Çarpma	$(+ a).(+ b) = (- a).(- b) = a.b$	
	9		$(+ a).(- b) = (- a).(+ b) = - (+ a).(+ b) = - a.b$	
	10	Bölme	$\frac{+ a}{+ b} = \frac{- a}{- b} = - \frac{- a}{+ b} = - \frac{+ a}{- b} = \frac{a}{b}$	
	11		$\frac{+ a}{- b} = \frac{- a}{+ b} = - \frac{- a}{- b} = - \frac{a}{b}$	
YÜZDELİKLER	12	Miktar = Temel x Oran		
	13	$\text{Yüzde Değişim} = \frac{\text{Yeni Değer} - \text{Esas Değer}}{\text{Esas Değer}} \times \%100$		
	14	$\text{YüzdeHata} = \frac{\text{Ölçülen Değer} - \text{BilinenDeğer}}{\text{BilinenDeğer}} \times \%100$		
	15	$\text{A'nın Yüzde karışımı} = \frac{\text{A'nın Miktarı}}{\text{KarışımMiktarı}} \times \%100$		
	16	$\text{YüzdeEtki} = \frac{\text{Çıkış}}{\text{Giriş}} \times \%100$		

İKİLİ SAYILAR	17	En büyük n bit ikili sayı		$2^n - 1$
	18	Toplama		$0 + 0 = 0$ $0 + 1 = 1$ $1 + 0 = 1$ $1 + 1 = 0$ eldeli toplama
	19	Çıkarma		$0 - 0 = 0$ $0 - 1 = 1$ eldeli çıkarma $1 - 0 = 1$ $1 - 1 = 0$
	20			$A-B=A+(-B)$
	21	Çarpma		$0 \times 0 = 0$ $0 \times 1 = 0$ $1 \times 0 = 0$ $1 \times 1 = 1$
	22	Bölme		$0 \div 0$ tanımsız $1 \div 0$ tanımsız $0 \div 1 = 0$ $1 \div 1 = 1$
İKİLİ SAYILAR	23	Ters alma	n bit x sayısının birinci tersi	$\left(2^n - 1\right) - x$
	24			Bir sayının birinci tersi 1' lerin 0, 0' ların 1 yapılmasıyla elde edilir.
	25		n bit x sayısının ikinci tersi	$\left(2^n - x\right)$
	26			Bir sayının ikinci tersi, birinci tersinin alınıp bulunan sayıya 1 ilave edilmesiyle elde edilir
	27	Negatif ikili sayılar		Eğer M pozitif ikili bir sayı ise $-M$, M sayısının ikinci tersidir.
ÜSLER	28	Tanım		$a^n = a.a.a.....a$ n adet a çarpımı
	29	Üs Alma Kuralları	Çarpım	$(x^a).(x^b) = x^{a + b}$
	30		Bölme	$\frac{x^a}{x^b} = x^{a - b}$
	31		Kuvvet	$(x^a)^b = x^{ab} = (x^b)^a$
	32		Çarpımın kuvveti	$(x.y)^n = x^n . y^n$
	33		Bölümün kuvveti	$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$
	34		0. üs	$x^0 = 1$
	35		Negatif üs	$x^{-a} = \frac{1}{x^a}$
	36		Kesirli üsler	$a^{1 / n} = \sqrt[n]{a}$
	37	$a^{p / q} = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p$		

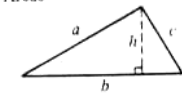
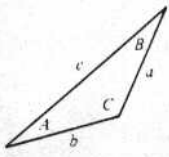
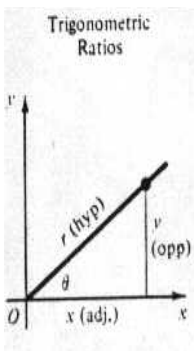
KÖKLER	38	Kök kuralları	Çarpımın kökü	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$	
	39		Bölümün kökü	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	
	40		Kuvvetin kökü	$\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}} = (\sqrt[p]{a})^q$	
ÖZEL ÇARPANLAR VE ÇARPIMLAR	41	İki terimliler	İki kare farkı	$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$	
	42		İki küp toplamı	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$	
	43		İki küp farkı	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$	
	44	Üç terimliler	Çarpanlara ayırma testi	Eğer $b^2 - 4ac$ tam kare ise $ax^2 + bx + c$ çarpanlarına ayrılabilir	
	45		Eğer a=1	$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$	
	46		Genel ikinci derece üç terimli	$acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$	
	47		Tam kare üç terimliler	$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$	
	48			$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$	
	49	Gruplayarak çarpanlarına ayırma		$ac + ad + bc + bd = (a + b)(c + d)$	
KESİRLER	50	Sadeleştirme	$\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$		
	51	Çarpma	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$		
	52	Bölme	$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$		
	53	Toplama ve çıkarma	Aynı paydalar	$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$	
	54		Farklı Paydalar	$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{bc}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd}$	
ORANTI	55	a:b=c:d orantısında	İçler çarpımı dışlar çarpımına eşittir		$ad = bc$
	56		Dışlar kendi arasında yer değiştirebilir		$d : b = c : a$
	57		İçler kendi arasında yer değiştirebilir		$a : c = b : d$
	58		İçler ile dışlar yer değiştirebilir		$b : a = d : c$
	59	Orta orantılı	Orantı	$a : b = b : c$	
			Geometrik ortalama	$b = \pm\sqrt{ac}$	
DEĞİŞİM	60	k= Orantı katsayısı	Doğru	$y \propto x$ yada $y = kx$	
	61		Ters	$y \propto \frac{1}{x}$ yada $y = \frac{k}{x}$	
	62		Bileşik	$y \propto x.w$ yada $y = k.x.w$	

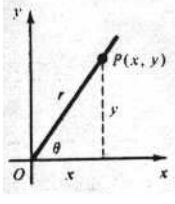
LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ	63	Cebirsel Çözüm	$a_1x + b_1y = c_1$ $a_2x + b_2y = c_2$		$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$ ve $y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$	burada $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$
	64		$a_1x + b_1y + c_1z = k_1$ $a_2x + b_2y + c_2z = k_2$ $a_3x + b_3y + c_3z = k_3$		$x = \frac{b_2c_3k_1 + b_1c_2k_3 + b_3c_1k_2 - b_2c_1k_3 - b_3c_2k_1 - b_1c_3k_2}{a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3}$ $y = \frac{a_1c_3k_2 + a_3c_2k_1 + a_2c_1k_3 - a_3c_1k_2 - a_1c_2k_3 - a_2c_3k_1}{a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3}$ $z = \frac{a_1b_2k_3 + a_3b_1k_2 + a_2b_3k_1 - a_3b_2k_1 - a_1b_3k_2 - a_2b_1k_3}{a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3}$	
	65	Bir Determinantın Değeri	İkinci Derece	$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$		
	66		Üçüncü derece	$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - (a_3b_2c_1 + a_1b_3c_2 + a_2b_1c_3)$		
	67		Minörler	Determinantta b elemanının işaretli minörü $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ ise $-\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}$		
	68			Bir determinantın değerinin bulmak için; 1. Herhangi bir satır veya sütun seçilip işaretli minörü hesaplanır.. 2. Bu satır veya sütundaki her bir eleman ile o elemanın işaretli minörü çarpılır. 3. Bu çarpımlar toplanarak determinantın değeri bulunur.		
	69		Cramer Kuralı	Herhangi bir değişkenin çözümü, paydası katsayılar determinanı, payı ise o değişkenin bulunduğu sütuna sabitler vektörü konularak elde edilen determinantın hesaplanması ile edilen kesrin değeridir.		
	70	İki denklem		$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$ ve $y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$		
	71	Üç denklem		$x = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\Delta}$ $y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & k_1 & c_1 \\ a_2 & k_2 & c_2 \\ a_3 & k_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\Delta}$ $z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & k_2 \\ a_3 & b_3 & k_3 \end{vmatrix}}{\Delta}$ Burada ; $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$		

