19. BÖLÜM

DİZİLER VE SERİLER

19.1.Dizinin Tanımı

$A \neq \emptyset$ olmak üzere, f: $N^+ \rightarrow$ A şeklinde tanımlı fonksiyona **dizi** denir. **f (n) = a_n**ifadesine, dizinin **genel terimi** veya **n . terimi** denir. **A =R** ise, diziye **reel sayı dizisi** denir. O halde, **tanım kümesi pozitif tamsayılar** (sayma sayıları) olan her fonksiyona **dizi** denir. Diziler değer kümelerine göre adlandırılır.Bir reel sayı dizisi,

f = {(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), ... , (n, a_n), ... } biçiminde veya**(a_n)** = (a_1,a_2, a_3,……,a_n) şeklinde gösterilir. (a_n) şeklindeki gösterilişte her terim sıralıdır, elemanların yerleri değiştirilemez. Burada,

f(1) = a_1: dizinin birinci terimi,

f(2) = a_2: dizinin ikinci terimi,

f(3) = a_3: dizinin üçüncü terimi,

………………………………………………

f(n) = a_n: dizinin n. terimi veya genel terimidir.

19.1.Örnek: f: N+ $\rightarrow$R; f (n) = n^2 fonksiyonu,

(f(1) , f(2)........................... , f (n) ,........) =(1,4,9,… .n^2)dizisini belirtir. Bu dizide genel terim n^2, yani diziyi belirten fonksiyondur.

19.2.Dizilerde İşlemler

(a_n) ve (b_n) birer reel sayı dizisi ve k bir reel sayı olsun.

1. (a_n) ve (b_n) dizilerinin toplamı veya farkı:

(a_n)±(b_n) = (a_n±b_n)dir.

2. k reel sayısı ile (a_n) dizisinin çarpımı:

k.(a_n)=(k.a_n)dir.

3.(a_n) ve (b_n) dizilerinin çarpımı: **(a_n).(b_n) = (a_n. b_n)**dir.

4.(a_n) dizisinin (b_p) dizisine bölümü:

$\forall$n **e** N^+ için $b_n \neq 0$ olmak üzere,

$$\frac{(\mathbf{a_n})}{(\mathbf{b_n})} = \left(\frac{\mathbf{a_n}}{\mathbf{b_n}}\right)$$

19.3. Dizi Çeşitleri

19.3.1. Sabit Dizi

$c \in R$, $n \in N^+$ için $\mathbf{a_n = c}$ ise, $(a_n) = (c,c,c,c,...)$ dizisine **sabit dizi** denir. Yani bütün elemanları birbirine eşit olan diziye **sabit dizi** denir.

19.3.2. Eşit Dizi

$(a_n) = (b_n)$ birer dizi olsun.

$\forall n \in N^+$ için $a_n = b_n$ ise (a_n) ve (b_n) dizilerine eşit diziler denir. $(a_n) = (b_n)$ biçiminde gösterilir.

19.3.3. Sonlu Dizi

$k \in N^+$, $B = \{1,2,3,\ldots\ldots,k\}$ ve $B \subset N^+$ olsun, $f: B \rightarrow R$ fonksiyonuna veya bu fonksiyonun görüntü kümesindeki sayıların $(f(1), f(2), f(3),..., f(k))$ sıralanışına k terimli **sonlu dizi** denir.

19.3.4. Alt Dizi

$\forall n \in N^+$ için, $k_n \in N^+$ ve1 << $k_2 < k_3 < \ldots < k_n < k_{n+1}$ olmak üzere, (a_n) dizisinden n yerine k_n yazılarak elde edilen (a_k) dizisine, (a_n) dizisinin **alt dizisi** denir. $(a_k) \subset (a_n)$ biçiminde gösterilir.

1. Her dizi kendisinin alt dizisidir, $(a_n) \subset (a_n)$

2. (a_k) alt dizisinin bütün terimleri, (a_n) dizisinin bir terimidir.

19.3.5. Monoton Diziler

Bir (a_n) dizisinde $\forall n \in N^+$ için,

1. $a_n < a_{n+1} \Leftrightarrow$ (a_n) monoton artandır.

2. $a_n > a_{n+1}$, $\Leftrightarrow$ (a_n) monoton azalandır.

3. $a_n \leq a_{n+1} \Leftrightarrow$ (a_n) azalmayandır.

4. $a_n \geq a_{n+1} \Leftrightarrow$ (a_n) artmayandır.

5. $a_n = a_{n+1} \Leftrightarrow$ (a_n) sabit dizidir.

Böyle artan ya da azalan dizilere **monoton diziler** denir.

19.3.5.1. Monotonluğun Bulunması

Bir (a_n) dizisinin monotonluğu araştırılırken;

1. Dizinin terimleri,

$(a_n) = (a_1,a_2,a_3 \ldots.a_n,\ldots)$biçiminde yazılarak monotonluğu incelenebilir.

2. $A(n) = a_{n+1} - a_n$farkı bulunur.

$\forall n \in N^+$ için $A(n) > O$ ise dizi monoton artan, $A(n) < O$ ise dizi monoton azalan, $A(n) = O$ ise dizi sabit dizidir.

3. (a_n) pozitif terimli bir dizi olmak üzere,

$B(n)=\frac{a_{n+1}}{a_n}$ oranı bulunur. $\forall n \in N^{+}$ için;

B(n) > 1 ise dizi monoton artan,

B(n)< 1 ise dizi monoton azalan,

B(n) = 1 ise dizi sabit dizidir.

Bir $(a_n)=(\frac{an+b}{cn+d})$ dizisinin monotonluğu araştırılırken;

(a,b,c,d ∈ R)

1. Paydanın kökü $-\frac{d}{c} > 1$ ise dizi ne artan nede azalandır. Dizi monoton değildir.

2. Paydanın kökü $-\frac{d}{c} < 1$ ise dizi monotondur.

I.ad - bc > O ise dizi monoton artan,

II.ad-bc < O ise dizi monoton azalan,

III.ad-bc = O ise dizi sabit dizidir.

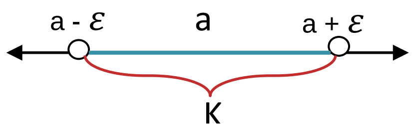
19.4. Dizilerin Yakınsaklığı ve Iraksaklığı

19.4.1.Komşuluk Kavramı

a ∈R ve ε>0 olmak üzere,

(a - ε, a + ε) açık aralığındaki bütün reel sayıların kümesine **a sayısının** ε **(epsilon) komşuluğu** denir. Bu komşuluk (K);

K = {x : | x - a|<ε, x∈R} şeklinde tanımlanır.



a'nın ε komşuluğundaki noktaların kümesi;

K = { x : |x - a | <ε, x ∈R } iken

a'nın ε komşuluğu dışındaki noktaların kümesi,

K' = { x : | x - a| > ε, x ∈R } olur.

Buna göre, bir (a_n dizisinin kaç teriminin a'nın ε komşuluğu dışında olduğunu bulmak için,

x = a_n olacağından;

$|x-a| \geq \varepsilon \Longrightarrow |a_n - a| \geq \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan kaç tane n sayma sayısı olduğu bulunur.

19.4.2.Genişletilmiş Reel Sayılar Kümesinde Sonsuza Iraksama

Her reel sayıdan küçük olarak düşünülen - ∞ ve her reel sayıdan büyük olarak düşünülen + ∞ iki ideal sayı olsun.

Reel sayılar kümesine -∞ ve +∞ sembollerinin katılmasıyla elde edilen sayı kümesine yani,

R ∪ {- ∞ ,+ ∞ } = [- ∞ ,+ ∞] aralığına **genişletilmiş reel sayılar kümesi** denir.

19.4.3.Genişletilmiş Reel Sayılar Kümesindeki İşlemler

1. $\forall n \in R$ için,

$(+\infty) \pm a = +\infty$, $(-\infty) \pm a = -\infty$

2. $\forall n \in R$ için, $\frac{a}{+\infty} = 0$

3. $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$

4. $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$

5. $(+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$

6. $(-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$

7. $(+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty$

8. $(-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty$

9. $\forall n \in N^+$ için, $(+\infty)^n = +\infty$

10. $\forall n \in N^+$ için, $(-\infty)^n = \begin{cases} +\infty, & \text{n çift ise} \\ -\infty, & \text{n tek ise} \end{cases}$

11. $\forall n \in N^+$ için, $\sqrt[n]{+\infty} = +\infty$

12. $n \in N^+$ ve n tek sayı $\Rightarrow$, $\sqrt[n]{-\infty} = -\infty$

13. **I.** $a \in R^+$

$a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$ ve $\frac{\pm\infty}{a} = \pm\infty$

II. $a \in R^-$

$a \cdot (\mp\infty) = \mp\infty$ ve $\frac{\pm\infty}{a} = \mp\infty$

19.4.4.Bir Dizinin Hemen Hemen Her Terimi

Bir (a_n) dizisinin sonlu sayıdaki terimleri hariç, geriye kalan sonsuz sayıdaki terimlerine bu dizinin hemen hemen her terimi denir.

19.4.5.Bir Dizinin Yakınsaklığı, Iraksaklığı

(a_n) bir dizi, a seçilmiş bir sayı ve ε istenildiği kadar küçük seçilebilen pozitif bir reel sayı olsun. $\forall \varepsilon \in N^+$ için (a_n) dizisinin hemen hemen her terimi a'nın ε komşuluğunda kalıyorsa **(a_n) dizisi a sayısına yakınsıyor** denir.

(a_n) dizisi bir a sayısına yakınsıyorsa (a_n) dizisine **yakınsak dizi,** yakınsak olmayan dizilere de **ıraksak dizi** denir.

19.5.Dizinin Limiti

Bir **(a_n)** dizisi, sabit bir a ∈R sayısına yakınsıyorsa, yani (a_n) dizisinin sonlu sayıdaki terimleri hariç diğer bütün terimleri (hemen hemen her terimi) bir a reel sayısının εkomşuluğunda bulunuyorsa a sayısına **(a_n) dizisinin limiti** denir, (a_n) dizisinin limiti a ise, **(a_n) → a** veya **lim(a_n)=a** veya $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = a$ biçimlerinden birisi ile gösterilir.

Yakınsak bir dizinin **yakınsadığı sayı,** bu **dizinin limitidir.**

19.5.1.Dizilerin Limiti ile ilgili Özellikler

(a_n) ve (b_n) yakınsak diziler olsun.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(c) = c$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(k.a_n) = k \cdot \lim\limits_{n\to\infty}(a_n)$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n) \pm \lim\limits_{n\to\infty}(b_n)$
4. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n.b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n).\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)$
5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)}{\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)(\neq 0)}$
6. $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}) \to a$ olsun.

   m>n $\Rightarrow a = 0$

   m=n $\Rightarrow a = \frac{a_n}{b_m}$

   m<n $\Rightarrow a = \pm\infty$

veya

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}\right) = \lim_{n\to\infty}(\frac{a_n x^n}{b_m x^m})$$ şeklinde limit hesaplanabilir.

7. $|a| < 1 \;\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a^n) = 0$

   $a > 1 \;\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a^n) = +\infty$

   $a \leq -1 \;\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a^n)$dizisinin limiti yoktur.

   a >b olmak üzere; $\lim\limits_{n\to\infty}(a^n \pm b^n) = \lim\limits_{n\to\infty}(a^n)$

8. $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = 0$

   $\lim\limits_{n\to\infty} g(n) = \pm\infty$ ve

   $\lim\limits_{n\to\infty}[f(n) \cdot g(n)] = a$ ise

   $\lim\limits_{n\to\infty}[1 + f(n)]^{g(n)} = e^a$

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$$

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{kn} = e^k$$

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{a}{bn+c})^{kn+p} = e^{\frac{ak}{b}}$$

9. $\lim_{n\to\infty}[\log(a_n)] = \log[\lim_{n\to\infty}(a_n)]$

10. $\lim_{n\to\infty}|a_n| = \left|\lim_{n\to\infty}(a_n)\right|$

11. $\lim_{n\to\infty}[(a_n)^t] = \lim_{n\to\infty}[(a_n)]^t$

12. c > 0 olmak üzere,

$\lim_{n\to\infty}(c^{a_n}) = c^{\lim_{n\to\infty}(a_n)}$dir.

13. $\forall n \in N^+$ için $a_n \neq 0$ ve $\lim(a_n)$=0 ise,

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{\sin(a_n)}{a_n}) = \lim_{n\to\infty}(\frac{a_n}{\sin(a_n)}) = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\tan(a_n)}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{\tan(a_n)}\right) = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin(a_n)}{\tan(a_n)}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\tan(a_n)}{\sin(a_n)}\right) = 1$$

14. $\lim_{n\to\infty}(a_n) = L$ ise,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n} = L$$

15. $a > 0$ için,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{an^2+bn+c}\right) = \lim_{n\to\infty}\left((\sqrt{a})(n+\frac{b}{2a})\right)$$

$a > 1$ ve $n\to\infty$olmak üzere,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n!}{n^n}\right) = 0 \qquad \lim_{n\to\infty}(\frac{a^n}{n!}) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^a}{a^n}\right) = 0 \qquad \lim_{n\to\infty}(\frac{a^n}{n^a}) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin(an)}{an}\right) = 0 \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cos(an)}{an}\right) = 0$$

Sonuç: n → +∞ için;Büyükten küçüğe doğru sıralanmış biçimi;

$n^n, n!, a^n, n^a, an, \sin(an)$ veya $\cos(an)$ olan fonksiyonların toplamından (veya farkından) meydana gelmiş olan bir dizinin limiti hesaplanırken, bu ifadelerden en büyük olanının yanında diğerlerinin hepsi ihmal edilebilir.(k_n) artan bir pozitif tam sayı dizisi olmak üzere, bir (a_n) dizisi L sayısına yakınsıyorsa, (a_{k_n}) alt dizisi de L ye yakınsar.

19.6.Sınırlı Diziler

Bir (a_n) dizisinde;

1. $\forall n \in N^+$ için $m \leq a_n$ olacak biçimde bir **m** $\in$ R **varsa;** (a_n) dizisine **alttan sınırlı dizi,** m ye bir alt sınır, **alt sınırların en büyüğüne** de **en büyük alt sınır (EBAS)** denir.
2. $\forall n \in N^+$ için $a_n \leq M$ olacak biçimde bir **M** $\in$ R **varsa;** (a_n) dizisine **üstten sınırlı dizi,** m'ye bir üst sınır, **üst sınırların en küçüğüne** de **en küçük üst sınır (EKÜS)** denir.
3. Alttan ve üstten sınırlı bir diziye **sınırlı dizi** denir.

