5. BÖLÜM

TRİGONOMETRİ

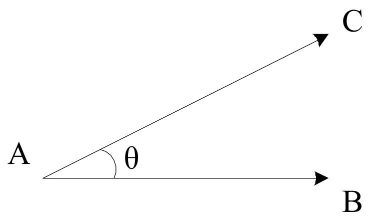
Trigonometri matematiğin en çok kullanılan kavramlarından biridir. Teorik matematikte olduğu kadar mühendislikte ve diğer bilim dallarında da çok uygulama alanları bulmuştur. Trigonometri üçgenlerin bilinmeyen kenarlarının uzunluğunu bulma ihtiyacından ortaya çıkan bir kavramdır. Şimdi bu özelliklere göre bazı tanımlar yapalım.

5.1. Genel Bilgiler

Doğru: Geometride doğru kısaca noktalar topluluğu olarak tanımlanabilir. Bir başka deyişle doğru, başlangıç ve bitiş noktası belli olmayan sınırsız uzunlukta, sonsuz sayıdaki noktalar kümesidir.

Yarım Doğru (Işın): Başlangıç noktası belli olan doğruya yarım doğru veya ışın denir. [AB) Şeklinde gösterilir.

Açı: [AB) ve [AC) yarım doğrularının (ışın) arasında kalan alana açı denir. Bu iki yarım doğrunun kesiştiği noktaya açının tepesi ve ışınların her birine açının kenarları denir.

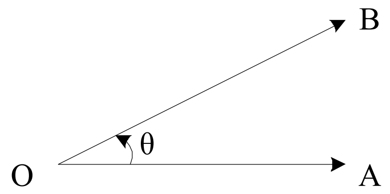


Bir açının ölçüsü iki ışının arasındaki dönme miktarı ile belirlenir. (θ gibi)

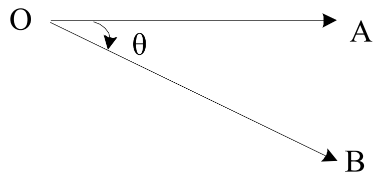
Biz burada sadece bir dönme yönünden bahsediyoruz. Gerçekte iki dönme yönü vardır. Bunu biz dönme yönünü tanımlayarak açıklayalım. [AB) yarım doğrusuna başlangıç kenarı diyelim. Bu yarım doğruyu saat ibresinin tersi yönde aynı pozisyonda belirli bir θ miktarı döndürelim. Bu durumda [AC) doğrusunu elde ederiz. Böylece BAC açısı [AB) yarım doğrusundan [AC) yarım doğrusuna kadar θ birimlik dönme ile elde edilir.

İşte bu θ birimlik dönme yönü yani saat ibresinin tersi yönünde olana pozitif dönme yönü denir. Tersine saat ibresi ile aynı yöndeki dönmeye negatif dönme yönü denir. Bir açı [OA) ışınının başlangıç noktası etrafında döndürülmesiyle elde edilir.

Bu nedenle, biz [OA) yarı doğrusunun başlangıç kenarı ve [OB) yarı doğrusunu da (O köşesi etrafında θ birimlik dönme ile elde edilen) bitiş kenarı denir. O noktasına da açının köşesi denir. Açılar genellikle α,β,θ,… … gibi harflerle gösterilirler.