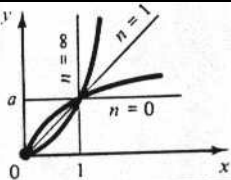
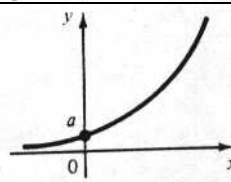
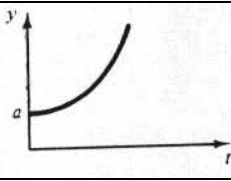
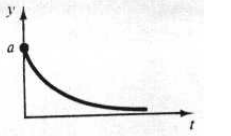
LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ	72	Determinantın Özellikleri	Sıfır satır veya sütun	Bir satırın (veya sütun) bütün elemanları 0 ise determinant değeri 0' dır.
	73		Eşit satırlar veya sütunlar	Eğer iki satır (veya sütun) eşitse determinant değeri 0' dır.
	74		Temel köşegen altındaki sıfırlar	Eğer temel köşegen altındaki elemanların hepsi sıfırsa determinantın değeri köşegen üzerindeki elemanların çarpımına eşittir.
	75		Satırlar ile sütunların yer değiştirmesi	Eğer satırlarla sütunları (veya sütunlarla satırları) yer değiştirirsek determinantın değeri değişmez.
	76		Satırlar veya sütunların yer değiştirmesi	İki satır (veya sütun) aralarında yer değiştirilirse determinantın işareti değişir.
	77		Bir sabit ile çarpım	Bir determinantın bir sabitle çarpımı o determinantın bütün elemanlarının o sayıyla çarpımı demektir.
	78		Bir satır veya sütunun bir katının diğerine ilave edilmesi	Bir satır (veya sütunun) elemanları bir çarpanla çarpılır ve diğer satır veya sütunun aynı konumdaki elemanlarına ilave edilirse determinantın değeri değişmez.
MATRİSLER	79	Toplama	Değişme özelliği	$A+B=B+A$
	80		Birleşme özelliği	$A+(B+C)=(A+B)+C=(A+C)+B$
	81		Toplama ve Çıkarma	$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+w & b+x \\ c+y & d+z \end{pmatrix}$
	82	Çarpma	Çarpılabilir Matrisler	A ve B iki matris olsun. AB çarpım matrisi ancak A matrisinin sütun sayısı B matrisinin satır sayısına eşit iken tanımlanır.
	83		Değişme Özelliği	$AB \neq BA$ Matris çarpımında değişme özelliği yoktur
	84		Birleşme Özelliği	$A(BC) = (AB)C = ABC$
	85		Dağılma Özelliği	$A(B+C) = AB + AC$
	86		Çarpımın boyutu	$(m \times p)(p \times n) = (m \times n)$
	87		Bir matrisin ve bir skalerin çarpımı	$k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$
	88		Bir sütun vektörü ve bir satır vektörünün skaler çarpımı	$\begin{pmatrix} 1 \times 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \times 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \times 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (ax + by)$
	89		Bir satır vektörü ve bir sütun vektörünün tensör çarpımı	$\begin{pmatrix} 2 \times 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \times 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \times 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & ay \\ bx & by \end{pmatrix}$
	90		Bir satır vektörü ve bir matrisin çarpımı	$\begin{pmatrix} 1 \times 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \times 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \times 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v & w \\ x & y & z \end{pmatrix} = (au + bx \quad av + by \quad aw + bz)$
	91		Bir sütun vektörü ve bir matrisin çarpımı	$\begin{pmatrix} 2 \times 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \times 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \times 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$

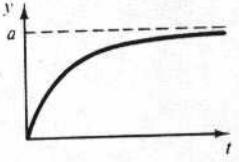
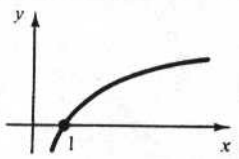
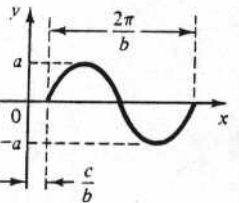
	92		İki matrisin çarpımı	$\begin{pmatrix} 2 \times 3 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \times 2 \\ u & x \\ v & y \\ w & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 2 \\ au + bv + cw & ax + by + cz \\ du + ev + fw & dx + ey + fz \end{pmatrix}$
	93		Bir matrisin tersi ile çarpımı	$\mathbf{AA}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{I}$
	94		Bir matrisin birim matris ile çarpımı	$\mathbf{AI}=\mathbf{IA}=\mathbf{A}$
	95	Denklemler sisteminin çözümleri	Bir denklem sistemin matris formu	$\mathbf{AX}=\mathbf{B}$
	96		Bir matrisin	1. Herhangi satırların değişimi 2. 0 olmayan bir sabit ile bu satırları çarpma 3. Bir satırın sabit çarpımının diğer satıra ilave edilmesi
	97		Birim matris metodu	$\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ formunun her iki tarafı $\mathbf{A}^{-1}$ ile çarpılarak $\mathbf{X}$ bilinmeyenler vektörü aşağıdaki gibi elde edilir.
	98		Ters matris yöntemiyle denklem sistemi çözümü	$\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$
	99	Genel form	$ax^2 + bx + c = 0$	
	100	Kuadratik form	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	
	101	Diskriminant	Eğer a,b ve c reel sayı ise	Eğer $b^2 - 4ac > 0$ gerçel iki farklı kök varsa Eğer $b^2 - 4ac = 0$ İki eşit kök varsa Eğer $b^2 - 4ac < 0$ Gerçel olmayan kökler
	102	n. derece polinom	$a_0x^n + a_1x^{n-1} + + a_{n-1}x + a_n$	
	103	Çarpan teoremi	Eğer $f(x)=0$ denkleminin kökü r ise x-r $f(x)$ polinomunun bir çarpanıdır; tersine x-r $f(x)$ polinomunun bir çarpanı ise r, $f(x)=0$ denkleminin bir köküdür.	
Kesilen doğrular	104	Kesilen iki doğrunun ters açıları eşittir.		
	105	Eğer iki paralel doğruyu üçüncü bir doğru keserse oluşan yondeş ve iç ters açılar eşittir.		
	106	Eğer iki doğru birçok paralel doğruyla kesilirse karşılıklı doğru parçaları orantılıdır.		
ÇOKGENLER	107		Kare	$\text{Alan} = a^2$
	108		Dikdörtgen	$\text{Alan} = a.b$
	109		Paralelkenar	$\text{Alan} = b.h$
	110		Eşkenar Dörtgen	$\text{Alan} = a.h$
	111		Yamuk	$\text{Alan} = \frac{(a + b).h}{2}$
	112		Çokgen	$\text{Açıların Toplamı} = (n - 2).180^\circ$

