8. BÖLÜM

KARMAŞIK SAYILAR

8.1.Giriş

$x^2 = -1$ denkleminin reel sayılarda çözümü yoktur. Bir başka deyişle reel sayı sisteminde karesi –1 olan hiçbir reel sayı bulunamaz. Bu nedenle, reel sayılara i veya j sembolleri ile gösterilen ve karesi (–1) olan imajiner birimi dahil edelim.

$i = \sqrt{-1}$ veya $i^2 = -1$ olsun.

8.1.1.Tanım: Bir karmaşık sayı genel olarak z = a + ib şeklinde tanımlanır. Burada, **a** ve **b** reel sayı iken $i = \sqrt{-1}$ imajiner birimdir. Buna göre karmaşık sayılar kümesi ;

$$\mathbf{C} = \{\, a+ib \mid a,b \in \mathrm{IR}\ ,\ i = \sqrt{-1} \,\}$$ şeklinde gösterilir.

z = a+ib karmaşık sayısında **b=0** ise bu karmaşık sayı bir **reel** sayıdır. **a=0** ise **z=ib** sayısına **pür imajiner** sayı denir.

Örnek.8.1 :2 karmaşık sayısı bir reel sayıdır. Çünkü b=0'dır.

$\sqrt{5}i$ karmaşık sayısı aynı zamanda bir pür imajiner sayıdır. Çünkü a=0'dır.

Böylece a+ib karmaşık sayısında a sayısına a+ib karmaşık sayısının **reel kısmı** , b sayısında a+ib karmaşık sayısının **imajiner kısmı** denir. Bir karmaşık sayı genellikle **z=a+ib** şeklinde gösterilir. Bu gösterime bir karmaşık sayının **kartezyen formu** denir.

8.2.Karmaşık Sayılarda Dört İşlem

8.2.1.Toplama :z_1=a+ib ve z_2 =c+id iki karmaşık sayı olsun. Bu durumda;

$z_1+z_2 = (a+ib)+(c+id) = \underbrace{(a+c)}_{e} + i\underbrace{(b+d)}_{f} = e + if$ olur. Yani $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ ise $z_1+z_2 \in \mathbf{C}$'dir.

Buna göre, **C** kümesi toplama işlemine göre kapalıdır.

8.2.2.Çıkarma:$z_1 = a + ib$ ve $z_2 = c + id$ iki karmaşık sayı iken;

$z_1 - z_2 = (a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d) = u - i.v$ yine bir karmaşık sayıdır.

$z_1, z_2 \in \mathbf{C} \Rightarrow z_1 - z_2 \in \mathbf{C}$ 'dir. Yani karmaşık sayılar kümesi çıkarma işlemine göre kapalıdır.(i birimi genellikle matematikte kullanılırken j birimi genellikle Elektrik-Elektronik ve benzeri alanlarda kullanılır).

Örnek.8.2: $-2i + (4 - 3i) = 4 - 5i$

$(-1 + i) + (2 - 5i) = (-1 + 2) + i(1 - 5) = 1 - 4i$

$(3 - 2i) + (4 + i) = (3 + 4) + i (-2 + 1) = 7 - i$

8.2.3.Çarpma: $z_1 = a + ib$ ve $z_2 = c + id$ iki karmaşık sayı iken ;

$z_1 . z_2 = (a + ib) . (c + id) = (a . c + i.a.d + i.b.c + i^2.b.d)=(a.c-b.d)+i(a.d+b.c)= m + i.n$ yine bir karmaşık sayıdır. Yani karmaşık sayılar kümesi çarpma işlemine göre kapalıdır. Buna göre ; $z_1 , z_2 \in \mathbf{C} \Rightarrow z_1 . z_2 \in \mathbf{C}$ 'dir.

Örnek.8.3: $(2 - 3i).(4 + i) = (2.4 + 3) + i(2 - 12) = (8 + 3) + i(-10) = 11 - 10i$

8.2.4. Bir Karmaşık Sayının Eşleniği

Bir karmaşık sayının eşleniği, sayının imajiner kısmının işareti değiştirilerek bulunur.

z = a + ib bir karmaşık sayı iken **a - i.b** sayısına **z sayısının eşleniği** denir ve;

$\bar{z}$ ile gösterilir. Buna göre; $z = a + ib \Rightarrow \bar{z} = a - ib$ olur.

8.2.5. Bölme : $z_1 = a + ib$ ve $z_2 = c + id$ iki karmaşık sayı iken;

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+i.b}{c+i.d} = \left(\frac{a+i.b}{c+i.d}\right).\left(\frac{c-i.d}{c-i.d}\right) = \frac{(a.c+b.d)+i.(b.c-a.d)}{c^2+d^2}$$

$$\underbrace{\frac{(a.c+b.d)}{c^2+d^2}}_{p} + i.\underbrace{\frac{(b.c-a.d)}{c^2+d^2}}_{q} = p + i.q$$

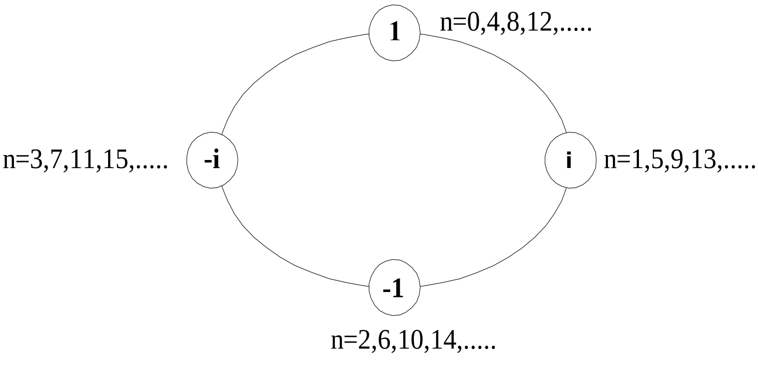
Örnek.8.4: $\frac{2-3i}{1-i} = ?$

Çözüm.8.4: $\left(\frac{2-3i}{1-i}\right).\left(\frac{1+i}{1+i}\right) = \frac{5-i}{1+1} = \frac{5-i}{2} = \frac{5}{2} - \frac{i}{2}$

8.3. i'nin Kuvvetleri

i^n , n'in alabileceği değerlere göre aşağıdaki değerleri alır.

$i^4 = i^2. i^2=(-1).(-1) =1$ olduğundan i^n 'nin alabileceği değerlerde buna göre belirlenebilir.



Örnek.8.5: $i^{29}= i^{28} .i=(i^4)^7.i=(1^7).i = i$

$i^{43}=i^{40}.i^3=(i^4)^{10}.i^3=(1)^{10}.i^2.i=1.(-1).i=-i$

Örnek.8.6: $f(x) = 3x^7 - 2x^6 + 5x^5 - x^4 + 3 \Rightarrow f(i) = ?$

Çözüm.8.6: $i^7 = \underbrace{i^4}_{1}.\underbrace{i^2}_{-1}.i = -i \Rightarrow i^6 = \underbrace{i^4}_{1}.\underbrace{i^2}_{-1} = -1 \Rightarrow i^5 = i^4.i = i$

$$f(i) = 3(i)^7 - 2(i)^6 + 5(i)^5 - i^4 + 3 = -3i + 2 + 5i - 1 + 3 = 2i + 4$$

8.4.İkinci Derece Denklemler

$f(x)=ax^2+bx+c = 0$ denkleminin kökleri $\Delta= b^2 - 4.a.c < 0$ iken reel değildir. Bu denklemin kökleri karmaşıktır.

Örnek .8.7: $x^2 - 2x + 5 = 0$ denkleminin köklerini bulunuz.