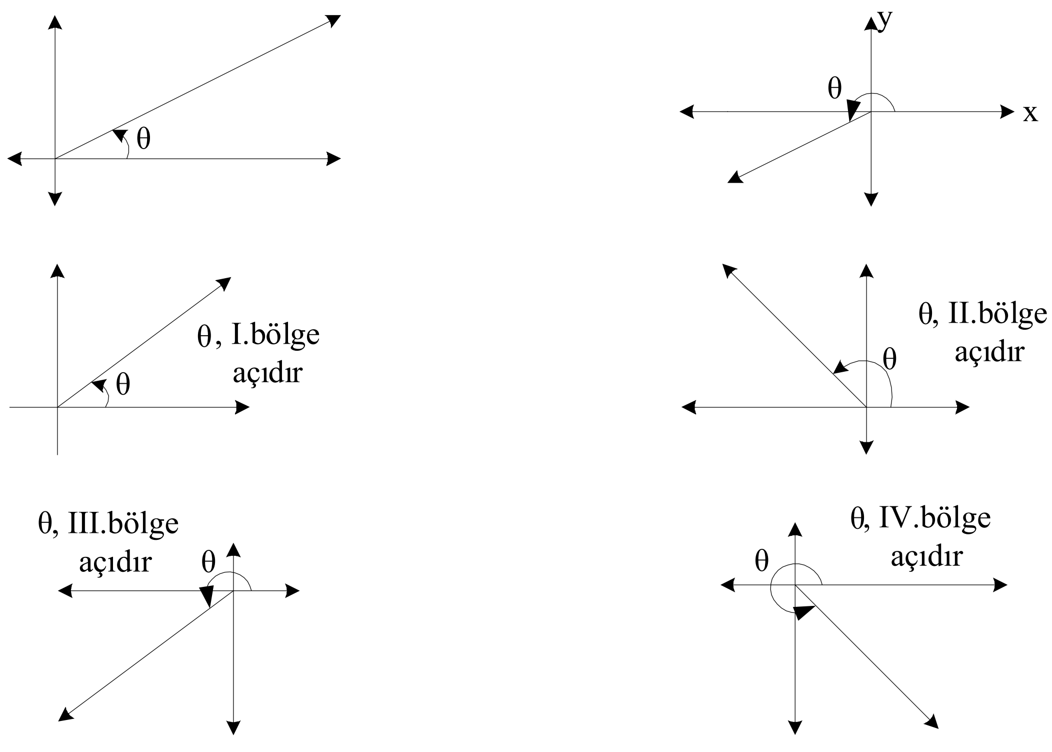
Pozitif Açı



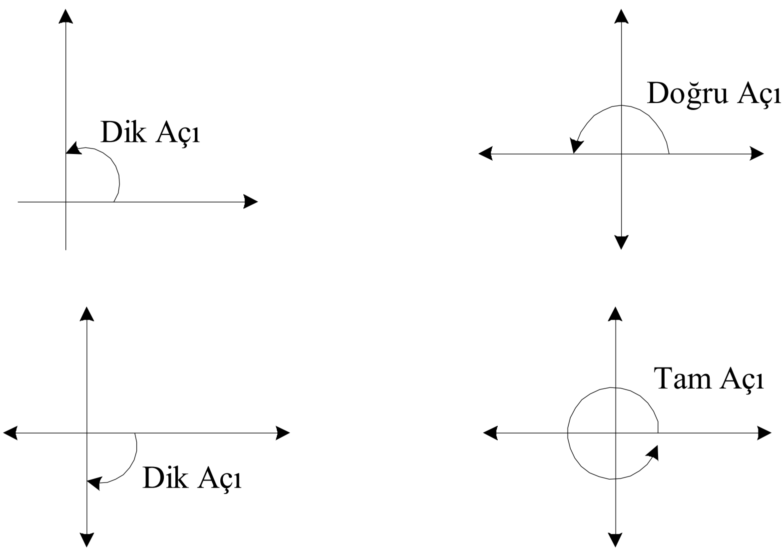
Negatif Açı

Eğer bir θ açısının köşesi kartezyen koordinat sisteminde orijinde ve başlangıç kenarı

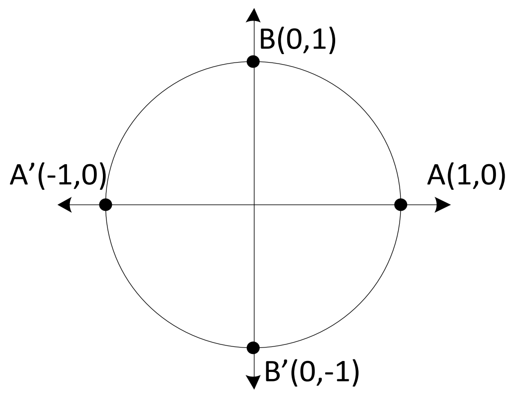
x-ekseninin pozitif yönü üzerinde ise θ açısı standart pozisyondadır denir.
Standart pozisyondaki bazı açılar aşağıda gösterilmiştir.



Şimdi de bölgesel açıları aşağıdaki gibi tanımlayalım.

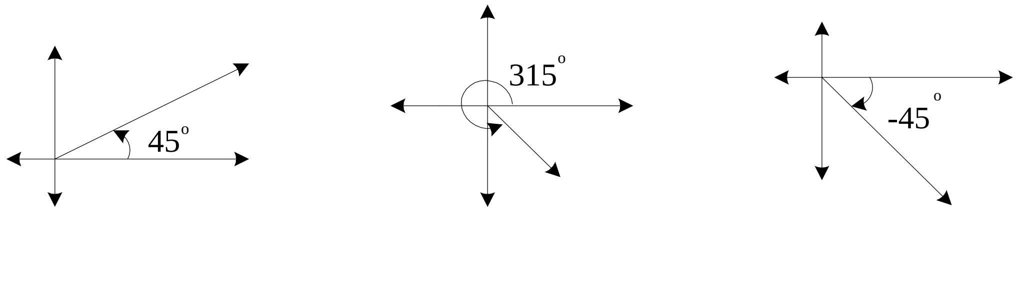


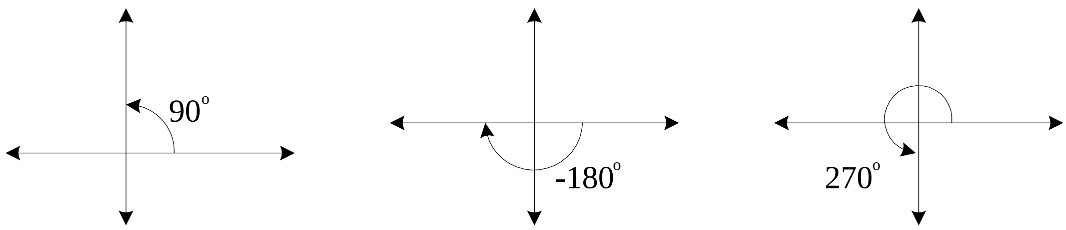
Birim Çember ($x^2 + y^2 = 1$ *Çemberi* **) :** Merkezi orijinde ve yarıçapı 1 birim olan çembere **birim çember** denir. Birim çemberin x ekseninin pozitif yönünü kestiği **A** noktasına **açı ölçülerinin başlangıç noktası** denir.

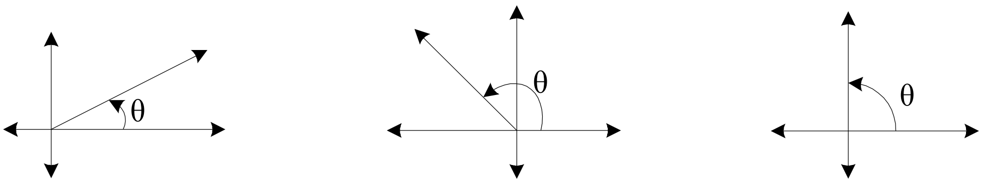


Açı Ölçü Birimleri

1) Derece: Eğer bir daire 360 eşit parçaya bölünürse her bir eşit parçaya 1 derecelik yay, yayı gören merkez açıya da 1 derecelik açı denir. 1° ile gösterilir.







