6. BÖLÜM

MATRİS CEBİRİ

6.1. Matrisler

Tanım 6.1: n satır ve m sütundan oluşan sayıların dikdörtgen şeklinde;

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2m} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

yazılmasına **n x m** tipinde matris denir. Matrisler genellikle **A, B, C, D, …** gibi büyük harflerle elemanları ise **a, b, c, d,….** gibi küçük harflerle gösterilir ve **[ ]** veya **( )** şeklinde sembolize edilirler. Bir başka gösterimle;

$$\mathrm{A} = \left(\mathrm{a_{ij}}\right) \quad (\mathbf{1} \leq \boldsymbol{i} \leq \boldsymbol{n}) \qquad (\mathbf{1} \leq \boldsymbol{j} \leq \boldsymbol{m}) \qquad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{aij}$$ olarak ifade edilirler.

Burada satır ve sütun bilindiğinde sadece $A = \left(a_{ij}\right)$ gösterimi yeterlidir.

Örneğin; $\mathbf{a_{i1}}, \ldots\ldots\ldots, \mathbf{a_{in}}$ elemanları **A'nın i. satırını** $\mathbf{a_{1j}}, \ldots\ldots\ldots, \mathbf{a_{nj}}$ elemanları **A'nın j. sütununu** ifade eder.

Teorem 6.1: $\mathrm{A} = \left(\mathrm{a_{ij}}\right)$ mxn tipinde ve $B = \left(b_{ij}\right)$ m x n tipinde iki matris olsun. **A=B** olması için gerek ve yeter koşul;

$$a_{ij} = b_{ij} \qquad \text{(i=1, 2, ………, m) (j = 1, 2, ……., n) olmasıdır.}$$

Tanım 6.2: $\mathrm{A} = \left(\mathrm{a_{ij}}\right)$ mxn tipinde ve $\mathrm{B} = \left(\mathrm{b_{ij}}\right)$ m x n tipinde iki matris olsun. Buna göre, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ifadesine A ve B matrislerinin toplamı denir ve **C = A + B** ile gösterilir.

Tanım 6.3: $\mathrm{A} = \left(\mathrm{a_{ij}}\right)$ mxn tipinde bir matris ve r bir skaler olmak üzere; $c_{ij} = r.a_{ij}$ ifadesine **A** matrisinin **r** skaleri ile skaler çarpımı denir ve **C = r . A** şeklinde gösterilir.

Tanım 6.4: $\mathrm{A} = \left(\mathrm{a_{ij}}\right)$ mxn tipinde bir matris ve $\mathrm{B} = \left(\mathrm{b_{ij}}\right)$ n x p tipinde matrisleri verilsin.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} \qquad i = 1, 2, \ldots\ldots, m \qquad j = 1, 2, \ldots\ldots, p$$

ifadesine A ve B matrislerinin çarpımı denir ve **C=A . B** şeklinde gösterilir. A ve B matrislerinin çarpımı olan C matrisi **mxp** tipindedir.

İki matrisin çarpılabilmesi için gerek ve yeter şart birinci matrisin sütun sayısı ile ikinci matrisin satır sayısı eşit olmalıdır.

Örnek 6.1: $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & 0 & 5\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}-2 & 2 & -3\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$ verilsin. Buna göre; A + B, -3A, 2B, $-1.A+\frac{1}{2}B$ ifadelerini bulalım.

Çözüm 6.1:

$$A+B=\begin{bmatrix}1-2 & -2+2 & 3-3\\ 4+0 & 0+1 & 5-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 4 & 1 & 4\end{bmatrix}$$

$$-3.A=-3.\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & 0 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 6 & -9\\ -12 & 0 & -15\end{bmatrix} \text{ ve } -1.A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & -3\\ -4 & 0 & -5\end{bmatrix}$$

$$2.B=2.\begin{bmatrix}-2 & 2 & -3\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 4 & -6\\ 0 & 2 & -2\end{bmatrix} \text{ ve } \frac{1}{2}B=\begin{bmatrix}-1 & 1 & -\frac{3}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$-1.A+\frac{1}{2}B=\begin{bmatrix}-1-1 & 2+1 & -3-\frac{3}{2}\\ -4+0 & 0+\frac{1}{2} & -5-\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 3 & -\frac{9}{2}\\ -4 & \frac{1}{2} & -\frac{11}{2}\end{bmatrix}$$

Örnek 6.2: $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}_{1x3}$ ve $B=\begin{bmatrix}4\\ 5\\ 6\end{bmatrix}_{3x1}$ matrisleri için A.B ve B.A bulunuz.

Çözüm 6.2: A . B = [1 . 4 + 2 . 5 + 3 . 6] = [32] $_{1\,x\,1}$

$$B.A=\begin{bmatrix}4\\ 5\\ 6\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B.A=\begin{bmatrix}4.1 & 4.2 & 4.3\\ 5.1 & 5.2 & 5.3\\ 6.1 & 6.2 & 6.3\end{bmatrix}_{3x3}=\begin{bmatrix}4 & 8 & 12\\ 5 & 10 & 15\\ 6 & 12 & 18\end{bmatrix}_{3x3} \text{ dır.}$$

- A matrisi (1x3) tipinde, B matrisi (3x1) tipinde ve A.B matrisi (1x1) tipinde bir matristir.
- B matrisi (3x1) tipinde, A matrisi (1x3) tipinde ve B.A matrisi (3x3) tipinde bir matristir.

A . B ≠ B . A olup matrislerin çarpımının değişme özelliği yoktur.

Tanım 6.5: Satır sayısı sütun sayısına eşit olan matrise kare matris denir. A bir kare matris olmak üzere;

$$\mathbf{A^n} = \underbrace{\mathbf{A \,.\, A \,.\, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A}}_{\text{n tane}} \qquad \text{n tane A matrisinin çarpımıdır.}$$

6.2. Matrislerin Özellikleri

A, B ve C aynı tipte kare matrisler ve **r, s** skaler olsun.

1) A + B = B + A
2) A + (B + C) = (A + B) + C
3) r . (A + B) = r . A + r . B
4) (r + s) . A = r . A + s . A
5) 0 . A = 0
6) A + (-1) . A = 0
7) A + 0 = A
8) (A + B) . C = A . C + B . C
9) C . (A + B) = C : A + C . B
10) 0 . A = 0 = A . 0
11) A . (B . C) = (A . B) . C

6.3. Özel Matrisler

6.3.1. Birim Matris

n x n tipindeki ;

$$I=\begin{bmatrix} 1 & & \cdots & & 0 \\ & 1 & 0 & . & \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ & . & 0 & 1 & \\ 0 & & \cdots & & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$$ matrisine n. mertebeden birim matris denir.

$$I_1 = [1]_{1x1};\ I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2x2};\ I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3x3};\ I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4x4}$$

6.3.2. Sıfır Matris

Bütün elemanları 0 olan matrise sıfır matris denir ve $\mathbf{0 = (0_{ij})}$ ile gösterilir.

6.3.3. Köşegen Matrisler

n. mertebeden herhangi bir $\mathbf{A} = (a_{ij})$ kare matrisinin $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ elemanlarına A matrisinin **köşegen elemanları** denir.

Örneğin; $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 7 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ matrisinin köşegen elemanları 1, 3, 5 'tir

Böylece, sıfırdan farklı elemanları köşegen üzerinde bulunan matrise **köşegen matris** denir.

$\mathbf{A} = (a_{ij})$ matrisinin köşegen matris olması için gerek ve yeter şart;

$i \neq j$ için $a_{ij} = 0$ olmasıdır.

Örnek 6.3: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ matrisleri köşegen matrislerdir.

Özellik 6.1: Genel olarak bir köşegen matris;

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & 0 \\ . & a_{22} & & \\ . & . & a_{33} & \\ & & & \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix}_{nxn}$$ şeklindedir. $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & 0 \\ . & a_{22} & & \\ . & . & a_{33} & \\ & & & \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix}_{nxn} \quad ve \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & & & 0 \\ . & b_{22} & & \\ . & . & b_{33} & \\ & & & \\ 0 & & & b_{nn} \end{bmatrix}_{nxn}$$

İki köşegen matris olmak üzere; $$A.B = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & & & 0 \\ . & a_{22}b_{22} & & \\ . & . & a_{33}b_{33} & \\ & & & \\ 0 & & & a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}_{nxn} = B.A$$ olur.

6.3.4. Skaler Matris

$\mathbf{A} = (a_{ij})$ nxn tipinde bir kare matrisinde $a_{11}=a_{22}=\ldots=a_{nn}=k$ ise $(k \in R)$ bu matrise skaler matris denir.

Örneğin; $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ matrisi skaler matristir.

6.3.5. Üçgen Matrisler

a) Bir $A = (a_{ij})$ nxn tipinde bir kare matrisinde her j > i için $a_{ij} = 0$ koşulu sağlanıyorsa **A'ya alt üçgensel matris** denir.

Örneğin; $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ matrisi alt üçgensel matristir.

b) i = j olmak üzere yani köşegen elemanları da 0 olan matrise **tam üçgen matris denir.**

Örneğin; $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ tam üçgenseldir.

c) Bir $A = (a_{ij})$ nxn tipinde bir kare matrisinde her i > j için $a_{ij} = 0$ koşulu sağlanıyorsa **A matrisine üst üçgensel matris** denir.

Örneğin; A= $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ matrisi üst üçgensel matristir.

6.3.6. Idempotent Matris

$A = (a_{ij})$ kare matrisi $\mathbf{A^2 = A}$ özelliğine sahipse A matrisine **idempotent matris** denir.

Örneğin; $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisleri idempotent matrislerdir.

6.3.7. Nilpotent Matris

$A = (a_{ij})$ nxn tipinde bir kare matrisi için $\mathbf{A^q = 0}$ olacak şekilde bir **q** tamsayısı bulunabiliyorsa A matrisine **nilpotent matris** denir.

Tanım 6.6: $A = (a_{ij})$ nxn tipinde bir kare matris olsun. A matrisinin i. satır ve j. sütununun atılmasıyla elde edilen (n-1) x (n-1) tipindeki kare matrise A matrisinin a_{ij} elemanının **minörü** denir ve $\mathbf{M_{ij}}$ ile gösterilir.

Örnek 6.4: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin M_{12}, M_{23}, M_{32} minörlerini bulalım.

Çözüm 6.4:

$$M_{12} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad M_{23} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad M_{32} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

6.3.8. Simetrik Matris

$\mathrm{A} = (\mathrm{a_{ij}})$ nxn tipinde bir kare matrisinde;

- $\mathbf{a_{ij}} = \mathbf{a_{ji}}$ ise (i, j = 1, 2, ..., n) ise **simetrik matris,**
- $\mathbf{a_{ij}} = -\mathbf{a_{ji}}$ (i, j = 1, 2, ..., n) ise **ters simetrik matris** denir.

Örneğin; $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ matrisleri simetrik matris iken;

$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisleri ters simetrik matristir.

6.3.9. Tekil Olmayan Matris

$\mathrm{A} = (\mathrm{a_{ij}})$ nxn tipinde bir kare matris olsun. Eğer,

- Determinant değeri sıfırdan farklı yani $|\mathrm{A}| \neq 0,$ ise A matrisine tekil olmayan matris
- Determinant değeri sıfırdan farklı yani $|\mathrm{A}| = 0,$ ise A matrisine tekil matris denir.

Tanım 6.7: $\mathrm{A} = (\mathrm{a_{ij}})$ nxn tipinde simetrik bir matris olsun. Köşegen elemanlarının toplamına **matrisin izi** denir ve **İz(A)** ile gösterilir.

$$\text{İz}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Örneğin; A= $\begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & -3 \end{bmatrix}$, İz(A)= 5+2+(-3) = 4

Matris İzinin özellikleri

1. İz(A+B) =İz(A)+İz(B)
2. İz(AB)= İz(A)İz(B)
3. İz(kA)=kİz(A) (k bir skaler)
4. İz(A^t)=İz(A)

Tanım 6.8: Bir $\mathrm{A} = (\mathrm{a_{ij}})$ mxn tipindeki matriste, k tane satır ve l tane sütun çıkarıldığında elde edilen (m -k) x (n - l) tipindeki yeni matrise A matrisinin **alt matrisi** denir.

Örneğin, A= $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Matrisinde, 3.satır ve 2.ile 4. Sütunlar çıkarıldığında elde edilen **B=**$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 6 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ matrisi **A**'nın bir alt matrisidir.

Tanım 6.9: Bir $\mathrm{A} = (\mathrm{a_{ij}})$ mxn matrisini aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

A=$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a_{m1}} & \cdots & \boldsymbol{a_{mn}} \end{bmatrix}$ matrisini, $\boldsymbol{r_1 + r_2 + \cdots + r_p = m} \qquad \boldsymbol{s_1 + s_2 + \cdots + s_q = n}$

$A_{kl} = (a_{ij})_{r_k x s_l} \quad (k = 1,2, \dots, p; l = 1,2, \dots, q)$ ler A nın alt matrisleri olmak üzere,

$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A_{11}} & \cdots & \boldsymbol{A_{1q}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{A_{p1}} & \cdots & \boldsymbol{A_{pq}} \end{bmatrix}$

Bu yazım şekline **A matrisinin parçalanması** denir. Boyutu mxn olan bir A matrisi aşağıdaki kurallar dikkate alınarak alt matrislere ayrıştırılabilir.

Matris Parçalanma Kuralları

i. Aynı satırdaki alt matrislerin satır sayıları eşit olmalı ve sütun sayılarının toplamı m olmalı.

ii. Aynı sütundaki alt matrislerin sütun sayıları eşit olmalı ve satır sayılarının toplamı n olmalı. Bu kurallar dikkate alınarak matrisler eleman sayısının izin verdiği ölçüde alt matrise ayrılabilir. Matris parçalanması eşsiz değildir. Aynı matrisin farklı bölümlenmeleri söz konusudur.

Örnek 6.5: $\mathrm{A} = (\mathrm{a_{ij}})$ matrisi 3x4 boyutlu bir matris olmak üzere aşağıdaki gibi dört parçaya ayrılmış olsun.

$$\text{A=}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

Çözüm 6.5: $A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$; $A_{12} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$; $A_{21} = [a_{31}]$; $A_{22} = [a_{32} \quad a_{33} \quad a_{34}]$ dır.

Örnek 6.6: $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 6 & 0 & 6 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ matrisini parçalı olarak yazınız.

Çözüm 6.6: $A_{11}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix}$, $A_{12}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 3\\ 6 & 0 & 6\end{bmatrix}$, $A_{13}=\begin{bmatrix}4\\ 5\end{bmatrix}$

$A_{21}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$, $A_{22}=\begin{bmatrix}2 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$, $A_{23}=\begin{bmatrix}2\\ -3\end{bmatrix}$

olmak üzere $A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\end{bmatrix}$ şeklinde yazabiliriz**.**

Burada, p =2, q=3, r_1= r_2=2, s_1=2, s_2=3, s_3=1 dir.

6.3.10. Ortogonal (Dik, Bağımsız) Matris

$A=(a_{ij})$ nxn tipinde bir kare matris aşağıdaki özelliklere sahip ise bu matrise **ortogonal matris** denir.

i. $\sum_{j=1}^{p} a_{ij}\, a_{kj} = 0 \quad i \neq k$ ya da $\sum_{i=1}^{p} a_{ij} a_{ik} = 0$

ii. $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$

Örnek 6.7: A matrsinin dik bir matris olduğunu gösteriniz.

$$A=\frac{1}{15}\begin{bmatrix}5 & -14 & 2\\ -10 & -5 & -10\\ 10 & 2 & -11\end{bmatrix}$$

$A^tA = AA^t = I$ ise A dik bir matristir.

$$\frac{1}{15}\begin{bmatrix}5 & -14 & 2\\ -10 & -5 & -10\\ 10 & 2 & -11\end{bmatrix}.\frac{1}{15}\begin{bmatrix}5 & -10 & 10\\ -14 & -5 & 2\\ 2 & -10 & -11\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$A^tA = I$ olduğu için A dik bir matristir.

6.4. Determinantlar

Tanım 6.10: $A=(a_{ij})$ nxn tipinde bir kare matris olsun. A matrisinin determinantı **det A** veya **|A|** ile gösterilir. 1. Satıra göre A matrisinin determinant açılımı;

$$\det A = (-1)^{1+1}\cdot a_{11}\cdot \det M_{11} + (-1)^{1+2}\cdot a_{12}\cdot \det M_{12} + \ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^{1+n}\cdot a_{1n}\cdot \det M_{1n}$$

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j}\cdot a_{1j}\cdot \det M_{1j}$$

şeklinde tanımlanır. A matrisinin determinantı n+n=2n türlü bulunabilir.

6.4.1. Sarrus kuralı

Sarrus kuralı 3×3'lük ve 2×2'lik kare matrislerde geçerlidir.

$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}_{3x3}$ matrisinin determinantını hesaplamak için pratik bir yol da Sarrus kuralıdır.