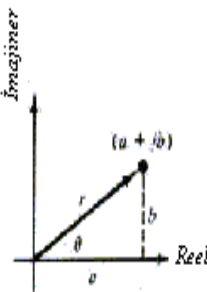
DAİRE VE ÇEMBER	113		Çevre = $2.\pi.r = \pi.d$	
	114		Alan = $\pi.r^2 = \frac{\pi.d^2}{4}$	
	115		Merkez açısı θ (radyan) = $\frac{s}{r}$	
	116		Kesit alanı = $\frac{rs}{2} = \frac{r^2\theta}{2}$	
	117		1 dönüş = 2π radyan = 360° $1^\circ = 60dak.$ 1 min = 60s	
	118		Bir dik üçgende	
	119		Bir çemberin teğetleri	AP teğeti OA yarıçapına diktir
	120			Teğet AP = Teğet BP OP APB açısını ortalar
	121		Kesişen kirişler	a.b = c.d
	122		Küp	$hacim = a^3$
	123			Yüzey Alanı = $6a^2$
	124		Dikdörtgen prizma	Hacim = $\ell.w.h$
	125			Yüzey Alanı = $2(\ell.h + \ell.w + h.w)$
	126		Herhangi bir silindir veya prizma	Hacim = (taban alanı).(yükseklik)
	127		Dik silindir veya prizma	Yanal alan = (Taban çevresi).(yükseklik)
	128		Küre	Hacim = $\frac{4}{3}.\pi.r^3$
	129			Yüzey Alanı = $4.\pi.r^2$
	130		Herhangi koni veya silindir	Hacim = $(1/3).(taban alanı).(yükseklik)$
	131		Dik dairesel koni veya düzgün piramit	Yanal Alan = $(1/2).(Taban çevresi) \times (yan yükseklik)$
	132		Herhangi koni veya düzgün piramit	$Hacim = \frac{h}{3}(A_1 + A_2 + \sqrt{A_1 A_2})$
	133		Dik dairesel koni veya düzgün piramit	Yanal alan = $\frac{S}{2} (taban çevrelerinin toplamı) = \frac{S}{2} (P_1 + P_2)$
	134		Katı benzer şekiller veya düzlemin karşılıklı boyutları orantılıdır.	

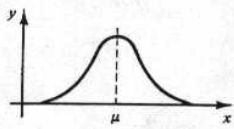
135		Benzer düzlem veya katı şekillerin alanları, herhangi iki karşılıklı boyutun oranının karesi ile orantılıdır.		
136		Benzer katı şekillerin hacimleri herhangi iki karşılıklı boyutun oranının küpü ile orantılıdır.		
137		$\text{Alan} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$		
138		Hero Formülü: $\text{Alan} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ burada $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$		
139		İç açılar toplamı	$A + B + C = 180^\circ$	
140		Sinüs teoremi	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$	
141		Kosinüs teoremi	$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C$	
142		Dış Aç	$\theta = A + B$	
143	Eğer bir üçgenin iki açısı diğer bir üçgenin iki açısına eşitse, bu iki üçgen benzerdir.			
144	Benzer üçgenlerin karşılıklı kenarları orantılıdır.			
145		Pisagor teoremi	$a^2 + b^2 = c^2$	
146		Sinüs	$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{\text{Karşı Dik Kenar}}{\text{Hipotenüs}}$	
147		Kosinüs	$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{\text{Komşu Dik Kenar}}{\text{Hipotenüs}}$	
148		Tanjant	$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{\text{Karşı Dik Kenar}}{\text{Komşu Dik Kenar}}$	
149		Kotanjant	$\cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{\text{Komşu Dik Kenar}}{\text{Karşı Dik Kenar}}$	
150		Sekant	$\sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{\text{Hipotenüs}}{\text{Komşu Dik Kenar}}$	
151		Kosekant	$\csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{\text{Hipotenüs}}{\text{Karşı Dik Kenar}}$	
152	Ters Bağlıntılar	$(a) \sin \theta = \frac{1}{\csc \theta}$	$(b) \cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}$	$(3) \tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}$
153		Bir dik üçgende hipotenüse ait yüksekliğin oluşturduğu iki üçgenden her biri diğerine ve ilk dik üçgene benzerdir.		
154	 A ve B tümlemler açıları	Eş fonksiyonlar	$(a) \sin A = \cos B$ $(b) \cos A = \sin B$ $(c) \tan A = \cot B$	$(d) \cot A = \tan B$ $(e) \sec A = \csc B$ $(f) \csc A = \sec B$
155	İki üçgenin eşliği	Karşılıklı birer kenarları ve ikişer açıları aynı olan üçgenler eştir. (A.K.A) (A.A.K)		
156		Karşılıklı ikişer kenarları ile bu kenarlar arasındaki açıları aynı olan üçgenler eştir. (K.A.K)		
157		Karşılıklı kenarları aynı olan üçgenler eştir. (K.K.K)		

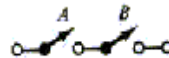
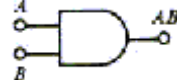
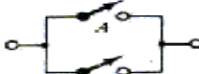
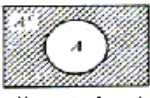
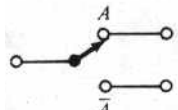
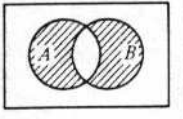
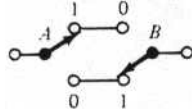
158		Kartezyen Form	$x = r \cos \theta$		
159			$y = r \sin \theta$		
160		Kutupsal Form	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$		
161			$\theta = \arctan \frac{y}{x}$		
162	Bölüm Bağıntıları	$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$			
163		$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$			
164	Pisagor Bağıntılar	$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$			
165		$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$			
166		$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$			
167	İki açı farkı veya toplamı	$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$			
168		$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$			
169		$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$			
170	İki kat yay formülleri	$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$			
171		(a) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$	(b) $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$	(c) $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$	
172		$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$			
173	Yarım açı formülleri	$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$			
174		$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$			
175		(a) $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$	(b) $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$	(c) $\tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$	
176	İki fonksiyonun farkı ve toplamı	$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$			
177		$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$			
178		$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$			
179		$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$			

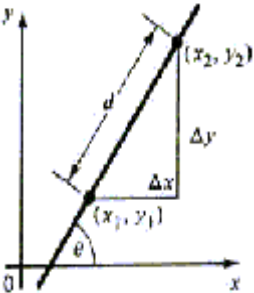
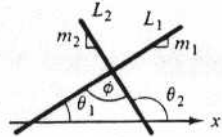
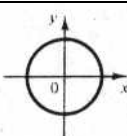
	180		$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta)$	
	181	İki Fonksiyonun Çarpımı	$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta)$	
	182		$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta)$	
	183	Ters trigonometrik fonksiyonlar	$\theta = \arcsin C = \arctan \frac{C}{\sqrt{1-C^2}}$	
	184		$\theta = \arccos D = \frac{\sqrt{1-D^2}}{D}$	
LOGARİTMA	185	Üstel formun Logaritmik ifadesi		Eğer, $\mathbf{b^x=y}$ ise $\mathbf{x=log_b y}$ olur. Terside doğrudur. ($y>0, b>0, b \neq 1$)
	186	Logaritma kuralları	Çarpımlar	$\log_b MN = \log_b M + \log_b N$
	187		Bölümler	$\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$
	188		Kuvvetler	$\log_b M^p = p \log_b M$
	189		Kökler	$\log_b \sqrt[q]{M} = \frac{1}{q} \log_b M$
	190		1'in logaritması	$\log_b 1 = 0$
	191		Taban ile üs aynı ise	$\log_b b = 1$
	192	Taban ile üs aynı iken kuvvet alma		$\log_b b^n = n$
	193	Taban değiştirme		$\log N = \frac{\ln N}{\ln 10} \cong \frac{\ln N}{2.3026}$
	194	Kuvvet Fonksiyon		$y = a.x^n$
	195	Üstel Fonksiyon		$y = a(b)^{nx}$
	196	Seri Açılımı	$b^x = 1 + x \ln b + \frac{(x \ln b)^2}{2!} + \frac{(x \ln b)^3}{3!} + \dots \quad (b>0)$	
	197	Üstel Büyüme		$y = a.e^{nt}$
	198		Yarılanma Süresi	$t = \frac{\ln 2}{n}$
	199			$y = a.e^{-nt}$