19.6.1.Sınırlı Dizinin Özellikleri

1. Yakınsak her dizi sınırlıdır. Bu ifadenin karşıtı doğru olmayabilir. (Sınırlı olup yakınsak olmayan dizi olabilir.)
2. Monoton ve yakınsak bir dizinin ilk terimi ile limitinden büyük olanı EKÜS, küçük olanı EBAS' tır.
3. EKÜS ve EBAS dizinin elemanı olmayabilir.
4. EKÜS dizinin elemanı ise, bu elemana dizinin en büyük elemanı denir.
5. EBAS dizinin elemanı ise, bu elemana dizinin en küçük elemanı denir.

19.7.Özel Diziler

19.7.1.Aritmetik Dizi

Ardışık iki terimi arasındaki fark sabit olan dizilere aritmetik dizi denir.

Buna göre, $\forall n \in N^+$ve $d \in R$ olmak üzere $a_{n+1} - a_n = d$ eşitliğini sağlayan (a_n) dizisi bir aritmetik dizidir. d sayısına dizinin ortak farkı denir.

$a_2=a_1+d$

$a_3=a_2+d$

$a_4= a_3+ d$

………………...

$a_{n+1}= a_n+ d$

Aritmetik dizinin genel terimi;

$a_n = a_1 + (n - 1)d$'dir.

19.7.1.1.Aritmetik Dizinin Özellikleri

- p <n olmak üzere, bir aritmetik dizinin genel terimi;

$a_n = a_p + (n - p)d$ ve ortak farkı; $d = \frac{a_n - a_p}{n-p}$ 'dir.

$d > 0$ ise dizi artan,

$d < 0$ ise dizi azalan ve $d = 0$ ise dizi sabit dizidir.

Benzer şekilde bir aritmetik dizinin herhangi iki terimi $a_p$ve a_k arasında, $a_p - a_k = (p - k).d$ bağıntısı vardır.

- Bir aritmetik dizide her terim kendisinden eşit uzaklıkta bulunan terimlerin aritmetik ortalamasıdır. $\forall n \in N^+$ ve $k < n$ için;

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2} \; (k \in N, n \geq 1)$$

- Sonlu bir aritmetik dizide, baştan ve sondan eşit uzaklıkta bulunan terimler toplamı birbirine eşittir.

  Sonlu bir aritmetik dizi $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ olsun,

  $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \ldots = a_p + a_{n-p+1}$ olur.

- a ve b arasına bir aritmetik dizi oluşturacak biçimde, n tane sayı yerleştirilirse elde edilen n + 2 terimli aritmetik dizinin ortak farkı;

  $d = \frac{b-a}{n+1}$ olur.

- Bir aritmetik dizide ilk n terim toplamı, S_n ile gösterilirse,

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

veya $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ dir.

19.7.2.Geometrik Dizi

Ardışık terimlerinin oranı sabit olan dizilere geometrik dizi denir.

$$\forall n \in N^+ \text{ için}, \frac{a_{n+1}}{a_n} = r \; (a_n \neq 0)$$

olan diziler, geometrik dizidir, r sayısına ortak çarpan denir.

$a_2 = a_1 \cdot r$

$a_3 = a_2 . r = a_1 . r^2$

$a_4 = a_3 . r = a_1 . r^3$

Genel terimi; $a_n = a_1 . r^{n-1}$ dir.

Ayrıca genel terimi $\mathbf{a_n = a_{n-p} . r^p}$ şeklinde de yazılabilir.

19.7.2.1.Geometrik Dizinin Özellikleri

- Bir (a_n) dizisi geometrik dizi ise:

1.Bir geometrik dizide, iki terim a_k ve a_p ise bu dizinin ortak çarpanı $p > k$ için;

$r = \sqrt[p-k]{\frac{a_p}{a_k}}$ dır.

Benzer şekilde, $a_p = a_k . r^{p-k}$ dır.

- $\forall n, k \in N^+$ için,

$a_n^2 = a_{n-k} \cdot a_{n+k}$ veya

$|a_n| = \sqrt{a_{n-k} \cdot a_{n+k}}$ $(1 \leq k < n)$

Herhangi bir terim, kendisinden eşit uzaklıktaki terimlerin geometrik ortalamasıdır.

- Sonlu bir geometrik dizide baştan ve sondan eşit uzaklıktaki terimlerin çarpımları birbirine eşittir.

(a_n) geometrik dizi olsun. O halde,

$a_1 \cdot a_n = a_2 \cdot a_{n-1} = a_3 \cdot a_{n-2} = ...$ şeklindedir.

- Bir geometrik dizide ilk n terim çarpımı,

$T_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_n$ veya $T_n = \sqrt{(a_1 . a_2 . a_3 ..... a_n)^n}$ dir.

- a >b olmak üzere, a ve b pozitif reel sayıları arasına geometrik dizi oluşturacak şekilde n tane terim yerleştirilirse, oluşan n + 2 terimi i geometrik dizinin ortak çarpanı,

$$r = \sqrt[n+1]{\frac{a}{b}}$$

- Ortak çarpanı r olan (a_n) geometrik dizisinin ilk n teriminin toplamı S_n ise,

$S_n = a_1 \cdot \frac{1-r^n}{1-r}$ $(r \neq 1)$dir.

19.8. Seriler

Matematikçiler Arşimed'ten (M.Ö. 287 – M.Ö.212) bu yana hesaplamalar için serileri kullanmışlardır. Ancak 19. yüzyılın sonlarına kadar serilerin nasıl doğru bir şekilde yönetileceği hakkında fikirleri oldukça azdır. Bu durum Norveçli matematikçi Niels Abel'in (1802 - 1829) aşağıdaki sözlerinden de anlaşılmaktadır:

"Eğer çok basit durumları ihmal ederseniz, matematik bir tekil sonsuz seriden ibaret değil, titizlikle tespit edilen bütün serilerin toplamıdır. Diğer bir deyişle, matematiğin en önemli parçaları bir temel olmadan ayakta durmaktadır.

Iraksak seriler bir şeytan icadıdır ve herhangi bir ispatı onlara dayandırmak utanç verici bir durumdur. Bir kişi bu serileri kullanarak sonucu kendi istediği yöne çekebilir. Bu yüzden bu seriler çok sayıda safsata ve paradoks üretebilir......."

Günümüzde serilerin anlaşılması ve kullanılması çok daha olumlu bir algı ile karşılanmaktadır.

19.8.1.Tanım:$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ dizisi verildiğinde,

$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ sonsuz toplamına seri denir .Seriler $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ biçiminde gösterilir. Bu notasyon ilk olarak İsviçreli matematikçi Leonhard Euler (1707-1783) tarafından kullanılmıştır. Burada, a_n serinin genel terimidir.

$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ dizisinin ilk n teriminin toplamı;

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

…………..

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 \ldots\ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ olsun.S_n sayısına $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin n. kısmi toplamı denir.$(S_n) = (a_1,\ a_1 + a_2,\ a_1 + a_2 + a_3, \ldots,\ a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_n)$dizisine de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin **kısmi toplamlar dizisi** denir.$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi (Sn) olsun.

1. (S_n) dizisi yakınsak ise, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak seri;
2. (S_n) dizisi ıraksak ise, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi ıraksak seridir.

19.8.2.Yakınsak Bir Serinin Değeri

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ yakınsak serisinde, $S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$

$\lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) = \lim_{n\to\infty} (S_n)$ olur.

$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n)'$ dir.

a_n serisi yakınsak bir seri ise, serinin değeri (toplamı), kısmi toplamlar dizisinin limitine eşittir. Serinin bu S değerini bulmak yakınsak serilerde mümkündür.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$serisi yakınsak ise, $\lim_{n\to\infty} (a_n) = 0$ olur.

Örnek.19.1: Genel terimi $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ olan serinin toplamını bulunuz.

Çözüm.19.1: Serinin yaklaşık değerini değil, gerçek değerini bulacağız. Genel terimden, n=1,2,… koyarak; $S_n = \dfrac{1}{1.2.3} + \dfrac{1}{2.3.4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$

Yazılabilir. Fakat ; $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{n(n+1)} - \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$

olduğu dikkate alınırsa kısmi toplam (sağdaki ifadede n=1,2,… koyarak)

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4}\right) + ... + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

olur. Her bir parantezli ifadede bulunan ikinci terim, sonra gelen parantezli ifadenin ilk terimiyle aynı ve zıt işaretli olduğundan;

$$S_n = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

yazılabilir. Bunun limiti bize serinin toplamını verir:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right] = 1/4$$

Örnek.19.2: Kısmi toplamı $S_n = \dfrac{n}{2n+1}$ olan seriyi bulunuz.

Çözüm.19.2: Kısmi toplamı yazalım:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n$$

a_{n-1}'e kadar olan toplama S_{n-1} dersek buradan;

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

yazılabilir. Verilen S_n ifadesinden S_{n-1}'i bulmak için bu ifadede n yerine $n-1$ konur:

$$S_{n-1} = \frac{n-1}{2(n-1)+1} = \frac{n-1}{2n-1}$$

Bunları a_n ifadesinde yerlerine koyalım:

$$a_n = \frac{n}{2n+1} - \frac{n-1}{2n-1} = \frac{1}{4n^2-1}$$

Şu halde aranan seri; $\sum_{n=1} \dfrac{1}{4n^2-1}$ olur. Böylece seriyi bulmuş olduk. Serinin toplamı, S_n kısmi toplamından bulunur. $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n+1} = 1/2$

Örnek.19.3: $S_n = n^2/(n^2+1)$ olan seriyi ve toplamını bulunuz.

Çözüm.19.3: Yukarıdaki örnekte olduğu gibi hareket edeceğiz:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n^2}{n^2+1} - \frac{n^2-2n+1}{n^2-2n+2} = \frac{2n-1}{(n^2+1)(n^2-2n+2)}$$

Şu halde aranan seri ; $\sum_{n=1} \frac{2n-1}{(n^2+1)(n^2-2n+2)}$ olur. Serinin toplamı şudur:

$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$$

Örnek.19.4: $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + ... = \sum_{n=1} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ serisinin toplamını bulunuz.

Çözüm.19.4: Genel terimi aşağıdaki şekilde yazıp S_n kısmi toplamını basit kesirler yöntemiyle bulalım:

$$a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + ... + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - ... + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \quad = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}$ Görülüyor ki seri yakınsak ve toplamı 1/2 olarak bulunur.

19.9.Serilerin Yakınsaklık Testleri

Serilerin yakınsaklığı serideki sonsuz terimin toplamının ne olduğu ,seri terimlerinin işareti, serinin artan veya azalan bir yapıda olması ve serinin literatürde bilinen hangi karakteristik seriye (Harmonik, teleskobik, Riemann vb.) benzediği ile ilgilidir. Bu nedenle bir serinin yakınsaklığı için çok sayıda test vardır. Bazen tek bir test ile serinin yakınsaklığı belirlenirken bazen de birden fazla test ile serinin yakınsaklığı veya ıraksaklığı ortaya konulur.

19.9.1.Limit Testi

Teorem.19.1: Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak ise , $\lim_{n\to\infty}(a_n) = 0$ dır,

İspat.19.1:Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak ise , serinin S_n kısmi toplamlar dizisi için

$\lim_{n\to\infty} S_n = S$ ve $\lim_{n\to\infty} S_{n+1} = S$ yazarız. O halde,

$a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}(S_{n+1} - S_n) = S - S = 0$

olur ki bu durum $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin yakınsaması halinde , $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ olması demektir.

Not Bu teoremin tersi doğru değildir. Eğer $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ise ,$\sum a_n$ serisine yakınsak diyemeyiz. Yakınsak veya ıraksak olabilir. Yani verilmiş bir seri için , $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ olması , bizi bir sonuca götürmez.Örneğin,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serilerinin her ikisinin de genel terimi $n \to \infty$ halinde sıfırdır.Fakat , ileride gösterileceği üzere, ilk seri harmonik seri olup ıraksak ve ikinci seri p-serisi olup yakınsaktır.

Aşağıdaki teorem, bir önceki teoremin çok önemli bir sonucudur. Pratikte, bir serinin karakterini belirlerken, ilk olarak bu teoreme bakarız.

19.9.2. Iraksaklık Testi

Teorem.19.2:Eğer $\lim\limits_{k\to\infty} a_k \neq 0$ (veya ∞) ise $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi ıraksaktır.

Örnek.19.5:$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3n+4}{5n-7}$ serisi yakınsak mıdır?

Çözüm.19.5: Gerçekten, serinin genel terimi $a_n = \frac{3n+4}{5n-7}$ olup,

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{3n+4}{5n-7} = \frac{3}{5} \neq 0$ olup verilen seri, Teorem 19.2. gereğince ıraksaktır.

Örnek.19.6: $\sum_{k=1}^{\infty}\left[\sqrt{3n+2} - \sqrt{2n}\right]$ serisi yakınsak mıdır?

Çözüm.19.6: Gerçekten, serinin genel terimi $a_n = \sqrt{3n+2} - \sqrt{2n}$ olup,

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{3n+2} - \sqrt{2n}\right] = [\infty - \infty]$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+2)-2n}{\sqrt{3n+2}+\sqrt{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{\sqrt{3n+2}+\sqrt{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\,(1+(2/n))}{\sqrt{(3n+2)/n}+\sqrt{2}} = \infty$$

olup verilen seri, Teorem 19.2. gereğince $\sum_{k=1}^{\infty}\left[\sqrt{3n+2} - \sqrt{2n}\right]$ serisi ıraksaktır.

Örnek.19.7: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^2+n}$ serisi yakınsak mıdır?

Çözüm.19.7: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-1/n^2}{1+1/n} = 1 \neq 0$

olduğundan Teorem 19.2. gereğince; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^2+1}$ serisi ıraksaktır.

Örnek.19.8: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2^{1/n}$ serisi yakınsak mıdır?

Çözüm.19.8: $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{1/n} = 2^0 = 1$ olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n 2^{1/n}$ limiti yoktur.