Sarrus kuralında, matrisin ilk iki satırındaki elemanlar determinantın altına ya da ilk iki sütunundaki elemanlar determinantın sağına yazılarak aşağıdaki gibi yapılarak determinant pratik yoldan bulunur.

- A matrisinin ilk iki satır ilavesi ile determinant hesabı;

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

- A matrisinin ilk iki sütun ilavesi ile determinant hesabı;

$$|A| = \begin{bmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} & a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} a_{23} & a_{21} a_{22} \\ a_{31} a_{32} a_{33} & a_{31} a_{32} \end{bmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Tanım 6.11: $A = (a_{ij})$ bir matris iken **A matrisinin transpozesi (devriği) A^t** ile gösterilir ve A matrisinin satırlarının sütunları ile veya sütunlarının satırları ile yer değiştirilmesi sonucu elde edilir. Yani;

$A = (a_{ij})$ **iken** $A^t = (a_{ji})$'dir.

Örneğin;

$A = [1 \quad 2 \quad 3]_{1x3} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ veya $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2x3} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}_{3x2}$

$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 2 \end{bmatrix}_{2x4} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 8 \\ 5 & 9 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}_{4x2}$

6.5. Determinantın Özellikleri

$A = (a_{ij})$ n×n tipinde bir kare matris olsun. Buna göre;

1) A'nın bir satırı 0 ise **detA = 0**

2) A'nın herhangi iki satırı eşit ise **detA = 0**

3) A'nın herhangi iki satırının kendi aralarında yer değiştirmesiyle elde edilen matris B ise;

detB = - detA

4) A'nın herhangi bir satırının katının diğer bir satırına ilave edilmesiyle elde edilen matris B ise; **detB = detA**

5) A'nın herhangi bir satırının k sayısı ile çarpılmasıyla elde edilen matris B ise;

detB = k . detA

6) **det A^t =detA** Yani bir matrisin determinantı ile transpozesinin determinantı aynıdır. Bir başka deyişle şimdiye kadar satırlar için söylenen özellikler sütunlar için de geçerlidir.

7) A matrisi üst üçgen matris ise, A'nın determinantı köşegen üzerindeki elemanların çarpımına eşittir.

8) **det (A . B) = detA . detB** olup burada A ve B aynı mertebeden iki kare matristir.

Teorem 6.2: $A = (a_{ij})$ n×n tipinde bir kare matris olsun. A matrisinin tersinin olabilmesi için gerek ve yeter şart; **detA ≠ 0** olmasıdır.

Tanım 6.12: $A_{ij} = (-1)^{i+j}.\det M_{ij}$ yada $A_{ij} = (-1)^{i+j}.|M_{ij}|$ **(i, j = 1, 2, ..., n)** şeklindeki sayıları tanımlayalım. A_{ij} sayısına a_{ij} elemanının **kofaktörü (eşçarpanı – işaretli minörü)** denir.

$$\det A = \sum_j a_{ij} A_{ij} \qquad (i = 1, 2, ..., n)$$

A matrisinin kofaktörü A^{cof} ile gösterilir.

$A^{cof} = (A_{ij})^t = A_{ji}$ dir. Yani, A matrisinin eşçarpan matrisi A'nın eşçarpanlarından oluşan matrisin transpozesine (devriğine) eşittir.

Tanım 6.13: $A = (a_{ij})$, n x n tipinde kare matris olsun. A matrisinin tersi;

$$A^{cof} = \begin{bmatrix} A_{11} A_{12} A_{13} \\ A_{21} A_{22} A_{23} \\ A_{31} A_{32} A_{33} \end{bmatrix}^t \quad \text{iken} \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} . A^{cof}$$

olup A matrisinin tersi olan A^{-1} matrisi A^{cof} ile $\frac{1}{\det A}$ çarpımına eşittir.

Tanım 6.14: $A = (a_{ij})$ m×n olan bir A matrisinin, determinantı sıfırdan farklı en büyük alt kare matrisinin mertebesine **A matrisinin rankı** denir ve r(A) ile gösterilir.

$$m < n \; ise \; r(A) \leq m$$

Boyutu m×n olan bir A matrisinin rankı, boyut sayılarının, m ve n, küçüğüne eşit ya da ondan daha küçüktür.

Eğer A bir nxn kare matrisi ise:

i. $|\mathrm{A}| = 0$ ise $\mathrm{r(A)} < \mathrm{n}$ (**Tekil matris**)

ii. $|\mathrm{A}| \neq 0$ ise $\mathrm{r(A)} = \mathrm{n}$ (**Tekil olmayan matris**)

Matris rankının özellikleri aşağıdaki gibidir.

1. $\mathrm{r(A)} = \mathrm{r(A^t)}$
2. $\mathrm{r(A)} = \mathrm{r(A^{-1})}$

Örnek 6.8: $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin det A=0 olduğundan rankA, 3 ten küçük olmalıdır.

$\mathrm{A_1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ise $detA_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$ olduğundan rankA= 2'dir.

Örnek 6.9: $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin rankını bulmak için determinantını bulalım.

$\mathrm{detB} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$=5 olduğundan rankB=3 olarak bulunur.

6.6. Lineer Denklem Sistemleri

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots \ldots \ldots \ldots + a_{in}x_n = b_i \qquad \text{(i=1,2,....,n)}$$

ifadesi **n-** bilinmeyenli **n-** denklemden oluşan bir lineer denklem sistemidir. Açık olarak aşağıdaki gibi ifade edilir;

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots \ldots \ldots \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots \ldots \ldots \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots \ldots \ldots \ldots + a_{nn}x_n = b_n$$

Matris biçiminde gösterecek olursak bir lineer denklem sistemi; **AX=B** şeklinde gösterilir.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots a_{2n} \\ . & \\ . & \\ . & \\ . & \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots\cdots a_{nn} \end{pmatrix}_{nxn} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}_{nx1} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}_{nx1}$$

nxn'lik kare matris Bilinmeyenler matrisi Sabitler vektörü

Teorem 6.3: **AX=B** lineer denklem sisteminin çözümünün olması için gerek ve yeter koşul A^{-1} yani A matrisinin tersinin mevcut olmasıdır.

A^{-1}'in mevcut olması için gerek ve yeter koşul ise Teorem 6.2'den **detA ≠ 0** olması idi.

AX=B ifadesinin her iki yanını A^{-1} ile çarparsak;

$$\mathbf{A^{-1}.A.X = A^{-1}B}$$

$$\mathbf{X = A^{-1}.B} \quad \text{çözüm vektörüdür.}$$

6.6.1. Cramer Kuralı

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots \ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots \ldots\ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2$$

....

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots \ldots\ldots\ldots + a_{nn}x_n = b_n$$ denklem sistemini çözmek için;

$$x_i = \frac{det\,A_i}{det\,A}$$ olarak hesaplanır. (i=1,2,.....,n)

Burada, **A_i matrisi A matrisinin i. sütununun B matrisiyle yer değiştirilmesiyle elde edilir.**

6.6.2. Matris, Determinant ve LDS (Lineer Denklem Sistemi) Örnekleri

Örnek 6.10: A= $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin;

a) detA=?

b) A^{cof} = ?

c) A^{-1} = ?

Çözüm 6.10:

a) A, 3x3'lük bir kare matris olup istediğimiz bir satır (3 tane satır var) veya istediğimiz bir sütuna (3 tane sütun var) göre veya Sarrus kuralına göre satır ilave veya sütun ilave edilerek göre 8 farklı yoldan determinant hesaplayabiliriz.

- Birinci satıra göre determinant hesabı;

$$|A| = (-1)^{1+1}.(3).\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}.(2).\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}.(5).\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 15$$

$$|A| = (3).(1-18) + (-2).(4-12) + 5.(12-2) = -51 + 16 + 50 = 15$$

- Sarrus satır ilaveye göre determinant hesabı;

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 15 \text{ ise}$$

$|A| = (3).$ 1. 1+4.3.5.+2.2.6-2.1.5-3.3.6-4.2.1=15

- Sarrus sütun ilaveye göre determinant hesabı;

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 6 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 3.1.1 + 2.6.2 + 5.4.3 - 2.1.5. -3.6.3 - 1.4.2 = 15$$

b) A^{cof}=?

$A_{ij}=(-1)^{i+j}.|M_{ij}|$

$A_{11}= (-1)^{1+1}|M_{11}| =(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}= +(1-18) = -17$

$A_{12}= (-1)^{1+2}|M_{12}| =(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}= - (4-12) = 8$

$A_{13}= (-1)^{1+3}|M_{13}| =(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}= + (12-2) = 10$

$A_{21}= (-1)^{2+1}|M_{21}| = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}= - (2-15) = 13$

$A_{22}= (-1)^{2+2}|M_{22}| = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = + (3-10) = -7$

$A_{23}= (-1)^{2+3}|M_{23}| = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = - (9-4) = -5$

$A_{31}= (-1)^{3+1}|M_{31}| = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = + (12-5) = 7$

$A_{32}= (-1)^{3+2}|M_{32}| = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = - (18-20) = 2$

A_{33}= $(-1)^{3+3}|M_{33}|$= $(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$ = + (3-8) = -5

$$A^{cof} = \begin{bmatrix} A_{11} A_{12} A_{13} \\ A_{21} A_{22} A_{23} \\ A_{31} \; A_{32} A_{33} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -17 & 8 & 10 \\ 13 & -7 & -5 \\ 7 & 2 & -5 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -17 & 13 & 7 \\ 8 & -7 & 2 \\ 10 & -5 & -5 \end{bmatrix}$$

c) $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} A^{cof}$ olduğunu biliyoruz. Buradan A^{-1} ;

$$A^{-1} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} -17 & 13 & 7 \\ 8 & -7 & 2 \\ 10 & -5 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{17}{15} & \frac{13}{15} & \frac{7}{15} \\ \frac{8}{15} & \frac{-7}{15} & \frac{2}{15} \\ \frac{10}{15} & \frac{-5}{15} & \frac{-5}{15} \end{bmatrix}$$ olarak hesaplanır.

Örnek 6.11:

$$-3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -8$$
$$4x_1 - x_2 - 6x_3 = 13$$
$$-2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9$$ lineer denklem sistemini;

a) AX=B matris formu ile b) Gauss eliminasyon yöntemiyle ayrı ayrı çözünüz.

Çözüm 6.11: a) AX=B Matris formu: Lineer denklem sistemini önce matris biçiminde yazalım.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & -6 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -8 \\ 13 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{AX = B \Rightarrow A^{-1}.A.X = A^{-1}.B \Rightarrow I.X = A^{-1}.B \Rightarrow X = A^{-1}.B}$ eşitliğinden X ‘i hesaplayalım.

$$X = A^{-1}.B \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{17}{15} & \frac{13}{15} & \frac{-7}{15} \\ \frac{8}{15} & \frac{7}{15} & \frac{2}{15} \\ \frac{10}{15} & \frac{5}{15} & \frac{-5}{15} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -8 \\ 13 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{17}{15}.(-8) + \frac{13}{15}.(13) + \frac{-7}{15}.9 \\ \frac{8}{15}.(-8) + \frac{7}{15}.(13) + \frac{2}{15}.9 \\ \frac{10}{15}.(-8) + \frac{5}{15}.(13) + \frac{-5}{15}.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-30}{15} \\ \frac{45}{15} \\ \frac{-60}{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$x_1 = -2$, $x_2 = 3$ ve $x_3 = -4$ olarak bulunur.

b) $-3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -8$ LDS’sini Gauss eliminasyon ile çözelim.

$4x_1 - x_2 - 6x_3 = 13$

$-2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9$

D_1.......... $-3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -8$

D_2.......... $4x_1 - x_2 - 6x_3 = 13$

D_3......... $-2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9$

1.Yaklaşım : 3 denklemi 2'şerli kullanarak x_1'i yok edelim.

D_2 ve D_3 denklemlerinden;

$D_2 + 2.D_3 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 - 6x_3 &= 13 \\ -4x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 18 \\ \hline D_4 \; .... \quad 5x_2 - 4x_3 &= 31 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

D_1 ve D_2 denklemlerinden;

$4.D_1 + 3.D_2 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} -12x_1 + 8x_2 + 20x_3 &= -32 \\ 12x_1 - 3x_2 - 18x_3 &= 39 \\ \hline D_5 \; .... \quad 5x_2 + 2x_3 &= 7 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Böylece D_4 ve D_5;

D_4 .... $5x_2 - 4x_3 = 31$

D_5 .... $5x_2 + 2x_3 = 7$

İki bilinmeyenli iki denklemden oluşan LDS elde edilir. D_4 ve D_5 denklemlerinden x_2 yok edilerek;

$D_4 + (-1).D_5 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} 5x_2 - 4x_3 &= 31 \\ -5x_2 - 2x_3 &= -7 \\ \hline -6x_3 &= 24 \end{aligned}$$

ise $x_3 = -4$ olarak bulunur.

Bu değer D_4 veya D_5'te yerine yazılırsa;

$5x_2 - 4(-4) = 31 \rightarrow x_2 = 3$ veya

$5x_2 + 2(-4) = 7 \rightarrow x_2 = 3$ bulunur.

Şimdi de $x_2 = 3$ ve $x_3 = -4$ değerleri D_1, D_2 veya D_3'ten herhangi birine yazılırsa;

$D_1 \Rightarrow -3x_1 + 2(3) + 5(-4) = -8$

$\Rightarrow -3x_1 = 6$

$\Rightarrow x_1 = -2$ bulunur.

Böylece; $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, $x_3 = -4$ olur.

Örnek 6.12:

-x+ 2y-3z = 1 lineer denklem sistemini AX=B ters matris yöntemi ile çözünüz.

5x-3y+2z = 3

x - y + 4z = -3

Çözüm 6.12: Lineer denklem sistemini önce matris biçiminde yazalım.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \; ; \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \; ; \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$a_{11} = +(-12+2) = -10$ $\quad a_{21} = -(8-3) = -5$ $\quad a_{31} = +(4-9) = -5$

$a_{12} = -(20-2) = -18$ $\quad a_{22} = +(-16+3) = -13$ $\quad a_{32} = -(8+15) = -7$

$a_{13} = +(-5+3) = -2$ $\quad a_{23} = -(4-2) = -2$ $\quad a_{33} = +(12-10) = 2$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 10$$

$$X = A^{-1}.B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{10}{10} & -\frac{5}{10} & -\frac{5}{10} \\ -\frac{18}{10} & -\frac{13}{10} & -\frac{7}{10} \\ -\frac{2}{10} & -\frac{2}{10} & \frac{2}{10} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(-10).(-1)+(-5).3+(-5).(-3)}{10} \\ \frac{(-18).(-1)+(-13).3+(-7).(-3)}{10} \\ \frac{(-2).(-1)+(-2).3+2.(-3)}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Örnek 6.13: 2 x – y + 3 z = – 6 LDS'ini a)Cramer kuralı ve

– 3 x + 4 y – 2 z = 4 b)Gauss eliminasyon ile çözünüz.

5 x – 2y + z = 5

Çözüm 6.13: a) Cramer kuralı;

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} -6 & -1 & 3 & -6 & -1 \\ 4 & 4 & -2 & 4 & 4 \\ 5 & -2 & 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & -2 & -3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}}$$

$$x = \frac{(-6).4.1 + (-1)(-2).(5) + 3.4.(-2) - 5.4.3 - (-2).(-2).(-6) - 1.4.(-1)}{2.4.1 + (-1).(-2).5 + 3.(-3).(-2) - 5.4.3 - (-2).(-2).2 - 1.(-3).(-1)}$$

$$= \frac{-70}{-35} = 2$$

$$y=\frac{|A_2|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -6 & 3 & 2 & -6 \\ -3 & 4 & -2 & -3 & 4 \\ 5 & 5 & 1 & 5 & 5 \end{vmatrix}}{-35}$$

$$y=\frac{2.4.1+5(-2).(-6)+3.(-3).5-5.4.3-5.(-2).2-1.(-3).(-6)}{-35}=\frac{-35}{-35}=1$$

$$z=\frac{|A_3|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -6 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & 4 & -3 & 4 \\ 5 & -2 & 5 & 5 & -2 \end{vmatrix}}{-35}$$

$$z=\frac{2.4.5+(-1).4.5+(-6).(-3).(-2)-5.4.(-6)-(-2).4.2-5.(-3).(-1)}{-35}=\frac{105}{-35}$$

$$=-3$$

b) Gauss eliminasyon; önce x'i veya y'yi veya z'yi yok edebiliriz. Önce z'yi yok edelim.

$D_1 \Rightarrow \quad 2x - y + 3z = -6$

$D_2 \Rightarrow \quad -3x + 4y - 2z = 4$

$D_3 \Rightarrow \quad 5x - 2y + z = 5$

$D_2 + 2 . D_3 \Rightarrow \quad -3x + 4y - 2z = 4$

$10x - 4y + 2z = 10$

+______________

$7x = 14$

$x = 2$

Bu değer istenilen iki denklemde yerine yazılarak y ve z 'ye bağlı iki bilinmeyenli iki denklem elde edilir. D_1 ve D_2 'de x yerine 2 yazılırsa D_4 ve D_5 elde edilir.