Çözüm.8.7: $\Delta = (-2)^2 - 4.(1).(5) = 4 - 20 = -16 < 0$

$$x_{1,2} = \frac{2 \mp \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \mp 4i}{2} \Rightarrow x_1 = 1 + 2i \text{ ve } x_2 = 1 - 2i \text{ olur.}$$

8.4.1. Karmaşık Çarpanlar

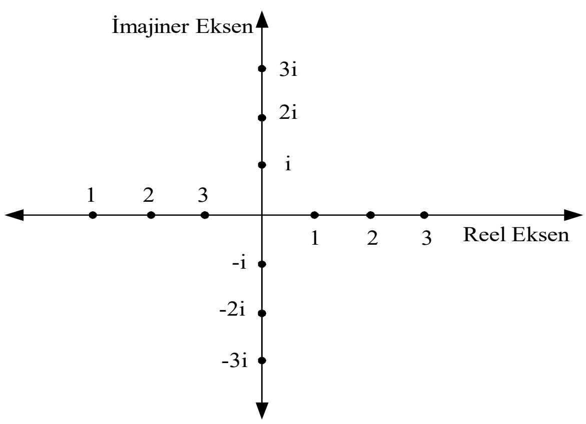
Örnek .8.8.a: $x^2 + 9 = x^2 - 9.i^2 = x^2 - (3i)^2 = (x - 3i)(x + 3i)$

Örnek.8.8.b: $4x^2 + 25 = 4x^2 - 25.i^2 = (2x)^2 - (5i)^2 = (2x - 5i)(2x + 5i)$

8.5. Karmaşık Sayıların Grafiği

8.5.1. Karmaşık Düzlem

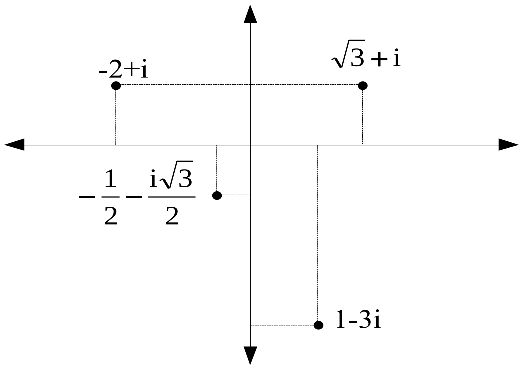
Kartezyen formdaki bir karmaşık sayı bilindiği gibi reel kısım a ve imajiner kısım ib olmak üzere iki kısımdan oluşmaktadır. Yani, bir karmaşık sayının gösterimi için yine kartezyen koordinat sistemini kullanacağız. Kartezyen koordinat sistemindeki yatay eksene reel eksen düşey eksene ise imajiner eksen adı verilir. Yani bir karmaşık sayının reel kısmını oluşturan sayıların imajiner eksene aynı kartezyen koordinatlarda olduğu gibi yerleştiriyoruz. İşte elde edilen bu yeni düzleme **Karmaşık Düzlem** adı verilir. (Şekil.8.1)



Şekil.8.1 : Karmaşık Düzlem

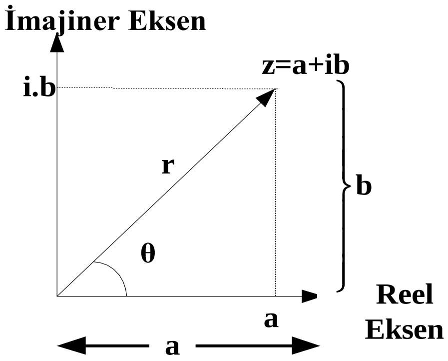
Örnek.8.9: $-2+i\,,\sqrt{3}+i\,,\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ve $1-3i$ sayılarını karmaşık düzlemde gösteriniz

Çözüm.8.9:



8.6. Bir Karmaşık Sayının Trigonometrik Formu

Karmaşık düzlemin 1. Bölgesinde herhangi bir **z= a+ib** karmaşık sayısını göz önüne alalım. Bu noktayı orjin ile birleştiren vektöre de yarıçap vektörü (r) veya **z= a+ib** karmaşık sayısının modülü denir ve $|Z| = |a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$ ile gösterilir. Ayrıca reel eksenin pozitif yönü ile r yarıçap vektörü arasında kalan dar açıyı da θ ile gösterelim .(Şekil.8.2).



Şekil.8.2. z=a + i.b karmaşık sayısının trigonometrik formu

θ dar açısının trigonometrik fonksiyonlarından $\sin\theta = \frac{b}{r}$, $\cos\theta = \frac{a}{r}$ olarak bulunur.

Buna göre; **b = r . sinθ** ve **a = r. cosθ’** dır. Bu değerler z= a + ib karmaşık sayısında a ve b yerine yazılırsa; **a + ib = r (cosθ + i.sinθ) = r (cosθ + i.sinθ)** ifadesine **z = a + ib** karmaşık sayısının **trigonometrik formu** denir. b = r. sinθ ve a = r. cosθ’ dır. Bu değerler a+ib karmaşık sayısında a ve b yerine yazılırsa;

a + ib = r. cosθ + i.r.sinθ = r. (cosθ + i.sinθ) ifadesine a + ib karmaşık sayısının **kutupsal formu** denir ve **r ∠ θ** ile gösterilir. Burada r yarıçapı mutlak değer veya bir karmaşık sayının modülü olarak bilinir.

Pythagorean Teoreminden;

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ olarak bulunur. (r > 0) θ açısı z= a + ib karmaşık sayısının **argümanı** olarak adlandırılır ve **tanθ** = $\frac{b}{a}$ oranından yararlanılarak; **θ** = **arctan** $\frac{b}{a}$ olarak elde edilir. Kutupsal formun bir diğer gösterimi de **r.cis θ**' dır. r.cis θ' da i=$\sqrt{-1}$ olur.

Örnek.8.10: $Z = 1 - \sqrt{3}i$ *sayısını tüm biçimlerde yazınız.*

Çözüm.8.10: $r = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$

$$\text{tg}\theta = \frac{y}{x} = -\frac{\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$$
$$\theta = \text{Arctg}\,(-\sqrt{3} = 360° - 60° = 300°$$
$$\sin\theta = \frac{y}{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2} = 60°$$
$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2} = 60°$$
$$1 - \sqrt{3}\text{i} = 2\,(\cos 300° + \text{i}\ \sin 300°) = 2\angle 300° = 2(\tfrac{1}{2} - \text{i}\ \tfrac{\sqrt{3}}{2}) = 1 - \sqrt{3}\,\text{i}$$

8.7. Kutupsal Formda Aritmetik İşlemler

8.7.1.Çarpma: Kutupsal formdaki karmaşık sayıların çarpımı aşağıdaki gibi yapılır.

$z_1 = r_1\angle\theta_1 = r_1(\cos\theta_1 + i.\sin\theta_1)$

$z_2 = r_2\angle\theta_2 = r_2(\cos\theta_2 + i.\sin\theta_2)$ iki karmaşık sayı olsun. Buna göre;

$z_1.\,z_2 = r_1\angle\theta_1.r_2\angle\theta_2 = [\,r_1(\cos\theta_1 + i.\sin\theta_1)].[\,r_2(\cos\theta_2 + i.\sin\theta_2)]$

$= r_1.r_2(\cos\theta_1.\cos\theta_2 + i.\sin\theta_1.\sin\theta_2 + i^2.\sin\theta_1.\cos\theta_2 + i.\cos\theta_1.\sin\theta_2)$

$= r_1.r_2[\underbrace{(\cos\theta_1.\cos\theta_2 - \sin\theta_1.\sin\theta_2)}_{\cos(\theta_1+\theta_2)} + i\underbrace{(\sin\theta_1.\cos\theta_2 + \cos\theta_1.\sin\theta_2)}_{\sin(\theta_1+\theta_2)}]$

$= r_1.r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + \sin(\theta_1+\theta_2)] = r_1.r_2.\text{cis}(\theta_1+\theta_2) = \mathbf{r_1.r_2 \angle (\theta_1+\theta_2)}$

Örnek.8.11: a) **(**1/2 ∠ 30˚). (2 ∠ 60˚) =?