Dar Açı   Geniş Açı   Dik Açı

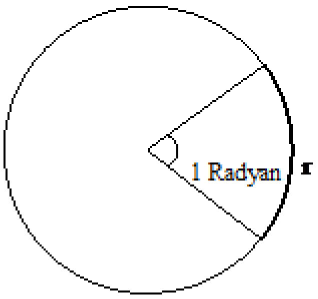
Bir θ açısı , $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ise θ açısına dar açı, $90^\circ < \theta < 180^\circ$ ise θ açısına geniş açı, $\theta = 90^\circ$ ise θ açısına dik açı denir.

1 derece = 60 dakika $\quad$ ***1° = 60 ’***

1 dakika = 60 saniye $\quad$ ***1 ’ = 60 ”*** şeklinde gösterilir.

2)Radyan: Bir dairenin yarıçapı r iken, r birim uzunluğundaki yaya **bir radyanlık yay** ve bu yayı gören açıya **1 radyanlık açı** denir. **1 rad** ile gösterilir.

Buna göre 360° ‘ lik açı 2 π radyanına eşittir.



r ⟶ 1 rad

2π ⟶ x

$$x = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

Buna göre 360° = 2π rad eşitliği her zaman geçerlidir. 360° = 2π rad ise 180° = π rad buradan:

1 rad = $\frac{\pi}{180}$ rad veya 1 rad = $\frac{180}{\pi}$ eşitlikleri bulunur.

3)Grad: Bir dairenin 400 eşit parçaya bölünmesi ile elde edilen her bir parçaya bir gradlık yay ve bu yayı gören çevre açıya da 1 gradlık açı denir ve grad ile gösterilir. Buna göre ;

400 grad = 360° = 2 π eşitliği geçerlidir. Böylece açı ölçü birimleri arasında;

D = Derece; R = Radyan; G = Grad olmak üzere;

$$\frac{D}{360} = \frac{R}{2\pi} = \frac{G}{400} \quad \text{veya} \quad \frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} = \frac{G}{200}$$ bağıntısı her zaman geçerlidir.

Örnekler:

1) 30˚ ’ lik açı kaç radyandır?

$$\frac{D}{180}=\frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{30}{180}=\frac{R}{\pi} \Rightarrow R=\frac{30\pi}{180}=\frac{\pi}{6}$$

$$\text{veya } 1^{o}=\frac{\pi}{180}\text{rad ise } 30^{o}=\frac{\pi}{6}\text{rad}$$

2) -240˚ ’ lik açı kaç radyandır?

$$-240^{o}=(-240).(\frac{\pi}{180})=-\frac{4\pi}{3}$$

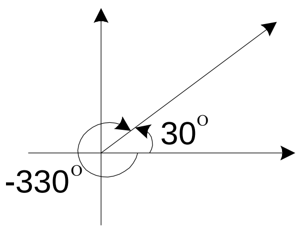
3) 240 grad kaç derecedir?

$$\frac{G}{200}=\frac{D}{180} \Rightarrow \frac{240}{200}=\frac{D}{180} \Rightarrow D=\frac{180.240}{200}=216^{o}$$

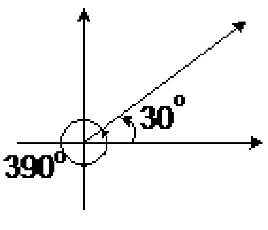
4) $\frac{3\pi}{4}$ kaç grad’ dır?

$$\frac{R}{\pi}=\frac{G}{200} \Rightarrow \frac{\frac{3\pi}{4}}{\pi}=\frac{G}{200} \Rightarrow \frac{\frac{3\pi}{4}.200}{\pi}=G \Rightarrow G = 150 \text{ grad}$$

Standart pozisyonda aynı bitiş kenarına sahip açılara ortak bitiş kenarına sahip açılar denir. Örneğin;

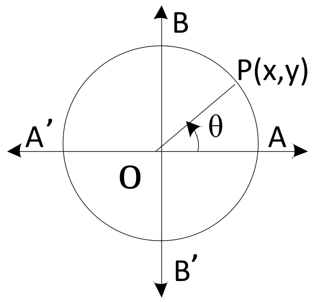


30˚ ve 330˚ ortak bitiş kenarına sahip açılar.



30˚ ve 390˚ derece ortak bitiş kenarına sahip açılardır.

Esas Ölçü:



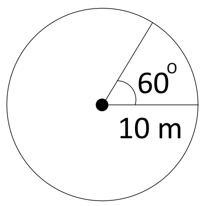
Şekildeki P(x,y) noktası çember üzerindedir $k \in Z$ ve $0 \le \theta_1 \le 360^\circ$ için $\theta = \theta_1 + 2k\pi$ değerlerinin hepsi P noktasına karşılık gelir. Buna göre AOP açısına θ açısının esas ölçüsü denir.

Örnekler: $\frac{16\pi}{3}$ radyanlık açının gerçek ölçüsü nedir?

$$\frac{16\pi}{3} = \frac{12\pi + 4\pi}{3} = 4\pi + \frac{4\pi}{3} \qquad \theta = \frac{4\pi}{3} \text{ esas ölçüdür.}$$

Yay Uzunluğu: θ radyan cinsinden merkez açı ve r yarıçap iken; **S = r.**θ ' dır.

Örnek: Yay uzunluğunu bulunuz.

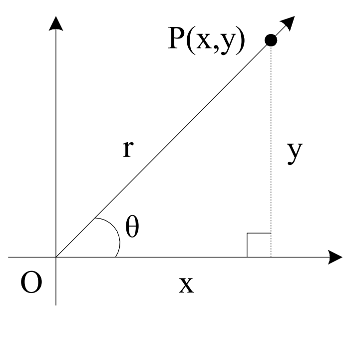


$$60^\circ = 60.\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$$

$$S = r.\theta = (10m).(\frac{\pi}{3}) = \frac{10\pi}{3}m = 10.47m$$

5.2.Dar Açıların Trigonometrik Fonksiyonları

Bir θ dar açısına sahip olduğumuzu varsayalım. Bitiş kenarı üzerinde O(0,0) noktası dışında herhangi bir P(x,y) noktası seçelim. Orijinden P noktasına kadar olan uzaklığı r ile gösterelim (r > 0). Bu r değerine aynı zamanda yarıçap vektörü denir.