$-y + 3z = -10 \quad \Rightarrow D_4$

$4y - 2z = 10 \quad \Rightarrow D_5$

Burada y yok etmek $4D_4 + D_5$ işlemi yapılırsa;

$4D_4 + D_5 \Rightarrow \quad -4y + 12z = -40$

$4y - 2z = -10$

+______________

$10z = -30$

$z = -3$

$4y - 2 . (-3) = 10$ ise $y = 1$ ve çözüm : $x=2$, $y= 1$, $z= -3$ bulunur.

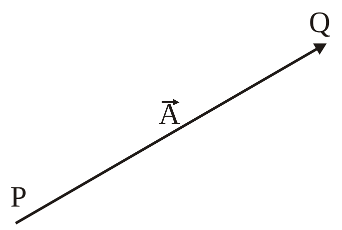
6.7. Vektörler

Fizikte kütle, uzunluk, sıcaklık, hacim gibi yalnızca sayısal değeri olan büyüklüklere **skaler büyüklükler** denir. Bunlara doğrultu ve yön belirleme gereği yoktur. Bunların dışında yer değiştirme, hız, kuvvet, ivme gibi büyüklüklerin hem sayısal değerleri hem de yönleri vardır. Bunlara **vektörel büyüklükler** yani kısaca **vektör** denir.

Bir vektör, başlangıç noktası denilen bir P noktasından, bitim noktası denilen Q noktasına yönlendirilmiş bir $\overrightarrow{PQ}$ doğru parçasıdır. (Şekil 6.1)

Bir vektörün elemanları;

a) Başlangıç noktası **b)** Doğrultusu **c)** Yönü **d)** Büyüklüğü



Şekil 6.1. **Bir vektörün elemanları**

Bir vektörün bu 4 elemanı bilindiği zaman, bir vektör tamamen belirtilmiş olur. Vektörü $\vec{A}$ veya $\vec{PQ}$ ile gösteririz. Vektörün uzunluğu ise $|\vec{PQ}|$veya$|\vec{A}|$ ile gösterilir.

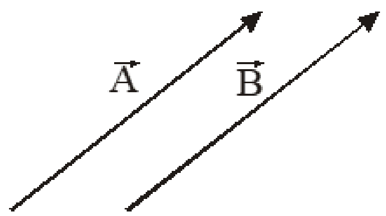
6.7.1. Vektör Cebiri

Sayıların cebrinde bildiğimiz toplama, çıkartma ve çarpma işlemleri uygun tanımlarla vektörlerin cebrine genişletilebilirler.

6.7.1.1. İki Vektörün Eşitliği

Büyüklüğü ve yönü aynı olan $\vec{A}$ve $\vec{B}$ vektörlerine, başlangıç noktalarına bakılmaksızın eşittirler denir. (Şekil 6.2)

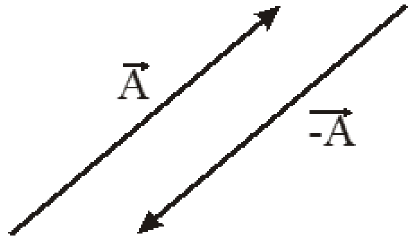
$\vec{A} = \vec{B}$ ile gösterilir.



Şekil 6.2. **İki vektörün eşitliği**

6.7.1.2. Bir Vektörün Negatifliği

Yönü, $\vec{A}$ 'nün yönünün karşıtı fakat $\vec{A}$ ile aynı büyüklükte olan $-\vec{A}$ vektörüne $\vec{A}$'nün negatifi denir ve $-\vec{A}$ ile gösterilir. (Şekil 6.3)

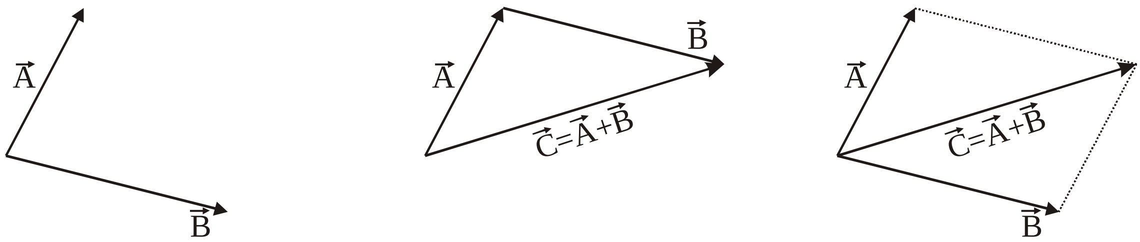


Şekil 6.3. **Vektörün negatifliği**

6.7.1.3. İki Vektörün Toplamı (Paralelkenar Kuralı)

$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin toplamı veya bileşkesi, $\vec{B}$' nin başlangıç noktası $\vec{A}$' nın bitim noktasına birleştirilerek oluşturulan $\vec{C}$' dir. C toplamı $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ şeklinde yazılır.

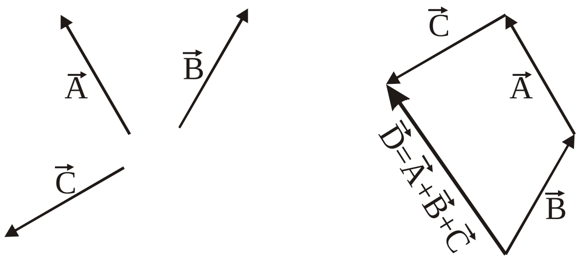
En son şekil vektörlerin toplanmasına ait **paralelkenar** yasasıdır. (Şekil 6.4)



Şekil 6.4. **Paralelkenar Kuralı ile Vektör Toplamı**

6.7.1.4. İkiden Fazla Vektörün Toplamı (Çokgen Yöntemi)

Bu yöntemde bileşke herhangi bir uygun noktadan başlayarak bir ölçeğe göre bütün vektörleri bir öncekinin ucuna eklemek sureti ile bulunur. Yani her vektörün başlangıcı bir önceki vektörün oklu ucu olur. Bu şekilde oluşan çokgeni tamamlamak üzere çizilen doğru, vektörlerin bileşkesi olur. (Şekil 6.5)



Şekil 6.5. **Çokgen Yöntemi ile Vektör Toplamı**

6.7.1.5. İki Vektörün Farkı

$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin $\vec{A}-\vec{B}$ şeklinde gösterilen farkı öyle bir $\vec{C}$ vektörüdür ki $\vec{B}$ vektörü ile toplandığı zaman $\vec{A}$ vektörünü verir. Buna eşdeğer olarak $\vec{A}-\vec{B}$ vektörü, $\vec{A}+(-\vec{B})$ vektörü şeklinde tanımlanabilir. Eğer $\vec{A}=\vec{B}$ ise $\vec{A}-\vec{B}$ sıfır vektör olarak tanımlanır ve $\vec{0}$ vektörü ile gösterilir.

> $\vec{0}$ vektörünün büyüklüğü sıfırdır fakat yönü tanımlanmış değildir.

6.7.1.6. Bir Vektörün Bir Skalerle Çarpımı

Bir $\vec{A}$ vektörünün k skaleri ile çarpılması, büyüklüğü $\vec{A}$ vektörünün büyüklüğünün k katı olan ve yönü k'nın pozitif veya negatif olmasına göre, $\vec{A}$ vektörünün k ile aynı veya karşıtı olan bir k$\vec{A}$ vektörüdür. Eğer k = 0 ise k$\vec{A}$ = 0 dır.

6.7.1.7. Vektör Cebrinin Özellikleri

$\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ üç vektör ve k, r iki skaler sayı olmak üzere;

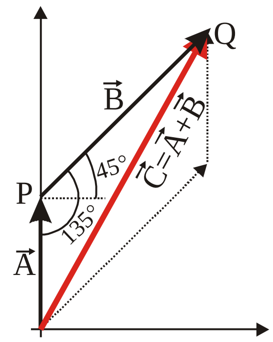
1) $\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$	Toplama için değişme özelliği
2) $\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}$	Toplama için birleşme özelliği
3) $k.(r.\vec{A})=(k.r).\vec{A}=r.(k.\vec{A})$	Çarpma için birleşme özelliği
4) $(k+r)\vec{A}=k.\vec{A}+r.\vec{A}$	Çarpma için dağılma özelliği
5) $k.(\vec{A}+\vec{B})=k.\vec{A}+k.\vec{B}$	Çarpma için dağılma özelliği

Örnek 6.14: Bir araba tam kuzeye doğru 3km yaptıktan sonra kuzeydoğuya doğru 5km yol alıyor. Bu yer değiştirmelerini grafikle gösteriniz ve bileşke yer değiştirmeyi;

a)Grafikle, b) Hesapla belirtiniz.

Çözüm 6.14 :

a) Grafikle çözüm Şekil 6.6 da görülmektedir.



Şekil 6.6.

Uzunluk yaklaşık 7,4 km'dir. Doğrultusu 61,5 kuzey-doğudur.

b) Hesapla bulunması;

OPQ üçgeninden kosinüs kuralına göre;

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2ABCos\,O\hat{P}Q$$

$$C^2 = 3^2 + 5^2 - 2.3.5.Cos135°$$

$$C^2 = 34 + 15\sqrt{2} = 55{,}21 \Rightarrow \quad C \cong 7{,}43 \qquad \text{(yaklaşık)}$$

Sinüs kuralından;

$$\frac{A}{\sin O\hat{Q}P} = \frac{C}{\sin O\hat{P}Q}$$

$$\sin O\hat{Q}P = \frac{A\sin O\hat{P}Q}{C} = \frac{3(0{,}707)}{7{,}43} = 0{,}2855 \Rightarrow O\hat{Q}P = 61^0 35'$$

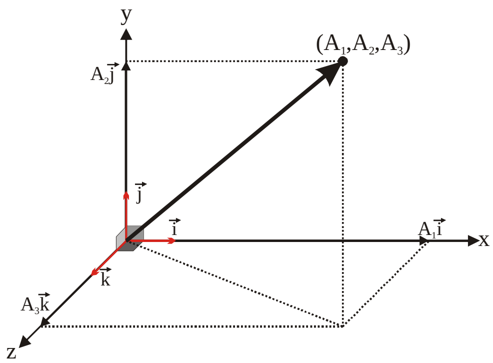
$\overrightarrow{OQ}$ vektörünün büyüklüğü 7,43km ve doğrultusu kuzey-doğu (45° + 16° 35′) = 61° 35′ dır.

Tanım 6.17: $\vec{a} = |\vec{a}|.\vec{u}$ eşitliğini sağlayan $\vec{u}$ vektörüne, a vektörü ile aynı doğrultu ve yöne sahip olan vektöre **birim vektör** denir. Buradan; $\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, $\vec{a}$ vektörünün doğrultu ve yönündeki birim vektör, $\vec{a}$ yı 1 ile çarpmak sureti ile bulunur. Kısaca uzunluğu 1 olan vektöre **birim vektör** denir.

Tanım 6.18: Bir dik koordinat sisteminin pozitif x, y ve z eksenleri ile aynı yönde bulunan i, j ve k birim vektörlerine **dik birim vektörler** denir. Aksi söylenmedikçe sağ dik koordinat sistemleri kullanılır.

Başlangıç noktaları çakışık olan ve aynı düzlemde bulunmayan $\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ vektörleri verildiğine göre, eğer sağ dişli bir vida A' dan B' ye 180° küçük bir açı kadar döndürüldüğünde C yönünde ilerlerse $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ bir sağ sistem oluşturmaktadır denir.

Tanım 6.19: Üç boyutlu uzayda herhangi bir $\vec{A}$, başlangıç noktası bir dik koordinat sisteminin O başlangıç noktasında bulunmak üzere gösterilebilirler. (Şekil 6.7)



Şekil 6.8. Bir Vektörün Bileşenleri

Başlangıç noktası O olan bir A limit noktasının dik koordinatları (A_1, A_2, A_3) olsun. $\vec{A_1}, \vec{A_2}, \vec{A_3}$ vektörleri $\vec{A}$ vektörünün sırasıyla x, y ve z yönündeki **dik vektör bileşenleri** veya sadece **bileşen vektörleri** denir. $A_1\vec{i}, A_2\vec{j}, A_3\vec{k}$'nın **toplamı** veya **bileşkesi** $\vec{A} = \left(A_1\vec{i}, A_2\vec{j}, A_3\vec{k}\right)$ dır.

Tanım 6.20: $\vec{A}$ **vektörünün uzunluğu,** $|\vec{A}| = \sqrt{{A_1}^2 + {A_2}^2 + {A_3}^2}$dur.

Özel olarak, O(başlangıç noktası)nı (x, y, z) noktasına birleştiren $\vec{r}$ yer vektörü;

$\vec{r} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$ ve uzunluğu $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$'dır.

Başlangıç noktası P (x_1, y_1, z_1) ve bitim noktası Q (x_2, y_2, z_2) olan vektör;

P' nin yer vektörü $\vec{r_1} = x_1.\vec{i} + y_1.\vec{j} + z_1.\vec{k}$

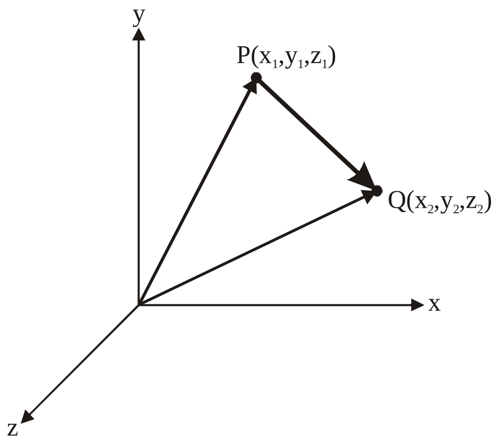
Q' nun yer vektörü : $\vec{r_2} = x_2.\vec{i} + y_2.\vec{j} + z_2.\vec{k}$ olsun. (Şekil 6.8)

Buna göre;

$$|\vec{PQ}| = \vec{r_2} - \vec{r_1} = \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\right) - \left(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}\right)$$

$$= (x_2 - x_1).\vec{i} + (y_2 - y_1).\vec{j} + (z_2 - z_1).\vec{k}$$

$$|\vec{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



Şekil 6.9. Bir Vektörün Uzunluğu

Tanım 6.21: $\vec{V}$ vektör uzayının her bir elemanı $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_k}$ vektörlerin lineer birleşimi olarak ifade ediliyorsa $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_k}$ vektörleri $\vec{V}$ ’yi **geriyor** ya da $\vec{V}$’yi **gerer** denir.

Örnek 4.15 : V=R^3 için

$\vec{v_1} = \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$ $\vec{v_3} = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ olsun. k, r, s reel sayılar olmak üzere $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\vec{v_3}$ vektörlerinin V’yi gerip germediğini görmek için V’den herhangi bir $\vec{v} = \begin{bmatrix}k\\r\\s\end{bmatrix}$ vektörü alınır ve

$$\vec{v} = x\vec{v_1} + y\vec{v_2} + z\vec{v_3}$$

eşitliği sağlayan x, y, z reel sayıları hesaplanır.

$$x + y + z = k$$

$$2x + z = r$$

$$x + 2y = s$$

Lineer denklem sisteminin çözümü;

$$x = \frac{-2k+2r+s}{3}, \; y = \frac{k-r+s}{3}, \; z = \frac{4k-r-2s}{3}$$

olarak elde edilir. Böylece $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\vec{v_3}$ vektörleri V’yi germiş olurlar.

6.7.2. Lineer Bağımlı ve Lineer Bağımsız Vektörler

$a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + a_k\overrightarrow{v_k} = 0$ olacak şekilde hepsi birden sıfır olmayan $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sabitleri bulunabilirse V vektör uzayındaki $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_k}$ vektörleri aralarında **lineer bağımlıdır** denir. Aksi halde $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_k}$ vektörleri aralarında **lineer bağımsızdır** denir. Yani $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_k}$ vektörleri aralarında lineer bağımsız ise

$a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + a_k\overrightarrow{v_k} = 0$

eşitliğinin sağlanması ile $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$ olması ile mümkündür. $S = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_k})$ olsun. $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_k}$ vektörleri lineer bağımlı ise S kümesine **lineer bağımlı**, vektörler lineer bağımsız ise S kümesine **lineer bağımsızdır** denir.

Örnek 6.16: $\vec{A}$ = (1, 1, 0) , $\vec{B}$ = (0, 1, 0) , $\vec{C}$ = (1, 0, 1) vektörlerinin lineer bağımsız olduklarını gösteriniz.

Çözüm 6.16: x, y, z bilinmeyen sabitler olmak üzere;

x (1, 1, 0) + y(0, 1, 0) + z (1, 0, 1) = (0, 0, 0)

(x + z, x + y, z) = (0, 0, 0)

Buradan sistemin çözümünden x = y = z = 0 bulunur.

O halde, $\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ vektörleri lineer bağımsızdır.