Böylece, Teorem 19.2. gereğince; $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2^{1/n}$ serisi ıraksaktır.

Örnek.19.9: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{3^n+4^n}$ serisi yakınsak mıdır?

Çözüm.19.9: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5^n}{3^n+4^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(5/4)^n}{(3/4)^n+1} = \infty$olur. $\left\{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0 \text{ and} \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^n = \infty\right\}$

Böylece, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{3^n+4^n}$ serisi ıraksaklık testine göre ıraksaktır.

19.9.3.Teleskopik Toplam

Bazı toplamlar, farkların toplanması ile oluşturulur. Böyle bir toplama, teleskopik toplam diyoruz. Örneğin, b_0, b_1, b_2 , ….,b_n , (n+1) tane sayı ve k = 1,2,…,n için $a_k = b_k - b_{k-1}$ ise, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = (b_1 - b_0)+(b_2 - b_1)+\ldots+(b_{n-1} - b_{n-2})+(b_n - b_{n-1}) =(b_n - b_0)$ olur.

Bazen verilmiş bir serinin toplamını bulmaya çalışırken, serinin kısmi toplamını bir teleskopik toplam şeklinde yazarak sonuca gidebiliriz.

Örnek.19.10:$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+3k+2} = 1$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.19.10:$\frac{1}{k^2+3k+2} = \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$ olduğundan basit kesirler yöntemiyle,

$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

$S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$

$S_n = 1 - \frac{1}{n+2}$ bulunur.Buna göre , $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+2}\right) = 1$olup;

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+3k+2} = 1$ elde edilir.

Bu tip seriler, teleskopik serilerdir. Teleskopik serilerde dikkatli olmak gerekir. Zira, her zaman birbirini götüren terimler ardışık olarak gelmeyebilir. Bir serinin genel terimini basit kesirlere ayırmak da, serinin teleskopik olmasını gerektirmez. Örneğin,

$\sum_{k+1}^{\infty} \frac{3(k+1)}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k+1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{k+2}\right)$ =serisi, bir teleskopik seri değildir.

Örnek.19.11:$\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{2}{k^2-1}\right) = \frac{3}{2}$olduğunu gösteriniz.

Çözüm.19.11:$\frac{2}{k^2-1} = \frac{2}{(k-1)(k+1)} = \frac{2}{k-1} - \frac{2}{k+1}$ olduğundan,

$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k^2-1} = \frac{2}{1.3} + \frac{2}{2.4} + \frac{2}{3.5} + \cdots + \frac{2}{(n-2)n} + \frac{2}{(n-1)(n+1)}$

toplamı basit kesirler yöntemiyle;

$S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)$ olur ve

$S_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ bulunur. Buna göre,

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{3}{2}$ olup, $\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{2}{k^2-1}\right) = \frac{3}{2}$ çıkar.

Örnek.19.12:$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ serisi ıraksaktır.

Çözüm.19.12: $S_n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = \begin{cases} 0, & \text{n tek ise} \\ 1, & \text{n çift ise} \end{cases}$

olup, $\lim_{n\to\infty} S_n$ limiti mevcut değildir yani $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ serisi ıraksaktır.

19.9.4. İntegral Testi

Teorem.19.3.(İntegral Testi) f , [1,∞) aralığında sürekli, azalan ve pozitif değerli bir fonksiyon olsun. Eğer her k ≥1 tam sayısı için a_k = f (k) ise,

$\sum_{k=1}^{\infty}$ f (k) serisi ve $\int_1^{\infty}$ f(x) dx improper (has olmayan) integrali her ikisi birden ya yakınsar ya da ıraksar [Yani serinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart, improper integralin yakınsak olmasıdır].

1. Not İmproper integralin belli bir değer çıkması, serinin toplamının o değer olacağı anlamına gelmez. Yapılan iş, sadece serinin karakterini belirlemekten ibarettir.

Örnek.19.13: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(1+\ln^2 k)}$ serisi yakınsaktır.

Çözüm.19.13: $f(x) = \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}$ fonksiyonu, [1,∞) aralığında sürekli ve pozitif değerlidir. Üstelik, x büyüdükçe, fonksiyonun paydası da büyümektedir. O nedenle fonksiyon, azalandır. Şimdi,

$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$, (u = ln x ise du = dx/xdeğişken dönüşümünden)

$= \lim_{b\to\infty}\int_0^{\ln b}\frac{du}{(1+u^2)} = \lim_{b\to\infty}[\arctan(u]_0^{\ln b} = \lim_{b\to\infty}[\arctan(\ln x)]_{x=1}^{x=b}$

$= \lim_{b\to\infty}[\arctan(\ln b) - \arctan(\ln 1)] = \frac{\pi}{2}$

olup, improper integral yakınsaktır ve dolayısıyla $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(1+\ln^2 k)}$ serisi yakınsaktır.

Örnek.19.14: $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\sqrt{k^2-1}}$ serisi yakınsak mıdır?

Çözüm.19.14: Gerçekten, $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ fonksiyonu, [2, ∞) aralığında sürekli ve pozitif değerlidir.Üstelik , x≥2 için

$$f'(x) = \frac{-\left[\sqrt{x^2-1}+x\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right]}{x^2(x^2-1)} = -\frac{2x^2-1}{x^2(x^2-1)^{3/2}}$$ <0 olduğundan, f fonksiyonu azalandır.Şimdi, x = sec t dönüşümü yapılırse, dx = sec t tan t dt olup,

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int\frac{\sec t\tan t\,dt}{\sec t\sqrt{\sec^2 t-1}} = \int dt = t + C$$

bulunur. O halde , $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \lim_{b\to\infty}[\mathrm{arcsec}\,x]_{x=2}^{b} = \mathrm{arcsec}\,b - \mathrm{arcsec}\,2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$

olup, improper integral yakınsaktır ve dolayısıyla verilen seri yakınsar.

Örnek. 19. 15: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$ serisi yakınsak mıdır?

Çözüm.19.15: $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$ alalım. $f(x)$, $[2,\infty)$ aralığında pozitif,sürekli ve azalan bir fonksiyon olduğundan bu aralıkta integral testini uygularız. $u=\ln x$ ise $du=dx/x$ olur. Bu dönüşümü integralde yerine yazarsak;

$\int\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx = \int u^{-1/2}\,du = 2u^{1/2}+c = 2\sqrt{\ln x}+c$ elde edilir.$[2,\infty)$ aralığı için;

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{n\to\infty}\int_2^{t}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{t\to\infty}\left[2\sqrt{\ln x}\right]_2^t = \lim_{t\to\infty}\left(2\sqrt{\ln t}-2\sqrt{\ln 2}\right)=\infty$$

bulunur. Buna göre; $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$ serisi integral testine göre ıraksaktır.

Teorem.19.4: $\sum a_n$ serisi verilsin. Farz edelim ki $\lim_{n\to\infty} n^p a_n = A$ olsun. Bu durumda;

a) p >1 ve A sonlu ise $\sum u_n$ serisi yakınsar,

b) p<1 ve $A\neq 0$ ise ıraksar (A sonsuz olabilir).

Örnek.19.16.

1) $\sum\frac{n}{5n^3+4}$ serisini ele alalım. $\lim_{n\to\infty} n^2.\frac{n}{5n^3+4}=1/5$ olduğundan Teorem 19.4 gereğince $\sum\frac{n}{5n^3+4}$ serisi yakınsar.

2) $\sum\frac{Lnn}{(n+1)^{1/3}}$ serisini ele alalım. $\lim_{n\to\infty} n^{1/3}\frac{Lnn}{(n+1)^{1/3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1/3}.Lnn}{n^{1/3}(1+1/n)^{1/3}}=\infty$

olduğundan Teorem 19.4. gereğince $\sum\frac{Lnn}{(n+1)^{1/3}}$ serisi ıraksaktır.

19.9.5. Riemann(veya p) Serisi: $\sum\frac{1}{n^p}$ serisine Riemann Serisi denir.Bu seride;

a) p>1 ise seri yakınsak;

b) p≤1 ise seri ıraksaktır.

Riemann (veya p) Serisi ile ilgili örnekler diğer testler için yapılacak örneklerin çözümünde kullanıldığından burada tek başına verilmeyecektir.

19.9.6.Karşılaştırma Testleri

Karşılaştırma Testleri Direkt Karşılaştırma Testi ve Limit Karşılaştırma Testi olarak ikiye ayrılır. Bunların tanımları ve örnekleri aşağıda tanımlanmıştır.

19.9.6.1. Direkt Karşılaştırma Testi

$\sum a_n$ ve $\sum b_n$ pozitif terimli iki seri olsun.

Öyle bir $n_0 \in IN$ bulunsun ki $n > n_0$ değerleri için $a_n \leq b_n$ olsun. Bu takdirde;

i) $\sum b_n$ serisi yakınsaksa $\sum a_n$ serisi de yakınsaktır.

ii) $\sum a_n$ serisi ıraksaksa $\sum b_n$ serisi de ıraksaktır.

Örnek.19.17: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$ serisi yakınsak mıdır?

Çözüm.19.17: $n \geq 1$ için $\frac{1}{n^2+n} < \frac{1}{n^2}$ eşitsizliği geçerlidir. Diğer taraftan;

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ bir p-serisidir ve p=2>1 olup yakınsaktır. Karşılaştırma testine göre;

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$ serisi yakınsaktır.

Örnek.19.18: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n+n}$ serisi yakınsak mıdır?

Çözüm.19.18: Gerçekten, her $n \geq 0$ için; $3^n \leq 3^n+n$ olduğundan;

$\frac{1}{3^n+n} \leq \frac{1}{3^n}$ eşitsizliği sağlanır. Dolayısıyla verilen seriyi, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ serisi ile karşılaştırabiliriz.

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ serisi bir geometrik seri olup, a = 1 ve r=1/3 < 1 olduğundan yakınsaktır ve toplamı:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

O halde, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n+n}$ serisi karşılaştırma testine göre yakınsaktır.

Örnek.19.19: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^3}$ serisi yakınsak mıdır?

Çözüm.19.19: $k \geq 1 \Longrightarrow k < k+1 \Longrightarrow k^3 < (k+1)^3 \Rightarrow \frac{1}{(k+1)^3} < \frac{1}{k^3}$ olduğu açıktır.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ serisi bir p-serisi olup, p = 3 > 1 olduğundan yakınsaktır. Dolayısıyla $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^3}$ serisi karşılaştırma testine göre yakınsaktır.

Örnek.19.20: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-3}{2n^4+9}$ serisinin karakterini belirleyelim.

Çözüm.19.20: Genel terimin pay ve paydasında bulunan -3 ve 9 rakamlarının bir önemi yoktur. O nedenle, karşılaştırılacak serinin genel teriminin ne olduğuna karar vermek için, pay ve paydada bulunan n^2 ve n^4 terimlerini karşılaştırabiliriz:

$\frac{n^2}{2n^4} = \frac{1}{2n^2}$ olduğundan; $\frac{n^2-3}{2n^4+9} < \frac{n^2-3}{2n^4} = \frac{1}{2n^2} - \frac{3}{n^4}$ şeklinde yazılabilir.

Her $n \geq 1$ için $2n^4 < 2n^4+9$ olup, $\frac{1}{2n^4+9} < \frac{1}{2n^4}$ elde edilir. Buna göre; hem $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ ve hem de $-3.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ serileri birer p-serisi olup, ilk seri, p = 2 > 1 olduğundan ve ikinci seri de, p=4>1 olduğundan yakınsaktır. Dolayısıyla yakınsak iki serinin toplamı yakınsak olup $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-3}{2n^4+9}$ serisi karşılaştırma testine göre yakınsaktır.

19.9.5.2. Limit-Karşılaştırma Testi

Teorem.19.5.(Limit- Karşılaştırma Testi)

$\sum a_n$ ve $\sum b_n$ pozitif terimli iki seri ve $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = L$ olsun. Bu takdirde;

(a) Eğer **L>0** ise $\sum a_n$ ve $\sum b_n$ serilerinin her ikisi birlikte yakınsar veya ıraksar.

(b) Eğer **L=0** ve $\sum b_n$ serisi yakınsak ise , $\sum a_n$ serisi de yakınsaktır

(c) Eğer $\sum b_n$ serisi ıraksak ve **L = ∞** ise , $\sum a_n$ serisi de ıraksaktır.

Örnek.19.21: $\sum_{n=1}^{\infty} \tan(1/n)$ serisi yakınsak mıdır?

Çözüm.19.21: Limit Karşılaştırma Testini kullanmak için $a_n = \tan\left(\frac{1}{n}\right)$ ve $b_n = \frac{1}{n}$ alalım.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\tan(1/n)}{1/n} = \left(\frac{0}{0}\right) \text{ olup L'hospital kuralından } \lim_{n\to\infty}\frac{\tan(1/n)}{1/n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sec^2(1/n).(-1/n^2)}{(-1/n^2)} = \lim_{n\to\infty}\sec^2(1/n) = 1^2 = 1 > 0 \; \textit{bulunur}.$$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$ harmonik seri olup ıraksaktır.

Not: Harmonik seriler adını müzikal bağlantılardan alır. İlk olarak Pisagor (M.Ö. 569-475) tarafından müziksel uyum ile tamsayılar arasındaki karşılıklı ilişki keşfedilmiştir. Jacob Bernoulli (1654 – 1705) ise harmonik serilerin ıraksak olduğunu ispatlamıştır.

Böylece, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\tan(1/n)$ serisi de Limit Karşılaştırma Testine göre ıraksaktır.

Örnek.19.22: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(1/n)}{\sqrt{n}}$ serisi yakınsak mıdır?

Çözüm. 19. 22: Limit Karşılaştırma Testini kullanmak için;

$$a_n = \frac{\sin(1/n)}{\sqrt{n}} \text{ ve } b_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \text{ alalım}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(1/n)}{1/n} = 1 > 0 \; bulunur.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \quad p-\text{serisi olup } p = \frac{3}{2} > 1 \; olduğundan \text{ yakınsaktır.}$$

Böylece, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(1/n)}{\sqrt{n}}$ serisi Limit Karşılaştırma Testine göre yakınsaktır.

Örnek.19.23: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$ serisi yakınsak mıdır?

Çözüm.19.23: Gerçekten, $\frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serisi p=2>1 olan p-serisidir ve yakınsak olduğundan, verilen seriyi bu seri ile mukayese edebiliriz. Şimdi,

$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n^3+1} . \frac{n^2}{1}\right) = 1 > 0$olup, verilen seri yakınsaktır.