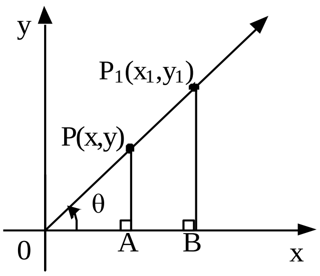
Phytagorean (Pisagor) teoreminden; $r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (r > 0 olduğu için) olarak bulunur. Buna göre trigonometrik fonksiyonları tanımlayalım;

$$Sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad Tan\theta = \frac{y}{x} \qquad Sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$$

$$\Rightarrow \qquad \Rightarrow$$

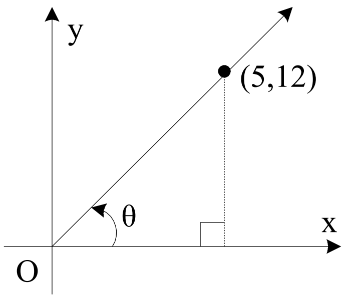
$$Cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad Co\tan\theta = \frac{x}{y} \qquad Co\sec\theta = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}$$

Her bir trigonometrik fonksiyon P(x,y) noktasının seçiminden bağımsız iken θ değerine bağlıdır. Bunu biraz daha açıklayalım. Aşağıdaki şekilde bitiş kenarı üzerinde P noktasından ve O(0,0) noktasından farklı bir $P_1(x_1, y_1)$ noktası alalım.



OAP ve OBP_1 üçgenleri benzer üçgendir ve geometriden hatırlanabileceği gibi bu iki üçgen orantılıdır. Bu oran üçgenlerin benzerliğinden veriler kullanılarak kolaylıkla elde edilebilir. Sonuç olarak sinθ ve verilen bir θ açısına göre bir tektir.

Örnek:



Şekilde verilenlere göre θ dar açısının trigonometrik fonksiyonlarının değerlerini bulunuz.

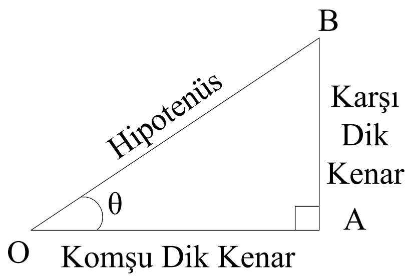
Çözüm: $\left.\begin{array}{l} x = 5 \\ y = 12 \end{array}\right\} \; r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{5^2+12^2} = \sqrt{169} = 13$

$$\text{Sin}\theta = \frac{y}{r} = \frac{12}{13} \qquad \text{Tan}\theta = \frac{y}{x} = \frac{12}{5} \qquad \text{Sec}q = \frac{r}{x} = \frac{13}{5}$$

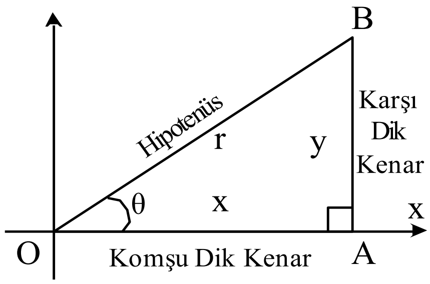
$$\Rightarrow \qquad \Rightarrow$$

$$\text{Cos}\theta = \frac{x}{r} = \frac{5}{13} \qquad \text{Co}\tan\theta = \frac{x}{y} = \frac{5}{12} \qquad \text{Cosec}q = \frac{r}{y} = \frac{13}{12}$$

Bir θ dar açısının trigonometrik fonksiyonlarının değerleri bir dik üçgenin kenarlarının uzunlukları oranı cinsinden bulunabilir. Bunu açıklamak için aşağıdaki gibi bir AOB üçgenini göz önüne alalım.



θ dar açısının karşısındaki AB kenarına karşı dik kenar ve açı kavramında başlangıç kenarı diye tanımladığımız OA kenarına komşu dik kenar diyelim. OB kenarında AOB üçgeninde hipotenüs olmak üzere bu AOB üçgenini dik koordinat sistemine taşıyalım.



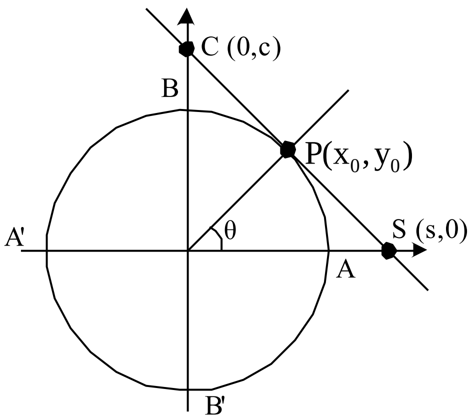
B noktasının apsisi θ için komşu dik kenarı iken ordinatı θ için karşı dik kenardır. Buna göre;

$$\text{Sin}\theta = \frac{y}{r} = \frac{\text{Karşı Dik Kenar}}{\text{Hipotenüs}}$$

$$\text{Cos}\theta = \frac{x}{r} = \frac{\text{Komşu Dik Kenar}}{\text{Hipotenüs}}$$

$$\text{Sec}\theta = \frac{r}{x} = \frac{\text{Hipotenüs}}{\text{Komşu Dik Kenar}} \qquad \text{Tan}\theta = \frac{y}{x} = \frac{\text{Karşı Dik Kenar}}{\text{Komşu Dik Kenar}}$$

$$\text{Cosec}\theta = \frac{r}{y} = \frac{\text{Hipotenüs}}{\text{Karşı Dik Kenar}} \qquad \text{Cotan}\theta = \frac{x}{y} = \frac{\text{Komşu Dik Kenar}}{\text{Karşı Dik Kenar}}$$



P noktasından birim çembere çizilen teğetin x ekseninin kestiği s(s,0) noktasının s apsisine θ **reel sayısının sekantı** denir ve $\sec\theta = S$ şeklinde gösterilir. Teğetin y ekseninin kestiği C(0,c) noktasının C ordinatına θ **reel sayısının kosekantı** denir ve $\cos ec\theta = C$ şeklinde gösterilir.