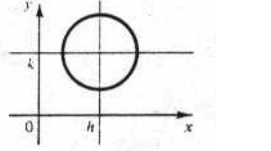
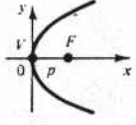
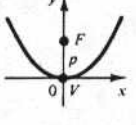
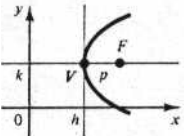
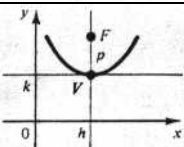
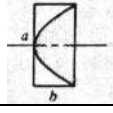
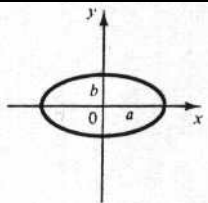
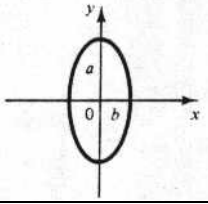
	200	Bir üst limitle üstel büyüme		$y = a(1 - e^{-nt})$
	201	Zaman sabiti	$T = \frac{1}{\text{Büyüme Oranı}}$	
	202	Seri Açılımı	$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$	
	203		$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$	
	204	Logaritmik fonksiyon		$y = \log_b x$ ($x > 0, b > 0, b \neq 1$)
	205	Seri Açılımı	$\ln x = 2a + \frac{2a^3}{3} + \frac{2a^5}{5} + \frac{2a^7}{7} + \dots$ burada $a = \frac{x-1}{x+1}$	
	206	Sinüs dalgası		$y = a \sin(bx + c)$
	207			Periyod = $\frac{360}{b} \text{ deg/cycle} = \frac{2\pi}{b} \text{ rad/cycle}$
	208			Frekans = $\frac{b}{360} \text{ cycle/deg} = \frac{b}{2\pi} \text{ cycle/rad}$
	209			Faz Kayması = $-\frac{c}{b}$
	210	Seri Açılımı	$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$	
	211		$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$	
	212	i nin kuvveti	$i = \sqrt{-1}, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, \dots$	
	213	Kartezyen Form	$a + ib$	
	214		Toplamlar	$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$
	215		Farklar	$(a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d)$
	216		Çarpımlar	$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$
	217		Bölme	$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$

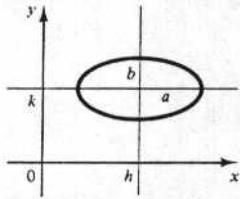
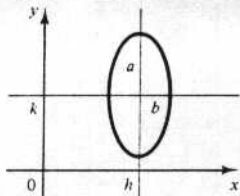
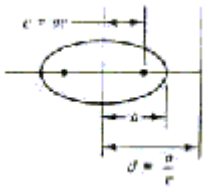
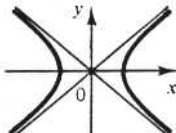
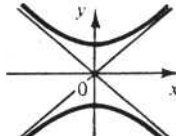
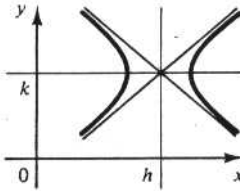
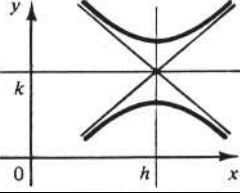
218		Trigonometrik Form	$z = a + ib = r(\cos \theta + i \sin \theta)$	
219			$a = r \cos \theta$	
220			$b = r \sin \theta$	
221			$r = \sqrt{a^2 + b^2}$	
222			$\theta = \arctan \frac{b}{a}$	
223		Kutupsal Form	$z = r \angle \theta = a + ib$	
224			Çarpma	$(r_1 \angle \theta_1) \cdot (r_2 \angle \theta_2) = (r_1 \cdot r_2 \angle (\theta_1 + \theta_2))$
225			Bölme	$\frac{(r_1 \angle \theta_1)}{(r_2 \angle \theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} \angle (\theta_1 - \theta_2)$
226			Üsler ve Kökler	$(r \angle \theta)^n = r^n \angle n\theta$
227		Üstel Form	Euler Formülü	$re^{j\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta)$
228			Çarpma	$r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$
229			Bölme	$\frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$
230			Üsler ve Kökler	$(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$
231	Aritmetik Dizi Ortak fark=d	İndirgeme Formülü	$a_n = a_{n-1} + d$	
232		Genel Terim	$a_n = a + (n-1)d$	
233		Terimler Toplamı	$S_n = \frac{n(a + a_n)}{2}$	
234			$S_n = \frac{n[2a + (n-1)d]}{2}$	
235	Geometrik Dizi Ortak oran=r	İndirgeme Formülü	$a_n = ra_{n-1}$	
236		Genel Terim	$a_n = ra^{n-1}$	
237		Terimler Toplamı	$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$	
238			$S_n = \frac{a - ra_n}{1 - r}$	
239		Sonsuz Toplam	$S = \frac{a}{1 - r}$ burada $ r < 1$	

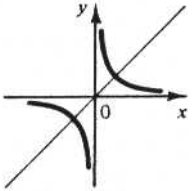
	240	Binom Açılımı	$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \dots + b^n$	
	241	Genel Terim	$r. \text{ terim} = \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} a^{n-r+1} b^{r-1}$	
	242	Binom Serisi	$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \dots$ burada $ a > b $	
	243		$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots$ burada $ x < 1$	
	244	Merkezi Yoğunluk Ölçüleri	Aritmetik Ortalama	$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$
	245		Medyan	Bir seride tek sayıda terim varsa en ortadaki terim, seride çift terim varsa ortadaki iki terimin aritmetik ortalaması medyana verir.
	246		Mod	Bir seride en çok tekrarlanan veya gözlenen terim o serinin modudur.
	247	Dağılım Ölçüleri	Değişim Aralığı	Bir serideki en büyük değer ile en küçük değer arasındaki farka değişim aralığı denir.
	248		Varyans (s^2)	$s^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}$
	249		Standart Sapma (s)	Standard sapma, varyansın pozitif kareköküdür.
	250	Olasılık	Bir olayın olma olasılığı	$P(A) = \frac{A \text{ olayının eleman sayısı}}{\text{Bütün olayın eleman sayısı}}$
	251		Bağımsız İki olayın birlikte olma olasılığı	$P(A, B) = P(A)P(B)$
	252		Bağımsız ikiden fazla olayın birlikte olma olasılığı	$P(A, B, C, \dots) = P(A)P(B)P(C) \dots$
	253		Ayrık olmayan iki olayın birleşiminin olasılığı (A veya B olayı)	$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A, B)$
	254		Ayrık iki olayın birleşiminin olasılığı (A veya B olayı)	$P(A + B) = P(A) + P(B)$
	255	Gauss Dağılımı		$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2 / 2\sigma^2}$
	256	Standart Hata	Ortalamanın standart hatası	$SE_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$
	257		Standart sapmanın hatası	$SE_s = \frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$