Örnek.19.24: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{\sqrt[3]{n^9+2}}$ serisi ıraksaktır.

Çözüm.19.24: $\frac{n^2}{\sqrt[3]{n^9}} = \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisi ıraksak ve

$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2+1}{\sqrt[3]{n^9+2}} n\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2+1/n^3}{(1+2/n^9)^{1/3}}\right) = 2 > 0$ bulunur. Teorem 19.5(a) gereğince $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{\sqrt[3]{n^9+2}}$ serisi ıraksaktır.

Not: Yakınsak bir seri ile mukayese yapılırken, limitin mevcut olması[yani belli bir sayı çıkması] yeterlidir. Oysa, ıraksak bir seri ile karşılaştırma yapılırken bunun tam tersi yani ya limitin sonsuz olması ya da sıfırdan farklı bir sayı ise olması gerekir.

Örnek.19.25: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n-n}$ serisinin karakterini belirleyelim.

Çözüm.19.25: Limit Karşılaştırma Testini kullanmak için;

$a_n = \frac{1}{2^n-n}$, $b_n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}$ alalım.

$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{1/2^n}{1/(2^n-n)} = \lim_{k\to\infty} \frac{2^n-n}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right) = 1$ bulunur. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}$ serisi yakınsak olduğundan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n-n}$ serisi Limit Karşılaştırma Testine göre yakınsaktır.

Örnek.19.26: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1+\cos k}{1+k^2}$ serisinin karakterini belirleyelim.

Çözüm.19.26: Verilen seriyi ,yakınsak olduğunu bildiğimiz $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k^2+1}$ serisi ile mukayese edebiliriz. Fakat; $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k} = \lim\limits_{k\to\infty}\frac{(1+\operatorname{Cos} k)/(1+k^2)}{1/(1+k^2)} = \lim\limits_{k\to\infty}(1+\operatorname{Cos} k)$ limiti mevcut değildir.

O halde limit-mukayese testi, bir sonuç vermez. Bununla birlikte, her x için $-1 \leq \cos x \leq 1$ olduğundan $0 \leq 1+\cos x \leq 2$ ve dolayısıyla, $0 \leq \frac{1+\operatorname{Cos} k}{1+k^2} \leq \frac{2}{1+k^2}$ yazarız. Sonuç olarak, verilen seri, Karşılaştırma kriterine göre yakınsaktır.

Örnek.19.27: Genel terimi $a_n = \frac{1}{n^{3/4}}\sin\frac{\pi}{n}$ olan serisinin karakterini belirleyelim.

Çözüm.19.27: $b_n = \frac{1}{n^{7/4}}$ olsun.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^{3/4}}\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n^{7/4}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}} = \pi\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = \pi.1 \neq 0$$

(pay ve paydayı π ile çarpılarak elde edildi) elde edilir Diğer taraftan;

$b_n = \frac{1}{n^{7/4}}$ serisi p=7/4>1 olduğundan yakınsaktır. Şu halde a_n serisi de yakınsaktır.

19.9.7. D'Alambert Oran Testi

$\sum a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ pozitif terimli bir seri olsun. Eğer;

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ise $\sum a_n$ serisi yakınsak;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ ise $\sum a_n$ serisi ıraksak;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ ise bu test yetersiz kalır ve $\sum a_n$ serisi için bir şey söylenemez.

Bu durumda Raabe ve Gauss testlerine bakılır.

19.6 Teorem (Bölüm-Oran Testi): $\sum a_n$, pozitif terimli bir seri ve $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$

olsun. Bu takdirde:

(a) Eğer r < 1 ise, $\sum a_n$ serisi yakınsaktır.

(b) Eğer r > 1 ise, $\sum a_n$ serisi ıraksaktır.

(c) Eğer r = 1 ise, bu test bir sonuç vermez.

İspat: r < 1 olduğunu kabul edelim ve bir λ sayısını r < λ < 1olacak şekilde seçelim. Bu taktirde, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=r$ olduğundan, $n\geq k$ iken $\frac{a_{n+1}}{a_n}<\lambda$ Olacak şekilde bir k > 0 sayısı mevcuttur. Buradan, $a_{k+1}<\lambda a_k$, $a_{k+2}<\lambda a_{k+1}<\lambda^2 a_k$, v.b. yazılır. Böylece devam edildiğinde, m-inci adımda $a_{k+m}<\lambda^m a_k$, m=1,2,….olduğu görülür.

Bu ise, $a_n<\lambda^{n-k}a_k$, (n=k+m alındı) eşitsizliğine denktir. Şimdi, $\sum\lambda^n$serisi λ < 1 olduğundan yakınsak ve ;

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n<\frac{a_k}{\lambda^k}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n \text{ olduğundan } \sum a_n \text{ serisi yakınsaktır.}$$

Örnek.19.28: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n^2}{n!}$ serisi yakınsak mıdır?

Çözüm.19.28 : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n^2}{n!}$ serisine faktoriyel içerdiği için Oran testi uygulanırsa;

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}.(n+1)^2}{(n+1)!}.\frac{n!}{3^n n^2}\right| = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{3(n+1)^2}{(n+1)n^2}\right] = 3\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2}=0<1$$

bulunur. Buna göre; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n^2}{n!}$ serisi Oran testine göre yakınsaktır.

Örnek.19.29: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{2.5.6.........(3n+2)}$serisi yakınsak mıdır?

Çözüm.19.29: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{2.5.8....(3n+2).[3(n+1)+2]}.\frac{2.5.8....(3n+2)}{n!}\right|$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n+5}=\frac{1}{3}<1$ olup $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{2.5.6.........(3n+2)}$ serisi Oran testine göre yakınsaktır.

Örnek.19.30: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{e^{n^2}}$ serisi yakınsak mıdır?

Çözüm.19.30:$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{e^{n^2}}$serisine faktoriyel içerdiği için Oran testi uygulanırsa;

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{e^{(n+1)^2}}.\frac{e^{n^2}}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)n!.e^{n^2}}{e^{n^2+2n+1}n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{e^{2n+1}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ olup L'hospital kuralı uygulanırsa; $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2e^{2n+1}}=0<1$ olup $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{e^{n^2}}$ serisi Oran testine göre yakınsaktır.

Örnek.19.31: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^{n+1}}{2^{3n}}$ serisi yakınsak mıdır?

Çözüm.19.31: Oran(Bölüm) testine göre;

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-3)^{n+2}}{2^{3(n+1)}}.\frac{2^{3n}}{(-3)^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{-3.2^{3n}}{2^{3n}.2^3}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{2^3}=\frac{3}{8}<1$$

olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^{n+1}}{2^{3n}}$ serisi mutlak yakınsaktır.

Örnek.19.32: $\sum_{n=1}^{\infty} n^2\, e^{-n}$ serisi yakınsak mıdır?

Çözüm.19.32: $\sum_{n=1}^{\infty} n^2\, e^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^n}$ serisine Oran testi uygulanırsa;

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2}{e^{n+1}}.\frac{e^n}{n^2}\right| = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^2.\frac{1}{e}\right] = 1^2.\frac{1}{e} = \frac{1}{e} < 1$$

elde edilir. Dolayısıyla; $\sum_{n=1}^{\infty} n^2\, e^{-n}$ serisi Oran testine göre yakınsaktır.

Örnek.19.33: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!+1}$ serisi yakınsaktır.

Çözüm.19.33:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!+1}.\frac{(n!+1)}{2^n}\right\} = 2\lim_{n\to\infty}\frac{n!+1}{(n+1)!+1} = 2\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n!}}{n+1+\frac{1}{n!}} = 0 < 1 \quad \text{olup}$$

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!+1}$ serisi Bölüm Testine göre yakınsaktır.

Örnek.19.34: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{n^n+1}$ serisi yakınsaktır.

Çözüm.19.34:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}+1}.\frac{(n^n+1)}{n!}\right\} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n^n+1)}{(n+1)^{n+1}+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n^n+1)}{(n+1)^{n+1}\left[1+\frac{1}{(n+1)^{n+1}}\right]}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^n + \left(\frac{1}{n+1}\right)^n\right]\frac{1}{1+\frac{1}{(n+1)^{n+1}}}\right\} = \frac{1}{e} < 1$$

Elde edilir. O halde, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{n^n+1}$ serisi Bölüm Testine göre yakınsaktır.

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} \to \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)^n = 0$ kullanılmıştır.

Örnek.19.35: $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{\mathrm{n}}{(\mathrm{n}+1)!}+\ldots\ldots\ldots$ serisi yakınsak mı?

Çözüm.19.35: Bölüm(Oran) testinden; $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \alpha$ ($\alpha<1$) ise seri yakınsaktır. Buradan;

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{(n+2)!}\cdot\frac{(n+1)!}{n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{(n+2)(n+1)!}\cdot\frac{(n+1)!}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n(n+2)}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n(n+2)} = 0 < 1$ olduğundan seri yakınsaktır.

Örnek.19.36: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ serisi yakınsak mı?

Çözüm.19.36: Oran testinden; $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \alpha$ ($\alpha<1$) ise seri yakınsaktır. Buradan;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left[(n+1)\ !\right]^2}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{(n\ !)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!.(n+1)!}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{n!.n!}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1).n!.(n+1).n!}{(2n+1)(2n+2)(2n)!}\cdot\frac{2n!}{n!.n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{4}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \alpha = \frac{1}{4} < 1$ olduğundan seri yakınsaktır.

19.9.8. Cauchy Kök Testi

$\sum a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ pozitif terimli bir seri olsun. Eğer;

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} < 1$ ise $\sum a_n$ serisi yakınsak;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ ise $\sum a_n$ serisi ıraksaktır.

Teorem.19.7 (Kök Testi) $\sum a_n$, terimleri negatif olmayan bir seri ve

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = p$ olsun. Bu taktirde:

(a) Eğer $p < 1$ ise, $\sum a_n$ serisi yakınsaktır.

(b) Eğer $p > 1$ ise, $\sum a_n$ serisi ıraksaktır.

(c) Eğer $p = 1$ ise, bu test bir sonuç vermez.

İspat: (a) $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow$ p ve p < 1 olmak üzere,

$$p < \lambda < 1$$

olacak şekilde bir λ sayısını seçelim. Bu taktirde, yeterince büyük her n için;

$$\sqrt[n]{a_n} < \lambda \text{ veya } a_n < \lambda^n$$

olup, 0< λ<1 olduğundan $\sum \lambda^n$, bir geometrik seri olarak yakınsaktır.

(b) Bunun ispatı, yukarıda yapılan işlemlerde "<" yerine ">" konularak tekrarlanacaktır.

(c) Aksine bir örnek vermek yeterlidir. Daha önce gösterdiğimiz üzere, $\sum(1/n^2)$ serisi yakınsak ve $\sum(1/n)$ serisi de ıraksak olmasına rağmen;

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)^{1/n} = 1 \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{1/n} = 1$$

olduğundan bu test bir sonuç vermez.

Örnek.19.37: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{\left(e^n - n\right)^n}$ serisi yakınsak mıdır?

Çözüm.19.37: Bunun için; $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^4}{\left(e^n-n\right)^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{4/n}}{e^n-n} < 1$

olduğunu göstermemiz gerekiyor. Buna göre;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} e^n = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{n}{e^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^n} = 0$$

değerleri kullanılarak;

$$Ln\left(\lim_{n\to\infty} n^{4/n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{4\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} n^{4/n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(e^n - n\right) = \lim_{n\to\infty}\left[e^n\left(1-\frac{n}{e^n}\right)\right] = \infty.1 = \infty$$

elde edilir. Buna göre; $\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2/n}}{e^n - n} = 0 < 1$ olup seri yakınsaktır.

Örnek.19.38: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1+ne^n}$ serisi yakınsaktır.

Çözüm.19.38: Bunun için;

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n}{1+ne^n}}<1$ olduğunu göstermeliyiz. İstenilen limit değeri, L'Hospital kuralı da kullanılarak aşağıda hesaplanmıştır.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{1+ne^n}}=Ln\left\{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{1+ne^n}\right)^{1/n}\right\}=\lim_{n\to\infty}\left\{Ln\left(\frac{n}{1+ne^n}\right)^{1/n}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}Ln\left(\frac{n}{1+ne^n}\right)\right\}=\left\{\frac{\ln n-\ln\left(1+ne^n\right)}{n}\right\}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

elde edilir. L'Hospital kuralı kullanılarak;

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{(1+n)e^n}{1+ne^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1+n}{e^{-n}+n}\right)$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{1-e^{-n}}\right)=-1\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n}{1+ne^n}}=\dfrac{1}{e}<1$ olup kök testine göre seri yakınsaktır.

Örnek.19.39: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{2n}}{n^n}$ serisi yakınsak mıdır?

Çözüm.19.39: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{2n}}{n^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n}\right)^n$ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n}=0<\ 1$

olup kök testine göre seri mutlak yakınsaktır.

19.9.9. Raabe Testi

Teorem 19.8: $\sum a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ pozitif terimli bir seri olsun. Eğer;

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right).n=\alpha<1$ olsun. Eğer;

a) $\alpha<1$ ise $\sum a_n$ serisi yakınsak;

b) $\alpha>1$ ise $\sum a_n$ serisi ıraksaktır.

Örnek.19.40: Genel terimi $\left(\dfrac{1.4.7...(3n-2)}{3.6.9...(3n)}\right)^2$ olan serinin karakterini tayini ediniz.

Çözüm.19.40: Önce $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ oranını bulalım:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\left[\frac{1.4.7...(3n-2)(3n+1)}{3.6.9...(3n)(3n+3)}.\frac{3.6.9...(3n)}{1.4.7...(3n-2)}\right]^2=\left(\frac{3n+1}{3n+3}\right)^2$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)n=\lim_{n\to\infty}\left[1-\left(\frac{3n+1}{3n+3}\right)^2\right]n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{9n^2+18n+9-9n^2-6n-1}{9n^2+18n+9}\right)n=\lim_{n\to\infty}\frac{(12n+8)n}{9n^2+18n+9}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(12n+8/n)}{n^2(9+18/n+9/n^2)}=12/9=4/3>1$$

Şu halde verilen seri yakınsaktır. Halbuki, oran testi bu problemde uygulandığında;

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n+3}\right)^2=1$ olduğundan başarısızdır.