Çözüm.8.11: a) 1/2 ∠ 30˚.2 ∠ 60˚ = 1/2.2 ∠ (30˚+60˚) = 1 ∠ 90˚ = 1(cos90˚+i.sin90˚) = i

b) **(**3/2 ∠ 75˚).(5/4 ∠ 45˚) = (3/2).(5/4) ∠ (75˚+45˚) = 15/8 ∠ 120˚

=15/8(cos120˚+i.sin120˚) = 15/8($-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} + \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}\mathbf{i}$)

8.7.2.Bölme: Kutupsal formdaki $r_1\angle\theta_1$ ve $r_2\angle\theta_2$ sayılarının bölmesi;

$$\frac{r_1\angle\theta}{r_2\angle\theta}=\frac{r_1(\cos\theta_1+\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+\sin\theta_2)}=\frac{r_1(\cos\theta_1+\sin\theta_1)(\cos\theta_2-i.\sin\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2+\sin\theta_2)(\cos\theta_2-i.\sin\theta_2)}$$

$$=\frac{r_1(\cos\theta_1.\cos\theta_1-i.\cos\theta_1.\sin\theta_2+i.\sin\theta_1.\cos\theta_2-i^2.\sin\theta_1.\sin\theta_2)}{r_2(\cos^2\theta_2-i^2.\sin^2\theta_2))}$$

$$=\frac{r_1(\cos\theta_1.\cos\theta_2+i.\sin\theta_1.\sin\theta_2)+i(.\sin\theta_1.\cos\theta_2-\cos\theta_1.\sin\theta_2)}{r_2(\cos^2\theta_2-i^2.\sin^2\theta_2))}$$

$$\frac{r_1}{r_2}=\left[\cos(\theta_2+\theta_1)+i.\sin(\theta_2+\theta_1)\right]=\frac{r_1}{r_2}cis(\theta_1-\theta_2)=\frac{r_1}{r_2}\angle\left(\theta_1-\theta_2\right)$$

Örnek.8.12: $\frac{3\angle 45}{2\angle 15}=?$

Çözüm.8.12:

$$\frac{3\angle 45^0}{2\angle 15^0}=\frac{3\angle 45^0-15^0}{2}=\frac{3\angle 30^0}{2}=\frac{3(\cos 30^0+i.\sin 30^0)}{2}$$

$$\frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{i.3}{4}$$

8.8. Euler Formu (Üstel Form)

Karmaşık sayıları aşağıdaki şekillerde ifade etmiştik;

$z = a+ib$ şekline kartezyen form

$z = r.(\cos\theta+i.\sin\theta)$ şekline trigonometrik form

$z = r\ \angle\ \theta$ şekline kutupsal form denir.

Karmaşık sayının bir diğer şeklide üstel formudur ve Euler formülü olarak bilinir.

$e^{i\theta}= \cos\theta+i.\sin\theta$ (Euler Formülü)

Euler Formülü olarak bilinen bu ifade trigonometrik formda yerine yazılırsa;

$$\mathbf{z = r.e^{i\theta}=r(\cos\theta+i.\sin\theta)}$$

olur. İşte bu yazılışa karmaşık sayının **Üstel Formu** denir. Bu formülde kullanılan **θ** açısı (faz açısı) radyan cinsindendir.

8.9.Üstel Formda Aritmetik İşlemler

8.9.1.Çarpma:Üs kurallarını kullanarak üstel formdaki iki karmaşık sayıyı çarpalım.

$$z_1=r_1.e^{i\theta_1}\quad \text{ve}\ z_2=r_2.e^{i\theta_2}\quad \text{olsun. Buna göre ;}\quad z_1.z_2=r_1.r_2.e^{i(\theta_1+\theta_2)}\quad \text{olur.}$$

8.9.2.Bölme: Üs kurallarını kullanarak üstel formdaki iki karmaşık sayının bölümünü yapalım. $z_1 = r_1.e^{i\theta_1}$ ve $z_2 = r_2.e^{i\theta_2}$ iki karmaşık sayı olsun.

Böylece; $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$ olarak bulunur.

Örnek.8.13: 2(cos135°+i.sin135°) karmaşık sayısını üstel formda ifade ediniz.

Çözüm.8.13: r = 2 ve θ = 135° olduğundan radyana çevirirsek;

$$r = 2,\ \theta = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow z = r.e^{i\theta} = 2.\, e^{\frac{i3\pi}{4}}$$

Örnek.8.14: 5(cos240°+i.sin240°) karmaşık sayısını üstel formda ifade ediniz.

Çözüm.8.14: r = 5 ve θ = 240° ise $r.\ e^{i\theta} = 5.\, e^{i\frac{4\pi}{3}}$

Örnek.8.15: $z_1 = -5 + 4i$ ve $z_2 = 4 + 5i$ $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = ?$

Çözüm.8.15: $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{\sqrt{(-5)^2 + (4)^2}}{\sqrt{4^2 + 5^2}} = \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{41}} = 1$

Örnek.8.16: $z = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i \Rightarrow |z^8| = ?$

Çözüm.8.16: $|z^8| = |z|^8$ özelliğinden; $\left|-\sqrt{2} - \sqrt{2}i\right|^8$

$$\left(\sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2 + \left(-\sqrt{2}\right)^2}\right)^8 = \left(\sqrt{4}\right)^8 = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^8 = 4^4 = 256$$

Örnek.8.17: $3x - iy + xi - y = 3 - 5i$ olması için $(x, y) = ?$

Çözüm.8.17: $3x - y + (x - y)i = 3 - 5i$

$$\left.\begin{aligned} 3x - y &= 3 \\ x - y &= -5 \end{aligned}\right\} 2x = 8 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow y = +9 \Rightarrow (x, y) = (4, +9)$$

Örnek.8.18: $\left|\frac{z-2}{z+2}\right| = 3$ ifadesinin karmaşık düzlemde görüntüsü nedir?

Çözüm.8.18: $\frac{|z-2|}{|z+2|} = 3 \Rightarrow |z-2| = 3 \cdot |z+2|$

$z = x + iy$ olduğuna göre;

$z - 2 = x + iy - 2 = (x - 2) + iy \Rightarrow \quad |z - 2| = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$

$$z+2 = x+iy+2 = (x+2)+iy \quad \Rightarrow \quad |z+2| = \sqrt{(x+2)^2+y^2}$$

$$|z-2| = 3.|z+2|$$

$\sqrt{(x-2)^2+y^2} = 3.\sqrt{(x+2)^2+y^2}$ her iki tarafın karesi alınırsa

$$x^2-4x+4+y^2 = 9x^2+36x+36+9y^2$$

$$8x^2+8y^2+40x+32 = x^2+y^2+5x+4 = 0$$

$(x+\frac{5}{2})^2+(y-0)^2 = (\frac{3}{2})^2$ olur .Bu merkezi M(-2.5,0) ve yarıçapı r =1.5 olan çemberdir.

Örnek.8.19: $z = 3-4i$ ise $|z^{-1}| = ?$

Çözüm.8.19: 1.Yol; $|z^{-1}| = \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{1}{5}$

2.Yol; $|z^{-1}| = |z|^{-1} = \left(\sqrt{3^2+(-4)^2}\right)^{-1} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$

Örnek.8.20: $z = \sqrt{3}-2 \Rightarrow |z^{-3}| = ?$

Çözüm.8.20: 1.Yol; $|z^{-3}| = \left|\frac{1}{z^3}\right| = \frac{1}{|z^3|} = \frac{1}{|z|^3} = \frac{1}{\left(\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-2)^2}\right)^3} = \frac{1}{7^{3/2}}$

2.Yol; $|z^{-3}| = |z|^{-3} = \left(\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-2)^2}\right)^{-3} = (\sqrt{7})^{-3} = \left(7^{1/2}\right)^{-3}$

Örnek.8.21: $|z+1| = |z-2i|$ eşitliğinin doğruluk kümesi nedir?