Örnek 6.17: $\vec{A}$ =(1, 0, 1) , $\vec{B}$ =(2, 1, 1) , $\vec{C}$ = (4, 3, 1) vektörlerinin lineer bağımlı olup olmadığını araştırınız.

Çözüm 6.17: x, y, z bilinmeyen sabitler olmak üzere;

x (1, 0, 1) + y (2, 1, 1) + z (4, 3, 1) = (0, 0, 0) olsun.

(x + 2y + 4z, y + 3z, x+ y + z) = (0, 0, 0) olur.

Buradan,

$$\begin{aligned} x + 2y + 4z &= 0 \\ y + 3z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

homojen lineer denklem sistemi elde edilir. Sistemin sıfır çözümden başka çözümlerinin olması için katsayılar matrisinin determinantı sıfır olmalıdır, buna göre sistemin katsayılar matrisinin determinantını bulalım:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ =1(1-3) +1(6-4) =0 olduğundan, sıfır çözümden başka çözümleri de vardır.

$\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ vektörleri lineer bağımlıdır. Determinantın değeri sıfırdan farklı olduğunda sıfır çözüm tek çözümdür. Bu durumda vektörler lineer bağımsızdır.

Örnek 6.18: $\vec{A}$ =(3,1,4), $\vec{B}$ =(-2,5,1), $\vec{C}$ =(4,7,9)vektörlerinin lineer bağımlı (yada lineer bağımsız olduğunu) olup olmadığını araştırınız.

Çözüm 6.18: x, y, z bilinmeyen sabitler olmak üzere,

x(3,1,4) + y(-2,5,1)+z(4,7,9)= (0,0,0)

$$\left.\begin{aligned} 3x-2y+4z&=0 \\ x+5y+7z&=0 \\ 4x+y+9z&=0 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 0 \text{ olur.}$$

Lineer homojen denklem sistemini verir. Bu lineer homojen denklem sisteminin aşikâr çözümden başka çözümleri vardır ve $p \in IR$ için x=-2p , y=-p ve z=p bir çözümdür. Yani verilen vektörler lineer bağımlı olup, herhangi bir $p \neq 0$ değeri için;

$-2p.\vec{A} - p.\vec{B} + p.\vec{C}$ =0 ve buradan $2\vec{A} + \vec{B} - \vec{C}$ olur.

Bu son ifade verilen vektörler arasındaki lineer bağıntıdır.

Lineer bağımlılığın geometrik yorumu ise;

- Şimdi n=2 ve n=3 için, yani 2 ve 3 vektörün lineer bağımlı olmasının, geometrik olarak ne anlama geldiğini görelim. a, b, c$\neq 0$ olsun.
- $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ lineer bağımlı olduğunda x ve y'den en az biri sıfırdan farklıdır.

Varsayalım ki, x$\neq 0$ olsun. Dolayısıyla; $m = -\dfrac{y}{x}$ olmak üzere $\vec{A} = m\vec{B}$ yazılabilir. O halde iki vektör lineer bağımlıysalar paraleldirler. Tersine olarak, paralelseler lineer bağımlıdırlar.

$x\vec{A} + y\vec{B} + z\vec{C} = 0$, yani $\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$

lineer bağımlı vektörlerse x, y ve z'den en az biri sıfırdan farklıdır. Bu durumda;

$-\dfrac{y}{x} = m$ ve $-\dfrac{z}{x} = n$ olmak üzere; $\vec{A} = m\vec{B} + n\vec{C}$ yazılabilir.

Bunun anlamı $\vec{A}$,$\vec{B}$ ve $\vec{C}$ vektörleri ile aynı düzlemdedir.

O halde, üç vektör lineer bağımlıysa bunlardan biri diğer ikisinin lineer bileşkesi olarak yazılabildiğinden, üç vektör aynı düzlemdedir.

Tersine $\vec{A}$ vektörü $\vec{B}$ ve $\vec{C}$'nin düzleminde değilse, $\vec{A}\,\vec{B}\,\vec{C}$ lineer bağımsızdır.

6.7.3. Skaler Çarpım

$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|.Cos\theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$

1) $\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$

2) $\vec{A}.\left(\vec{B} + \vec{C}\right) = \vec{A}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{C}$

3) $k.\left(\vec{A} + \vec{B}\right) = \left(k.\vec{A}\right) + \vec{B} = \vec{A} + \left(k.\vec{B}\right) = \left(\vec{A} + \vec{B}\right).k$

4) $\vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = 1$

$\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0$

5) $\vec{A} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}, \quad \vec{B} = B_1\vec{i} + B_2\vec{j} + B_3\vec{k}$ iki vektör olsun.

$\vec{A}.\vec{B} = A_1.B_1 + A_2.B_2 + A_3.B_3$

$\vec{A}.\vec{A} = \vec{A}^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 \vec{B}.\vec{B} = \vec{B}^2 = B_1^2 + B_2^2 + B_3^2$

6) $\vec{A}.0 = 0.\vec{A} = 0$

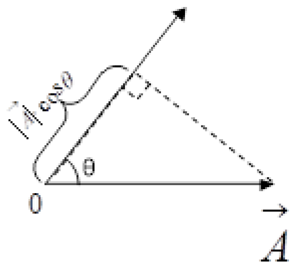
7) $\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|.Cos\theta$; θ bu vektörler arasındaki açıdır.

$0 \leq \theta \leq \pi$ olduğunda $\vec{A}.\vec{B} \leq |\vec{A}.\vec{B}| \leq |\vec{A}|.|\vec{B}|$ olur.

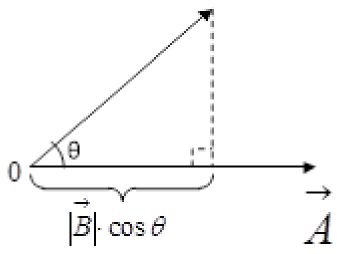
6.7.3.1. Skaler Çarpım ile İlgili Geometrik Yorumlar ve Sonuçlar

$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|.Cos\theta$, eşitliği gösteriyor ki;

1) İki vektörün skaler çarpımının mutlak değeri bunlardan birinin uzunluğu ile diğerinin bu vektör üzerindeki dik izdüşümü olan vektörün uzunluğunun çarpımına eşittir. Özel olarak; örneğin $\vec{A}$ birim vektör ise $\vec{A}.\vec{B}$, $\vec{B}$ vektörünün $\vec{A}$ vektörü üzerindeki dik izdüşümünün uzunluğudur. Üstelik bu durumda $\left(\vec{A}.\vec{B}\right).\vec{A}$ vektörü, $\vec{B}$ nin $\vec{A}$ vektörü üzerindeki dik izdüşüm vektörüdür.



Şekil 6.9. a) $\vec{B}$ nin $\vec{A}$ vektörü üzerindeki dik izdüşüm vektörü



Şekil 6.9. b) $\vec{B}$ nin $\vec{A}$ vektörü üzerindeki dik izdüşüm vektörü

2) Skaler çarpım ilgili vektörler arasındaki açıyı belirlemekte de kullanılır.

$\cos\theta = \dfrac{\vec{A}.\vec{B}}{\left|\vec{A}\right|.\left|\vec{B}\right|}$ veya analitik anlatımla; $\cos\theta = \dfrac{A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}\sqrt{B_1^2 + B_2^2 + B_3^2}}$

3) $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ arasındaki açı;

i. dar açı iken $\vec{A}.\vec{B} > 0$,

ii. geniş açı iken $\vec{A}.\vec{B} < 0$,

iii. $\theta = 0$ iken $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ aynı yönlü,

iv. $\theta = \pi$ iken $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ zıt yönlüdür.

Böylece $\theta \in \{0, \pi\}$ ise yani $\cos\theta = \pm 1$ ise $\dfrac{\vec{A}}{\vec{B}}$ olur. Ayrıca $\vec{A} \neq 0 \neq \vec{B}$ iken $\vec{A}.\vec{B} = 0$ *ise* $\cos\theta = 0$ ve dolayısıyla $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ dir. Tersine $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ ise $\vec{A}.\vec{B} = 0$ *bulunur* Yani skaler çarpım iki vektörün dikliğini karakterize eder.

O halde ;

$$\vec{A} \perp \vec{B} \Leftrightarrow \vec{A}.\vec{B} = 0 \text{ olur.}$$

Örneğin; taban vektörleri olan $\vec{i}\,.\,\vec{j}\,,\vec{k}$ için

$\vec{i}\,.\,\vec{j} = \vec{j}\,.\,\vec{k} = \vec{k}\,.\,\vec{i} = 0$ olduğundan ikişer ikişer birbirlerine diktirler.

Örnek 6.19:

a) $\vec{i}.\vec{i} = |\vec{i}|.|\vec{i}|\text{Cos}0° = 1.1.1 = 1$

b) $\vec{i}.\vec{j} = |\vec{i}|.|\vec{j}|\text{Cos}90° = 1.1.0 = 0$

c) $\vec{j}.\left(2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}\right) = 2.\vec{j}.\vec{i} - 3.\vec{j}.\vec{j} + \vec{j}.\vec{k} = 0-3+0 = -3$

d) $\left(2.\vec{i} - \vec{j}\right).\left(3.\vec{i} + \vec{k}\right) = 2.\vec{i}.\left(3.\vec{i} + \vec{k}\right) - \vec{j}.\left(3.\vec{i} + \vec{k}\right)$

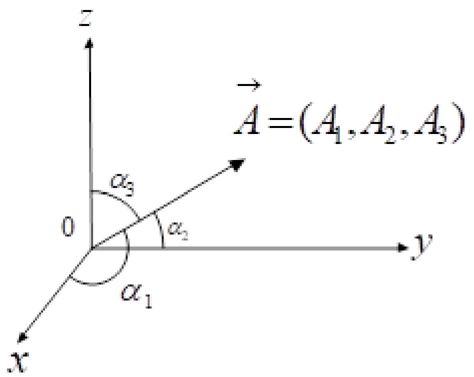
$$= 6.\vec{i}.\vec{i} + 2.\vec{i}.\vec{k} - 3.\vec{j}.\vec{i} - \vec{j}.\vec{k} = 6+0-0-0 = 6$$

Tanım 6.22: Vektörlerin Doğrultu Açıları ve Doğrultman Kosinüsleri

Herhangi bir $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$ vektörünün koordinat eksenleriyle yaptığı açılar sırasıyla $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ olsun. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ açılarına $\vec{A}$'nın **doğrultu açıları** denir. $\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3$ sayılarına da **$\vec{A}$'nın doğrultu (veya doğrultman) kosinüsleri** denir.

$\cos\alpha_i = \dfrac{\vec{A_i}}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}}$, i= 1,2,3 bulunur. Buradan; $cos^2\,\alpha_1 + cos^2\,\alpha_2 + cos^2\,\alpha_3 = 1$olur.

Böylece bir vektörün doğrultman kosinüsleri, bu vektör doğrultusundaki birim vektörün koordinatlarıdır demek yerinde olacaktır.



Şekil 6.10. $\vec{\mathbf{A}}$ Vektörünün Doğrultman Kosinüsleri

Örnek 6.20:

$\vec{A} = i + i + k$; $\vec{B} = 2i - i + 3k$ veriliyor. Bunların uzunluklarını, doğrultman kosinüslerini ve aralarındaki açının kosinüsünü bulunuz.

$|\vec{A}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$ ve $|\vec{B}| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (3)^2} = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}$

$\vec{A}$'nın doğrultman kosinüsleri $cos^2\,\alpha_1 + cos^2\,\alpha_2 + cos^2\,\alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\vec{B}$'doğrultman kosinüsleri $\cos\beta_1 = \frac{2}{\sqrt{14}}, \cos\beta_2 = \frac{-1}{\sqrt{14}}, \cos\beta_3 = \frac{3}{\sqrt{14}}$ olur.

Buna göre; $\cos\theta = \frac{1.2 + 1.(-1) + 1.3}{\sqrt{3}.\sqrt{14}} = \frac{4}{\sqrt{42}}$ bulunur.

6.7.4. Vektörel Çarpım

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \text{ dir. } \vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}| . |\vec{B}| . Sin\theta \quad (0 \le \theta \le \pi)$$

$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ yönü, A, B ve C bir sağ sistem oluşturacak tarzda A ve B nin düzlemine diktir.

Eğer $\vec{A} = \vec{B}$ ise veya $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ paralel iseler $\text{Sin}\theta = 0$ ve $\vec{A} \times \vec{B} = 0$'dır.

$\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ vektörleri ve onlara ait dik birim vektörler $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ve r skaler olmak üzere aşağıdaki özellikler geçerlidir.

1) $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} = -\left(\vec{B} \times \vec{A}\right)$

2) $\vec{A} \times \left(\vec{B} + \vec{C}\right) = (\vec{A} \times \vec{B}) + (\vec{A} \times \vec{C})$

$\left(\vec{B} + \vec{C}\right) \times \vec{A} = (\vec{B} \times \vec{A}) + (\vec{C} \times \vec{A})$

3) $r.\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) = \left(r.\vec{A}\right) \times \vec{B} = \vec{A} \times \left(r.\vec{B}\right) = \left(\vec{A} \times \vec{B}\right).r$

4) $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$ $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$

5) Eğer; $\vec{A} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$ ve $\vec{B} = B_1\vec{i} + B_2\vec{j} + B_3\vec{k}$ ise

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}.(A_2.B_3 - A_3.B_2) - \vec{j}.(A_1.B_3 - A_3.B_1) + \vec{k}.(A_1.B_2 - A_2.B_1)$$

6) $\vec{A} \times \vec{B}$ vektörü hem $\vec{A}$ hemde $\vec{B}$ vektörüne diktir.

7) $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = (\vec{A}.\vec{C})\vec{B} - (\vec{B}.\vec{C}).\vec{A}$

$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A}.\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}.\vec{B}).\vec{C}$

8) $\left|\vec{A} \times \vec{B}\right|^2 = \vec{A}^2.\vec{B}^2 - (\vec{A}.\vec{B})^2$

9) $\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}| . |\vec{B}| . \text{Sin}\theta$ $\quad$ θ, $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ arasındaki açıdır.

Örnek 6.21: $\vec{A} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$, $\vec{B} = B_1\vec{i} + B_2\vec{j} + B_3\vec{k}$ ise

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\end{vmatrix}$$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm 6.21:

$$\vec{A}\times\vec{B}=\left(A_1\vec{i}+A_2\vec{j}+A_3\vec{k}\right)\times\left(B_1\vec{i}+B_2\vec{j}+B_3\vec{k}\right)$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=A_1\vec{i}\times\left(B_1\vec{i}+B_2\vec{j}+B_3\vec{k}\right)+A_2\vec{j}\times\left(B_1\vec{i}+B_2\vec{j}+B_3\vec{k}\right)+A_3\vec{k}\times\left(B_1\vec{i}+B_2\vec{j}+B_3\vec{k}\right)$$

$$=A_1\underbrace{B_1\,\vec{i}\times\vec{i}}_{0}+A_1\underbrace{B_2\,\vec{i}\times\vec{j}}_{\vec{k}}+A_1\underbrace{B_3\,\vec{i}\times\vec{k}}_{-\mathrm{j}}+A_2\underbrace{B_1\,\vec{j}\times\vec{i}}_{-\vec{k}}+A_2\underbrace{B_2\,\vec{j}\times\vec{j}}_{0}+A_2\underbrace{B_3\,\vec{j}\times\vec{k}}_{\vec{i}}$$

$$+A_3\underbrace{B_1\,\vec{k}\times\vec{i}}_{\mathrm{j}}+A_3\underbrace{B_2\,\vec{k}\times\vec{j}}_{-\mathrm{i}}+A_3\underbrace{B_3\,\vec{k}\times\vec{k}}_{0}$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\vec{i}.(A_2.B_3-A_3.B_2)-\vec{j}.(A_1.B_3-A_3.B_1)+\vec{k}.(A_1.B_2-A_2.B_1)$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\end{vmatrix}$$ determinantına eşit olduğu görülür.

Örnek 6.22: $\vec{A}=3\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ ve $\vec{B}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$ ise $\vec{A}\times\vec{B}$ nedir?

Çözüm 6.22: $$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -1 & 2\\ 2 & 3 & -1\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix}$$

$$=-5\vec{i}+7\vec{j}+11\vec{k}$$

Örnek 6.23: Köşeleri P (2, 3, 5), Q (4, 2, -1), R (3, 6, 4) olan üçgenin alanını bulunuz.