Örnek.19.41: Genel terimi $\left[\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}\right]^2$ olan serinin karakterini belirtiniz.

Çözüm.19.41: Önce $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ oranını bulalım:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\left[\frac{1.3.5...(2n-1)(2n+1)}{2.4.6...(2n)(2n+1)}.\frac{2.4.6...(2n)}{1.3.5...(2n-1)}\right]^2=\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2$$

n→∞ için Limiti alırsak;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n(2+1/n)}{n(2+2/n)}\right]^2=1$$

Şu halde oran testi başarısızlığa uğradı. RAABE testinin de aynı neticeyi verdiğini görelim:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-|a_{n+1}/a_n|\right)n=\lim_{x\to\infty}\left[1-\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2\right]n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n+3}{4n^2+8n+4}\right)n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(4+3/n)}{n^2(4+8/n+4/n^2)}=1$$

19.9.10. Gauss Testi

Şimdi de GAUSS testini kullanacağız. Bu teste ait formülü yazalım:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1-\frac{L}{n}+\frac{C_n}{n^2}$$

Burada, C_n n'nin bir M sayısından büyük bütün değerleri için bir M sayısından küçüktür.

$(|C_n|<M)$

Bu durumda;

a) $L > 1$ ise $\sum a_n$ serisi yakınsak,

b) $L \leq 1$ ise ıraksaktır.

Yukarıda elde ettiğimiz $a_{n+1} / a_n = \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2$ ifadesinin payının, paydasına iki defa bölünmesinden; $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2 = \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{5+\frac{4}{n}}{4n^2+8n+4} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{C_n}{n^2}$

elde edilir. (kalan $5+4/n$ olup $C_n = (5+4/n)/(4+8/n+4/n^2)$ dir). Buradan $L = 1$ olduğu anlaşılır. Şu halde $\sum a_n$ serisi ıraksaktır.

Oran testi başarısızlığa uğradığında ekseriya RAABE testi kullanılır. Bu da başarısızlığa uğrarsa çok defa GAUSS testi kullanılır.

19.9.11.Geometrik Seri

(a_n) bir geometrik dizi ise; $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisine geometrik seri denir.

a) Geometrik Serinin n. Kısmi Toplamı

(a_n) geometrik dizi ise, $a_n=a_1.r^{n-1}$dir.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_1.r^{n-1})$n.kısmi toplamı ise,$S_n=a_1.\frac{1-r^n}{1-r}$ $(r \neq 1)$dir.

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_1.r^{n-1})$ serisinde;

- $|r|>1$ ise, $(r^n) \to \infty$ olduğundan, serinin genel teriminin limiti de $\pm\infty$ olur ve seri ıraksaktır.
- $|r|<1$ ise, $(r^n) \to 0$ olduğundan, serinin genel teriminin limiti reel sayı olur ve seri yakınsaktır.

b) Yakınsak Geometrik Serinin Toplamı

Yakınsak olan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ geometrik serisinin toplamı, kısmi toplamlar dizisi olan (S_n)in limitine eşittir.

$(S_n) = a_1.\frac{1-r^n}{1-r}$

$|r|< 1$ ise, $(r^n) \to 0$ olacağından,

$\lim(S_n)=a_1.\frac{1-0}{1-r} = \frac{a_1}{1-r}$ olur.

Örnek.19.42: $\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ serisinin toplamını bulunuz.

Çözüm.19.42: Kısmi toplamı teşkil edelim:

$$S_n = \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Bu ifadeyi 2/3 ile çarpıp yeni bulunan ifadeyi bundan, taraf tarafa çıkaralım ve limite geçelim:

$$\frac{2}{3}S_n = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}, \ (a.a^n = a^{n+1})$$

$$\frac{1}{3}S_n = \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = \frac{2}{3}\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right], \quad S_n = 2\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 2\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right] = 2(1-0) = 2$$

Şu halde seri yakınsak olup toplamı 2 dir (toplamı sonlu bir sayı olan seri yakınsaktır).

19.10. Alterne Seriler

Buraya kadar olan kısımda, göz önüne aldığımız serilerin hepsi, terimleri negatif olmayan serilerdi ve işlemlerimizi bu kısıtlama altında yapmıştık. Şüphesiz ,terimleri hem negatif ,hem de pozitif olan seriler de vardır ve onların da incelenmesi gerekir. Fakat , bu türden seriler için yeni test(ler)e ihtiyaç vardır. Terimleri, sırasıyla, bir pozitif ve bir negatif (veya bir negatif ve bir pozitif) olan seriye, bir **alterne seri** denir. Genel bir alterne seri, her $k = 1,2,3 \ldots için a_k > 0$ olmak üzere ;$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\, a_k = a_{1-}a_{2+}a_3 - \cdots \pm (-1)^{k+1}a_k \pm \cdots$ şeklindedir. Aşağıdaki teorem , böyle bir serinin karakterini belirlemede kullanılır.

Teorem.19.9.(Alterne Seri Testi)$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\, a_k$, bir alterne seri olsun .Eğer aşağıdaki iki şart sağlanırsa , seri yakınsaktır:

(a) Her k için $a_k \geq a_{k+1}$ (yani serinin her terimi, mutlak değerce azalıyor)

(b) $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$

İspat.19.9: Bir alterne seri;

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\, a_k(a_{1+}a_{3+}a_5 + \cdots + a_{2k-1} + \cdots) - (a_{2+}a_{4+}a_6 + \cdots + a_{2k} + \cdots)$$

şeklinde olduğundan, tek ve çift indisler için birer kısmi toplam oluşturularak sonuca gidilecektir. Öyleyse ,ilk olarak$S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + (a_5 - a_6) + \cdots + (a_{2m-1} - a_{2m})$şeklindeki çift kısmi toplamları gözönüne alalım.

$\{a_n\}$ dizisi azalan yani her n için $a_{n+1} \leq a_n$ olduğundan, $\{S_{2m}\}$ dizisi artan olmalıdır. Üstelik $S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + (a_6 - a_7) + \cdots + (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m}$ yazılabileceğinden, her m için $S_{2m} \leq a_1$ olduğunu görüyoruz O halde $\{S_{2m}\}$ dizisi üstten sınırlıdır. Dolayısıyla , Teorem 1.4.1 gereğince , $\lim_{k\to\infty} S_{2m} = S$ limiti mevcuttur ve bu limit , $0 < S < a_1$ eşitsizliğini sağlar. Benzer şekilde tek kısmi toplamlar dizisi olan $\{S_{2m-1}\}$ dizisinin de S ye yakınsadığı gösterilebilir.

Gerçekten, $S_{2m-1} = S_{2m} + a_{2m-1}$ ve $\lim_{k\to\infty} a_{2m-1} = 0$ olduğundan,

$\lim_{k\to\infty} S_{2m-1} = \lim_{k\to\infty}(S_{2m} + a_{2m-1}) = S$ çıkar. Sonuç olarak, $\lim_{k\to\infty} S_n = S$ olup, seri yakınsaktır.

Örnek.19.43: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln n}$ serisi yakınsak mıdır?

Çözüm.19.43: $n \geq 2$ için $b_n = \frac{1}{n \ln n} > 0$ ve $\{b_n\}$ dizisi azalan ayrıca $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ olduğu için Alterne Seri Testine göre $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln n}$ serisi yakınsaktır.

Örnek.19.44: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ serisi yakınsak mıdır?

Çözüm.19.44: $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ alalım. $\ln x > 2$ veya $x > e^2$ için $f'(x) = \frac{2-\ln x}{2x^{3/2}} < 0$ olup, $n > e^2$ için $\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ azalandır.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \text{ olup L'hospital kuralından } \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1/(2\sqrt{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0$$

elde edilir. Böylece, Alterne Seri Testine göre $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ serisi yakınsaktır.

Örnek.19.45: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2+1}$ serisini göz önüne alalım.

Çözüm.19.45: $\frac{1}{(k+1)^2+1} < \frac{1}{k^2+1}$ olduğundan $a_{k+1} < a_k$ bulunur.

Ayrıca, $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^2+1} = 0$ olup verilen seri yakınsaktır.

Örnek.19.46: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}\sqrt{k}}{k+1}$ serisini gözönüne alalım.

Çözüm.19.46: Aşikar olarak,

$\lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{k}}{k+1} = 0$ $olur.$ $\{a_k\}$ nın azalan bir dizi olduğunu göstermek için $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$ fonksiyonunu gözönüne alalım. Bu takdirde ,

$f^{-1}(\mathrm{x}) = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$ olup $x = 0, x = \pm 1$

değerleri incelenmelidir. Fakat $x = -1$ değeri sınır dışıdır.Eğer $x > 1$ ise $f^{-1}(x) < 0$ olup fonksiyon,[1,∞)aralığında azalandır.Bu bizim için yeterlidir.(yani $x = 0$ değerine bakmaya gerek yoktur). Sonuç olarak , verilen seri yakınsaktır.

Örnek.19.47:$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{cos(k\pi)}{\sqrt{k}}$ bir alterne seridir ve yakınsaktır.

Çözüm.19.47: Gerçekten, her k ≥2 için;

$cos(k\pi) = -1^k$ olup ,$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{cos(k\pi)}{\sqrt{k}} = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$dır.Şimdi,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt{k}} = 0 \; ve \; \frac{1}{\sqrt{k+1}} < \frac{1}{\sqrt{k}}$$

olduğundan, verilen seri yakınsaktır.

Örnek.19.48:$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}k^2}{k^2+1}$ serisi ıraksaktır.

Çözüm.19.48: Gerçekten,$\lim_{k\to\infty}\frac{k^2}{k^2+1} = 1 \neq 0$ elde edilir.

Biz biliyoruz ki eğer bir seri yakınsak ise, genel teriminin limiti sıfır olmalıdır. Fakat, $\lim_{k\to\infty}\frac{(-1)^{k-1}k^2}{k^2+1} = \left[\lim_{k\to\infty}(-1)^{k-1}\right]\left(\lim_{k\to\infty}\frac{k^2}{k^2+1}\right) = \lim_{k\to\infty}(-1)^{k-1}$ limiti mevcut değildir. Dolayısıyla, verilen seri ıraksaktır.

19.11.Mutlak ve Şartlı Yakınsaklık

Bazen öyle seriler karşımıza çıkabilir ki, kendisi yakınsak olduğu halde, genel teriminin mutlak değeri altında ortaya çıkan seri ıraksayabilir. Bu kısımda, böylesi durumlar incelenecektir. Önceki kısımlarda göz önüne aldığımız serilerin bütün terimlerinin pozitif olmasını talep etmiş ve bu durumdaki seriler ile çalışmıştık. Elbette bazı serilerin terimleri karışık işaret olabilir. Bu şekilde seriler yani terimleri negatif ve pozitif olabilecek seriler, bu kısımda incelenecektir

Eğer bir serinin bütün terimlerinin mutlak değeri alındığında, elde edilen seri yakınsıyorsa, orijinal serinin mutlaka yakınsayacağını bekleriz. Fakat bunun tersinin doğru olması gerekmiyor.

19.11.a)Mutlak Yakınsaklık:$\sum a_k$, herhangi bir seri olsun.

Eğer $\sum|a_k|$ serisi yakınsak ise, $\sum a_k$ serisi **mutlak yakınsaktır.**

Teorem.19.10: Mutlak yakınsak bir seri, yakınsaktır.

İspat .19.10: Aşikar olarak her k için;$\_|a_k| \ll a_k \ll |a_k|$

olduğundan, her terime $|a_k|$ekleyerek ; $0 \ll |a_k| \leq 2|a_k|$yazarız.

Eğer $\sum|a_k|$serisi yakınsak ise$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + |a_k|) \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2|a_k|$olup, Teorem 19.3(a) gereğince $\sum(a_k + a_k)$ serisi de yakınsar. Son olarak ,pozitif terimli yakınsak iki serinin farkı yakınsak [Teorem 19.2.1 (b)] olduğundan;

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty}[(a_k + |a_k| - |a_k|] = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k + |a_k|) - \sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ yazılabildiği için $\sum a_k$serisi yakınsaktır.

Örnek.19.49: $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1+\cos k}{k^2}$ serisini gözönüne alalım.

Çözüm.19.49: Serinin her teriminin mutlak değerini alarak elde edeceğimiz

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|(-1)^k \frac{1+\cos k}{k^2}\right| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|1+\cos k|}{k^2}$$

serisi yakınsaktır. Zira, her x için;

$-1 \leq \cos x \leq 1 \; ve \; 0 \leq 1 + \cos x \leq 2$ olduğundan,

$$\frac{|1+\cos k|}{k^2} \leq \frac{2}{k^2} ve \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|1+\cos k|}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k^2}$$

yazarız. Şimdi ikinci seri, bir p-serisi olup p=2 > 1olduğundan yakınsaktır. Öyleyse, Teorem 19.6 gereğince ilk seri yakınsaktır. Sonuç olarak, verilen seri mutlak yakınsaktır.

Örnek.19.50:$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k(1+ln^2 k)}$ serisi mutlak yakınsaktır.

Çözüm.19.50: Gerçekten, serinin her teriminin mutlak değerini alarak

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^k}{k(1+ln^2 k)}\right| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(1+ln^2 k)}$$

serisi elde ederiz. Bu serinin yakınsak olduğunu, Kısım 2.3 ,Örnek 1 den biliyoruz .Öyleyse verilen seri, mutlak yakınsak (ve dolayısıyla yakınsak)olmalıdır.

19.11.b)Şartlı Yakınsaklık: Eğer $\sum a_k$ serisi yakınsıyor fakat mutlak olarak yakınsamıyorsa , serinin **şartlı yakınsak** olduğu söylenir.

Örnek.19.51:$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}(\sqrt{k^2+1} - k)$serisi şartlı yakınsaktır.

Çözüm.19.51: Gerçekten;

$k \geq 1 \; için k^2 < k^2 + 1 \; ve k - \sqrt{k^2+1} < 0$olduğundan,

$$f(k) = \sqrt{k^2+1} - k => f'(k) = \frac{k - \sqrt{k^2+1}}{\sqrt{k^2+1}} < 0$$ (yani $\{a_k\}$ dizisi azalan)

$\lim_{k\to\infty}(\sqrt{k^2+1} - k) = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt{k^2+1}+k} = 0$ olduğundan seri şartlı yakınsaktır.