Çözüm.8.21:

$|x+iy+1| = |x+iy-2i|$

$|(x+1)+iy| = |x+i(y-2)|$

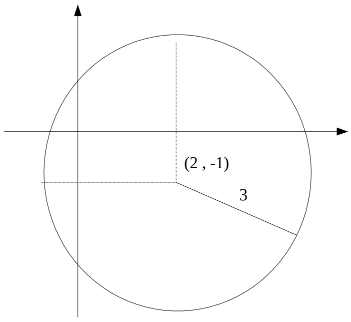
$\sqrt{(x+1)^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y-2)^2}$

h.i.t.k.a $\rightarrow$ $(x+1)^2+y^2 = x^2+(y-2)^2$

$\rightarrow x^2+2x+1+y^2 = x^2+y^2-4y+4$ ise $2x+4y-3=0$ doğrusudur.

Örnek.8.22: z=x+iy olmak üzere |z-(2-i)|=3 noktalarını analitik düzlemde gösteriniz.
Çözüm.8.22:

$$|z-(2-i)|=3 \Rightarrow |x+iy-(2-i)|=3$$
$$\Rightarrow |x-2+iy+i|=3$$
$$\Rightarrow |(x-2)+i(y+1)|=3$$
$$\Rightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}=3$$
$$\Rightarrow (x-2)^2+(y+1)^2=9$$



M(2,-1) olan ve r=3 olan çemberdir.

Örnek.8.23: z=x+iy için $|z-i|=|z+3|$ düzlemde ne belirtir?

Çözüm.8.23:

$$|z-i|=|z+3| \Rightarrow |x+iy-i|=|x+iy+3|$$
$$|x+i(y-1)|=|(x+3)+iy| \Rightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x+3)^2+y^2}$$
$$x^2+(y-1)^2=(x+3)^2+y^2 \Rightarrow x^2+y^2-2y+1=x^2+6x+9+y^2$$
$$6x+2y+8=0 \Rightarrow 3x+y+4=0$$

doğru belirtir.

8.10. Karmaşık Üsler

z= a + ib karmaşık sayısını göz önüne alalım. **z^n = (a + ib)^n** ifadesi z karmaşık sayısının n. kuvveti olarak adlandırılır ve De' Moivre Teoremi kullanılarak hesaplanabilir Şöyle ki ;

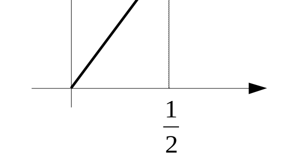
$z^n = (r\,\angle\theta)^n = r^n$	**(Kutupsal Form)**
$z^n = (a + ib)^n$	**(Kartezyen Form)**
$z^n = (a + ib)^n = r^n(\cos\theta + i.\sin\theta)^n$	**(Trigonometrik Form)**
$z^n = (r.e^{i.\theta})^n = r^n e^{i.n..\theta} = r^n(\cos\theta + i.\sin\theta)^n$	**(Üstel Form)**

olur ve r yarıçapı ile θ argümanı belirlenerek istenilen karmaşık sayının n. kuvveti bulunur.

Örnek.8.24: $\left(\frac{1}{2}+i.\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{100}=?$

Çözüm.8.24: $r=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$

$$\tan\theta=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3} \Rightarrow \theta=Arc\tan\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$$



$$\left(\frac{1}{2}+i.\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{100} = (r.e^{i\theta})^{100} = r^{100}.e^{i.\theta.100} = 1^{100}.e^{i.100\frac{\pi}{3}}$$

$$=1.\left(Cos\frac{100\pi}{3}+i.Sin\frac{100\pi}{3}\right) = Cos\frac{4\pi}{3}+i.Sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}-i.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

8.11.Karmaşık Kökler

$z^n = a + ib$ ifadesi n. dereceden bir denklemi ifade ederken z^n -(a + ib) = 0 denkleminin köklerini bulmak yani a + ib karmaşık sayısının n. kökünü bulmak için De Moivre Teoremi'nden yararlanılır.

Şöyle ki; $\mathbf{z^n = a + ib} \Rightarrow \mathbf{z = (a + ib)^{\frac{1}{n}} = (r \angle \theta)^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}} \angle \frac{\theta}{n}$

$\mathbf{z_{k+1} = r[cos(\frac{(\theta + 2k\pi)}{n}) + i.sin(\frac{(\theta + 2k\pi)}{n})]}$ **(kЄZ) ($0 \le k \le n - 1$)** ifadesi bulunur.

Böylece, $0 \le k \le n - 1$ için n tane kök bulunur. Burada esas ölçü söz konusu olduğundan **θ** yerine **θ + 2kπ (kЄZ)** alınmıştır. Bilindiği üzere, **θ = θ + 2.k.π (kЄZ)** 'dir.

$z^n = a + ib \Rightarrow z_{k+1} = (a + ib)^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\ (\cos\theta + i.\sin\theta)^{\frac{1}{n}}$ üstel formda ifade edecek olursak;

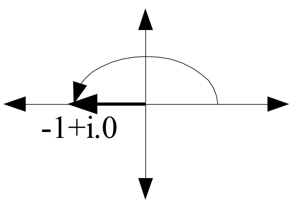
$z^n = r.e^{i.\theta} \Rightarrow z = (r.e^{i.\theta})^{\frac{1}{n}} = (r)^{\frac{1}{n}}\ (e^{i.\theta})^{\frac{1}{n}}$

$\mathbf{z_{k+1} = (r)^{\frac{1}{n}}.(e^{i.\theta})^{\frac{1}{n}} = (r)^{\frac{1}{n}}.[cos(\frac{(\theta + 2k\pi)}{n}) + i.sin(\frac{(\theta + 2k\pi)}{n})]}$ **(kЄZ)** burada;

z_{k+1}ifadesi k'nın 0'dan başlaması halinde $z_1, z_2, ..., z_n$ köklerini ifade etmesi amacıyla kullanılmaktadır.

Örnek.8.25: -1 sayısının dört kökünü bulunuz.

Çözüm.8.25: -1'in dört kökünü bulmak demek $z^4=-1$ denklemini çözmek veya $z^4+1=0$ denklemini çözmek demektir.



$z^4 = -1+i.0$ ise $r = \sqrt{(-1)^2 + (0)^2} = 1$

$Tg\theta = \frac{0}{-1} = 0$ ise $\theta = Arctg\theta = \pi$

$z^4 = -1+i.0$ ise $z = (-1 + i.0)^{\frac{1}{4}}$ ve $z^n = r.e^{i.\theta}$ $z = (r.e^{i.\theta})^{\frac{1}{n}}$ olur. Buna göre;

$z_{k+1} = r^{\frac{1}{n}}.e^{i\left[\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]} = 1[\cos((\frac{(\pi + 2k\pi)}{4}) + i.\sin(\frac{(\pi + 2k\pi)}{4}))]$

k = 0 için $z_1=\cos(\frac{\pi}{4}) + i.\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} + i.\frac{1}{\sqrt{2}}$

k = 1 için $z_2=\cos(\frac{3\pi}{4}) + i.\sin(\frac{3\pi}{4})= -\frac{1}{\sqrt{2}} + i.\frac{1}{\sqrt{2}}$

k = 2 için $z_3=\cos(\frac{5\pi}{4}) + i.\sin(\frac{5\pi}{4})= -\frac{1}{\sqrt{2}} - i.\frac{1}{\sqrt{2}}$

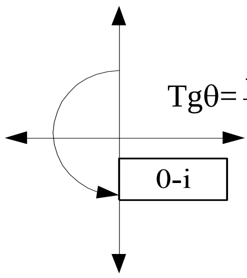
k = 3 için $z_4=\cos(\frac{7\pi}{4}) + i.\sin(\frac{7\pi}{4})= \frac{1}{\sqrt{2}} - i.\frac{1}{\sqrt{2}}$

k = 4 için $z_5=\cos(\frac{9\pi}{4}) + i.\sin(\frac{9\pi}{4}) = z_1$

Not : 4 kök varsa $\frac{360°}{4} = 90° = \frac{\pi}{2}$ kökler arasında $\frac{\pi}{2}$ radyanlık fark vardır ve $z_5= z_1$'dir.

Örnek.8.26: -i sayısının 6 kökünü bulunuz.