BOOLEAN CEBİRİ VE KÜMELER				Doğruluk Tablosu	Venn Diyagramı	Anahtar Diyagram	Lojik Kapılar																																																								
258	259	260	261	Boolean Cebiri	AND	<table><tr><td>A</td><td>B</td><td>A · B</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>  kesişim $A \cap B = \{x : x \in A, x \in B\}$  	A	B	A · B	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	OR	<table><tr><td>A</td><td>B</td><td>A + B</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>  Birleşim $A \cup B = \{x : x \in A \text{ or } x \in B\}$ 	A	B	A + B	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	NOT	<table><tr><td>A</td><td>$\bar{A}$</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr></table>  A'nın tümleyeni $A^c = \{x : x \in U, x \notin A\}$  	A	$\bar{A}$	0	1	1	0	EXOR	<table><tr><td>A</td><td>B</td><td>A ⊕ B</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>  $A \oplus B = \{x : x \in A \text{ or } x \in B, x \notin A \cap B\}$  	A	B	A ⊕ B	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0
					A	B	A · B																																																								
					0	0	0																																																								
					0	1	0																																																								
1	0	0																																																													
1	1	1																																																													
A	B	A + B																																																													
0	0	0																																																													
0	1	1																																																													
1	0	1																																																													
1	1	1																																																													
A	$\bar{A}$																																																														
0	1																																																														
1	0																																																														
A	B	A ⊕ B																																																													
0	0	0																																																													
0	1	1																																																													
1	0	1																																																													
1	1	0																																																													
262	Boolean cebirinin özellikleri	Değişme özelliği	AND	OR																																																											
		$AB \equiv BA$	$A + B \equiv B + A$																																																												
263		Sınırlılık özelliği	$A \cdot 0 \equiv 0$	$A + 1 \equiv 1$																																																											
264		Birim özellik	$A \cdot 1 \equiv A$	$A + 0 \equiv A$																																																											
265		Idempotent Özelliği	$AA \equiv A$	$A + A \equiv A$																																																											
266		Ters işlem	$A \cdot \bar{A} \equiv 0$	$A + \bar{A} \equiv 1$																																																											
267		Birleşme özelliği	$A(BC) \equiv (AB)C$	$A + (B + C) \equiv (A + B) + C$																																																											
268		Dağılma özelliği	$A(B + C) \equiv AB + AC$	$A + BC \equiv (A + B)(A + C)$																																																											
269			$A(\bar{A} + B) \equiv AB$	$A + \bar{A} \cdot B \equiv A + B$																																																											
270		Yutma Kuralı	$A(A + B) \equiv A$	$A + (AB) \equiv A$																																																											
271		DeMorgan Kuralı	$\overline{A \cdot B} \equiv \bar{A} + \bar{B}$	$\overline{A + B} \equiv \bar{A} \cdot \bar{B}$																																																											
272		Üs alma kuralı	$\overline{\overline{A}} \equiv A$																																																												

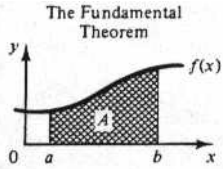
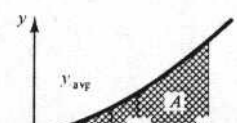
ANALİTİK GEOMETRİ	273		Uzunluk Formülü	$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$		
	274		Eğim (m)	$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$		
	275			$m = \tan \theta$ $0 \leq \theta < 180^\circ$		
	276		DOĞRU DENKLEMİ	Genel Form	$Ax + By + C = 0$	
	277			x-eksenine Paralel	$y = b$	
	278			y-eksenine Paralel	$x = a$	
	279			Standart Form	$y = mx + b$	
	280			İki noktası belli	$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	
	281			Bir noktası ve eğimi belli	$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$	
	282			Eksen form	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$	
	283			Kutupsal Form	$r \cos(\theta - \beta) = p$	
	284			L_1 ve L_2 paralelse		$m_1 = m_2$
	285			L_1 ve L_2 dikse		$m_1 = -\frac{1}{m_2}$
	286			L_1 ve L_2 doğruları arasındaki açı		$\tan \phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$
287	KONİKLER	İkinci derece eğrilerin genel denklemi(Konikler)	$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$			
288		Eksenlerin dönüşümü	Bir eğrinin eksenlerinin dönüşümü veya kaydırılması (Öteleme) : (h,k) noktasına eksenleri ötelemek,x-eksenini h kadar sola ve y-eksenini k kadar aşağı doğru kaydırmaktır.			
289		Dışmerkezlilik	$e = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$			
290			e=0 ise Çember 0< e < 1 ise Elips e = 1 ise Parabol e > 1 ise Hiperbol			
291		Bir koniğin tanımı	$PF = e \cdot PD$			
292		Konikler için kutupsal denklem	$r = \frac{ke}{1 - e \cos \theta}$			
293		Çember:Sabit bir noktadan eşit uzaklıktaki noktaların kümesi				
294	ÇEMBER		Standart Form	$x^2 + y^2 = r^2$		

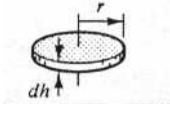
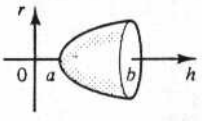
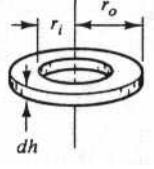
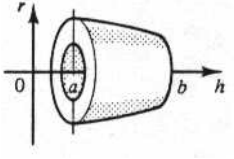
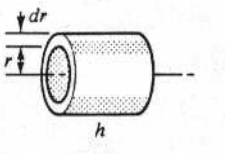
295				$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
296		Genel Form		$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$
297		Parabol: Bir düzlemde sabit bir nokta (Odak) ile sabit bir doğruya (Doğrultman) eşit uzaklıktaki noktalar kümesi		
298			Standart Form	$y^2 = 4px$
299				$x^2 = 4py$
300				$(y - k)^2 = 4p(x - h)$
301				$(x - h)^2 = 4p(y - k)$
302		Genel Form		$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ or $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$
303		Odaklar arası uzaklık		$L = 4p $
304		Alan		$\text{Alan} = \frac{2}{3}ab$
305		Elips: F ve F' sabit noktalarına (odaklar) uzaklıkları toplamı sabit ve büyük eksenin uzunluğuna (2a) eşit noktalar kümesi (PF + PF' = 2a)		
306	ELİPS		Standart Form	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $a > b$
307	ELİPS			$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ $a > b$

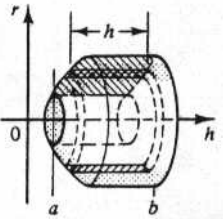
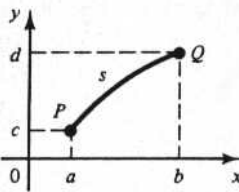
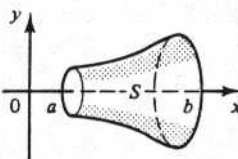
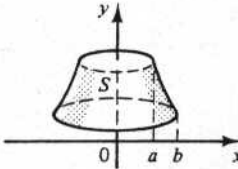
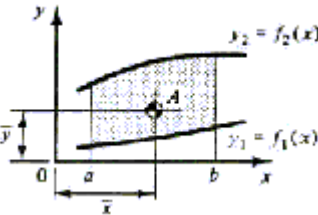
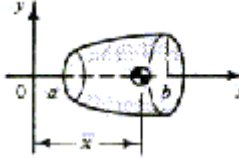
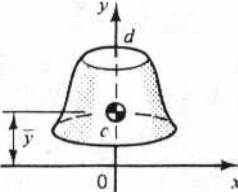
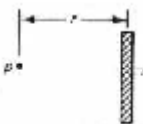
308				$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ $a > b$
309				$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ $a > b$
310		Genel Form		$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ $A \neq C, \text{ ama aynı işaretli}$
311		Merkezin odağa uzaklığı	$c = \sqrt{a^2 - b^2}$	
312		Odaklar arası uzaklık	$L = \frac{2b^2}{a}$	
313			(Dış merkezlilik) $e = \frac{a}{c} = \frac{c}{b}$	
314		Alan = πab		
315		Hiperbol: F ve F' sabit noktalarına (odaklar) uzaklıkları farkı sabit ve 2a noktalar kümesi (PF - PF' = 2a)		
316	HİPERBOL			$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
317				$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$
318				$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$
319	HİPERBOL			$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
320		Genel Form	$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ $A \neq C, \text{ A ve C farklı işaretli}$	