Çözüm 6.23:

$$\vec{PQ}=(4-2)\,\vec{i}+(2-3)\,\vec{j}+(-1-5)\,\vec{k}=2\,\vec{i}-\vec{j}-6\,\vec{k}$$

$$\vec{PR}=(3-2)\,\vec{i}+(6-3)\,\vec{j}+(4-5)\,\vec{k}=\vec{i}+3\,\vec{j}-\vec{k}$$

$$\text{Üçgenin alanı} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\right| = \frac{1}{2}\left|\left(2\,\overrightarrow{i} - j - 6\,\overrightarrow{k}\right)\times\left(\overrightarrow{i} + 3\,\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}\right)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -6 \\ 1 & 3 & -1 \end{array}\right| = \frac{1}{2}\left|19\vec{i} - 4\vec{j} + 7\vec{k}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{19^2 + (-4)^2 + 7^2} = \frac{1}{2}\sqrt{426}\,\text{br}^2$$

6.7.5. Üçlü Çarpım

Uzayda $\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ vektörlerinin bir vektörel ve bir skaler çarpımının bileşimine $\left(\vec{A}\times\vec{B}\right).\vec{C}$; $\vec{A}.\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)$, $\vec{B}.\left(\vec{A}\times\vec{C}\right)$ üç vektörün karma çarpımı denir. $\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ vektörlerinin karma çarpımı $\left(\vec{A},\vec{B},\vec{C}\right)$ ile gösterilir. Yani, karma çarpım; $\left(\vec{A},\vec{B},\vec{C}\right)$

$\vec{\mathbf{A}} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$, $\vec{\mathbf{B}} = B_1\vec{i} + B_2\vec{j} + B_3\vec{k}$ ve $\vec{\mathbf{C}} = C_1\vec{i} + C_2\vec{j} + C_3\vec{k}$ için;

$\left(\vec{A},\vec{B},\vec{C}\right) = \vec{A}.\left(\vec{B}\times\vec{C}\right) = \left|\begin{array}{ccc} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{array}\right|$ biçiminde bir determinant ile tanımlanabilir.

- Karma çarpım, vektörel çarpımla ilgili olduğu için yalnızca üç boyutlu uzayın vektörleri için tanımlıdır.

1) $\left(\vec{A},\vec{B},\vec{C}\right) = \left(\vec{B},\vec{C},\vec{A}\right) = \left(\vec{C},\vec{A},\vec{B}\right) = -\left(\vec{A},\vec{C},\vec{B}\right) = -\left(\vec{C},\vec{B},\vec{A}\right) = -\left(\vec{B},\vec{A},\vec{C}\right)$

2) $\left(\vec{A},\vec{B},\vec{C}\right) = \left(\vec{A} + s\vec{B},\vec{B},\vec{C}\right) = \left(\vec{A},\vec{B} + r\vec{C},\vec{C}\right)$

3) $\left(r\vec{A},s\vec{B},t\vec{C}\right) = (r,s,t)\left(\vec{A},\vec{B},\vec{C}\right)$

4) $\left(\vec{A},\vec{A},\vec{B}\right) = \left(\vec{A},\vec{B},\vec{B}\right) = \left(\vec{A},\vec{B},\vec{A}\right) = 0$

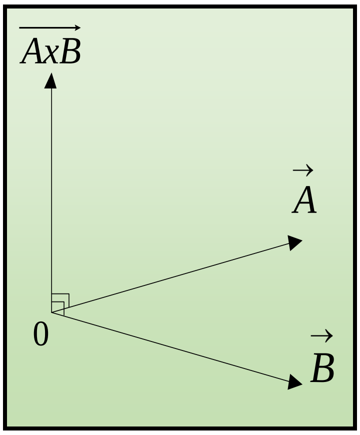
5) $\left(\vec{A} + \vec{B},\vec{C},\vec{D}\right) = \left(\vec{A},\vec{C},\vec{D}\right) + \left(\vec{B},\vec{C},\vec{D}\right)$

NOT: $\vec{A}.\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)$ çarpımına bazen üçlü skaler çarpım veya kutu çarpım denir ve $\left[\vec{A}\ \ \vec{B}\ \ \vec{C}\right]$ şeklinde gösterilir. $\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)$ çarpımına **üçlü vektör çarpımı** denir.

6.7.5.1. Vektörel ve Karma Çarpımın Geometrik Yorumları

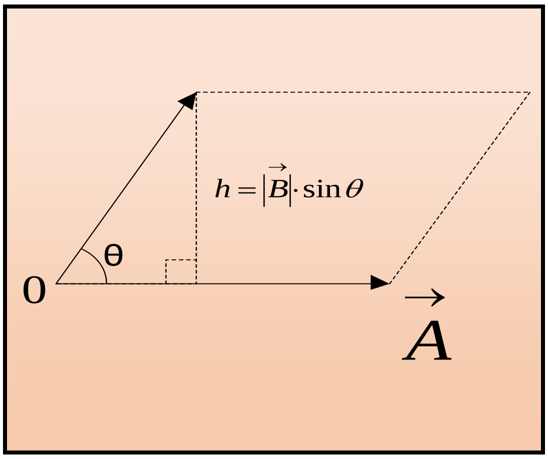
1) $(\vec{A}, \vec{A}, \vec{B}) = \vec{A}.(\vec{A} \times \vec{B}) = 0$

$\vec{A} \times \vec{B}$ vektörü hem $\vec{A}$ hemde $\vec{B}$ vektörüne diktir. Yani verilen iki vektöre (ve dolayısıyla da bu vektörlerin içinde bulunduğu veya paralel oldukları düzlemlere) de dik konumda bulunan bir vektör bulmak için bu vektörleri vektörel olarak çarpmak yeterlidir. (Şekil 6.11)



Şekil 6.11. $\vec{A} \times \vec{B}$ **vektörünün hem** $\vec{A}$ hemde $\vec{B}$ **vektörüne dik olması**

2) $\left|\vec{A} \times \vec{B}\right| = |\vec{A}| . |\vec{B}| . \mathrm{Sin}\theta = |\vec{A}|. h$ olduğundan $\vec{A} \times \vec{B}$ 'nin uzunluğu $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ üzerinde kurulan paralelkenarın alanına eşittir. Verilen $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerini kenar kabul eden paralelkenarın alanı, $\vec{A}$ ve $\vec{B}$'yi kenar kabul eden üçgenin alanının iki katıdır. (Şekil 6.12)



Şekil 6.12. Kenarları $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ olan paralelkenarın alanı

3) $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ arasındaki açıyı aşağıdaki gibi bulabiliriz.

$$\sin\theta = \frac{\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|}{\left|\vec{A}\right|.\left|\vec{B}\right|} \qquad \text{Örneğin; } \tan\theta = \frac{\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|}{\vec{A}.\vec{B}} \text{ diğer formüllerde elde edilebilir.}$$

4) $\vec{A}\times\vec{0} = \vec{0}\times\vec{A} = \vec{0}$ tanımından $\vec{A} \neq \vec{0} \neq \vec{B}$ iken $\vec{A}\times\vec{B} = \vec{0}$ olması özel hali;

$$\vec{A}\times\vec{B} = \vec{0} \Leftrightarrow \left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = \vec{0} \Leftrightarrow |\vec{A}|.|\vec{B}|.\sin\theta = 0 \Leftrightarrow \sin\theta = 0 \Leftrightarrow \theta\in\{0,\pi\} \Leftrightarrow \vec{A}//\vec{B} \text{ olur.}$$

İki vektörün paralel olması için gerek ve yeter koşul bunların vektörel çarpımlarının sıfır vektörü olmasıdır. Yani vektörel çarpım işlemi paralelliği belirlemekte de kullanılabilir.

$$\vec{A}\times\vec{B} = \vec{0} \Leftrightarrow \exists s\in R \ni \vec{A}_i = s\,\vec{B}_i \Leftrightarrow \frac{\vec{A}_1}{\vec{B}_1} = \frac{\vec{A}_2}{\vec{B}_2} = \frac{\vec{A}_3}{\vec{B}_3} = s$$

5) Uzayda verilen herhangi $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ vektörlerinin vektörel çarpımı olarak

$\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right) = \vec{u}$ olsun. $\vec{u}$ vektörü hem $\vec{A}\times\vec{B}$ hem de $\vec{C}$ vektörüne dik olduğundan $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ vektörlerinin oluşturduğu düzleme paraleldir.

$\vec{A}, \vec{B}, (\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$ vektörleri aynı düzleme paralel konumdadırlar, dolayısıyla aynı düzlemde (eş düzlemli) vektörler olarak düşünülebilirler.

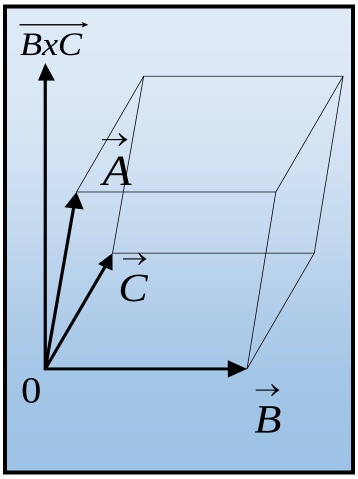
Başka bir anlatımla,

$\vec{A}, \vec{B}, (\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$ vektörleri $\left[\vec{C}\text{ ' ye bağlı olmaksızın}\right]$ lineer bağımlıdırlar.

6) Uzayda herhangi $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ vektörlerinin oluşturduğu paralelyüzlüyü ele alalım.

$$\left(\vec{A},\vec{B},\vec{C}\right) = \vec{A}.\left(\vec{B}\times\vec{C}\right) = \left|\vec{A}\right|.\left|\vec{B}\times\vec{C}\right|.Cos\theta = \left|\vec{B}\times\vec{C}\right|.\left|\vec{A}\right|.Cos\theta \ olur.$$

Burada; $|B\times\vec{C}|$ değeri $\vec{B} ve \vec{C}$ üzerine kurulan paralelkenarın (söz konusu paralelyüzlünün tabanı) alanıdır. $h = \left|\vec{A}\right|\cos\theta$ yüksekliği olduğundan $\left(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}\right)$ karma çarpımı $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ vektörleri üzerine kurulan paralel yüzlünün hacmini gösterir. Ayrıca $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ vektörlerinin sırası koordinat eksenleri gibi sıralanmışsa yani bir sağ sistem oluşturuyorlarsa bunların karma çarpımı pozitif aksi halde negatif bir sayıdır. Buna göre $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ üzerine kurulan paralelyüzlünün hacmini bulmak $\left(\vec{A}\ ,\vec{B}\ ,\ \vec{C}\right)$ için mutlak değerini almak gerekir. (Şekil 6.13)



Şekil 6.13. $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ üzerine kurulan paralelyüzlünün hacmi

Özel olarak; $\left(\vec{A}\ ,\vec{B}\ ,\ \vec{C}\right) = 0$ ise $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ üzerine kurulan paralelyüzlünün hacmi sıfır demektir. Bu da $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ aynı düzlemde (eş düzlemli) olması demektir. O halde uzayda üç vektörün eş düzlemli (yani lineer bağımlı) olması için gerek ve yeter koşul onların karma çarpımlarının sıfır olmasıdır.

$$\left(\vec{A}\ ,\vec{B}\ ,\ \vec{C}\right) = 0 \Leftrightarrow \vec{A},\vec{B},\vec{C} \text{ eş düzlemli}$$

$$\Leftrightarrow \vec{A},\vec{B},\vec{C}\, \textit{Lineer Bağımlı}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = 0$$

Dolayısıyla; $\left(\vec{A}\ ,\vec{B}\ ,\ \vec{C}\right) \neq 0 \Leftrightarrow \vec{A},\vec{B},\vec{C}$ eş düzlemli değil

$$\Leftrightarrow \vec{A},\vec{B},\vec{C} \text{ lineer bağımsız} \quad \Leftrightarrow \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ yazılabilir. Ayrıca,}$$

$\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ üzerine kurulan paralelyüzlünün hacmi ;

$$V = \left(\vec{A},\vec{B},\vec{C}\right) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{olur.}$$

6.7.5.8. Vektör Analizinde Aksiyomatik Yaklaşım

$\vec{r} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$ vektörünün bir koordinat sistemine göre (x, y, z) bileşenleri bilindiği zaman vektör belirtilmiş olur. Bir üç boyutlu vektör (A_1, A_2, A_3) reel sayılardan oluşan bir sıralı üçlüdür.

$\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$, $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$ ve $\vec{C} = (C_1, C_2, C_3)$ olarak verilsin. Buna göre;

1) $\vec{A_1} = \vec{B_1}$, $\vec{A_2} = \vec{B_2}$, $\vec{A_3} = \vec{B_3}$ ise $\vec{A} = \vec{B}$ dir.

2) $\vec{A} + \vec{B} = (A_1 + B_1\ ,\ A_2 + B_2\ ,\ A_3 + B_3)$

3) $\vec{A} - \vec{B} = (A_1 - B_1\ ,\ A_2 - B_2\ ,\ A_3 - B_3)$

4) $\vec{0} = (0,0,0)$

5) $k\vec{A} = k(A_1, A_2, A_3) = (kA_1, kA_2, kA_3)$

6) $\vec{A}.\vec{B} = (A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3)$

7) $\vec{A}$ nın büyüklüğü veya uzunluğu; $\left|\vec{A}\right| = \vec{A}.\vec{A} = \vec{A_1}^2 + \vec{A_2}^2 + \vec{A_3}^2$

Bu tanımlardan;

i) $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$ ii) $\vec{A} + \left(\vec{B} + \vec{C}\right) = \left(\vec{A} + \vec{B}\right) + \vec{C}$ iii) $\vec{A} . \left(\vec{B} + \vec{C}\right) = \vec{A}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{C}$

gibi özellikler elde edilir.

Birim Vektörler: $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j}\,(0,1,0)$, $\vec{k}\,(0,0,1)$ olarak tanımlansın.

$\vec{A} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$, $\vec{B} = B_1\vec{i} + B_2\vec{j} + B_3\vec{k}$ olsun.

Buna göre; $\vec{A} \times \vec{B} = (A_2B_3 - A_3B_2\ ,\ A_3B_1 - A_1B_3\ , A_1B_2 - A_2B_1)$ bulunur.

$\vec{A}.\vec{B} = |A|.|B|.\mathrm{Cos}\theta \Rightarrow \left|\vec{A} \times \vec{B}\right| = A.B.\mathrm{Sin}\theta$

Tanım 6.23: Eğer V herhangi bir vektör uzayı ve $S = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}\}$ bu uzaydaki vektörlerin bir kümesi ise, aşağıdaki şartların sağlanması durumunda S, V uzayı için bir **baz veya tabandır** denir.

i. S, V'yi kapsar(gerer).

ii. S lineer bağımsızdır.

Örnek 6.24: $V = R^3$ de $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ kümesi R^3 için bir baz olup, bu baza R^3'nin **doğal** veya **standart bazı** adı verilir.

R^n'nin doğal bazı $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_k}\}$ biçiminde gösterilir.

Burada $\overrightarrow{e_i} = \begin{bmatrix}0\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ 0\\ 1\\ 0\\ \cdot\\ \cdot\\ 0\end{bmatrix}$ i.satır

Yani, $\overrightarrow{e_i}$, *i* satırı 1 ve diğer satırları sıfır olan nx1 tipinde bir matristir. R^3 için doğal bazı $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ile gösterilir.

Teorem 6.4: Eğer $= \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}\}$, V vektör uzayı için bir baz ise, V'deki her v vektörü

$v = a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2} + \ldots + a_n\overrightarrow{v_n}$

şeklinde sadece bir şekilde ifade edilebilir.

Örnek 6.25: $S = \{t^2 + 1, t - 1, 2t + 2\}$ kümesinin P_2'de vektör uzayı için bir baz olduğunu gösteriniz.

Çözüm 6.25: $at^2 + bt + c = a_1(t^2 + 1) + a_2(t - 1) + a_3(2t + 2)$

$$a_1 = a,$$

$$a_2 + 2a_3 = b$$

$$a_1 - a_2 + 2\,a_3 = c$$

denklem sistemi çözülürse;

$a_1 = a,\ a_2 = \frac{a+b-c}{2}\quad a_3 = \frac{-a+b+c}{4}$ dir. Böylece S, P'yi gerer.

Bu sonucu açıklamak için, $2t^2 + 6t + 13$ vektörünü gözönüne alalım. Burada a=2, b=6, c=13 tür. Bu değerler a_1, a_2 ve a_3 için yukarıda verilen eşitlikte yerlerine yazılırsa,

$a_1 = 2, a_2 = -\frac{5}{2}, a_3 = \frac{17}{4}$ bulunur. Burada;

$2t^2 + 6t + 13 = 2(t^2 + 1) - \frac{5}{2}(t - 1) + \frac{17}{4}(2t + 2)$ 'dir.

S'nin lineer bağımsız olduğunu göstermek için

$a_1(t^2 + 1) + a_2\,(t - 1) + a_3\,(2t + 2) = 0$

$a_1t^2 + (a_2 + 2a_3)t + (a_1 - a_2 + 2a_3) = 0$

yazılabilir. Bu eşitlikten sadece

$$a_1 = 0$$

$$a_2 + 2a_3 = 0$$

$$a_1 - a_2 + 2a_3 = 0$$

olması halinde bütün t değerleri sağlanır.

Bu homojen sistemin tek çözümü; $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ olup bu da S'nin lineer bağımsız olmasını gerektirir. Böylece S, P_2 için bir bazdır.

Bir V vektör uzayının bir bazı olacak biçimde sonlu bir alt kümesi varsa, V ye sonlu boyutludur denir. V'nin böyle sonlu bir alt kümesi yoksa V ye sonsuz boyutlu vektör uzayı adı verilir.