Çözüm.8.26: -i sayısının kökünü bulmak demek $z^6= -i$ denkleminin köklerini bulmak veya $z^6+i=0$ denkleminin köklerini bulmak demektir.



$$r=\sqrt{(-1)^2+(0)^2} = 1$$

$$Tg\theta=\frac{-1}{0}=-\infty \rightarrow \theta=Arctg(-\infty)=\frac{3\pi}{2} \rightarrow n = 6,\ r = 1,\ \theta = \frac{3\pi}{2}$$

$$z_{k+1} = 1^{\frac{1}{6}}.e^{i\left[\frac{\left(\frac{3\pi}{2}+2k.\pi\right)}{6}\right]} = \cos\left(\frac{(\frac{3\pi}{2}+2k\pi)}{6}\right) + i.\sin\left(\frac{(\frac{3\pi}{2}+2k\pi)}{6}\right)$$

k = 0 için $z_1 = \cos(\frac{3\pi}{12}) + i.\sin(\frac{3\pi}{12}) = \frac{1}{\sqrt{2}} + i.\frac{1}{\sqrt{2}}$

k = 1 için $z_2 = \cos(\frac{7\pi}{12}) + i.\sin(\frac{7\pi}{12}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i.\frac{1}{\sqrt{2}}$

k = 2 için $z_3 = \cos(\frac{11\pi}{12})+ i.\sin(\frac{11\pi}{12}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i.\frac{1}{\sqrt{2}}$

k = 3 için $z_4 = \cos(\frac{15\pi}{12})+ i.\sin(\frac{15\pi}{12}) = \frac{1}{\sqrt{2}} - i.\frac{1}{\sqrt{2}}$

k = 4 için $z_5 = \cos(\frac{19\pi}{12})+ i.\sin(\frac{19\pi}{12}) = \frac{1}{\sqrt{2}} + i.\frac{1}{\sqrt{2}}$

k = 5 için $z_6 = \cos(\frac{23\pi}{12})+ i.\sin(\frac{23\pi}{12}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i.\frac{1}{\sqrt{2}}$

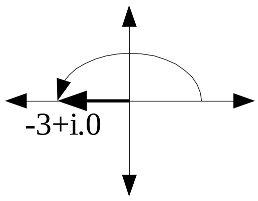
k = 6 için $z_7 = \cos(\frac{27\pi}{12})+ i.\sin(\frac{27\pi}{12}) = cis\frac{3\pi}{12} = z_1$

6 köklü bir denklemin kökleri arasında $\dfrac{360°}{6} = 60°$ yani $\dfrac{\pi}{3}$ radyanlık bir fark vardır.

7. denklemin kökü 1. denklemin kökü ile aynıdır.

Örnek.8.27: $z = -3$ ise z’nin küp köklerini bulunuz.

Çözüm.8.27: -3 sayısının küpkökünü bulmak demek z^3= -3 denkleminin köklerini bulmak veya z^3-3=0 denkleminin köklerini bulmak demektir.



$$r = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = 3 \rightarrow \mathrm{Tg}\theta = \frac{0}{-3} = 0 \rightarrow \theta = \mathrm{Arctg}(0) = \pi$$

$z = -3 = 3(\cos\pi + i.\sin\pi)$ olur. Buna göre;

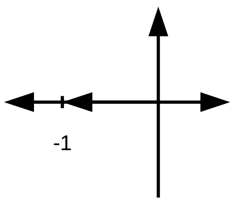
$$z_0 = \sqrt[3]{3}(\cos\frac{\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt[3]{3}}{2}(1+\sqrt{3})$$

$$z_1 = \sqrt[3]{3}\left[\cos(\frac{\pi}{3} + 1.\frac{2\pi}{3}) + i.\sin(\frac{\pi}{3} + 1.\frac{2\pi}{3})\right] = \sqrt[3]{3}(\cos\pi + i.\sin\pi) = -\sqrt[3]{3}$$

$$z_2 = \sqrt[3]{3}\left[\cos(\frac{\pi}{3} + 2.\frac{2\pi}{3}) + i.\sin(\frac{\pi}{3} + 2.\frac{2\pi}{3})\right] = \frac{\sqrt[3]{3}}{2}(1 - i\sqrt{3})$$

Örnek.8.28: $z^6 + 1 = 0$ denkleminin köklerini bulmaya çalışalım.

Çözüm.8.28: $z^6 = -1 \Rightarrow r = 1 \Rightarrow \theta = \pi$



$$k = 0 \Rightarrow z_1 = 1^{1/6}\left(\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$k = 1 \Rightarrow z_2 = 1^{1/6}\left(\cos\frac{3\pi}{6} - \sin\frac{3\pi}{6}\right)$$

$$k = 2 \Rightarrow z_3 = 1^{1/6}\left(\cos\frac{5\pi}{6} - \sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$k = 3 \Rightarrow z_4 = 1^{1/6}\left(\cos\frac{7\pi}{6} - \sin\frac{7\pi}{6}\right)$$

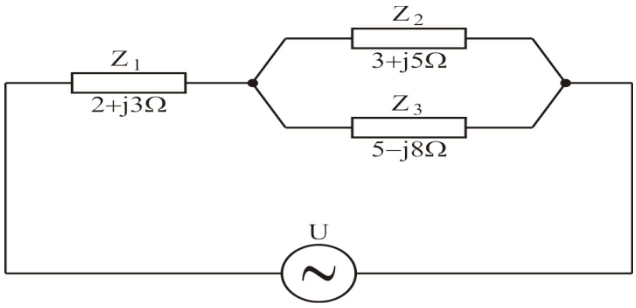
$$k = 4 \Rightarrow z_5 = 1^{1/6}\left(\cos\frac{9\pi}{6} - \sin\frac{9\pi}{6}\right)$$

$$k = 5 \Rightarrow z_6 = 1^{1/6}\left(\cos\frac{11\pi}{6} - \sin\frac{11\pi}{6}\right)$$

8.12.Karmaşık Sayıların Elektrik Devrelerine Uygulanması

8.12.1. Elektrik Devrelerle İlgili Çözümlü Örnekler

Örnek.8.29: Şekildeki devrenin eşdeğer empedansı nedir?



Çözüm.8.29:

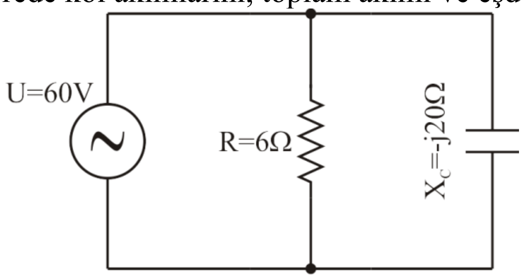
Z_2 ve Z_3 birbirine paraleldir. Bu iki empedansın eşdeğerine Z_p dersek;

$$\frac{1}{\mathbf{Z}_\mathrm{p}} = \frac{1}{\mathbf{Z_2}} + \frac{1}{\mathbf{Z}_3} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Z}_\mathrm{p} = \frac{\mathbf{Z_2.Z_3}}{\mathbf{Z_2 + Z_3}} = \frac{(3+j5).(5-j8)}{(3+j5)+(5-j8)} = \frac{15-j24+j25+40}{8-j3}$$

$$\mathbf{Z}_\mathrm{p} = \frac{55+j}{8-j3} = \frac{(55+j).(8+j3)}{(8-j3).(8+j3)} = \frac{440+j165+j8-3}{73} = \frac{437+j173}{73} = 5{,}98 + 2{,}37\ \Omega$$

$$\mathbf{Z}_\text{eş} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_\mathrm{p} = (2+j3)+(5{,}98+j2{,}37) = 7{,}98 + j5{,}37\ \ \Omega$$

Örnek.8.30: Şekildeki devrede kol akımlarını, toplam akımı ve eşdeğer empedansı bulunuz.