19.12.Serilerin Yakınsaklık Testi İçin Stratejiler

Bir serinin yakınsaklığı veya ıraksaklığı test etmek için pek çok yöntem vardır. Burada önemli olan hangi testin hangi seri için kullanıldığına karar vermektir. Bu itibarla bir serinin testi bir fonksiyonun integralinin alınmasına benzerdir. Verilen bir seriye uygulamak için belirli bir test olmamasına karşın aşağıda maddeler halinde özetlenecek ipuçları bu testin seçiminde yararlı olacaktır. Serinin genel teriminin içeriği bize bu konuda en önemli ipucunu verecektir.

1. Eğer seri $\sum \frac{1}{n^p}$şeklinde ise bu bir p-serisidir. p > 1 için seri yakınsak; p ≤ 1 için seri ıraksaktır.
2. Eğer seri$\sum a.r^{n-1}$veya$\sum a.r^n$şeklinde bir geometrik seri ise |r|<1 için yakınsak; |r|>1 ıraksaktır.

3. Eğer seri geometrik seri veya p-serisine benzer şekildeyse karşılaştırma testi kullanılabilir. Yani a_n, n'ye bağlı cebirsel veya rasyonel bir fonksiyon ise p-serisi ile karşılaştırma yapılabilir. Ayrıca karşılaştırma testi sadece pozitif terimli serilere uygulanabilir. Eğer $\sum a_n$negatif terimler içeren bir seri ise$\sum |a_n|$ifadesine karşılaştırma testi uygulanarak mutlak yakınsaklık testi de yapılabilir.
4. Eğer serinin genel terimi olan a_n için$\lim_{n\to\infty} (a_n) \neq 0$ise ıraksaklık testi kullanılabilir.
5. Eğer seri $\sum(-1)^{n-1} a_n$veya $\sum(-1)^n a_n$şeklinde ise alterne seri testi uygulanır.
6. Eğer seri faktöriyel içeriyorsa oran (D'alembert) testi kullanılır.
7. Eğer seri n'in kuvvetlerini içeriyorsa kök (Cauchy) testi kullanılır.
8. Eğer a_n=f(n) ise $\int_1^\infty f(x)dx$integrali kolayca belirlenebilir ve buna göre integral testi etkili olur ve uygulanabilir.

Aşağıdaki örneklerde hangi örnekte hangi testin seçilmesi gerektiği açıklanmıştır.

19.12.1.Çeşitli örnekler

Örnek.19.52: $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{Lnn}{n}$ alterne serisini yakınsaklık bakımından inceleyiniz.

Çözüm.19.52: Teoremdeki şartların sağlandığını görelim. $n = x$ yazıp türev alalım $(d(Lnx)/dx = 1/x)$:

$$\frac{d}{dx}\frac{Lnx}{x} = \frac{1-Lnx}{x^2} < 0 \qquad (x > e)$$

Mademki türev negatiftir, fonksiyon azalandır, yani n>3 için;

$\frac{Ln(n+1)}{n+1} < \frac{Lnn}{n}$ yazılabilir. Şimdi n→∞için limite bakalım. Bunun için L'HOSPİTAL kuralını kullanalım: $\lim_{n\to\infty} \frac{Lnn}{n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \Rightarrow \mathrm{Lim}_{n\to\infty} \frac{1/n}{1} = 0$ olur.O halde verilen seri yakınsaktır.

Örnek.19.53: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ serisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm.19.53: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ olduğundan u_n ve u_{n+1} terimlerinin mutlak değerleri;

$|u_n| = \frac{1}{2n-1}$, $|u_{n+1}| = \frac{1}{2n+1}$ olup; $\frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2n-1}$ yani $|u_{n+1}| < |u_n|$

Diğer taraftan; $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$ olduğundan seri yakınsak olur.

Örnek.19.54: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{n^2+1}$ serisini inceleyiniz.

Çözüm.19.54: Bu seriye karşılık olan mutlak değerler serisi ;

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ olup bu seri karşılaştırma kriterine göre ıraksak olmasına rağmen; $|u_n| = \frac{n}{n^2+1}$ ve $|u_{n+1}| = \frac{n+1}{(n+1)^2+1}$ iken $n \geq 1$ için $|u_{n+1}| \leq |u_n|$ yazılabilir. Diğer taraftan;

$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$ olduğundan verilen seri, Teorem.19.6'yagöre, şartlı yakınsak olur.

Örnek.19.55: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n.Ln^2 n}$ serisini inceleyiniz.

Çözüm.19.55: Ln(n) ile türevi olan 1/n aynı ifadede olduğundan İntegral testinive burada da değişken dönüşümünü kullanacağız. Bunun için; $u = Ln\,x$ dersek $du = dx/x$ olacağından;

$\int \frac{dx}{x.Ln^2 x} = \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{Lnx} + C$ olur. Buradan ;

$\lim_{a\to\infty} \int_2^a \frac{dx}{x.Ln^2 x} = \lim_{a\to\infty} \left(\frac{1}{Ln2} - \frac{1}{Lna} \right) = \frac{1}{Ln2}$ elde edilir. İntegral mevcut olduğundan seri yakınsaktır. Böylece verilen seri, mutlak yakınsak olur.Teorem.19.6'yı kullanarak verilen serinin yakınsak olduğunu görebiliriz:

n≥2 için $\dfrac{1}{(n+1)Ln^2(n+1)} < \dfrac{1}{nLn^2 n}$ sağlanır ve $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{nLn^2 n} = 0$ olduğundan seri yakınsaktır.

Örnek.19.56: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}.3^n}{n^2}$ serisini inceleyiniz.

Çözüm.19.56: u_n teriminin limitini bulalım (L'HOSPİTAL kuralını iki defa kullanarak):

$y = a^x$ in türevi $y' = Lna.a^x$ olduğundan;

$$\lim_{n\to\infty} |u_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{Ln3.3^n}{2n} = \frac{Ln^2 3}{2} \lim_{n\to\infty} 3^n = \infty$$

elde edilir. Limit testine göre sonuç sıfır olmadığından verilen seri ıraksaktır.

Serinin ıraksak olduğunu oran testi ile de görebiliriz:

$\lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{(-1)^n.3^{n+1}}{(n+1)^2} . \dfrac{n^2}{(-1)^{n-1}.3^n} \right| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2}{n^2 + (1+1/n)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3}{(1+1/n)} = 3 > 1$ olduğundan seri ıraksaktır.

19.13.Diziler Ve Serilerle İlgili Çözümlü Örnekler

1. $(a_n) = \left(\frac{2n+3}{n-2}\right)$ ifadesi bir dizi midir?

Çözüm: $a_1 = \frac{2.1+3}{1-2} = -5$,

$$a_2 = \frac{2.2+3}{2-2} = \frac{7}{0} \notin R$$

O halde (a_n) bir dizi değildir.

2. $(a_n) = \left(\frac{2n^2+3n+6}{n}\right)$ dizisinin kaç tane terimi tamsayıdır?

Çözüm:

$(a_n)=\frac{2n^2+3n+6)}{n}=\frac{2n^2}{n}+\frac{3n}{n}+\frac{6}{n}$=2n+3+$\frac{6}{n}$

$\forall n \in N^+$ için$(2n+3) \in N^+ dır.$

O halde a_n in doğal sayı olması için $\frac{6}{n}$'in doğal sayısı gerekir. 6'nın pozitif bölenleri: {1,2,3,6} olduğundan (a_n) dizisinin 4 tane terimi tamsayıdır.

3. $(a_n) = \left(\frac{2n+6}{3n+5}\right)$ dizisinde EBAS ve EKÜS kaçtır?

Çözüm:

$-\frac{d}{c} = -\frac{5}{3} < 1$ olduğndan (a_n) monoton dizidir.

$$* \, a_1 = \frac{2.1+6}{3.1+5} = \frac{8}{8} = 1$$

$* n \longrightarrow \infty$ $için$ $(\frac{2n+6}{3n+5})=\frac{n(2+\frac{6}{n})}{n(3+\frac{5}{n})}=\frac{2}{3}$

$$\left.\begin{aligned} EBAS(a_n) &= \frac{2}{3} \\ EKÜS(a_n) &= 1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{2}{3} < a_n \leq 1$$

4. Bir aritmetik dizinin ilk n teriminin toplamı $2n^2 + 10n$ olduğuna göre, dizinin ortak farkı kaçtır?

Çözüm:

$S_{n=}2n^2 + 10n$ $olarak$ $verilmiş.$

$S_1 = a_1 = 12$

$S_2 = a_1 + a_2$=28

$S_3 = a_1 + a_2$+$a_3 = 48$

$S_n = a_1 + a_2 + \cdots \ldots \ldots \ldots + a_n = 2n^2 + 10n$

$a_1 + a_2 = 28 \quad \Longrightarrow \quad a_2$=16

k=a_2-$a_1 = 16 - 12 = 4$

5. a_1=5,ortak çarpan $\frac{1}{2}$ olduğuna göre, ilk 20 terimin toplamı kaçtır?

Çözüm:

Bir geometrik dizide ilk n teriminin toplamı

S_n ile gösterilsin.

S_n =a_1 .$\frac{1-r^n}{1-r}$

a_1=5, r=$\frac{1}{2}$ verilmiş.

$$S_{20} = a_1 \ . \ \frac{1 - r^{20}}{1 - r} = 5 \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{20}}}{1 - \frac{1}{2}} = 5 \cdot \frac{2^{20} - 1}{2^{19}}$$

6. Bir geometrik dizinin ilk n teriminin toplamı $\frac{1}{12}(2^n - 1)$dir. Buna göre, dizinin 4.terimi kaçtır?

Çözüm:

$S_n = \frac{1}{12}(2^n - 1)$

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

$S_4 - S_3 = a_4$

$\frac{1}{12}(2^4 - 1) - \frac{1}{12}(2^3 - 1) = a_4 \to \frac{2}{3} = a_4$

7. Sierpinski kalburu bir fraktal örneği olarak 1915’te tasarlanmıştır. Sierpinski kalburu eşkenar bir üçgen alınarak inşa edilir. İlk adımda bu üçgen 4 eşkenar üçgene ayrılıp ortadaki üçgen kaldırılır. Kalan 3 tane eşkenar üçgende de aynı işlem uygulanır ve sırasıyla yukarıdaki şekiller elde edilir. 1. üçgenin alanı 1br^2 kabul edilirse kaldırılan eşkenar üçgenlerin alanlarını veren ifade nedir?

Çözüm:

1.üçgende çıkartılan parçanın alanı = 0

2.üçgende çıkartılan parçanın alanı = $\frac{1}{4}$

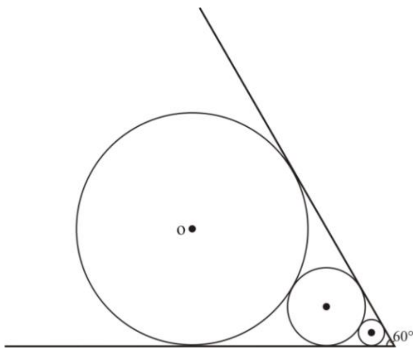
3.üçgende çıkartılan parçanın alanı = $\frac{3}{16}$

4.üçgende çıkartılan parçanın alanı = $\frac{9}{64}$

5.üçgende çıkartılan parçanın alanı $=\frac{3^{n-1}}{4^n}$

Toplam alan = $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{4^n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3^n}{4^n} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}\right) = 1br^2$

8. Şekildeki O merkezli çemberin iki teğeti arasında 60^{o}lik açı bulunmaktadır. Bu iki teğetin kesiştiği noktaya kadar teğet çemberler şekildeki gibi çiziliyor. O merkezli çemberin yarıçapı 1 birim ise çizilen sonsuz çemberin alanları toplamı kaç birimdir?



Çözüm:

$2(1 - r_1) = 1 + r_1$

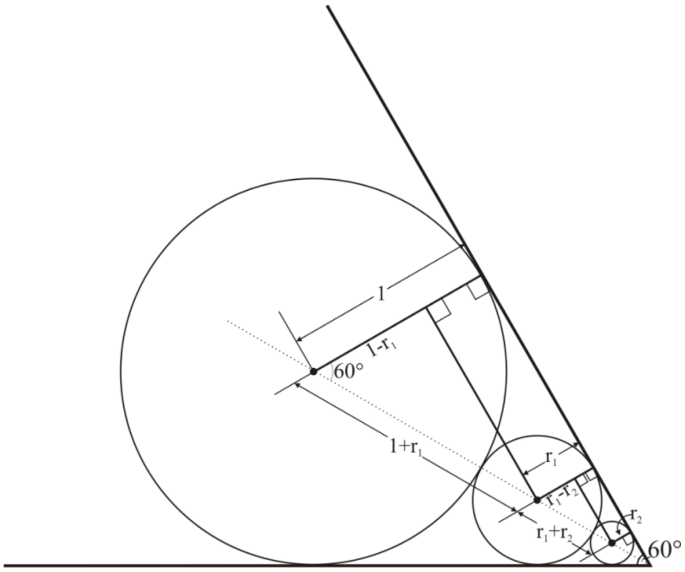
$r_1 = \frac{1}{3}$

$2\left(\frac{1}{3} - r_2\right) = \frac{1}{3} + r_2$

$r_2 = \frac{1}{9}$

.

$r_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$



Toplam alan= $1^2\pi + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}\right)^2 \cdot \pi = \pi + \pi \cdot \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^n = \frac{9\pi}{8} br^2$

9. $a_n(1 \cdot 2, 2 \cdot 3, 3 \cdot 4, \ldots, n \cdot (n+1), \ldots.)$ şeklinde genel terimi verilen dizi için S_{10} kaçtır?

Çözüm:

$$\sum_{n=1}^{10} n(n+1) = \sum_{n=1}^{10} n^2 + \sum_{n=1}^{10} n = \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} + \frac{10 \cdot 11}{2} = 385 + 55 = 440$$

10.

Yukarıdaki şekilde $a_1=1$, $a_2=6$, $a_3=20$ tane kare içermektedir. Buna göre a_7 kaç kare içerir?