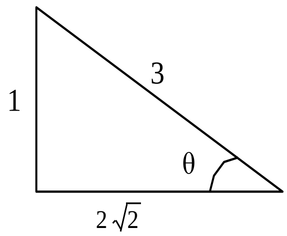
Örneklerde görüldüğü gibi trigonometrik fonksiyonlar arasında birbirleri cinsinden birçok ilişki vardır. Bunları aşağıdaki tablo ile sunacak olursak;

$$\text{Tan}\theta = \frac{\text{Sin}\theta}{\text{Cos}\theta} \Rightarrow \text{Sec}\theta = \frac{1}{\text{Cos}\theta} \Rightarrow \qquad \text{Co}\tan\theta = \frac{\text{Cos}\theta}{\text{Sin}\theta} \Rightarrow \text{Cos}\theta = \frac{1}{\text{Sec}\theta}$$

$$\text{Co}\sec\theta = \frac{1}{\text{Sin}\theta} \Rightarrow \text{Tan}\theta = \frac{1}{\text{Co}\tan\theta} \qquad \Rightarrow \text{Sin}\theta = \frac{1}{\text{Cosec}\theta} \Rightarrow \text{Co}\tan\theta = \frac{1}{\text{Tan}\theta}$$

Örnek: Cosθ = $2\sqrt{2}/3$ ise θ 'nın diğer trigonometrik değerlerini bulunuz.

Çözüm:



$$3^2 = (2\sqrt{2})^2 + x^2$$
$$\Rightarrow x^2 = 9 - 8 = 1 \Rightarrow x = 1$$

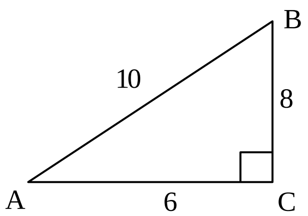
$$Sin\theta = \frac{1}{3} \text{ ise } Tan\theta = \frac{Sin\theta}{Cos\theta} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{veya } \mathrm{Tan}q = \frac{y}{x} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad Co\tan\theta = \frac{1}{Tan\theta} = 2\sqrt{2}$$

$$Co\sec\theta = \frac{1}{Sin\theta} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3 \text{ ve } Sec\theta = \frac{1}{Cos\theta} = \frac{1}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Böylece biz bu bilgilere göre bir θ dar açısının trigonometrik fonksiyonları cinsinden değerini herhangi bir dik üçgende rahatlıkla bulabiliriz.

Örnek:



Şekle göre A ve B açılarının trigonometrik fonksiyonlarının değerlerini bulunuz.

Çözüm: $\mathrm{SecA} = \frac{\text{Hipotenüs}}{\text{Kom.DikKenar}} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$ $\quad \mathrm{Co\sec A} = \frac{\text{Hipotenüs}}{\text{Kar.DikKenar}} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$

$$\mathrm{SinA} = \frac{\text{Kar.DikKenar}}{\text{Hipotenüs}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \qquad \mathrm{TanA} = \frac{\text{Kar.DikKenar}}{\text{Kom.DikKenar}} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\mathrm{CosA} = \frac{\text{Kom.DikKenar}}{\text{Hipotenüs}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \qquad \mathrm{Co\tan A} = \frac{\text{Kom.DikKenar}}{\text{Kar.DikKenar}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

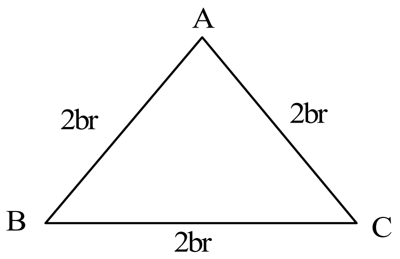
$$\mathrm{SinB} = \frac{\text{Kar.DikKenar}}{\text{Hipotenüs}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \qquad TanB = \frac{Kar.DikKenar}{Kom.DikKenar} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

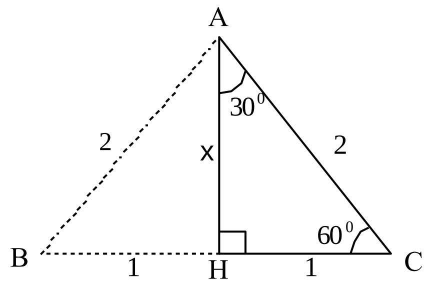
$$\mathrm{CosB} = \frac{\text{Kom.DikKenar}}{\text{Hipotenüs}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \qquad Co\tan B = \frac{Kom.DikKenar}{Kar.DikKenar} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\mathrm{SecB} = \frac{\text{Hipotenüs}}{\text{Kom.DikKenar}} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} \qquad \mathrm{Co\sec B} = \frac{\text{Hipotenüs}}{\text{Kar.DikKenar}} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

5.3. Bazı Dar Açıların Trigonometrik Oranları

30˚, 45˚ ve 60˚'lik açıların trigonometrik oranlarını bazı üçgenleri kullanarak rahatlıkla bulabiliriz. Her bir kenarı 2br olan ABC eşkenar üçgenini göz önüne alalım, sonra A köşesinden H dikmesini inelim.