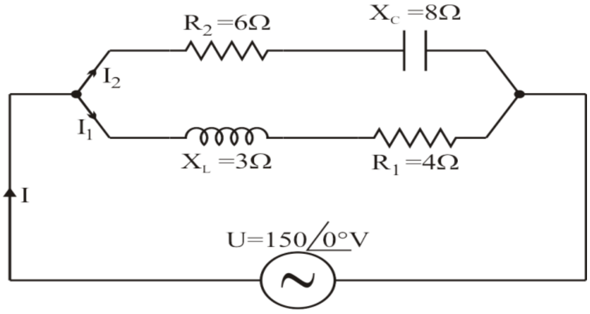
Çözüm.8.30:

$$I_R = \frac{U}{R} = \frac{60\angle 0°}{6} = 10\angle 0° A \qquad ve \qquad I_C = \frac{U}{X_C} = \frac{60\angle 0°}{-j20} = \frac{60\angle 0°}{20\angle -90°} = 3\angle 90° A$$

$$I = I_R + I_C = 10 + j0 + 0 + j3 = 10 + j3A$$

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{60\angle 0°}{10+j3} = \frac{(60+j0)\cdot(10-j3)}{(10+j3)\cdot(10-j3)} = \frac{600-j180}{109} = 5{,}5 - j1{,}165\Omega$$

Örnek.8.31: Şekildeki devrede kol akımlarını, toplam akımı bulunuz ve vektör diyagramını çiziniz.



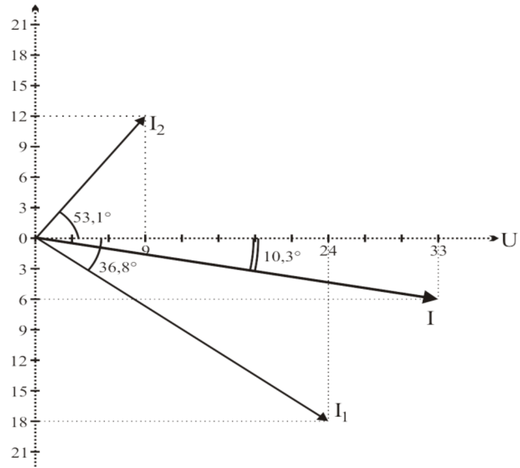
Çözüm.8.31:

$$Z_1 = R_1 + jX_L = 4 + j3\Omega \qquad ve \qquad Z_2 = R_2 - jX_C = 6 - j8\Omega$$

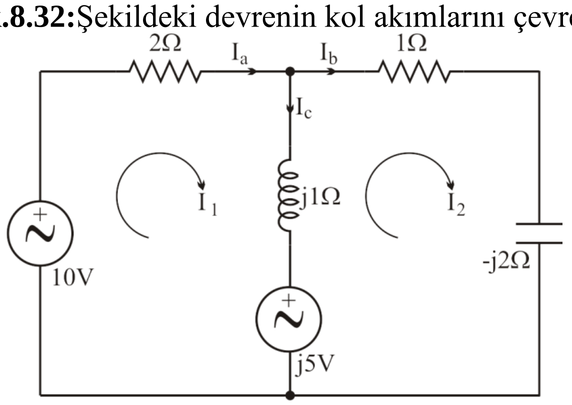
$$I_1 = \frac{U}{Z_1} = \frac{150 + j0}{4 + j3} = \frac{(150 + j0)\times(4 - j3)}{(4 + j3)\times(4 - j3)} = \frac{600 - j450}{25} = 24 - j18A \Rightarrow \varphi_1 = \tan^{-1}\left(-\frac{18}{24}\right) = -36,8°$$

$$I_2 = \frac{U}{Z_2} = \frac{150 + j0}{6 - j8} = \frac{(150 + j0)\cdot(6 + j8)}{(6 - j8)\cdot(6 + j8)} = \frac{900 + j1200}{100} = 9 + j12A \Rightarrow \varphi_2 = \tan^{-1}\left(\frac{12}{9}\right) = 53,1°$$

$$I = I_1 + I_2 = 24 - j18 + 9 + j12 = 33 - j6A \qquad ve \qquad \varphi = \tan^{-1}\left(-\frac{6}{33}\right) = -10,3°$$



Örnek.8.32: Şekildeki devrenin kol akımlarını çevre akımları yöntemi ile hesaplayınız.



Çözüm.8.32:

$$(2+j)\cdot I_1 - j\cdot I_2 = 10 - j5$$

$$-j\cdot I_1 + (1-j)\cdot I_2 = j5$$

$$\begin{bmatrix} 10-j5 \\ j5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+j & -j \\ -j & 1-j \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta Z = \begin{vmatrix} 2+j & -j \\ -j & 1-j \end{vmatrix} = (2+j)\cdot(1-j) - j^2 = 2-2j+j-j^2-j^2 = 4-j$$

$$\Delta Z_1 = \begin{vmatrix} 10-j5 & -j \\ j5 & 1-j \end{vmatrix} = (10-j5)\cdot(1-j) - \left(-j^2\cdot 5\right) = 10-10j-5j+5j^2-5 = -j15$$

$$\Delta Z_2 = \begin{vmatrix} 2+j & 10-j5 \\ -j & j5 \end{vmatrix} = (2+j)\cdot(j5) - \left[(10-j5)\cdot(-j)\right] = 10j-5-(-10j-5) = j20$$

$$I_1 = \frac{\Delta Z_1}{\Delta Z} = \frac{-j15}{4-j} = \frac{-j15\cdot(4+j)}{(4-j)\cdot(4+j)} = \frac{-j60+15}{17} = 0,882 - j3,53A$$

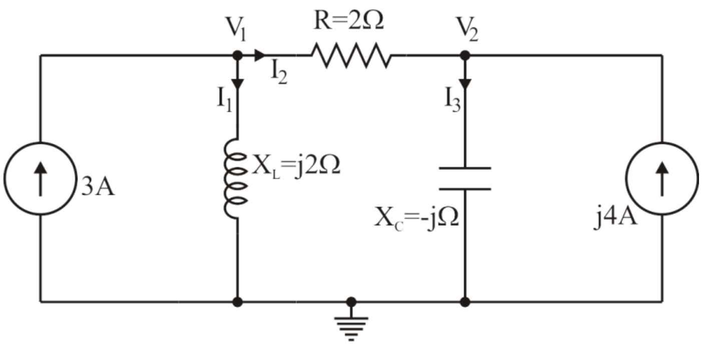
$$I_2 = \frac{\Delta Z_2}{\Delta Z} = \frac{j20}{4-j} = \frac{j20\cdot(4+j)}{(4-j)\cdot(4+j)} = \frac{j80-20}{17} = -1,17 + j4,7A$$

$$I_a = I_1 = 0,882 - j3,53A$$

$$I_b = I_2 = -1,17 + j4,7A$$

$$I_c = I_1 - I_2 = (0,882 - j3,53) - (-1,17 + j4,7) = 0,882 - j3,53 + 1,17 - j4,7 = 2,052 - j8,23A$$

Örnek.8.33: Şekildeki devrenin kol akımlarını düğüm gerilimleri yöntemi ile hesaplayınız.