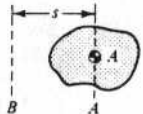
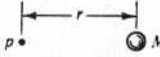
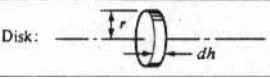
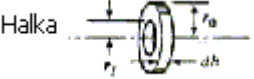
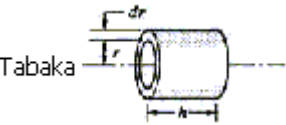
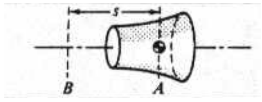
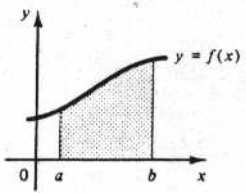
321		Merkezin odağı uzaklığı	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$
322		Asimptotların eğimi	Yatay Eksen $Eğim = \pm \frac{b}{a}$
323			Düşey Eksen $Eğim = \pm \frac{a}{b}$
324		Özkiriş uzunluğu	$L = \frac{2b^2}{a}$
325			Eksenler 45° döndürülürse; $xy = k$
326		Limit Notasyonu	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$
327		Apsisler-Ordinatlar farkı	$\Delta x = x_2 - x_1, \Delta y = y_2 - y_1$
328		Türevin Tanımı	$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ $= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(y + \Delta y) - y}{\Delta x}$
329		Zincir Kuralı	$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$
330	TÜREV	Sabitin türevi	$\frac{d(c)}{dx} = 0$
331		Kuvvet fonksiyonunun türevi	$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$
332		Bir sabitle bir fonksiyonun çarpımının türevi	$\frac{d(cu)}{dx} = c \frac{du}{dx}$
333		x'in kuvvetinin c katının türevi	$\frac{d}{dx} cx^n = cnx^{n-1}$
334		Toplamanın türevi	$\frac{d}{dx} (u + v + w) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx}$
335		u'nun kuvvetinin c katının türevi	$\frac{d(cu^n)}{dx} = cnu^{n-1} \frac{du}{dx}$
336		Çarpımın türevi	$\frac{d(uv)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$
337		Üçlü çarpım türevi	$\frac{d(uvw)}{dx} = uv \frac{dw}{dx} + uw \frac{dv}{dx} + vw \frac{du}{dx}$
338		N terimin çarpım türevi	N terimin her biri, kendi türevi ile diğer (N-1) terimin çarpımından oluşur ve toplam terim sayısı N tane dir.
339		Bölümün türevi	$\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$

	340			$\frac{d(\sin u)}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}$
	341			$\frac{d(\cos u)}{dx} = -\sin u \frac{du}{dx}$
	342			$\frac{d(\tan u)}{dx} = \sec^2 u \frac{du}{dx}$
	343			$\frac{d(\cot u)}{dx} = -\csc^2 u \frac{du}{dx}$
	344			$\frac{d(\sec u)}{dx} = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$
	345			$\frac{d(\csc u)}{dx} = -\csc u \cot u \frac{du}{dx}$
	346			$\frac{d(\sin^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx} \quad -1 < u < 1$
	347			$\frac{d(\cos^{-1} u)}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx} \quad -1 < u < 1$
	348			$\frac{d(\tan^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$
	349			$\frac{d(\cot^{-1} u)}{dx} = \frac{-1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$
	350			$\frac{d(\sec^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx} \quad u > 1$
	351			$\frac{d(\csc^{-1} u)}{dx} = \frac{-1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx} \quad u > 1$
	352			$(a) \frac{d}{dx}(\log_b u) = \frac{1}{u} \log_b e \frac{du}{dx}$ $(b) \frac{d}{dx}(\log_b u) = \frac{1}{u \ln b} \frac{du}{dx}$
	353			$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$
	354			$\frac{d}{dx} b^u = b^u \frac{du}{dx} \ln b$
	355			$\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}$
	356		Maksimum ve Minimum Noktalar	Maksimum ve Minimum noktaları bulmak için birinci türev alınıp sıfıra eşitlenerek elde edilen denklem çözülür. Bu denklemin çözümü olan x değerlerine sabit noktalar denir ve bu noktalar ekstremum (maksimum yada minimum) adaydır.

357		Birinci Türev Testi	$f'(x_0) = 0$ olsun.Eğer, x_0 noktasında birinci türev işaret değiştirirse, x_0 noktası ekstremum noktasıdır.	
358		İkinci Türev Testi	Eğer, $f'(x_0)=0$ iken x_0 noktasında: $f''(x_0) > 0$ ise noktası minimum $f''(x_0) < 0$ ise noktası maksimum noktasıdır. $f''(x_0) = 0$ ise test başarısız	
359		Büküm Noktaları	$f''(x_0)=0$ olsun. Eğer, x_0 noktasında ikinci türev işaret değiştirirse x_0 noktası büküm noktasıdır.	
360		Newton Metodu	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	
361		Diferansiyel (y'nin)	$dy = f'(x) dx$	
362		Diferansiyel ile yaklaşık hesap	$\Delta y \cong \frac{dy}{dx} \Delta x$	
363		Belirli İntegral	$\int F'(x)dx = F(x) + c$	
364			$\int f(x).dx = F(x) + c \quad \text{ve} \quad f(x)=F'(x)$	
365			$A = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$	
366		Riemann Toplamları ile İntegral Tanımı	$A = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x = \int_a^b f(x)dx$	
367		Belirli İntegralin Özellikleri	$\int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$	
368			$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$	
369			$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$	
370			$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$	
371	Yaklaşık İntegral		Orta Nokta Metodu	$A \cong \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x$ burada; $f(x_i^*)$, i.dilimin yüksekliğidir.

	372			Ortalama Ordinat Metodu	$A \cong y_{\text{ort}} (b - a)$
	373			Yamuk Kuralı	Dilim genişliği eşit değilse; $A \cong \frac{1}{2}[(x_1 - x_0)(y_1 + y_0) + (x_2 - x_1)(y_2 + y_1) + \dots + (x_n - x_{n-1})(y_n + y_{n-1})]$
	374				Dilim genişliği eşitse, $h = x_1 - x_0$: $A \cong h[\frac{1}{2}(y_0 + y_n) + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}]$
	375			Parabolik Formül	$A = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$
	376			Simpson Kuralı	$A \cong \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 4y_{n-1} + y_n)$
	377	Dönel Cisimlerin Hacimleri	Disk Metodu		Hacim = $dV = \pi r^2 dh$
	378				$V = \pi \int_a^b r^2 dh$
	379		Halka Metodu		$dV = \pi(r_o^2 - r_i^2) dh$
	380				$V = \pi \int_a^b (r_o^2 - r_i^2) dh$
	381		Tabaka Metodu		$dV = 2\pi r h dr$

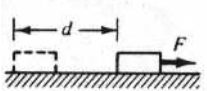
382				$V = 2\pi \int_a^b rh \, dr$
383	Yay Uzunluğu			$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx$
384				$s = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \, dy$
385	Yüzey Alanı			x-ekseni; $S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx$
386				y-ekseni; $S = 2\pi \int_c^d x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \, dy$
387	Ağırlık ve Kütfe Merkezi			$\bar{x} = \frac{1}{A} \int_a^b x(y_2 - y_1) \, dx$
388				$\bar{y} = \frac{1}{2A} \int_a^b (y_1 + y_2)(y_2 - y_1) \, dx$
389				x-ekseni; $\bar{x} = \frac{\pi}{V} \int_a^b xy^2 \, dx$
390				y-ekseni; $\bar{y} = \frac{\pi}{V} \int_c^d yx^2 \, dy$
391				$I_p = Ar^2$

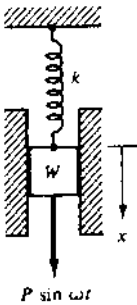
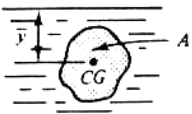
392					$I_x = \frac{1}{3} \int y^3 dx$
393					$I_y = \int x^2 y dx$
394					Kutupsal: $I_0 = I_x + I_y$
395					Dönme yarıçapı $r = \sqrt{\frac{I}{A}}$
396					Paralel Eksen Teoremi $I_B = I_A + As^2$
397					$I_P = Mr^2$
398					$dI = \frac{m\pi}{2} r^4 dh$
399					$dI = \frac{m\pi}{2} (r_o^4 - r_i^4) dh$
400					$dI = 2\pi m r^3 h dr$
401					Disk Metodu: $I = \frac{m\pi}{2} \int_a^b r^4 dh$
402					Shell(Tabaka) Metodu: $I = 2\pi m \int r^3 h dr$
403					Paralel Eksen Teoremi $I_B = I_A + Ms^2$
404					Ortalama Ordinatt Formülü: $y_{ort} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$
405					Etkin (Efektif) Değer: $rms = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x)]^2 dx}$