Eşkenar üçgen özelliğinden $|BH| = |HC| = 1$ ve $H\hat{A}C = 30°$ olur. $|AH| = x$ diyelim. Pisagor teoreminden $|AC|^2 = |AH|^2 + |HC|^2$ ➔ $2^2 = x^2 + 1^2$ ➔ $x^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$

$x = |AH| = \sqrt{3}$ olarak bulunur. Buna göre;

$$\mathrm{Sin}30^0 = \frac{|HC|}{|AC|} = \frac{1}{2} \qquad \mathrm{Sin}60^0 = \frac{|AH|}{|AC|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\mathrm{Cos}30^0 = \frac{|AH|}{|AC|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \mathrm{Cos}60^0 = \frac{|HC|}{|AC|} = \frac{1}{2}$$

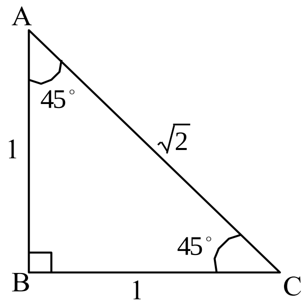
$$\mathrm{Tan}30^0 = \frac{|HC|}{|AH|} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \mathrm{Tan}60^0 = \frac{|AH|}{|HC|} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$\mathrm{Cotan}30^0 = \frac{|AH|}{|HC|} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \qquad \mathrm{Cotan}60^0 = \frac{|HC|}{|AH|} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\mathrm{Sec}30^0 = \frac{1}{\mathrm{Cos}30^0} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \mathrm{Sec}60^0 = \frac{1}{\mathrm{Cos}60^0} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\mathrm{Cosec}30^0 = \frac{1}{\mathrm{Sin}30^0} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \qquad \mathrm{Cosec}60^0 = \frac{1}{\mathrm{Sin}60^0} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Şimdi de 45˚ lik dar açının trigonometrik oranlarını bulalım. Bunun için aşağıdaki ABC ikizkenar dik üçgeni gözönüne alalım.



$|AB| = |BC| = 1$

$\hat{A} = \hat{C} = 45°$

$\hat{B} = 90°$

Bu verilere göre; SinA = Sin45° = Cos45°= $\dfrac{|BC|}{|AC|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ve Tan45° $= \dfrac{\text{Sin}45^{o}}{\text{Cos}45^{o}} = 1$

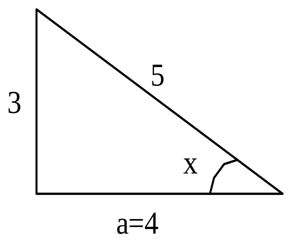
$\text{Ctg}45° = \dfrac{1}{\text{Tan}45°} = \dfrac{1}{1} = 1 \Rightarrow Sec45° = \dfrac{1}{Cos45°} = \dfrac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} \Rightarrow \text{Cosec}\,45° = \dfrac{1}{\text{Sin}\,45°} = \dfrac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$

5.4.Trigonometrik Oranlardan Biri Bilinirken Diğerlerini Bulmak İçin Örnekler

Verilen trigonometrik oranın pay ve paydası kenar uzunlukları olacak biçimde taralı çizim yapılır. III. kenarın uzunluğu pisagor bağıntısı ile bulunur. Bölgelerdeki işaretler de dikkate alınarak trigonometrik oranlar hesaplanır.

Örnek : $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ olmak üzere $\sin x = \dfrac{3}{5}$ ise tanx ve secx'i bulunuz.

Çözüm :



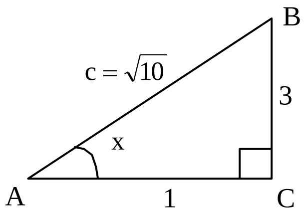
Pisagor bağıntısından $a^2 = 5^2 - 3^2 = 16$ ve a=4 bulunur.

$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ ise I. bölgededir.I. bölgede tüm trigonometrik oranlar pozitiftir.

$\tan x = \dfrac{3}{4}$ ve $\sec x = \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1}{\frac{4}{5}} = \dfrac{5}{4}$ bulunur.

Örnek : $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$ olmak üzere $\tan x = 3$ ise cosx ve cosecx'i bulunuz.

Çözüm :



Pisagor bağıntısından $c^2 = 3^2 + 1^2 \Rightarrow c = \sqrt{10}$ bulunur.

$\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$ ise x III. bölgededir. Bu bölgede

cosx ve cosecx negatiftir.Buna göre; $\cos x = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ ve

$\cos ecx = \dfrac{1}{\sin x} = \dfrac{1}{-\frac{3}{\sqrt{10}}} = -\dfrac{\sqrt{10}}{3}$ olur.

Örnek: $\text{Sinx} - \text{Cosx} = \dfrac{8}{7}$ ise $\text{Sin}2x = ?$

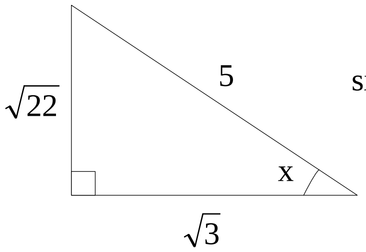
Çözüm: $(\text{Sinx} - \text{Cosx})^2 = \left(\dfrac{8}{7}\right)^2$

$\text{Sin}^2x - 2\text{Sinx}.\text{Cosx} + \text{Cos}^2x = \dfrac{64}{49}$ ve $\text{Sin}^2x + \text{Cos}^2x = 1 \Rightarrow 1 - \dfrac{64}{49} = 2\text{Sinx}.\text{Cosx}$

$\text{Sin}2x = 2\text{Sinx}.\text{Cosx} = -\dfrac{15}{49}$ bulunur. Böylece bir dik üçgende açı ve bir kenar veya iki kenar verildiğinde istenen diğer elemanlar bulunabilir.

Örnek: $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ için $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{5}$ ise Sinx,Tanx,Cotanx,Secx,Cosecx nedir.

Çözüm: $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ demek x, 2. bölge açı demektir. $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{5}$ veriliyor.



Burada uzunluk söz konusu olduğundan (-) alınmaz.