Çözüm:

Şeklinde bir karenin içerdiği kare sayısını toplam çarpım sembolü konusu ile $\sum_{k=1}^{2} k \cdot k$ şeklinde hesaplayabiliyoruz. Kısaca 1x1'lik kare de 1, 2x2'lik karede 6 tane kare bulunuyor.

a_7' yi yazarsak: $a_{7=} 7 \cdot 7 + 2 \cdot 6 \cdot 6 + 3 \cdot 5 \cdot 5 + 4 \cdot 4 \cdot 4 + 5 \cdot 3 \cdot 3 + 6 \cdot 2 \cdot 2 + 7 \cdot 1 \cdot 1$ adet kare içerir.

Bunu da toplam sembolüyle şu şekilde ifade edebiliriz:

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 + \sum_{k=1}^{2} k^2 + \sum_{k=1}^{3} k^2 + \sum_{k=1}^{4} k^2 + \sum_{k=1}^{5} k^2 + \sum_{k=1}^{6} k^2 + \sum_{k=1}^{7} k^2$$

Bunu da kısaca:

$$\sum_{x=1}^{n}\sum_{k=1}^{x} k^2 \; olur.$$

Buna göre;

$$a_7=\sum_{n=1}^{7}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{1}{6}\cdot\sum_{k=1}^{7}2n^3+3n^2+n=\frac{1}{6}\cdot[2\cdot\left(\frac{7\cdot 8}{2}\right)^2+3\cdot\frac{7\cdot 8\cdot 15}{6}$$

$$+\frac{7\cdot 8}{2}=336$$

11. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3^n}-\frac{3}{2^n}\right)$serisinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3^n}-\frac{3}{2^n}\right)=2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}\right)-3\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

n=0'dan başladığı için ilk terimleri ayrı olarak yazarız.

$$a_1=2\cdot\frac{1}{1}-3\cdot\frac{1}{1}=-1$$

$2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}\right)=2\cdot\left(\frac{1}{3^1}\right)+2\cdot\left(\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+2\cdot\left(\frac{1}{3^n}\right)$ burada r'yi bulursak: $\frac{2\cdot\left(\frac{1}{3^2}\right)}{2\cdot\left(\frac{1}{3^1}\right)}=\frac{1}{3}$

$$2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}\right)=2\cdot\frac{a_1}{1-r}=2\cdot\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=2\cdot\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=2\cdot\frac{1}{2}=1$$

$3\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right)=3\cdot\left(\frac{1}{2^1}\right)+3\cdot\left(\frac{1}{2^2}\right)+\cdots+3\cdot\left(\frac{1}{2^n}\right)$ burada r'yi bulursak:$\frac{3\cdot\left(\frac{1}{2^2}\right)}{3\cdot\left(\frac{1}{2^1}\right)}=\frac{1}{2}$

$$3\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right)=3\cdot\frac{a_1}{1-r}=3\cdot\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=3\cdot\frac{1}{1}=3$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3^n}-\frac{3}{2^n}\right)=a_1+2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}\right)-3\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right)=-1+1-3=-3$$

12. xy,3x+3y,4x sayıları hem aritmetik, hem de geometrik bir dizinin ardışık 3 terimi olduğuna göre, x+y kaçtır?

Çözüm:

Bir dizinin hem aritmetik hem de geometrik dizinin kurallarını sağlaması için ancak r=0 olmalıdır. r=0 olan dizilerde sabit dizilerdir. Buna göre xy=3x+3y=4x'tir.

$xy=4x \;\; ise \;\; y=4$

$xy=3x+3y \qquad 4x=12+3x=12$

$x+y=16$

13. $(a_n)=\left(\frac{n^2-16}{4n-5}\right)$ dizisinin kaç terimi negatiftir?

Çözüm:

Terimleri yazarsak;

$$a_1 = \frac{-15}{-1} = 15$$

$$a_2 = \frac{-12}{3} = -4$$

$$a_3 = \frac{-7}{+7} = -1$$

$a_4 = \frac{0}{11} = 0$ buna göre 2 terim negatiftir.

14. Genel terimi $(a_n) = \left((-1)^{n-1} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)\right)$ şeklinde olan a_n dizisinin ilk 50 terim çarpımı kaçtır?

Çözüm:

$$a_1 = (-1)^0 \cdot \frac{2}{1}$$

$$a_2 = (-1)^1 \cdot \frac{3}{2}$$

...

$$a_{50} = (-1)^{49} \cdot \frac{51}{50}$$

$$\prod_{n=1}^{50}\left((-1)^{n-1} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)\right) = -51$$

15. Bir aritmetik dizinin 5.terimi a olmak üzere; 7.terimi 5terimin 4 eksiği olduğuna göre 9.terimin a cinsinden değeri nedir?

Çözüm:

7. terimi 5. terim cinsinden yazarsak;

$$a_7 = a_5 + 2d$$

$$2d = -4$$

$$d = -2$$

$$a_9 = a_5 + 4d$$

$$a_9 = a - 8$$

16. Çin Takvimi 12 hayvandan oluşmaktadır ve takvim 12 yılda bir tekrar etmektedir. 1868 yılı ilk '**Ejderha yılı**' ise 2000 yılında kadar kaç ejderha yılı geride kalmıştır?

Çözüm:

$a_1 = 1868$

$a_x = a_1 + 12(x - 1)$

2000=1868+12$(x-1)$

132+12=12x

x=12. Ejderha yılı kutlanır.

17. Bir adam iki şirketten iş teklifi alıyor. X şirketi yıllık 2000 TL maaş veriyor ve yıllık 1000 TL zam yapıyor. Y şirketi ise yıllık 2050 TL maaş veriyor ve yıllık 800 TL zam yapıyor. Buna göre;

a)10.yılda X şirketiyle Y şirketinin verdiği maaşlar ne kadardır?

b)10 yıl boyunca X şirketinden kazanılan toplam para ve Y şirketinden kazanılan toplam para ne kadardır?

Çözüm:

a) X şirketi için;

$a_{10} = 2000 + 9 \cdot 1000 = 11000$

Y şirketi için;

$a_{10} = 2050 + 9 \cdot 800 = 9250$

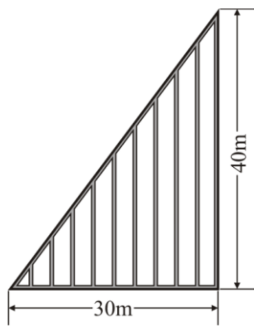
b) X şirketi için;

$$S_n = \left(\frac{10}{2}\right) \cdot (2000 + 11000) = 65000$$

Y şirketi için;

$$S_n = \left(\frac{10}{2}\right) \cdot (2050 + 9250) = 56500$$

18. Bir köprünün ayağı üzerindeki ağırlığı kaldırabilmesi için 30 metre boyunca konulan 9 destek ile dik bir üçgen şeklindedir. Destekler arası uzaklıklar eşitse dikey desteklerin ve köprü ayağının toplam uzunluğu ne kadardır?



Çözüm: Burada üçgenlerdeki benzerlikten yararlanırsak;

$\frac{10}{a_1} = \frac{9}{a_2}\frac{10}{40} = \frac{9}{a_2} a_2 = 36$ buradaki 36 köprü ayağından sonraki en yüksek destek bloğudur.

Bir benzerlik daha yaparsak $\frac{10}{40} = \frac{8}{a_3} a_3 = 32$ görüldüğü gibi destek blogları 4'er metre azalarak devam etmektedir. Yani sorunun cevabı 40+36+2+28+…+4'tür.Bu da;

$$4 \cdot (10 + 9 + 8 + \cdots + 2 + 1) = 4 \cdot \sum_{n=1}^{10} n = 4 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} = 4 \cdot 55 = 220\, metredir.$$

19. Bir kimyasal deney 21°C'de 50 dakika sürmektedir. Deneyin yapıldığı ortamdaki sıcaklığın her 1°C'lik artışında deney 20sn kısalmaktadır. Deney 60°C'lik ortamda ne kadar sürede tamamlanır?

Çözüm:İlk olarak 50 dakikalık süreyi saniyeye çevirelim. $50 \cdot 60 = 3000sn$

$$a_1 = 3000sn$$
$$a_2 = (3000 - 20)sn$$
$$a_3 = (3000 - 40)sn$$
$$\ldots$$
$$r = -20sn$$
$$60 - 21 = 39$$
$$a_{39} = \big(3000 - (39 \cdot 20)\big)sn$$
$$a_{39} = 2220sn$$

20. Babanızın iki çocuğu olduğunu varsayalım. Sizin ve kardeşinizin de 2 çocuğu olursa, onlarında ikişer çocukları olursa 14.jenerasyonda siz, kardeşiniz ve babanız dahil doğan çocukların toplamı kaç kişi olur?

Çözüm:

Siz ve kardeşiniz	=	2
sizin 2'şer çocuğunuz	=	4
onların 2'şer çocuğu	=	8
………………………………………………		
14.neslin çocukları	=	2^{14}

$$\sum_{n=1}^{14} 2^n + babanız$$
$$S_{14} + 1 = a_1 \cdot \frac{1 - 2^{14}}{1 - 2} + 1$$
$$S_{14} + 1 = 2 \cdot 16383 + 1$$
$$S_{14} + 1 = 32766 + 1$$
$$S_{14} + 1 = 32767$$

21. Bir DC devrede yüklü bir pil kısa devre yapıyor ve yükü boşalmaya başlıyor. İlk 0.20sn içinde yükünün %30'unu kaybeden pilin yükü 1 saniye sonra ne olur?

Çözüm:Eğer 0.20 sn'de yükünün %30unu kaybediyorsa yükünün %70'i kalır. 1 saniye 0.20 saniyenin 5 katı ise;

$$a_1 = 100$$
$$a_5 = a_1 \cdot r^4$$

$$a_5 = 100 \cdot \left(\frac{70}{100}\right)^4 = \frac{16807}{100000}$$

Pilin yükünün %16.807'si kalır.

22. Hava sürtünmesinin ihmal edildiği bir ortamda bir top uçurumdaki sert bir kayadan aşağıya doğru fırlatılıyor. İlk saniye top 16, 2.saniye 48m yol alıyor. Topun aldığı yollar geometrik bir seri oluşturuyorsa;

a) 8.saniyede top ne kadar düşer?

b) 8.saniye top onu fırlatan kişiden kaç metre aşağıda olur?

Çözüm:

$a_1 = 16$

$a_2 = 48$

$\dfrac{a_2}{a_1} = 3 = r$

$a_8 = a_1 \cdot r^7$

$a_8 = a_1 \cdot 3^7$

$a_8 = 2187m$ düşer.

b) $S_n = a_1 . \frac{1-r^n}{1-r}$

$S_8 = 16 \cdot \dfrac{1-3^8}{1-3}$

$S_8 = 16 \cdot \dfrac{6560}{2}$

$S_8 = 52.480m$

23. Yer çekim ivmesi yüksekliğin her kilometresi için 0.003 m/sn^{2}azalıyor. Eğer Los Angeles'ın 1 km üstünde g=9.793m/sn^{2}ise Los Angeles'ın9 km üstünde ne olur?

Çözüm:

$a_2 = a_1 + r$

$9.793 = a_1 + (-0.003)$

$a_1 = 9.796$

$a_9 = a_1 + 8r$

$a_9 = 9.796 + 8(-0.003)$

$a_9 = 9.769m/sn^2$olur.

24. $\sqrt[3]{4\sqrt[3]{4\sqrt[3]{4\ldots}}} = x$ ise x kaçtır?

Çözüm:İki tarafın da küpünü alırsak:

$4\sqrt[3]{4\sqrt[3]{4\ldots}} = x^3$

İçerdeki $\sqrt{4\sqrt[3]{4\ldots}}$ ifadesi x'e eşit olacağından;

$4x = x^3$

$4 = x^2$

$x = 2$ olur.

25. $\sum_{n=0}^{\infty}(\ln x)^n = 2$ olduğuna göre, x kaçtır?

Çözüm: İfadeyi açarsak:

$1 + \ln x + (\ln x \cdot \ln x) + (\ln x \cdot \ln x \cdot \ln x) = \frac{1}{1-\ln x} = 2$ olur. İçler dışlar çarpımı yaparsak $2 - 2\ln x = 1$ ise $2\ln x = 1$ ve $\ln x = \frac{1}{2}$ olur. $x = \sqrt{e}$ bulunur.

26. $(a_n) = \left(\frac{5}{n^2+3n+2}\right)$ dizisinin ilk on teriminin toplamı kaçtır?

Çözüm: $\frac{5}{n^2+3n+2} = 5 \cdot \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} = 5 \cdot \left(\frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{(n+2)}\right)$ şeklinde yazılabilir. İlk 10 terimi yazarsak;

$5 \cdot \left(\frac{1}{(2)} - \frac{1}{(3)}\right) +$

$5 \cdot \left(\frac{1}{(3)} - \frac{1}{(4)}\right) +$

...

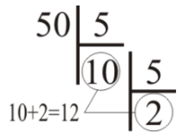
$5 \cdot \left(\frac{1}{(11)} - \frac{1}{(12)}\right)$

şeklinde yazarsak cevap $\frac{5}{2} - \frac{5}{12} = \frac{25}{12}$ bulunur.

27. $a_n = 2n - 1$ Genel terimi verilen dizi için $a_{50!}$'nin sonunda kaç tane "9" bulunur?

Çözüm: Faktöriyelli bir sayının sonundaki 0(sıfır) sayısını bulmak için 10 sayısının büyük çarpanı olan 5'e bölerek 50! sayısının sonundaki 0 sayısını buluruz. Genel terimde n yerine 50! yazarsak $a_{50!} = 2 \cdot 50! - 1$ denklemini elde ederiz. Bir sayıyı 2'yle çarparak sonundaki sıfır sayısı artmaz. Bunun nedeni 10'un diğer çarpanı olan 5'in bulunmamasıdır. Bu yüzden baştaki 2 katsayısı önemsizdir.

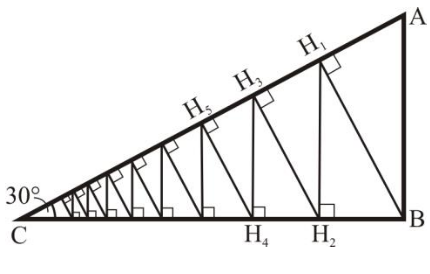
Yandaki işleme göre 50! sonunda 12 adet 0(sıfır) bulunur. Sonunda 12 tane sıfır olan bir sayıdan 1 çıkartırsak tüm sıfırlar 9 olacağı için $a_{50!}$'in sonunda 12 tane 9 bulunur.