Tanım 6.24: Sıfırdan farklı bir V vektör uzayının bir bazındaki vektörlerin sayısına, V'nin **boyutu** denir. V'nin boyutu genellikte **boy V** biçiminde gösterilir.

$\{0\}$ aşikar vektör uzayının boyutu **sıfır** olarak tanımlanır.

Örnek 6.26: $S = \{t^2, t, 1\}$ kümesi P_2 için bir baz olduğundan $boy\ P_2 = 3$ tür.

Örnek 6.27: R^3 vektör uzayının $\overrightarrow{V_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\overrightarrow{V_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\overrightarrow{V_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ olmak üzere $S_1 = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$

Kümesi tarafından gerilen bir alt uzayı V olsun. Böylece V'deki her vektör

$$a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2} + a_3\overrightarrow{v_3}$$

Biçimindedir. Burada a_1, a_2 ve a_3 keyfi reel sayılardır. S'nin lineer bağımlı ve $\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$ olduğunu buluruz. Böylece $S_1 = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ kümesi de S_1, V'nin bir bazıdır. Bu nedenle $\mathrm{boy}\ V = 2$'dir.

Tanım 6.25: Bir V vektör uzayının bir altkümesi S olsun. S'nin lineer bağımsız bir T altkümesini, S'nin lineer bağımsız başka hiçbir altkümesi kapsamıyorsa, T ye S'nin bir **maksimal bağımsız alt kümesi** denir.

Tanım 6.26: S bir V vektör uzayını geren vektörlerin bir kümesi olsun. S, V'yi geren başka bir alt kümeyi kapsamıyorsa S'ye V'yi geren bir **minimal küme** denir.

Örnek 6.28: $V = R^3$ ve $\overrightarrow{V_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\overrightarrow{V_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\overrightarrow{V_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ve $\overrightarrow{V_4} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ olmak üzere,

$S_1 = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4}\}$ kümesini ele alalım.

$\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$, $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_4}\}$, $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4}\}$, $\{\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4}\}$ kümeleri S'nin maksimal alt kümeleridir.

6.7.6. Özdeğer ve Özvektörler

A nxn boyutlu bir kare matris ve X, n- boyutlu bir vektör olsun. Y=AX, *n* boyutlu uzaydan kendi içine bir lineer dönüşüm olarak göz önüne alınabilir. Biz; **AX=λX** şartını sağlayan X vektörleri kompleks sayılardan ibarettir.

Tanım 6.27: A bir kare matris olmak üzere; **AX=λX** özelliğindeki sıfır olmayan **X** vektörüne A'nın **öz vektörü**, λ değerlerine de A'nın **öz değerleri** denir.

$$\mathbf{(A-\lambda I)X=0}$$

Denkleminin aşikar çözümden başka çözümlerinin olması için det (A-λI)≠0 olmalıdır. Özdeğer problemlerini çözmek için yukarıdaki determinanttan λ öz değerleri bulunarak her bir özdeğere karşı gelen özvektörleri belirlemektir. Bu nedenle yukarıdaki determinant açıldığında n. dereceden bir polinom elde edilir ki bu polinoma **karakteristik polinom** denir. Bundan dolayı A matrisinin en çok n tane özdeğeri olur.

Örnek 6.29: $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ matrisinin özdeğer ve özvektörlerini bulunuz.

Çözüm 6.29: det(A- λI)=0 ifadesinden;

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3+8\lambda^2-19\lambda+12=-(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-4)=0$$

denklemi elde edilir ve buradan özdeğerler; λ=1 , λ=0 , λ=4 olarak bulunur.

Bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler ise;

⇒ λ=1 için; $2x_1 - x_2 = 0$

$-x_1+x_2-x_3=0$

$-x_2+2x_3=0$

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1=x_2 \\ 2x_3=x_2 \end{array}\right\} \quad x_2=a \quad \text{dersek } X^{(1)}=(2a, a, 2a)t=a(2, 1, 2)t \text{ olur.}$$

⇒ λ=3 için; $X^{(2)}=(b,0,-b)^t=b(1,0,-1)^t$

⇒ λ=4 için; $X^{(3)}=c(1,-1,1)^t$

$$\det[V_1,V_2,V_3]=\begin{vmatrix} 2a & b & c \\ a & 0 & -c \\ 2a & -b & c \end{vmatrix}=6abc \text{ bulunur.}$$

Örnek 6.30: $A=\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 3\end{bmatrix}$ matrisinin özdeğer ve özvektörlerini bulunuz.

Çözüm 6.30: $A=\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 3\end{bmatrix} \Rightarrow \det[A-I\lambda]=\det\begin{bmatrix}3-\lambda & -1 & 0\\ -1 & 2-\lambda & -1\\ 0 & -1 & 3-\lambda\end{bmatrix}=0$

$(3-\lambda).((2-\lambda)(3-\lambda)-(-1)(-1))+1((-1)(3-\lambda)-0.(-1))=0 \quad (3-\lambda)(6-5\lambda+\lambda^2-1)+\lambda-3=0$

$18-6\lambda-15\lambda+5\lambda^2+3\lambda^2-\lambda^3-3+\lambda+\lambda-3\lambda=0$

$-\lambda^3+8\lambda^2-19\lambda+12=0$ ise $\quad \lambda_1=1,\ \lambda_2=3,\ \lambda_3=4$ bulunur.

$\lambda_1=1$ için,

$2x_1-x_2=0,\quad -x_1+x_2-x_3=0,\quad -x_2+2x_3=0,\quad x_1=x_3,\ x_2=2x_1$

$V^{(1)}=(x_1\ \ 2x_1\ \ x_1)=a\,(1\ \ 2\ \ 1)$

$\lambda_2=3$ için, $\quad -x_2=0,\quad -x_1-x_2-x_3=0,\quad -x_2=0,\ \ x_3=-x_1$

$V^{(2)}=(x_1\ \ 0\ \ -x_1)=b\,(1\ \ 0\ \ -1)$

$\lambda_3=4$ için, $\quad -x_1-x_2=0,\quad -x_1-2x_2-x_3=0,\quad -x_2-x_3=0,\quad x_3=-x_2,\ x_1=-x_2$

$V^{(3)}=(-x_2\ \ x_2\ \ -x_2)=c\,(-1\ \ 1\ \ -1)$

Örnek 6.31: $A=\begin{bmatrix}7 & 6 & -3\\ -12 & -20 & 24\\ -6 & -12 & 16\end{bmatrix}$ matrisinin özdeğer ve özvektörlerini bulunuz.

Çözüm 6.31: $(7-\lambda)[(-20-\lambda)(16-\lambda)+24.12]-6[(-12)(16-\lambda)+24.6]-3[144-(20+\lambda).6]=0$

$(7-\lambda)(-320-16\lambda+\lambda^2+20\lambda+288)-6(12\lambda-192+144)-3(144-120-6\lambda)=0$

$(7-\lambda)(\lambda^2+4\lambda-32)-6(12\lambda-48)-3(24-6\lambda)=0$

$7\lambda^2-\lambda^3+28\lambda-4\lambda^2+21\lambda-224-72\lambda+288-72+18\lambda=0,$

$-\lambda^3+3\lambda^2+6\lambda-8=0 \Rightarrow \lambda_1=1,\ \lambda_2=4,\ \lambda_3=-2$ bulunur.

$(7-\lambda)x_1+6x_2-3x_3=0,\quad -12x_1-(20+\lambda)x_2+24x_3=0,\quad -6x_1-12x_2+(16-\lambda)x_3=0$

$\lambda=1$ için	**$\lambda=4$ için**	**$\lambda=-2$ için**
$6x_1+6x_2-3x_3=0$	$3x_1+6x_2-3x_3=0$	$9x_1+6x_2-3x_3=0$
$-12x_1-21x_2+24x_3=0$	$-12x_1-24x_2+24x_3=0$	$-12x_1-18x_2+24x_3=0$
$-6x_1-12x_2+15x_3=0$	$-6x_1-12x_2+12x_3=0$	$-6x_1-12x_2+18x_3=0$
$x_1=\frac{3}{2}x_3\quad x_2=2x_3$	$x_3=0,\ \ x_1=-2x_2$	$x_2=-2x_1\quad x_3=-x_1$

$$V^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}x_3 \\ 2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}, V^{(2)} = \begin{bmatrix} -2x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad V^{(3)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -2x_1 \\ -x_1 \end{bmatrix}$$

$$V^{(1)} = a\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad V^{(2)} = b\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad V^{(3)} = c\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

6.7.6.1. Özdeğer ve Özvektörlerin Özellikleri

1) Özvektörlerin Bağımsızlığı : Eğer $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, n×n boyutlu A matrisinin birbirinden farklı özdeğerleri ve $B_1, B_2, ..., B_n$ bu değerlere karşı gelen özvektörlerinin bazları(tabanları) ise, $B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n$ birleşimi lineer bağımsız bir kümedir.

Örneğin; $A = \begin{bmatrix} 7 & 6 & -3 \\ -12 & -20 & 24 \\ -6 & -12 & 16 \end{bmatrix}$ için $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = -2$ özdeğerlerine karşılık gelen

$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ bazlar elde edilmişti. Bu baz vektörlerini sütunlar olarak yazarak elde edilen matrisin determinantı alınır ve bu değer sıfırdan farklı çıkarsa sütun vektörleri lineer bağımsızdır denir.

$$A= \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{5}{2} = -2{,}5 \neq 0$$

2) Özdeğerlerin Özelliği: Eğer A, nxn boyutlu bir matris ve λ bu matrisin özdeğeri ise, c λ, cA matrisinin bir özdeğeridir. C sıfırdan farklı bir gerçel sayıdır.

Örneğin; $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ matrsinin özdeğerleri

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 & -2 \\ -3 & 4-\lambda & 0 \\ -3 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-1-\lambda)(4-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 1$ olarak bulunur.

$$3A = \begin{bmatrix} -3 & 12 & -6 \\ -9 & 12 & 0 \\ -9 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\det(3A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 12 & -6 \\ -9 & 12-\lambda & 0 \\ -9 & 3 & 9-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-3-\lambda)(12-\lambda)(9-\lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = 9, \quad \lambda_2 = 6, \quad \lambda_3 = 3$$

Dolayısıyla 3A'nın λ değerleri A matrisinin λ değerinin 3 katıdır.

Not: Üçgen Matrislerin Özdeğerleri

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \text{ veya } A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Üst üçgen veya alt üçgen matrislerin özdeğerlerinin aşağıda belirtildiği şekilde elde edilmesi işlemlerini kolaylaştıracaktır.

Üst üçgen matrisi ele alacak olursak,

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} (a_{11}-\lambda) & a_{12} & a_{13} \\ 0 & (a_{22}-\lambda) & a_{23} \\ 0 & 0 & (a_{33}-\lambda) \end{vmatrix}$$

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)(a_{33}-\lambda) = 0$$

$\lambda = a_{11}, \quad \lambda = a_{22}, \ \lambda = a_{33}$ elde edilir.

Örneğin; $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 0 \\ 4 & 8 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin özdeğerlerini bulunuz.

A matrisi bir alt üçgen matris olup, özdeğerleri $\lambda = 3, \lambda = 7, \lambda = 1$ dir.

Teorem 6.5: Eğer A, nxn boyutlu bir üçgen matris ise (üst üçgen, alt üçgen veya asal köşegen), a matrisinin özdeğerleri asal köşegen değerleridir.

6.7.6.2. Diyogonal (Asal Köşegen) Haline Dönüştürülebilen Matrisler

- Eğer PAP^{-1} sonucu bir diyogonal matris elde edilecek şekilde tersi alınabilir bir P matrisi mevcutsa, nxn boyutlu bir A kare matrisi diyogonal (köşegen) haline dönüştürülebilir denir.
- nxn boyutlu A matrisinin diyogonal (köşegen) matris haline dönüştürülebilmesi için yeterli şart, A matrisinin n lineer bağımsız özvektörünün olmasıdır. Farklı özdeğerlerine karşı gelen özvektörleri lineer bağımsız olduklarından, nxn boyutlu bir A matrisi farklı özdeğerlerine sahipse diyogonal hale dönüştürülebilir.

- Bazı durumlarda A matrisinin n den daha az sayıda farklı özdeğerleri olmasına karşın n adet lineer bağımsız özvektörü olabilir.

Örnek 6.32: $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin diyogonal matrisini elde ediniz.

Çözüm 6.32: $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 & -2 \\ -3 & 4-\lambda & 0 \\ -3 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$(-1-\lambda)(4-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 1$$

Bu değerlere karşı gelen özvektörleri,

$\lambda_1 = 3$ için $P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = 2$ için $P_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\lambda_3 = 1$ için $P_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Dolayısıyla $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ olarak oluşturulur. Elde edilen P matrisinden P^{-1} elde edilir.

Buradan $D = P^{-1}AP$ eşitliği ile A matrisinin diyagonal matrisi D aşağıdaki gibi elde edilir.

$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 3 & -5 & 3 \end{bmatrix}$, A= $\begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$,

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & 6 & -4 \\ 3 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tanım 6.28: V vektör uzayındaki iki vektör $\vec{\mathrm{A}}, \vec{\mathrm{B}}$ eğer $\vec{\mathrm{A}}.\vec{\mathrm{B}} = 0$ şartını sağlıyor ise **ortogonal** yani dik olarak tanımlanır. V vektör uzayındaki vektörlerden oluşan bir S kümesi, eğer kümedeki vektörler çifti için ortogonal ise **ortogonal bir kümedir** denir. Buna ilaveten, S kümesindeki herbir vektörün uzunluğu 1 ise, S **ortonormal kümedir** denir.

Tanım 6.29: V, n boyutlu bir vektör uzayı olsun. V de sıfırdan farklı $\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2} \dots, \overrightarrow{X_n}$ vektörleri ortogonal ise bu vektörlerin kümesi V için bir **ortogonal baz(taban)dır** denir. Eğer $\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2} \dots, \overrightarrow{X_n}$ vektörleri ortonormal ise bu vektörlerin kümesi V için bir **ortonormal tabandır**.

Örnek 6.33: $\overrightarrow{\boldsymbol{B}_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ $\overrightarrow{\boldsymbol{B}_2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ $\boldsymbol{ve}$ $\vec{\boldsymbol{B}} = (0, 0, 1)$ ortonormal bir baz oluşturduğunu gösteriniz.

Çözüm 6.33: Bu üç vektörün lineer bağımsız olduğunun gösterilmesi gerekir. Bu vektörün satırlarının oluşturduğu matrisin determinantı sıfırdan farklı ise; vektörler lineer bağımsızdır denir.

$$Det\ B = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

Dolayısıyla vektörler lineer bağımsızdır ve bir baz oluştururlar. Şimdi vektörlerin ortogonal olduğunu belirleyelim.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Dolayısıyla vektörler ortogonaldir.

$$|\overrightarrow{B_1}| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2} = 1$$

$$|\overrightarrow{B_2}| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2} = 1$$

$$|\overrightarrow{B_3}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$$

Vektörler ortogonal ve uzunlukları 1 olduğundan üç vektörden oluşan vektör kümesi bir ortonormal baz oluşturur.

6.7.6.3. Gram-Schmidt Yöntemi

R^n'de bağımsız $\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2} \dots, \overrightarrow{X_n}$ vektörleri verilmiş olsun.

$$\overrightarrow{Y_1} = \overrightarrow{X_1}$$

$$\overrightarrow{Y_2} = \overrightarrow{X_2} - \frac{\overrightarrow{Y_1} \cdot \overrightarrow{X_2}}{\overrightarrow{Y_1} \cdot \overrightarrow{X_1}} . \overrightarrow{Y_1}$$

$$\overrightarrow{Y_3} = \overrightarrow{X_3} - \frac{\overrightarrow{Y_2} . \overrightarrow{X_2}}{\overrightarrow{Y_2} . \overrightarrow{Y_2}} . \overrightarrow{Y_2} - \frac{\overrightarrow{Y_1} . \overrightarrow{X_3}}{\overrightarrow{Y_1} . \overrightarrow{Y_1}} . \overrightarrow{Y_1}$$

……………………………………………………………

$$\overrightarrow{Y_n} = \overrightarrow{X_n} - \frac{\overrightarrow{Y_{n-1}} . \overrightarrow{X_n}}{\overrightarrow{Y_{n-1}} . \overrightarrow{Y_{n-1}}} . \overrightarrow{Y_{n-1}} - \cdots - \frac{\overrightarrow{Y_1} . \overrightarrow{X_n}}{\overrightarrow{Y_1} . \overrightarrow{Y_1}} . \overrightarrow{Y_1}$$

$\overrightarrow{Y_1}, \overrightarrow{Y_2}, \dots, \overrightarrow{Y_n}$ vektörleri ortogonaldir.