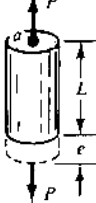
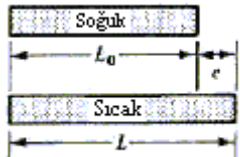
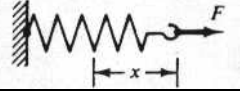
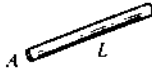
406	1.MERTEBE DİFERANSİYEL DENKLEMLER	Değişkenlerine Ayrılabilen		$f(y) dy = g(x) dx$	
407		İntegral Yöntemi			
408					
409					
410					
411					Homojen D.D $M dx + N dy = 0$ $y=u.x$ konarak bulunur.
412		Lineer D.D		Form	$y' + Py = Q$
413				Integral Çarpanı	$R = e^{\int P dx}$
414				Çözüm	$ye^{\int P dx} = \int Qe^{\int P dx} dx$
415	2.MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER	HOMOJEN D.D	Form	$ay'' + by' + cy = 0$	
416			Karakteristik Denklem	$ar^2 + br + c = 0$	
			Karakteristik Denklemin Kökleri Çözüm		
417			Çözüm Formu	Reel ve eşit değil	$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$
418				Reel ve eşit	$y = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}$
419				Kompleks	$(a) y = e^{ax} (C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$ veya $(b) y = C e^{ax} \sin(bx + \phi)$
420		HOMOJEN OLMAYAN	Form	$ay'' + by' + cy = f(x)$	
421			Genel Çözüm	$y = y_c + y_p$ Homojen Kısımın Çözümü Sağ Taraf Çözümü	
422	Bernoulli Denklemi			$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$ Burada; $(z = y^{1-n})$ dönüşümü yapılır.	
423	Laplace Dönüşümü			Tanım	$\ell[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$
424				Ters Laplace	$\ell^{-1}[F(s)] = f(t)$

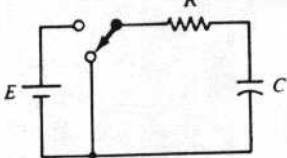
	425	Nümerik Çözümler	Euler Metodu	$x_q = x_p + \Delta x$ $y_q = y_p + m_p \Delta x$	
	426		Değiştirilmiş Euler Metodu	$x_q = x_p + \Delta x$ $y_q = y_p + \left(\frac{m_p + m_q}{2} \right) \Delta x$	
	427		Runge-Kutta Metodu	$x_q = x_p + \Delta x$ $y_q = y_p + m_{ort} \Delta x$ $m_{ort} = \left(\frac{1}{6} \right) (m_p + 2m_r + 2m_s + m_q)$ $m_p = f'(x_p, y_p)$ $m_r = f' \left(x_p + \frac{\Delta x}{2}, y_p + m_p \frac{\Delta x}{2} \right)$ $m_s = f' \left(x_p + \frac{\Delta x}{2}, y_p + m_r \frac{\Delta x}{2} \right)$ $m_q = f'(x_p + \Delta x, y_p + m_s \Delta x)$	
	428	Kuvvet Serileri	Notasyon		$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$
	429		Yakınsaklık testleri	Limit Testi	$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$
	430			Kısmi toplamlar testi	$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$
	431			Oran testi	$\text{Eğer } \lim_{n \rightarrow \infty} \left \frac{u_{n+1}}{u_n} \right $ (a) 1' den küçükse, seri yakınsaktır. (b) 1' den büyükse, seri iraksaktır (c) 1' e eşitse, test edilemez.
	432		Mac-Laurent Serisi	$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$	
	433		Taylor Serisi	$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$	
	434			n. terimden sonra kalan terim	$R_n = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(c)$ c, a ile x arasında

	435	Fourier Serileri		$f(x) = a_0 / 2 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \dots + a_n \cos nx + \dots$ $+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \dots + b_n \sin nx + \dots$
	436		Periyod 2π	$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$
	437			$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$
	438			$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$
	439			$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \frac{\pi x}{L} + a_2 \cos \frac{2\pi x}{L} + a_3 \cos \frac{3\pi x}{L} + \dots$ $+ b_1 \sin \frac{\pi x}{L} + b_2 \sin \frac{2\pi x}{L} + b_3 \sin \frac{3\pi x}{L} + \dots$
	440		Periyod $2L$	$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx$
	441			$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$
	442			$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$
	443	Simetrik dalga şekli	Tek ve çift fonksiyonlar	(a) Tek fonksiyonların fourier serilerine açılımları yalnız sinüslü terimlerden oluşur. (sabit yoktur) (b) Çift fonksiyonların fourier serilerine açılımları yalnız kosinüslü terimlerden oluşur. (sabit vardır)
	444		Yarım dalga simetri	Bir dalganın fourier dönüşümleri yalnızca tek harmoniklere sahipse yarım dalga simetri vardır
	A1	Karışım A, B, C gibi maddelerden oluşsun		Toplam karışım miktarı= A' nin miktarı + B' nin miktarı +.....
	A2			Her karışımın son değeri= Başlangıç miktarı + eklenen miktar – çıkarılan miktar
	A3	İki karışım		Karışım 1'deki A'nın son değeri + Karışım 2'deki A'nın değeri
	A4	Akış miktarı		Akış miktarı = akış oranı x akma zamanı $A=QT$
	A5	Yapılan iş = iş oranı x çalışma süresi		

	A6			Sabit kuvvet	$\dot{I}ş = \text{Kuvvet} \times \text{Yol} = F.d$	
	A7			Değişken kuvvet	$\dot{I}ş = \int_a^b F(x) dx$	
FİNANS	A8	Birim maliyet		Birim maliyet = $\frac{\text{Toplam maliyet}}{\text{Birimlerin sayısı}}$		
	A9	Faiz: t= yıl, a = ana para, n=faiz oranı, y=biriktirilmiş miktar		Basit faiz	$y = a(1 + nt)$	
	A10			Yıllık bileşik faiz	$y = a(1 + n)^t$	
	A11			Bileşik faiz (m) zaman/yıl	$y = a(1 + \frac{n}{m})^{mt}$	
STATİK	A12			Bir noktanın momenti	$M_a = Fd$	
	A13	Denge denklemleri (Newton' un birinci kanunu)		Dikey kuvvetler toplamı = 0		
	A14			Yatay kuvvetler toplamı = 0		
	A15			Bir noktadaki momentler toplamı = 0		
	A16			Sürtünme katsayısı	$\mu = \frac{f}{N}$	
HAREKET DENKLEMLERİ	A17	Lineer Hareket	Düzgün hareket (Sabit Hız)	Uzaklık = oran X time $D = Rt$		
	A18		Düzgün ivmelenme (Sabit ivme a, Başlangıç hızı v_0)	t zamanda yer değiştirme	$s = v_0t + \frac{at^2}{2}$	
	A19			t anındaki hız	$v = v_0 + at$	
	A20		Serbest düşme için, $a=g=9.807 \text{ m/s}^2 = 32.2 \text{ ft/s}^2$	Newton' nun İkinci Kanunu	$F = ma$	
	A21		Düzgün olmayan hareket	Ortalama hız	Ortalama Hız= Toplam alınan yol / Toplam süre	
	A22			Yer değiştirme	$s = \int v dt$	
	A23			Ani hız	$v = \frac{ds}{dt}$	
					$v = \int a dt$	
	A24			Ani ivme	$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$	
	A25					
	A26	Dönme	Düzgün hareket	Açısal yer değiştirme	$\theta = wt$	
	A27			r yarıçapında noktanın lineer hızı	$v = wr$	
	A28		Düzgün olmayan hareket	Açısal yer değiştirme	$\theta = \int w dt$	