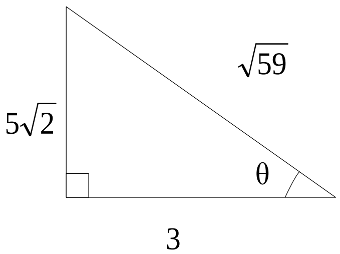
$$\sin x = \frac{\sqrt{22}}{5} \text{(2.bölgede+)} \rightarrow \text{cosec}x = \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\frac{\sqrt{22}}{5}} = \frac{5}{\sqrt{22}}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sqrt{22}/5}{-\sqrt{3}/5} = -\sqrt{\frac{22}{3}} \rightarrow \sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{5}} = -\frac{5}{\sqrt{3}}$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{-\sqrt{\frac{22}{3}}} = -\sqrt{\frac{3}{22}}$$

Örnek: $\theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ olmak üzere $\tan\theta = \dfrac{5\sqrt{2}}{3}$ ise sin2θ=? Cos2θ=?

Çözüm:



$$\sin\theta = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{59}} \Rightarrow \cos\theta = \frac{3}{\sqrt{59}}$$

$$\sin 2\theta = \sin(\theta + \theta) = \sin\theta.\cos\theta + \cos\theta.\sin\theta = 2\sin\theta.\cos\theta$$

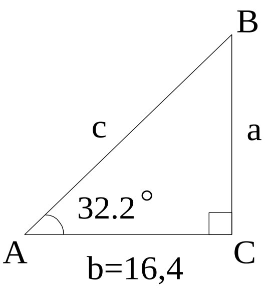
$$\sin 2\theta = 2.\sin\theta.\cos\theta = 2 \cdot \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{59}} \cdot \frac{3}{\sqrt{59}} = \frac{30\sqrt{2}}{59}$$

$$\cos 2\theta = \cos(\theta+\theta) = \cos\theta.\cos\theta - \sin\theta.\sin\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \left(\frac{3}{\sqrt{59}}\right)^2 - \left(\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{59}}\right)^2 = -\frac{41}{59}$$

Örnek: Şekildeki ABC üçgeninde verilenlere göre a ve c kenarlarının uzunluklarını bulunuz.

Çözüm:



$\text{CosA} = \frac{b}{c}$ 'den

$\text{Tan}32.2^\circ = \frac{a}{b} = \frac{a}{16.4}$

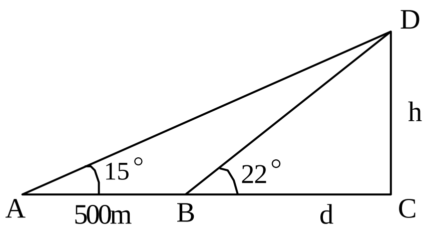
$\text{Tan}32.2^\circ = 0.62973 = \frac{a}{16.4} \Rightarrow a = 16.4(0.62973)$

a=10.3 ve Pisagor Teoreminden; $c^2 = a^2 + b^2$ 'den

c= $\sqrt{(10,3)^2 + (16,4)^2} = 19,4$ veya cos32.2= $\frac{16.4}{c}$ =0.084619

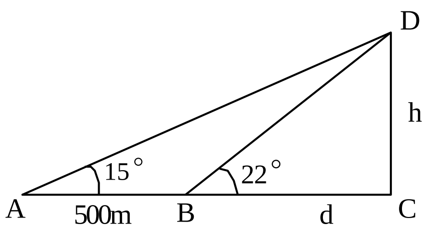
➔ $c = \frac{16.4}{\cos 32.2^\circ} = \frac{16.4}{0.84619} = 19.4$

Örnek:



Bir köprünün tahmini yüksekliğine göre A ve B noktaları 500 m mesafe ile şekildeki gibi konuluyor. Köprünün yüksekliğini bulunuz.

Çözüm:



ADC üçgeninden; köprünün yüksekliğine h

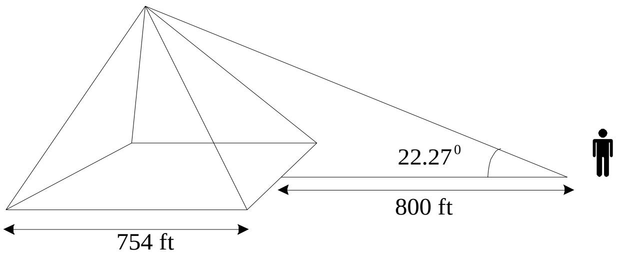
dersek; $\tan 15^\circ = \frac{h}{500+d} \Rightarrow h = (500+d)\tan 15^\circ$

BCD üçgeninden; $\cot 22^\circ = \frac{d}{h}$ ve d= cot22°.h olup

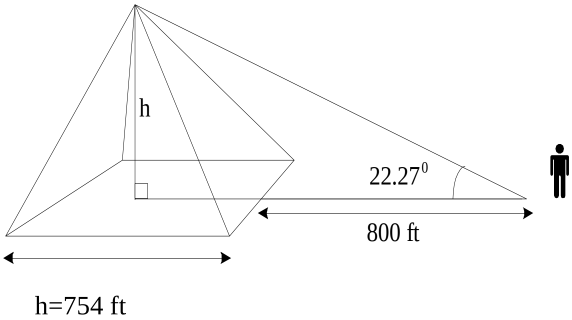
h(1-cot22°.tan15°)=500tan15° ise

$$h = \frac{500\tan 15^\circ}{1-\cot 22^\circ.\tan 15^\circ} = 397{,}8\text{m}$$

Örnek: Keops'un Büyük Piramidi tabanı kare şeklindedir ve bir kenarı 754ft (1fit≈30.5cm) uzunluğundadır. Bir ziyaretçi piramitin yüksekliğini belirlemek için karenin bir kenarının orta noktasından 800 ft uzakta bulunduğu nokta ile piramitin en tepe noktası arasındaki açıyı 22.27° olarak ölçüyor. Piramitin yüksekliği nedir?