Ayrıca $\overrightarrow{Z_1} = \frac{\overrightarrow{Y_1}}{|\overrightarrow{Y_1}|}, \dots, \overrightarrow{Z_n} = \frac{\overrightarrow{Y_n}}{|\overrightarrow{Y_n}|}$ yazılırsa, $\overrightarrow{Z_1}, \overrightarrow{Z_2}, \dots, \overrightarrow{Z_n}$ ortonormal vektörleri elde edilir.

Örnek 6.38: R^3 uzayında $\vec{X}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{X}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{X}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ veriliyor. Gram-Schmidt yöntemini kullanarak R^3 uzayı için ortonormal baz bulunuz.

Çözüm 6.38: $\overrightarrow{Y_1} = \overrightarrow{X_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\overrightarrow{Y_2} = \overrightarrow{X_2} - \frac{\overrightarrow{Y_1} \cdot \overrightarrow{X_2}}{\overrightarrow{Y_1} \cdot \overrightarrow{X_1}} . \overrightarrow{Y_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{0}{3} \overrightarrow{Y_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{Y_3} = \overrightarrow{X_3} - \frac{\overrightarrow{Y_2} . \overrightarrow{X_2}}{\overrightarrow{Y_2} . \overrightarrow{Y_2}} . \overrightarrow{Y_2} - \frac{\overrightarrow{Y_1} . \overrightarrow{X_3}}{\overrightarrow{Y_1} . \overrightarrow{Y_1}} . \overrightarrow{Y_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{0}{6} \overrightarrow{Y_2} - \frac{6}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{Z_1} = \frac{\overrightarrow{Y_1}}{|\overrightarrow{Y_1}|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{Z_2} = \frac{\overrightarrow{Y_2}}{|\overrightarrow{Y_2}|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{Z_3} = \frac{\overrightarrow{Y_3}}{|\overrightarrow{Z_3}|} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

R^3 için $\overrightarrow{Z_1}, \overrightarrow{Z_2}, \overrightarrow{Z_3}$ bir ortonormal bazdır.

Örnek 6.39: $A(1,0,2)$, $B(3,1,4)$, $C(0,-1,1)$, $D(0,0,-2)$ noktaları verilmektedir

a) $\left(\vec{AC}+\vec{BC}\right)+\vec{AD}=\vec{AC}+\left(\vec{BC}+\vec{AD}\right)$ olduğunu gösteriniz.

b) $\vec{AB}+\vec{BA}=0$ olduğunu gösteriniz.

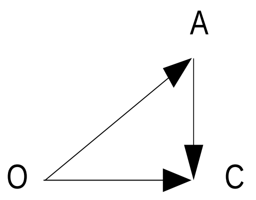
c) $\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CD}=\vec{AD}$ olduğunu gösteriniz.

d) $\left(3\vec{AB}+2\vec{DC}\right)$, $\left(\vec{AB}+\vec{BC}\right)$ hesaplayınız.

Çözüm 6.39:

a) Vektörlerin toplama kuralına göre; $\vec{AC}=\vec{OC}-\vec{OA}$ ise

$A(1,0,2)$, $C(0,-1,1)$ için yer vektörleri;



$$\left.\begin{array}{l}\vec{OA}=\vec{A}=\vec{i}+2\vec{k}\\[2ex] \vec{OC}=\vec{C}=-\vec{j}+\vec{k}\end{array}\right\}\vec{AC}=\vec{C}-\vec{A}=-\vec{j}+\vec{k}-\vec{i}-2\vec{k}=-\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$$

Benzer yoldan:

$\vec{BC}=-3\vec{i}-2\vec{j}-3\vec{k}$, $\vec{AD}=-\vec{i}-4\vec{k}$

$$\left(\vec{AC}+\vec{BC}\right)+\vec{AD}=\left(-\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}\right)+\left(-3\vec{i}-2\vec{j}-3\vec{k}\right)-\vec{i}-4\vec{k}=-5\vec{i}-3\vec{j}-8\vec{k}$$

$$\vec{AC}+\left(\vec{BC}+\vec{AD}\right)=-\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}+\left(-3\vec{i}-2\vec{j}-3\vec{k}\right)+\left(-\vec{i}-4\vec{k}\right)=-5\vec{i}-3\vec{j}-8\vec{k}$$

b) $\vec{AB}+\vec{BA}=\left(\vec{OB}-\vec{OA}\right)+\left(\vec{OA}-\vec{OB}\right)=0$

c) $\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CD}=\left(\vec{OB}-\vec{OA}\right)+\left(\vec{OC}-\vec{OB}\right)+\left(\vec{OD}-\vec{OC}\right)=\vec{OD}-\vec{OA}=\vec{AD}$

d) $\left(3\vec{AB}+2\vec{DC}\right)=3\left(2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}\right)+2\left(-\vec{j}+3\vec{k}\right)=6\vec{i}+\vec{j}+12\vec{k}$ $\left(\vec{AB}+\vec{BC}\right)$

$=\left(2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}\right)+\left(-3\vec{i}-2\vec{j}-3\vec{k}\right)=-\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$

Örnek 6.40: $\vec{A}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$ $\quad \vec{B}=2\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k}$ $\quad \vec{C}=-5\vec{j}$ ise;

a) $|\vec{A}|$, $|\vec{B}|$, $|\vec{C}|$ **b)** $|\vec{A}+\vec{B}|$, $|\vec{A}|+|\vec{B}|$ **c)** $|\vec{A}-\vec{B}|$, $|\vec{A}|$ - $|\vec{B}|$ hesaplayınız.

Çözüm 6.40:

a) $|\vec{A}|=\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}\cong 3{,}7416$

$|\vec{B}|=\sqrt{2^2+1^2+4^2}=\sqrt{4+1+16}=\sqrt{21}\cong 4{,}5825$

$|\vec{C}|=\sqrt{(-5)^2}=5$ olarak bulunur.

b) $\vec{A}+\vec{B}=3\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$

$|\vec{A}+\vec{B}|=\sqrt{9+9+1}=\sqrt{19}\cong 4{,}3588 \rightarrow |\vec{A}|+|\vec{B}|=\sqrt{14}+\sqrt{21}=3{,}7416+4{,}5825=8{,}3241$

c) $|\vec{A}|-|\vec{B}|=\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}-\sqrt{2^2+1^2+4^2}=\sqrt{14}-\sqrt{21}\cong -0.8409$

$$|\vec{A}-\vec{B}|=\left|\left(\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}\right)-\left(2\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k}\right)\right|=\left|-\vec{i}+\vec{j}-7\vec{k}\right|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-7)^2}$$
$$=\sqrt{51}=7.141$$

Örnek 6.41: $\vec{A}=2\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k}$ $\quad \vec{B}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$ olsun. Buna göre;

a) $\vec{a}$ **b)** $\vec{A}+\vec{B}$ **c)** $\vec{A}-\vec{B}$ vektörlerinin doğrultusundaki birim vektörleri bulunuz.

Çözüm 6.41:

a) Verilen bir vektör doğrultusundaki birim vektör;

$$a=\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}=\frac{2\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k}}{\sqrt{2^2+4^2+5^2}}=\frac{2\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k}}{\sqrt{4+16+25}}=\frac{2\vec{i}}{\sqrt{45}}+\frac{4\vec{j}}{\sqrt{45}}-\frac{5\vec{k}}{\sqrt{45}}$$

b) $\vec{A}+\vec{B}=2\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k}+\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}=3\vec{i}+6\vec{j}-2\vec{k}$

$$\vec{n}=\frac{\vec{A}+\vec{B}}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{3\vec{i}+6\vec{j}-2\vec{k}}{\sqrt{9+36+4}}=\frac{3}{7}\vec{i}+\frac{6}{7}\vec{j}-\frac{2}{7}\vec{k}$$

c) $\vec{A}-\vec{B}=\vec{i}+2\vec{j}-8\vec{k} \rightarrow \vec{n}=\dfrac{\vec{i}+2\vec{j}-8\vec{k}}{\sqrt{1+4+64}}=\dfrac{1}{\sqrt{69}}\vec{i}+\dfrac{2}{\sqrt{69}}\vec{j}-\dfrac{8}{\sqrt{69}}\vec{k}$

Örnek 6.42: $\vec{A}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{B}=\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{C}=\vec{i}-\vec{k}$ veriliyor.Buna göre;

a) $\vec{A}.\vec{B}=\vec{B}.\vec{A}$ **b)** $\vec{A}.\left(\vec{B}+\vec{C}\right)=\vec{A}.\vec{B}+\vec{A}.\vec{C}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm 6.42: **a)** $\vec{A}.\vec{B}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=2.1+(-1).(-4)+1.2=8$

$\vec{B}.\vec{A}=b_1a_1+b_2a_2+b_3a_3=1.2+(-4).(-1)+2.1=8$

b) $\vec{B}+\vec{C}=\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}+\vec{i}-\vec{k}=2\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k}$

$\vec{A}.\left(\vec{B}+\vec{C}\right)=2.(2)+(-1).(-4)+1.1=9\vec{A}+\vec{B}$

$=2.1+(-1).(-4)+1.2=2+4+2=8 \Rightarrow \vec{A}.\left(\vec{B}+\vec{C}\right)$

$=\vec{A}.\vec{B}+\vec{A}.\vec{C}=9$

$\vec{A}.\vec{C}=2.1+(-1).(0)+1.(-1)=2-1=1$

Örnek 6.43: $\vec{A}=\vec{i}+2\vec{k}$, $\vec{B}=-\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}$ vektörleri arasındaki açının kosinüsünü bulunuz.

Çözüm 6.43: $\vec{A}.\vec{B}=\left|\vec{A}\right|.\left|\vec{B}\right|.Cos\theta \Rightarrow \left|\vec{A}\right|=\sqrt{1+4}=\sqrt{5} \Rightarrow \left|\vec{B}\right|=\sqrt{1+16+9}=\sqrt{26}$

$\vec{A}.\vec{B}=1.(-1)+0.4+2.3=5 \quad \Rightarrow \quad 5=\sqrt{5}.\sqrt{26}.Cos\theta \Rightarrow Cos\theta=\sqrt{\dfrac{5}{26}}$ bulunur.

Örnek 6.44: $\vec{A}=\vec{i}+m\vec{j}+4\vec{k}$ ve $\vec{B}=2\vec{i}+\vec{j}+m\vec{k}$ vektörleri verilmektedir. Bu iki vektörün birbirlerine dik olabilmesi için 'm' ne olmalıdır?

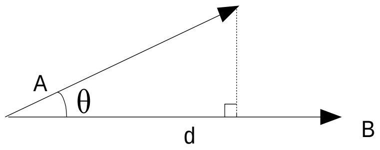
Çözüm 6.44: Aradaki açının kosinüsü sıfır olduğunda A ve B vektörleri birbirine dik olur.

$\vec{A}.\vec{B}=\left|\vec{A}\right|.\left|\vec{B}\right|.Cos\theta \quad \Rightarrow \quad \theta=0$

$\vec{A}.\vec{B}=0 \quad \Rightarrow \quad \vec{A}.\vec{B}=(-1).2+m.1+4.m=0 \Rightarrow 5m=2 \Rightarrow m=\dfrac{2}{5}=0{,}4$ olur.

Örnek 6.45: $\vec{A}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_1\vec{k}$ vektörünün, $\vec{B}=b_1\vec{i}+b_1\vec{j}+b_1\vec{k}$ vektörü üzerindeki dik izdüşümünü bulunuz.

Çözüm 6.45: A vektörünün B vektörü üzerindeki dik izdüşümü şekildeki gibidir.



$$\vec{A}.\vec{B} = \left|\vec{A}\right|.\left|\vec{B}\right|.\text{Cos}\theta$$

$$d = \left|\vec{A}\right|.Cos\theta \quad , \quad Cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{\left|\vec{A}\right|.\left|\vec{B}\right|} \quad \text{ve} \quad d = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{\left|\vec{B}\right|}$$

Örnek 6.46: $\vec{A} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$ vektörünün, $\vec{B} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ vektörü üzerindeki dik izdüşümünü bulunuz.

Çözüm 6.46: $d = \dfrac{\vec{A}.\vec{B}}{\left|\vec{B}\right|} = \dfrac{2.1+(-3).2+6.2}{\sqrt{1+4+4}} = \dfrac{2-6+12}{3} = \dfrac{8}{3}$

Örnek 6.47: $\vec{A} = \left(\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}\right)$, $\vec{B} = \vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{C} = -\vec{i} + \vec{j}$ olduğuna göre;

a) $\vec{A}\times\vec{B}$, $\vec{A}\times\vec{C}$ b) $\left(\vec{C} - \vec{A}\right)\times 2\vec{B}$ ifadelerini bulunuz.

Çözüm 6.47: a) $\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}\,(6) - \vec{j}\,(3) + \vec{k}\,(2-2) = \vec{6i} - 3\vec{j}$

$$\vec{A}\times\vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}\,(3) - \vec{j}\,(-3) + \vec{k}\,(1+2) = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$$

b) $\left(\vec{C} - \vec{A}\right)\times 2\vec{B}$

$$\vec{C} - \vec{A} = -\vec{i} + \vec{j} - \left(\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}\right) = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k} = -2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\left(\vec{C} - \vec{A}\right)\times 2\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}\,(-12) - \vec{j}\,(-6) + \vec{k}\,(-6) = -12\vec{i} + 6\vec{j} - 6\vec{k}$$

Örnek 6.48: A $(1,0,0)$, B $(0,1,0)$ ve C $(0,0,1)$ noktalarının meydana getirdikleri düzleme, A noktasında dik olan birim vektörü ifade ediniz.

Çözüm 6.48: $\vec{AB} = -\vec{i} + \vec{j}$ $\quad \vec{AC} = -\vec{i} + \vec{k}$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(1) - \vec{j}(-1) + \vec{k}(1) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

$$\left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3} \Rightarrow n = \frac{\vec{AB} \times \vec{AC}}{\left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right|} = \frac{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{3}}$$

Örnek 6.49: A $(-1,2,3)$, B $(1,1,1)$ ve C $(2,-1,3)$ noktalarının meydana getirdiği düzleme A noktasında dik olan birim vektörü ifade ediniz.

Çözüm 6.49:

$$\left.\begin{aligned} \vec{AC} &= (3,-3,0) \\ \vec{AB} &= (2,-1,-2) \end{aligned}\right. \text{ ise } \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{n} = \frac{6\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k}}{\sqrt{36+36+9}} = \frac{3(2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k})}{9} = \frac{2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}}{3}$$

Örnek 6.50: $A(1,0,1)$, $B(0,1,1)$, $C(1,1,0)$ noktalarının meydana getirdikleri üçgenin alanını bulunuz.

Çözüm 6.50:

$$\left.\begin{aligned} \vec{AB} &= B-A = (-1,1,0) \\ \vec{AC} &= C-A = (0,1,-1) \end{aligned}\right\} \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}(-1) - \vec{j}(1) + \vec{k}(-1)$$

$$= -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$$

$$S(ABC) = \frac{1}{2}\left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{3}br^2$$

Örnek 6.51: $\vec{A} = \vec{i}\,,\ \ \vec{B} = -\vec{j}\,,\ \ \vec{C} = 3\vec{k}$ vektörlerinin oluşturduğu paralel yüzlünün hacmini bulunuz.

Çözüm 6.51: $\vec{A}.\left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = V_{ABC}$ = Paralel yüzlünün hacmi

$$\vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3\vec{i} \qquad \vec{A}.\left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = (1\,,0\,,0)\,.\,(-3\,,0\,,0) = -3 \ \Rightarrow\ V = 3br^3$$

Örnek 6.52: A (-1,2,3), B (0,-4,7) ve C(-5,1,0) veriliyor. Buna göre;

a) $\vec{A}$ vektörünün $\vec{B}$ vektörü üzerine izdüşüm vektörünü bulunuz.

$$d = \frac{\vec{A}\,.\,\vec{B}}{\left|\vec{B}\right|} \Rightarrow d = \frac{(-1).0 + 2.(-4) + 3.7}{\sqrt{(-4)^2 + 7^2}} = \frac{-8+21}{\sqrt{16+49}} = \frac{13}{\sqrt{65}}$$

b) $\vec{A}$ vektörünün $\vec{C}$ vektörü üzerine izdüşüm vektörünü bulunuz.

$$d = \frac{\vec{A}\,.\,\vec{C}}{\left|\vec{C}\right|} = \frac{(-1).(-5) + 2.1 + 3.0}{\sqrt{(-5)^2 + 1^2}} = \frac{5+2}{\sqrt{26}} = \frac{7}{\sqrt{26}}$$

c) $\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ vektörlerinin meydana getirdikleri paralel yüzlünün hacmini bulunuz.