Çözüm.8.33: $\left(\frac{1}{j2}+\frac{1}{2}\right)\cdot V_1 - \frac{1}{2}\cdot V_2 = 3$ □ $\left(0,5 - j0,5\right)\cdot V - 0,5\cdot V_2 = 3$

$-\frac{1}{2}\cdot V_1 + \left(\frac{1}{-j}+\frac{1}{2}\right)\cdot V_2 = j4$ □ $-0,5\cdot V_1 + \left(0,5 + j\right)\cdot V_2 = 4$

$$\Delta Z=\begin{vmatrix}(0,5-j0,5) & -0,5\\ -0,5 & (0,5+j)\end{vmatrix}=(0,5-j0,5)\cdot(0,5+j)-0,5^2$$

$$\Delta Z=0,5^2+j0,5-j0,25-j^2 0,5-0,5^2=0,5+j0,25$$

$$\Delta Z_1=\begin{vmatrix}3 & -0,5\\ j4 & (0,5+j)\end{vmatrix}=3\cdot(0,5+j)+0,5\cdot j4=1,5+j3+j2$$

$$\Delta Z_1=1,5+j5$$

$$\Delta Z_2=\begin{vmatrix}(0,5-j0,5) & 3\\ -0,5 & j4\end{vmatrix}=(0,5-j0,5)\cdot j4+3\cdot 0,5=j2-j^2 2+1,5$$

$$\Delta Z_2=3,5+j2$$

$$V_1=\frac{\Delta Z_1}{\Delta Z}=\frac{1,5+j5}{0,5+j0,25}=\frac{(1,5+j5)\cdot(0,5-j0,25)}{(0,5+j0,25)\cdot(0,5-j0,25)}=\frac{0,75-j0,375+j2,5+1,25}{0,3125}$$

$$V_1=\frac{2+j2,125}{0,3125}=6,4+j6,8V$$

$$V_2=\frac{\Delta Z_2}{\Delta Z}=\frac{3,5+j2}{0,5+j0,25}=\frac{(3,5+j2)\cdot(0,5-j0,25)}{(0,5+j0,25)\cdot(0,5-j0,25)}=\frac{1,75-j0,875+j+0,5}{0,3125}$$

$$V_2=\frac{2,25+j0,125}{0,3125}=7,2+j0,4V$$

$$I_1=\frac{V_1}{j2}=\frac{6,4+j6,8}{j2}=\frac{(6,4+j6,8)\cdot(-j2)}{4}=\frac{-j12,8+13,6}{4}$$

$$I_1=3,4-j3,2A$$

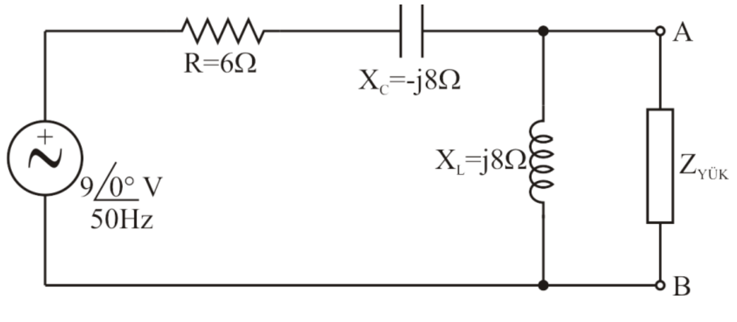
$$I_2=\frac{V_2}{-j}=\frac{7,2+j0,4}{-j}=\frac{(7,2+j0,4)\cdot(j)}{1}=\frac{j7,2-0,4}{1}$$

$$I_2=-0,4+j7,2A$$

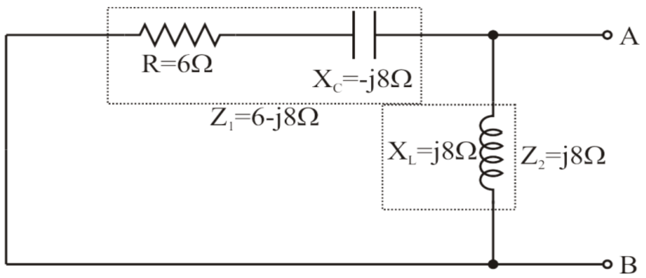
$$I_3=\frac{V_1-V_2}{2}=\frac{(6,4+j6,8)-(7,2+j0,4)}{2}=\frac{-0,8+j6,4}{1}$$

$$I_3=-0,4+j3,2A$$

Örnek.8.34: Şekildeki devrede yüke maksimum gücün aktarılması için yük empedansının değeri ve aktarılacak maksimum gücü bulunuz.

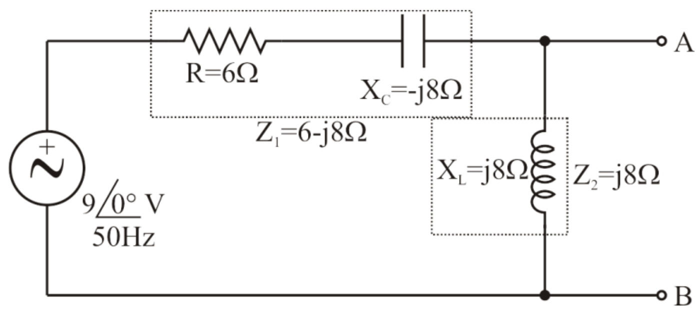


Çözüm.8.34: Thevenin Teoremi ile A-B uçlarına göre devrenin empedans ve gerilim eşdeğeri elde edilir. Empedans eşdeğeri için gerilim kaynağı kısa devre edilirse;



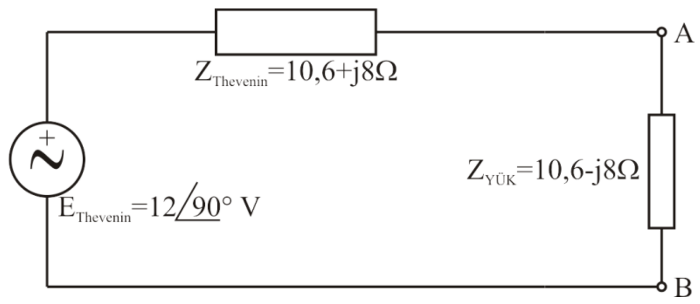
$$Z_{AB} = Z_{thevenin} = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(6-j8)\cdot(j8)}{(6-j8)+(j8)} = \frac{48j+64}{6} = 10,66 + j6\Omega$$

Maksimum güç aktarılması için $Z_{YÜK} = Z_{AB}* = (10,6 + j8)* = 10,6 - j8\Omega$ olmalıdır.
Thevenin gerilimi için ise;



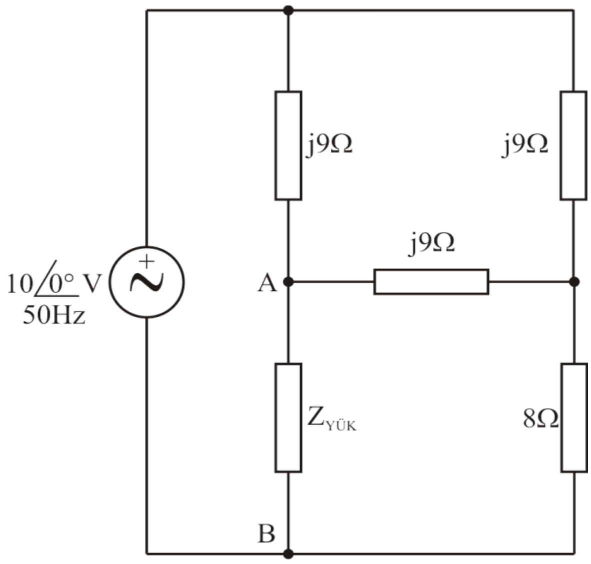
$$E_{AB} = E_{thevenin} = \frac{E \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{9\cdot(j8)}{(6-j8)+(j8)} = \frac{72j}{6} = j12V$$

Bu durumda sistemin Thevenin eşdeğeri ve maksimum güç aşağıdaki gibi bulunur.

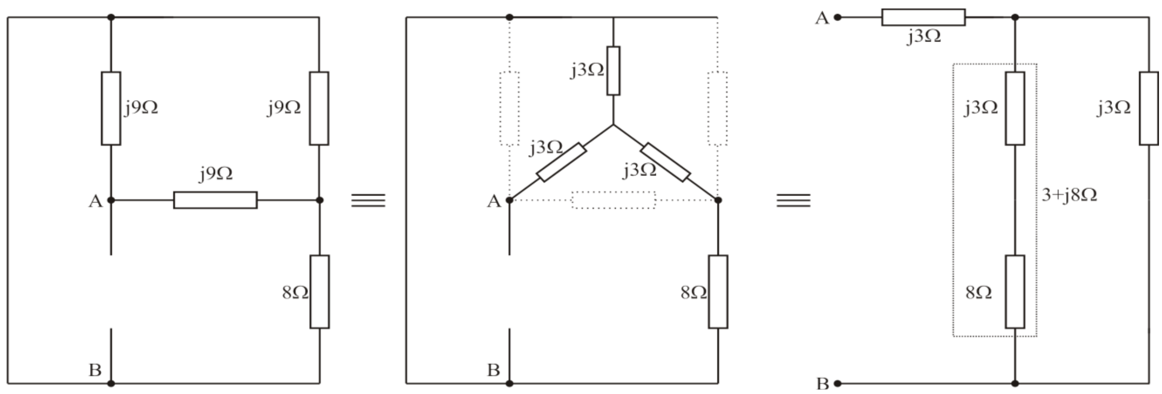


$$P_{\max} == \frac{E_{thevenin}{}^2}{4\cdot R} = \frac{12^2}{4\cdot 10,6} = 3,4W$$

Örnek.8.35: Şekildeki devrede yüke maksimum gücün aktarılması için yük empedansının değeri ve aktarılacak maksimum gücü bulunuz.