MEKANİK TİTREŞİMLER	A29			Açısal Hız	$w = \frac{d\theta}{dt}$
	A30				$w = \int \alpha dt$
	A31			Açısal ivme	$\alpha = \frac{dw}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$
	A32	Lineer dairesel hareket	x ve y bileşenleri	Yer değiştirme	(a) $x = \int v_x dt$ (b) $y = \int v_y dt$
	A33			Hız	(a) $v_x = \frac{dx}{dt}$ (b) $v_y = \frac{dy}{dt}$
	A34				(a) $v_x = \int a_x dt$ (b) $v_y = \int a_y dt$
	A35			İvme	(a) $a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ (b) $a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$
MEKANİK TİTREŞİMLER	A36	 Sürtünme katsayısı = c	Serbest salınımlar (P = 0)	Basit harmonik hareket	$x = x_0 \cos w_n t$
	A37			Basit harmonik hareket	Sönümsüz açısal hız $w_n = \sqrt{\frac{kg}{W}}$
	A38				Doğal frekans $f_n = \frac{w_n}{2\pi}$
	A39			Eksik Sönümlü (Underdamped)	$x = x_0 e^{-at} \cos w_d t$
	A40				Sönümlü Açısal Hız $w_d = \sqrt{w_n^2 - \frac{c^2 g^2}{W^2}}$
	A41			Aşırı Sönümlü (overdamped)	$x = C_1 e^{m_1 t} + C_2 e^{m_2 t}$
	A42		Kuvvet Titreşimleri	Maksimum Sapma	$x_0 = \frac{P_g}{W \sqrt{4a^2 w^2 + (w_n^2 - w^2)^2}}$
	A43	Yoğunluk		Yoğunluk = Kütle / Hacim	
	A44	Kütle		Kütle = Ağırlık / Yerçekimi ivmesi	
	A45	Özgül Ağırlık		SG = Madde Yoğunluğu / Su Yoğunluğu	
	A46	 Basınç	Bir yüzeydeki toplam kuvvet	Kuvvet = Basınç X Yüzey	
	A47		Suyun içindeki bir yüzeye etkiyen kuvvet	$F = \delta \int y dA$	
	A48			$F = \delta y A$	

	A49	PH	pH = -10 log konsantrasyon	
SICAKLIK	A50	Celsuis derecesi (C) ile Fahrenheit derecesi arasındaki ilişki (F)	$C = \frac{5}{9}(F - 32)$	
	A51		$F = \frac{9}{5}C + 32$	
MATERİYAL KUVVETLERİ	A52	 Gerilme yada sıkıştırma	Normal gerilim	$a = \frac{P}{a}$
	A53		Uzama	$\varepsilon = \frac{e}{L}$
	A54		Modül elastikiyeti ve Hooke Kanunu	$E = \frac{PL}{ae}$
	A55			$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$
	A56	Sıcaklıkla genleşme  Sıcaklık değişimi = Δt Sıcaklık genleşme katsayısı = α	Uzama	$e = \alpha L \Delta t$
	A57		Yeni uzunluk	$L = L_0(1 + \alpha \Delta t)$
	A58		Birim uzama katsayısı	$\varepsilon = \frac{e}{L} = \alpha \Delta t$
	A59		Gerilme	$\sigma = E\varepsilon = E\alpha \Delta t$
	A60		Gerilme kuvveti	$P = a\sigma = aE\alpha \Delta t$
	A61		Bir yaya etki eden kuvvet	$F = \text{yay katsayısı} \times \text{uzunluk} = kx$
	A62	Ohm Kanunu	Akım = $\frac{\text{Gerilim}}{\text{Direnç}}$ $I = \frac{V}{R}$	
	A63	Direnç Eşdeğerleri	Seri	$R = R_1 + R_2 + R_3 + \dots$
	A64		Paralel	$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots$
	A65	Bir direncin gücü	$Güç = P = VI$	
	A66		$P = \frac{V^2}{R}$	
	A67		$P = I^2 R$	
	A68	Kirchhoff Kanunu	Çevreler	Bir kapalı çevredeki gerilimlerin toplamı sıfırdır.
	A69		Düğümmler	Bir düğüme giren ve çıkan akımların toplamı sıfırdır.
	A70	Sıcaklıkla direncin değişimi	$R = R_1[1 + \alpha(t - t_1)]$	
	A71	Bir kablunun direnci 	$R = \frac{\rho L}{A}$	

A72	Kapasitör Eşdeğerleri		Seri	$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots$
			Paralel	$C = C_1 + C_2 + C_3 + \dots$
	A74	V geriliminde C kapasitesinin yükü		$Q = CV$
	A75	Alternatif Gerilimi	Sinusoidal Form	Kompleks Form
			$v = V_m \cos(\omega t + \phi_1)$	$V = V_m \angle \phi_1$
	A76	Alternatif Akım	$I = I_m \cos(\omega t + \phi_1)$	$I = I_m \angle \phi_2$
	A77	Periyod	$P = \frac{2\pi}{\omega} \text{ saniye}$	
	A78	Frekans	$f = \frac{1}{P} = \frac{\omega}{2\pi} \text{ hertz}$	
	A79	Akım	$i = \frac{dq}{dt}$	
	A80	Yük	$q = \int i \, dt \text{ coulombs}$	
A81	Kapasitör	Ani Akım	$i = C \frac{dv}{dt}$	
A82		Ani Gerilim	$v = \frac{1}{C} \int i \, dt \text{ volt}$	
A83		Dolma yada boşalma anında akım		$i = \frac{E}{R} e^{-t/RC}$
A84		Boşalma anında Gerilim		$V = E e^{-t/RC}$
A85		Ani akım	$i = \frac{1}{L} \int V(t) \, dt \text{ [amper]}$	
A86		Ani Gerilim	$V = L \frac{di}{dt}$	
A87		Dolma anında akım	$i = \frac{E}{R} (1 - e^{-Rt/L})$	

	A88	Dolma yada boşalma anında gerilim	Seri RL Devresi		$V = Ee^{-Rt/L}$
	A89			Rezonans Frekansı	$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{LC}}$
	A90			Dirençsiz: Seri LC Devresi:	$i = \frac{E}{\omega_n L} \sin \omega_n t$
	A91				$i = \frac{E}{\omega_d L} e^{-at} \sin \omega_d t$
	A92			Sönümsüz	$\omega_d = \sqrt{\omega_n^2 - \frac{R^2}{4L^2}}$
	A93			Sönümlü	$i = \frac{E}{2i\omega_d L} [e^{(-a+i\omega_d)t} - e^{(-a-i\omega_d)t}]$
	A94			Endüktif Reaktans	$X_L = \omega L$
	A95			Kapasitif Reaktans	$X_C = \frac{1}{\omega C}$
	A96			Toplam Reaktans	$X = X_L - X_C$
	A97			Empedans	$ Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$
	A98			Faz açısı	$\phi = \arctan \frac{X}{R}$
	A99			Empedansın kompleks formu	$Z = R + iX = Z \angle \phi = Ze^{i\phi}$
	A100			Kararlı hal akımı	$i_{ss} = \frac{E}{Z} \sin(\omega t - \phi)$
	A101	AC için ohm kanunu	$V = ZI$		
	A102	Desibel cinsinden kazanç yada kayıp	$G = 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1} \text{ dB}$		