$\vec{A}.\left(\vec{B} \times \vec{C}\right)$ = Paralel yüzlünün hacmi

$$\vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -4 & 7 \\ -5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -7\,\vec{i} - 35\vec{j} - 20\vec{k}$$

$$\vec{A}.\left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = (-1\,,2\,,3)\,.\,(-7\,,-35\,,-20) = -123 \ \Rightarrow\ V = 123br^3$$

d) $\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ vektörlerinin meydana getirdikleri üçgenin alanını bulun.

$$\vec{AB} = B - A = (0-(-1))\,\vec{i} + (-4-2)\,\vec{j} + (7-3)\,\vec{k} = \vec{i} - 6\,\vec{j} + 4\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (-5-(-1))\,\vec{i} + (1-2)\,\vec{j} + (0-3)\,\vec{k} = -4\,\vec{i} - \vec{j} - 3\,\vec{k}$$

$$\text{Üçgenin alanı} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|\left(\vec{i} - 6\,\vec{j} + 4\,\vec{k}\right)\times\left(-4\,\vec{i} + -\,\vec{j} - 3\,\vec{k}\right)\right|$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -6 & 4 \\ -4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i}\,(18+4) - \vec{j}\,(-3+16) + \vec{k}(-1-24)$$

$$= 22\vec{i} + 13\vec{j} - 25\,\vec{k}$$

$$\frac{1}{2}\left|\ \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\ \right| = \tfrac{1}{2}\sqrt{22^2 + 13^2 + (-25)^2} br^2$$

e) $\vec{A}$, $\vec{B}$ vektörleri arasındaki açının kosinüsünü hesaplayınız.

$$Cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}|.|\vec{B}|} = \frac{(-1).0 + 2.(-4) + 3.7}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2}\sqrt{(-4)^2 + 7^2}} = \frac{13}{\sqrt{14}\sqrt{65}}$$

f)$\vec{A}$, $\vec{B}$ vektörlerinin meydana getirdiği paralelkenarın alanını hesaplayınız.

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 7 \end{vmatrix} = 26\,\vec{i} + 7\,\vec{j} + 4\,\vec{k} \Rightarrow \left|\ \vec{A}\times\vec{B}\ \right| = \sqrt{26^2 + 7^2 + 4^2}$$

g) $\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ vektörlerinin doğrultularındaki birim vektörleri bulunuz.

$$a = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{-\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k}}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2}} = -\frac{\vec{i}}{\sqrt{14}} + \frac{2\,\vec{j}}{\sqrt{14}} + \frac{3\,\vec{k}}{\sqrt{14}}$$

$$b = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{-4\,\vec{j} + 7\,\vec{k}}{\sqrt{(-4)^2 + 7^2}} = -\frac{4\,\vec{j}}{\sqrt{65}} + \frac{7\,\vec{k}}{\sqrt{65}}$$

$$c = \frac{\vec{C}}{|\vec{C}|} = \frac{-5\,\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{(-5)^2 + 1^2}} = -\frac{5\,\vec{i}}{\sqrt{26}} + \frac{\vec{j}}{\sqrt{26}}$$

h) $\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ vektörlerinin meydana getirdiği düzleme A noktasında dik olan birim vektörü bulunuz.

$$\vec{AB} = B - A = \vec{i} - 6\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\vec{AC} = C - A = -4\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -6 & 4 \\ -4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 22\vec{i} + 13\vec{j} - 25\vec{k} \text{ ise } n = \frac{22\vec{i} + 19\vec{j} + 23\vec{k}}{\sqrt{22^2 + 19^2 + 23^2}}$$

Örnek 6.53: $\vec{A} = -2\vec{j} + 3\vec{k}$; $\vec{B} = \vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$; $\vec{C} = -5\vec{i} + 6\vec{k}$ veriliyor.

a) $\vec{A}$ vektörünün $\vec{B}$ vektörü üzerine izdüşüm vektörünü bulunuz.

$$d = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|} \Rightarrow d = \frac{0.1 + (-2).3 + 3.(-4)}{\sqrt{1^2 + 3^2 + (-4)^2}} = \frac{-6 - 12}{\sqrt{1 + 9 + 16}} = \frac{-18}{\sqrt{26}}$$

b) $\vec{A}$ vektörünün $\vec{C}$ vektörü üzerine izdüşüm vektörünü bulunuz.

$$d = \frac{\vec{A} \cdot \vec{C}}{|\vec{C}|} \Rightarrow d = \frac{0.(-5) + (-2).0 + 3.6}{\sqrt{(-5)^2 + 0^2 + 6^2}} = \frac{18}{\sqrt{61}}$$

c) $\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ vektörlerinin meydana getirdikleri paralel yüzlünün hacmini bulunuz.

$\vec{A} \cdot \left(\vec{B} \times \vec{C} \right) = V_{ABC}$ = Paralel yüzlünün hacmi

$$\vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -4 \\ -5 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 18\vec{i} + 14\vec{j} + 15\vec{k} \Rightarrow \vec{A} \cdot \left(\vec{B} \times \vec{C} \right) = (0, -2, 3).(18, 14, 15) = 27br^3$$

d) $\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ vektörlerinin meydana getirdikleri üçgenin alanını bulun.

$$\vec{AB} = B - A = (1-0)\,\vec{i} + (3-(-2))\,\vec{j} + (-4-3)\,\vec{k} = \vec{i} + 5\,\vec{j} - 7\,\vec{k}$$

$$\vec{AC} = C - A = (-5-0)\,\vec{i} + (0-(-2))\,\vec{j} + (6-3)\,\vec{k} = -5\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$$

$$\text{Üçgenin alanı } = \frac{1}{2}\left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|\left(\vec{i} + 5\,\vec{j} - 7\,\vec{k}\right) \times \left(-5\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k}\right)\right|$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 5 & -7 \\ -5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}\,(15+14) - \vec{j}\,(3-35) + \vec{k}\,(2+25) = 29\,\vec{i} + 32\,\vec{j} + 27\,\vec{k}$$

$$\frac{1}{2}\left|\ \vec{AB} \times \vec{AC}\ \right| = \frac{1}{2}\sqrt{29^2 + 32^2 + 27^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2594}\,\text{br}^2$$

e) $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörleri arasındaki açının kosinüsünü hesaplayınız.

$$\text{Cos}\theta = \frac{\vec{A}\,.\,\vec{B}}{\left|\vec{A}\right|.\left|\vec{B}\right|} = \frac{0.1 + (-2).3 + 3.(-4)}{\sqrt{0^2 + (-2)^2 + 3^2}\sqrt{1^2 + 3^2 + (-4)^2}} = \frac{-18}{\sqrt{13}\sqrt{26}}$$

f) $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin meydana getirdiği paralelkenarın alanını hesaplayınız.

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -\,\vec{i} + 3\,\vec{j} + 2\,\vec{k}$$

$$\left|\ \vec{A} \times \vec{B}\ \right| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{14}\ \text{br}^2$$

g) $\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ vektörlerinin doğrultularındaki birim vektörleri bulunuz.

$$a = \frac{\vec{A}}{\left|\vec{A}\right|} = \frac{0\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k}}{\sqrt{0^2 + (-2)^2 + 3^2}} = -\frac{2\,\vec{j}}{\sqrt{13}} + \frac{3\,\vec{k}}{\sqrt{13}}$$

$$b = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}}{\sqrt{1^2 + 3^2 + (-4)^2}} = \frac{\vec{i}}{\sqrt{26}} + \frac{3\vec{j}}{\sqrt{26}} - \frac{4\vec{k}}{\sqrt{26}}$$ ve

$$c = \frac{\vec{C}}{|\vec{C}|} = \frac{-5\vec{i} + 0\vec{j} + 6\vec{k}}{\sqrt{(-5)^2 + 0^2 + 6^2}} = -\frac{5\vec{i}}{\sqrt{61}} + \frac{6\vec{k}}{\sqrt{61}}$$ olarak bulunur.

h) $\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ vektörlerinin meydana getirdiği düzleme A noktasında dik olan birim vektörü bulunuz.

$$\vec{AB} = B - A = \vec{i} + 5\vec{j} - 7\vec{k} \quad \text{ve} \quad \vec{AC} = C - A = -5\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 5 & -7 \\ -5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 29\vec{i} + 32\vec{j} + 27\vec{k} \text{ ise } n = \frac{29\vec{i} + 32\vec{j} + 27\vec{k}}{\sqrt{29^2 + 32^2 + 27^2}}$$

Örnek 6.54: A(-2, 3, -1), B(-1, 0, 2) ve C(3, -1, 4) veriliyor.

a) V_{ABC} = ? **b)** S_{ABC} = ? **c)** A ve B için $\cos\theta$ =?

a) $V_{ABC} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} = -2(0+2) - 3(-4-6) - 1(1-0) = -4 + 30 - 1 = 25br^2$

b) $S_{ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\ x\ \overrightarrow{AC}|$

$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = i - 3j + 3k$

$\overrightarrow{AC} = \vec{C} - \vec{A} = 5i - 4j + 5k$

$\overrightarrow{AB}\ x\ \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & 3 \\ 5 & -4 & 5 \end{pmatrix} = i(-15+12) - j(5-15) + k(-4+15)$

$\overrightarrow{AB}\ x\ \overrightarrow{AC} = -3i + 10j + 11k$

$S_{ABC} = \sqrt{(-3)^2 + 10^2 + 11^2} = \sqrt{\frac{280}{2}}$

c) $S = |A \text{ x } B|$

$\vec{A} \text{ x } \vec{B} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = i\,(6-0) - j(-4-1) + k(0+3) = 6i + 5j + 3k$

$S = \sqrt{6^2 + 5^2 + 3^2} \quad = 70\text{br}^2$

$|\vec{A}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$

$|\vec{B}| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 2^2 = \sqrt{5}}$

$\vec{A}.\vec{B} = (-2).(-1) + 3\,.0 + (-1).2 = 0$

$\cos\theta = \dfrac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \dfrac{0}{\sqrt{14}\sqrt{5}}$

ALIŞTIRMALAR

1) Aşağıdaki lineer denklem sistemlerini çözünüz.

$2x-3y-z=-5$ $3x-4y+2z=-3$ $5x+2y-3z=6$	$-6u-v-2w=-9$ $-4u+5v+3w=4$ $-2u+4v-5w=-3$	$x+6y+z=0$ $2x-3y+4z=2$ $-3x+2y-3z=0$
$5x-2y+3z=18$ $-4z-2x+3y=-9$ $3x-2z+y=6$	$4x-2y+3z=26$ $-3x+7y-2z=-24$ $-2x+y-3z=-19$	$3u-2v+w=18$ $-4u+4v-2w=-26$ $5u-6v+4w=41$
$3x-y+4z=5$ $-2x+3y-z=3$ $5x-4y+3z=0$	$2x-3y-4z=-3$ $-x+2y-3z=-9$ $-5x+y+6z=6$	$u-3v+4w=9$ $-4u+5v-2w=-1$ $2u-7v+8w=15$
$4x-2y+3z=0$ $-3x+7y-2z=-5$ $-2x+y-3z=-3$	$2x-3y+z=-1$ $-3x+2y-3z=-8$ $x-6y+5z=4$	$3x-2y+z=4$ $-x+4y-5z=-6$ $6x-3y-8z=-2$
$-2x+3y-z=-4$ $-3x+4y+z=1$ $4x-3y+2z=11$	$-2u-v+4w=1$ $4u+3v-w=6$ $-u-6v-2w=-9$	$x+y+z=2$ $2x-y+z=5$ $x+z=-4$
$x+2y+2z=1$ $3x+2y-2z=-1$ $x-2z=0$	$x+y+z=4$ $2x-5y-2z=3$ $x+7y-7z=5$	$-x+y-z=0$ $2x-y-z=2$ $x+y=-1$
$x+y-z=3$ $x+z=-2$ $2y-z=3$	$x+y+z+t=0$ $x+y+z-t=3$ $x+y-z+t=-4$ $x-y+z+t=2$	$x+y+2z=1$ $2x+y-z=-2$ $3x+y+z=5$
$x-2y-z=1$ $-2x-3z=1$ $3y+z=2$	$2x+y-z=0$ $-x+2y+z=-9$ $-x+2y+z=-9$	$3x-y+2z=7$ $x-5y-4z=-7$ $2x+2y=-2$

2) Aşağıdaki matris işlemlerini hesaplayınız.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

a)A+B b)3A-2B c) A^t+ B^t d) $(A+B)^t$ e) $(A-B)^t$ f) A+A^t g) B-B^t

3) Aşağıdaki matris işlemlerini hesaplayınız.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

a) A. B b)$A^2.B$ c) A+A^t d) B-B^t

e) $A^{-1}.B$ f)$(A.B)^{-1}$ g)$(B-A)^{-1}$ h)$(A+B)^{-1}$

4) Aşağıdaki denklem sistemlerinde a ve b değerlerini hesaplayınız.

$$\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \end{pmatrix}$$

5) Aşağıdaki matrislerin çarpımlarını bulunuz.

a)$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ b)$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

6) A(-3, 6, 4) ve B(-1, 4, 2) vektörleri verildiğine göre;

a)$\cos\theta$ =? b) d=? c)S=? d) a=? e) b=?

7) Köşeleri A(-2, 3, 4), B(1, -5, -3) ve C(-2, 4, -3) olan üçgenin alanı nedir ?

8) Kenarları A(2, -3, -4), B(-1, 3, 2) ve C(-3, 4, 5) olan dörtyüzlünün hacmi nedir?

9) $\left.\begin{array}{l} \vec{A} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} \\ \vec{B} = -3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k} \end{array}\right\} \cos\theta = ?, d = ?, S = ?$

10) $\left.\begin{array}{l} \vec{A} = -2\vec{i} + 3\vec{k} \\ \vec{B} = 4\vec{i} - 5\vec{j} \\ \vec{C} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k} \end{array}\right\}$ veriliyor. Kenarları A, B, C olan paralel yüzlünün hacmi nedir ?

11) $\left.\begin{array}{l} \vec{A} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k} \\ \vec{B} = 4\vec{i} - 3\vec{j} \\ \vec{C} = -2\vec{j} + 5\vec{k} \end{array}\right\}$ vektörleri veriliyor.Köşeleri A, B, C olan üçgenin alanı nedir?

12) Köşeleri A(-2, 3, 1), B(1, 0, -3) ve C(0, 4, -1) olan üçgenin alanı nedir?

13) Köşeleri A(1, -3, 0), B(-1, 4, -2) ve C(0, 2, -5) olan dörtyüzlünün hacmi nedir?

14) A(3, 0, -4) ve B(-2, 4, -1) vektörleri verildiğine göre;

a)$\cos\theta$ =? b)d=? c)S=? d)a=? e)b=?

15) $\left.\begin{array}{l} \vec{A} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k} \\ \vec{B} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k} \\ \vec{C} = 3\vec{i} - 4\vec{j} \end{array}\right\}$ vektörleri veriliyor. A ve B vektörleri arasındaki;

a)$\cos\theta$ =? b)d=? c)S= ? d)a=? e)b=? f) Köşeleri A, B, C olan üçgenin alanı nedir ?

g) Kenarları A, B, C olan paralel yüzlünün hacmi nedir ?

16) Aşağıdakilerden hangisi R^3 için bi bazdır?

a) $\{(1,0,-1),(2,5,1),(0,-4,3)\}$
b) $\{(6,0,-1),(2,-4,1),(0,3,-1)\}$
c) $\{(1,0,2),(2,1,1),(1,2,-1)\}$
d) $\{(-2,-10,-2),(1,-3,-2),(-3,1,3)\}$

17) R^2 de $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right),\left(\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$ kümesinin bir ortonormal baz olduğunu gösteriniz.

18) R^3 uzayında $\vec{X}_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}, \vec{X}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix},\ \vec{X}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$ veriliyor. Gram-Schmidt yöntemini kullanarak R^3 uzayı için ortonormal baz bulunuz.

19) R^3 uzayında $\{(1,0,-1),(2,-1,1),(-1,-1,4)\}$ veriliyor. Gram-Schmidt yöntemini kullanarak R^3 uzayı için ortonormal baz bulunuz.

20) R^3 uzayında $\vec{X}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \vec{X}_2=\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix},\ \vec{X}_3=\begin{bmatrix}-1\\-1\\4\end{bmatrix}$ veriliyor. Gram-Schmidt yöntemini kullanarak R^3 uzayı için ortonormal baz bulunuz.

21) R^2 uzayında $\vec{X}_1=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}, \vec{X}_2=\begin{bmatrix}4\\-2\\0\end{bmatrix},\ \vec{X}_3=\begin{bmatrix}3\\1\\-1\end{bmatrix}$ vektör cümlesi bir baz mıdır?

22) $S=\{t^2+t+2,\ 2t^2+t,\ 3t^2+2t+2\}$ kümesinin P_2'de vektör uzayı için bir baz olduğunu gösteriniz.

23) $\{t^2+1,\ t+t,\ t+1\}$ kümesinin P_2'yi gerdiğini gösteriniz.

24) $\vec{X}_1=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}, \vec{X}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\ \vec{X}_3=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$ vektörleri R^3 gerdiğini gösteriniz.

25) $\{2t^2+t,\ t,\ t^2+3\}$ lineer bağımlı olup olmadığını araştırınız. Eğer lineer bağımlı ise bağıntıyı yazınız.

26) $\begin{bmatrix}a^2\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\a\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ kümesi R^3 için bir baz olacak biçimindeki bütün a değerlerini bulunuz.