28. C açısı 30°'dir. |AC|=6 birimdir.

$|AB|+|BH_1|+|H_1H_2|+|H_2H_3|+\ldots$

şeklinde sonsuza kadar toplama işlemi yaparsak sonuç kaç birim olur?



Çözüm:

|AB|=3

$|BH_1|= \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$BH_1|= \frac{9}{4}$

$|H_1H_2|= \frac{9\sqrt{3}}{8}$

$|H_2H_3|=\dots$

Toplam uzunluk $= 3 + \sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 3 + 3 \cdot \left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)$

$$= 3 + 3 \cdot \left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}\right) = 3 + 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right)$$

$$= 3 + 3 \cdot \left(2\sqrt{3} + 3\right) = 6\sqrt{3} + 18$$

29. $\left.\begin{array}{r} a_1 = a \\ r = 2 \\ a_n = b \end{array}\right\}$ Bilgileri veriliyor. Buna göre a ve b cinsinden S_n kaçtır?

(a_n geometrik bir dizidir.)

Çözüm:

$b = a \cdot 2^{n-1}$

$2b = a \cdot 2^n$

$S_n = a \cdot \frac{1 - 2^n}{1 - 2}$

$S_n = \frac{a - a \cdot 2^n}{-1}$

$S_n = \frac{a - 2b}{-1}$

$S_n = 2b - a$

30. 2 ile 162 arasına geometrik dizi oluşturacak şekilde 3 terim yerleştirildiğinde ortak çarpan kaç olur?

Çözüm: $r = \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}} \Rightarrow r = \sqrt[4]{\frac{162}{2}} = \sqrt[4]{81} = 3$

31. Bir top 200 metreden düşüşe bırakılıyor. Top yere çarptıktan sonra yüksekliğinin 4'te biri kadar yükseliyor. Yüksekliğe bağlı zaman denklemi $h = 5t^2$ ise topun havada kalma süresi nedir?

Çözüm:

Topun ilk havada kalma süresini hesaplarsak;

$200 = 5t^2 t = 2\sqrt{10}$

$50 = 5t^2 t = \sqrt{10}$

$12{,}5 = 5t^2 t = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$

...

Görüldüğü gibi zaman için $r = \frac{1}{2}$'dir. Genel denklemi yazarsak $\sum_{n=-1}^{\infty} \frac{\sqrt{10}}{2^n}$ olur. Bunu da hesaplayabilmek için n=1'den başlatırsak ve topun ilk seferden sonra önce çıktığını sonra tekrar indiğini göz önünde bulundurursak $2\sqrt{10} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{10}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ olur. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ ifadesinin de $\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$ 'e eşit olduğunu yazarsak t=$6\sqrt{10}$ bulunur.

32. Bir geometrik dizinin ardışık 7 terimi x,y,z,a,b,c olduğuna göre x.y.z.a.b.c'nin değeri nedir?

Çözüm:

Geometrik dizilerde ortadaki terimi bulmak için ona eşit uzaklıkta olan terimleri kök içinde çarpıyorduk. Örneğin; $\sqrt{a_3 \cdot a_1} = a_2$

Buna göre ; x.c, y.b, z.a çarpımlarının değerleri ortalarındaki terim olan 2'nin karesine eşit olur.

x.y.z.a.b.c=x.c.y.b.z.a şeklinde yazarsak x.y.z.a.b.c=$2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 = 2^6 = 64$ olur.

33. $x^3 - 6x^2 + (a+1)x + a + 8 = 0$ denkleminin kökleri bir aritmetik dizi oluşturduğuna göre, a kaçtır?

Çözüm:$\mathrm{ax}^3 + \mathrm{bx}^2 + \mathrm{cx} + \mathrm{d} = 0$ denkleminin kökleri $\mathrm{x}_1,\ \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3$ olsun.

Kökler bir aritmetik dizi oluşturulduğuna göre,

$x_2 = \dfrac{x_1 + x_3}{2} dir.$

Buradan, $x_1 + x_3$=2x_2 elde edilir.

$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = 6$

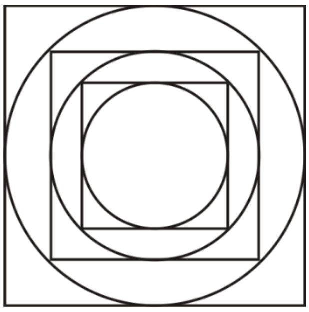
$3x_2 = 6$

$x_2 = 2$

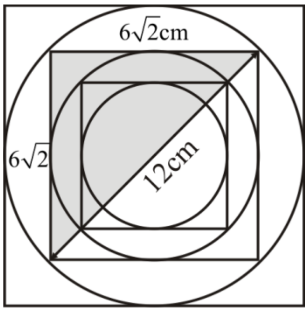
x=2 kök olduğundan denklemi sağlayacaktır.

$2^3 - 6.2^2$ + (a+1).2+a+8=8-24+2a+2+a+8=0 ise 3a=6 ve a=2 olur.

34. Şekildeki en büyük karenin bir kenarı 12cm'dir.Bu köşeleri çember üzeinde karenin kenarlarına teğet olan bir çember, bu çemberin, içine olan bir kare çiziliyor. Bu şekilde sonsuz adet çember ve kareler çizilirse karelerin alanları toplamı kaç cm^2 olur?



Çözüm:



Karelerin kenarlarını şekildeki gibi hesaplarsak kenarlar:

$12 - 6\sqrt{2} - 6 - 3\sqrt{2} - \cdots - \frac{12}{(\sqrt{2})^n}$ şeklinde devam eder.

Buradan alanları hesaplarsak:

$(12)^2 + \left(6\sqrt{2}\right)^2 + (6)^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{12}{(\sqrt{2})^n}\right)^2$ olur.

Toplam alan;

$$(12)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{12}{\left(\sqrt{2}\right)^n}\right)^2 = 144 + 144\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 144 + 144 \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 288cm^2$$

35. $\sqrt{x - \sqrt{x - \sqrt{x - \ldots}}} = 6$ ise x kaçtır?

Çözüm:İki tarafın da karesini alırsak;

$x - \sqrt{x - \sqrt{x - \ldots}} = 36$

İçerideki $\sqrt{x - \sqrt{x - \ldots}}$ ifadesi de 6'ya eşit olacağından;

$x - 6 = 36$ ve $x = 42$ bulunur.

36. $1<x<y$ olmak üzere,

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^{2n}}{3^n y^{3n}}$ ifadesinin eşiti nedir?

Çözüm:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^{2n}}{3^n y^{3n}}$İfadesi $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2x^2}{3y^3}\right)^n$ olur. Baştaki $\frac{2}{3}$ zaten 1 den küçüktür. Soruda y'nin x'ten büyük olduğu verilmiş bu yüzden $\frac{x^2}{y^3}$ ifadesi de 1 den küçüktür. Bu yüzden bu toplamı $\frac{a_1}{1-r}$formülünden bulabiliriz. Bunu yazarsak;

$\frac{\frac{2x^2}{3y^3}}{1-\frac{2x^2}{3y^3}} = \frac{2x^2}{3y^3-2x^2}$olur.

37. $(a_n) = \left(\frac{n^2-n-12}{2n+1}\right)$ dizisinin kaç tane terimi negatiftir?

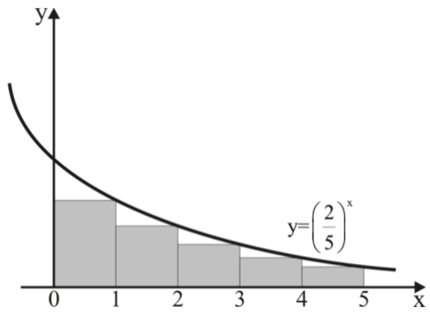
Çözüm:$n^2 - n - 12 = 0$

$\Rightarrow \quad (n-4)(n+3)=0 \Rightarrow$n-4=0 $\Rightarrow$ n=4 ve n+3=0$\Rightarrow$n=-3

$\forall n \in N^{+}\ için(2n+1) \in N^{+}$ olduğundan $n^2-n-12<0$ olmalıdır.

$1 \leq n \leq 4$n={1,2,3} için dizinin terimleri negatiftir. Yani dizinin üç terimi negatiftir.

38. Yanda $y=(\frac{2}{5})^{x}$ eğrisinin grafiği verilmiştir. Oy ekseninden başlayarak genişlikleri 1 birim olan dikdörtgenler sonsuza değin çizilirse oluşan tüm dikdörtgenlerin alanları toplamı nedir?

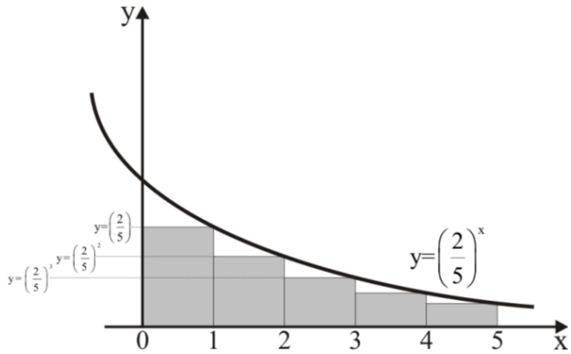


Çözüm:

$1.\,\text{dikdörtgeninalanı} = 1 \cdot \frac{2}{5}$

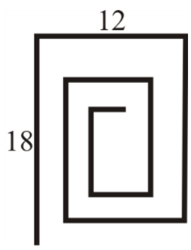
$2.\,\text{dikdörtgeninalanı} = 1.\left(\frac{2}{5}\right)^{2}$

$\text{n}.\,\text{dikdörtgeninalanı} = 1.\left(\frac{2}{5}\right)^{\text{n}}$



1.Alan+2.Alan+……+n.Alan=$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{n} = \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{2}+\cdots+\left(\frac{2}{5}\right)^{n}+\cdots=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{5}}=\frac{2}{3}$

39. Şekildeki dikey doğrultuların en uzunu 18cm, yatay doğrultuların en uzunu 12cm'dir.Her doğru parçasının uzunluğu, kendisine paralel olan ve kendisinden büyük olan en küçük doğru parçasının $\frac{3}{4}$ katıdır. Buna göre bu şekilde sonsuza kadar devam eden yatay ve dikey doğru parçalarının uzunlukları toplamı kaç cm'dir?



Çözüm:

Dikey çubukların uzunlukları toplamı=$18+18\cdot\frac{3}{4}+18\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}+\cdots+18\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n}$

Yatay çubukların uzunlukları toplamı=$12+12\cdot\frac{3}{4}+12\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}+\cdots+12\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n}$

Toplam uzunluk= Dikey uzunluk + Yatay uzunluk

Toplam uzunluk $=18+\sum_{n=1}^{\infty}18\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n}+12+\sum_{n=1}^{\infty}12\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n}$

$=30+18\cdot\left(\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}\right)+12\cdot\left(\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}\right)$

$=30+18\cdot 3+12\cdot 3$=30+90=120

40. $(a_n)=\left(\frac{3n^2-5n+36}{n}\right)$ dizisinin kaç terimi tamsayıdır?

Çözüm:

$a_n=\left(3n-5+\frac{36}{n}\right)$ şeklinde yazarsak 3n-5'in her halükarda tamsayı olacağı görülür bu yüzden $\frac{36}{n}$ sayısı incelenir. 36'nın tam bölenleri de 1,2,3,4,6,9,12,18,36 dır. Bu yüzden 9 terim tamsayıdır.

41. $\sum_{n=3}^{\infty}(0,a)^n=\frac{1}{100}$olduğuna göre a kaçtır?

Çözüm:

$$a_1=\left(\frac{a}{10}\right)^1\ a_2=\left(\frac{a}{10}\right)^2\ r=\frac{a_2}{a_1}=\frac{a}{10}$$

$$S_n=\frac{a_1}{1-r}=\frac{\frac{a^3}{10^3}}{1-\frac{a}{10}}=\frac{\frac{a^3}{10^3}}{\frac{10-a}{10}}=\frac{\frac{a^3}{10^2}}{10-a}=\frac{1}{100}$$

$$\frac{a^3}{10^2}=\frac{10-a}{10^2}$$

$$a^3+a-10=0$$

$$a(a^2+1)=10$$

$$a=2$$

42. $(x^2+mx+8)\cdot(x-3)=0$ Denkleminin kökleri tamsayı ve bir aritmetik dizi meydana getiriyorsa m kaçtır?

Çözüm: $x-3=0$ denkleminin kökü 3 bulunur.3 kökü (x^2+mx+8) denkleminin kökleriyle de aritmetik dizi oluşturuyorsa 8'in çarpanlarına bakarak -2 ve -4 sayılarının bu kökü sağladığını bulabiliriz. (-2)+(-4)=(-6) olarak da m'i buluruz.

43. $f(x)=e^x$ olduğuna göre,

f(-1)+f(-2)+f(-3)+… toplamının değeri kaçtır?

Çözüm:

$$f(-1)=\frac{1}{e}vef(-2)=\frac{1}{e^2}\quad \text{ise r}=\frac{a_2}{a_1}=\frac{f(-2)}{f(-1)}=\frac{\frac{1}{e^2}}{\frac{1}{e}}=\frac{1}{e}$$

$$S_n=\frac{a_1}{1-r}=\frac{\frac{1}{e}}{1-\frac{1}{e}}=\frac{\frac{1}{e}}{\frac{e-1}{e}}=\frac{1}{e-1}\ \text{bulunur.}$$

44. Aşağıdaki serilerin karakterlerini belirleyiniz.

a) $\sum \frac{1}{3^{n-1}}$ b) $\sum \frac{1}{n^2}$ c) $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ d) $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$

e) $\sum \frac{1}{2n+1}$ f) $\sum \frac{n}{(n+1)^3}$ g) $\sum \frac{1}{\ln n}$ h) $\sum \frac{1}{\ln n^{2003}}$

i) $\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ j) $\sum \frac{1}{n^{3/2}+1}$ k) $\sum \frac{n^3}{5^n}$ l) $\sum \frac{2003}{n!}$

m) $\sum \frac{10^n}{n!}$ n) $\sum \frac{n(n+1)(n+2)}{5^n}$ o) $\frac{2}{3} + \frac{2.3}{4.5} + \frac{2.3.4}{5.6.7} + ...$