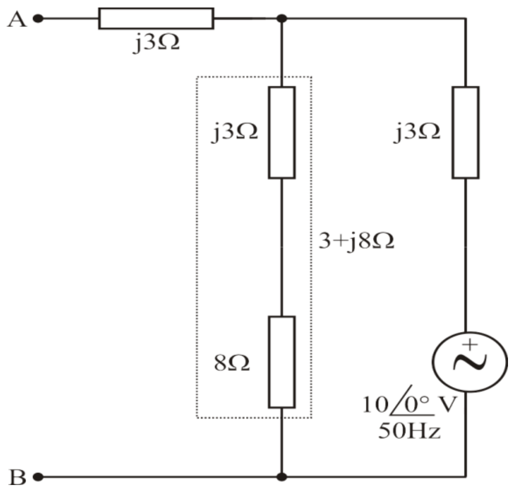
Çözüm.8.35: Thevenin Teoremi ile A-B uçlarına göre devrenin empedans ve gerilim eşdeğeri elde edilir. Empedans eşdeğeri için gerilim kaynağı kısa devre edilirse;



$$Z_{AB} = Z_{thevenin} = j3 + \frac{(j3)\cdot(8+j3)}{(j3)+(8+j3)} = j3 + \frac{24j-9}{8+j6} = j3 + \frac{(24j-9)\cdot(8-j6)}{(8+j6)\cdot(8-j6)}$$

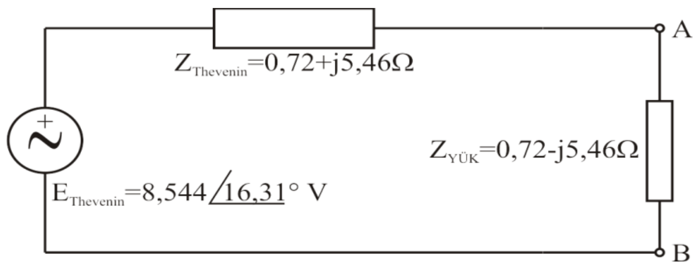
$$Z_{AB} = Z_{thevenin} = j3 + \frac{192j+144-72+54j}{100} = j3 + 2,46j + 0,72 = 0,72 + j5,46\Omega$$

Maksimum güç aktarılması için $Z_{YÜK} = Z_{AB}{*} = (0,72 + j5,46){*} = 0,72 - j5,46\Omega$ olmalıdır.
Thevenin gerilimi için ise;



$$E_{AB} = E_{thevenin} = \frac{E\cdot(8+j3)}{(8+j3)+j3} = \frac{10\cdot(8+j3)}{8+j6} = \frac{(80+j30)\cdot(8-j6)}{100}$$

$$E_{AB} = E_{thevenin} = \frac{640+240j-480j+180}{100} = 8,2-j2,4V = 8,544\angle-16,31°V$$



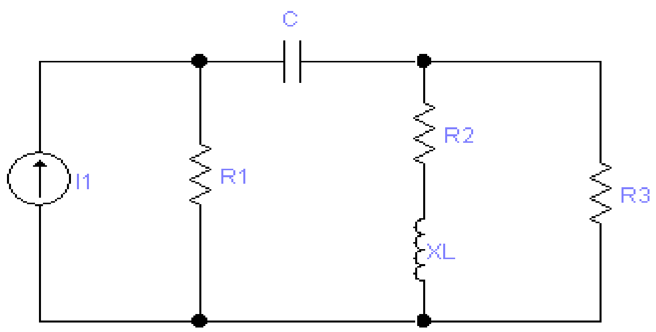
$$P_{\max} == \frac{E_{thevenin}{}^{2}}{4\cdot R} = \frac{8,544^{2}}{4\cdot 0,75} = 25,347W$$

Örnek.8.36: Şekildeki devrede

a)Z'_t değerini bulunuz $R_1 = 50$ K ile karşılaştırınız

b)I_1 değerini bulunuz ve I ile karşılaştırınız

c)V_y gerilimini bulunuz



$I = 5\times10^{-3}\angle0^{0}$ $\quad \omega = 400$

$R_1 = 50\ \Omega$

$R_2 = 10\ \Omega$

$R_3 = 1K\ \Omega$

$C = 10\mu F$

$X_L = 5K$

Çözüm.8.36:

$a) X_c = \frac{1}{w.c} = \frac{1}{400.(10).10^{-6}}$

$= \frac{10}{4.10^{-3}} = \frac{10^3}{4} = 250\ ohmveya\ 0.25\ K$

$Z_1 = 50K$

$Z_2 = 0.25K\angle^{90^\circ}$=-j0.25

$Z_3 = 10 + j5K = 5\angle^{90^\circ}$

$Z_4 = 1K$

$Z'_t = Z_2 + Z_3||Z_4$

$Z'_t = -j0.25 + \frac{(5\angle^{90^\circ})(1\angle^{0^\circ})}{(j5 + IK)}$

$= -j0.25 + \frac{5\angle^{90^\circ}}{5.1\angle^{78,7^\circ}}$

$= -j0.25 + 0.98\angle^{11,3^\circ}$

$= j0.25 + (0.96 + j0.192)$

$= Z'_t = 0,96 - j0.058 = 0,962\angle^{-3,4} ve Z'_t = \frac{1}{50} Z_1 inb$üyü$kl$üğü $Z_1 = 50K$

$b) I_1 = \frac{Z'_t.I}{Z_T + Z_1}$

$= \frac{0,962\angle^{-3,4^\circ}).(5.10^{-3}\angle^{0^\circ})}{(0,96 - J0,058) + 50} = \frac{4,81\angle^{-3,4^\circ}}{50,96}$

$= 0.0945 \times 10^{-3}\angle^{-3,4^\circ}$

$I_1 = 94.5 \times 10^{-6}\angle^{-3,4^\circ}$

Bö$ylece\ \ I_1\ in\ b$üyüklüğü $I\ nin\ b$üyüklüğünün $\frac{1}{50}\ sidir.$

$c)\ |I_1| = \frac{1}{50}\ |I|$

$I_2 = I = 5 \times 10^{-3}\angle^{0^\circ}$

$V_{yük} = I_2$.($\frac{(Z_3.Z_4)}{Z_3+Z_4}$=(5.10$^{-3}\angle^{0^\circ}$).(0,98$\angle^{11,3^\circ}$=4,9$\angle^{11,3^\circ}$V

ALIŞTIRMALAR

1) $\left(-\frac{1}{2}i-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1999}=?$

2) $z^5=-\sqrt{3}+1$ denklemini çözünüz.

3) $\left(-\sqrt{3}+j\right)^{2012}=?$

4) $z^5=-j-1$ denklemini çözünüz.

5) $\left(-\frac{1}{2}j-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1071}=?$

6) $z^6=\sqrt{3}-j$ denklemini çözünüz.

7) $z^5=-j+1$ denklemini çözünüz.

8) $z^4=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j$ denkleminin köklerini bulunuz.

9) $z^6+64=0$ denkleminin köklerini bulunuz.

10) $z^4=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}j$ denklemini çözünüz.

11) $z^2=\sqrt{3}j-1$ denklemini çözünüz.

12) $z^3=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}j$ denkleminin köklerini bulunuz.