Çözüm: $\text{Tan}22.27^\circ = \dfrac{h}{800 + \dfrac{754}{2}}$ veya



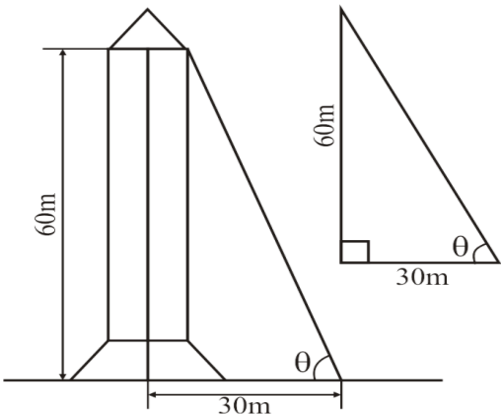
$h = 1177.\ \text{Tan}22.27^\circ = 482 \text{ ft} = 147 \text{ m}$

Örnek: Şekildeki roket bir kablo ile destekleniyor. Kablo zeminden 30 m uzaklıkta olup rokete desteklendiği zirve 60 m yüksekliktedir. Buna göre;

a) Kablonun gergin olduğu varsayılırsa θ açısı ne olur?

b) Kablonun uzunluğu nedir?

Çözüm:



$\tan\theta = \dfrac{60}{30} = 2$ ise $\theta = \text{Arctan}2 = 63.4^\circ$

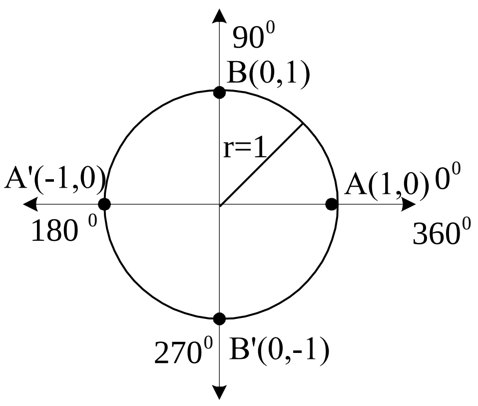
$\text{Sin}63.4^\circ = \dfrac{60}{x} \Rightarrow x = \dfrac{60}{\text{Sin}63.4^\circ} = \dfrac{60}{0.8942}$

$\text{Cos}63.4^\circ = \dfrac{30}{x} \cong 70\text{m}$

5.4.1. 0˚, 90˚, 180˚ ve 270˚ lik açıların trigonometrik oranları

30˚, 45˚, ve 60˚ lik özel açılar 0˚, 90˚, 180˚ ve 270˚ açılar gibi çizilemez. Daha önce özel açıların trigonometrik oranlarını bulmuştuk. Şimdi de birim çember yardımı ile 0˚, 90˚, 180˚ ve 270˚ lik açıların trigonometrik oranlarını bulalım. Daha önce gösterdiğimiz gibi;

$$\left.\begin{aligned} \text{Sin}\theta &= \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y \\ \text{Cos}\theta &= \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x \end{aligned}\right\} \text{idi. Aşağıdaki birim çemberden;}$$



$$\left.\begin{array}{l}\text{Cos}0° = x = 1 \\ \text{Sin}\,0° = y = 0\end{array}\right\}\ \text{A(1,0) noktası}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Cos}90° = x = 0 \\ \text{Sin}\,90° = y = 1\end{array}\right\}\ \text{B(0,1) noktası}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Cos}180° = x = -1 \\ \text{Sin}180° = y = 0\end{array}\right\}\ \text{A'(-1,0) noktası}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Cos}270° = x = 0 \\ \text{Sin}\,270° = y = -1\end{array}\right\}\ \text{B'(0,-1) noktasıile temsil edilir. Buna göre;}$$

$$\text{Tan}0^\circ = \frac{\sin 0°}{\cos 0°} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \text{Cotan}0^\circ = \frac{\cos 0°}{\sin 0°} = \frac{1}{0} = \infty\,\text{tanımsız}$$

$$\text{Tan}90^\circ = \frac{\sin 90°}{\cos 90°} = \frac{1}{0} = \infty\,(\text{ tanımsız}) \qquad \text{Cotan}90^\circ = \frac{\cos 90°}{\sin 90°} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\text{Tan}180^\circ = \frac{\sin 180°}{\cos 180°} = \frac{0}{-1} = 0 \qquad \text{Cotan}180^\circ = \frac{\cos 180°}{\sin 180°} = \frac{-1}{0} = \infty\,\text{tanımsız}$$

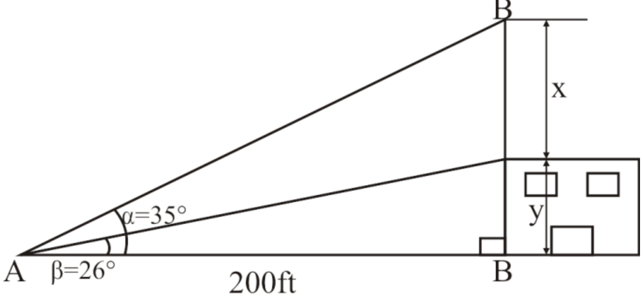
$$\text{Tan}270^\circ = \frac{\sin 270°}{\cos 270°} = \frac{-1}{0} = \infty\,(\text{tanımsız}) \qquad \text{Cotan}270^\circ = \frac{\cos 270°}{\sin 270°} = \frac{0}{-1} = 0$$

olarak elde edilir. Bu değerler ile özel açıların trigonometrik oranlarını birlikte bir tabloda toplarsak;

	0°=360°	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**	**180°**	**270°**
Sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
Cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
Tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞

Cot	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	∞	0
Sec	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞	-1	∞
Cos	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	∞	-1

Örnek: Şekildeki yerel radyo istasyonunu göz önüne alalım. İstasyonun yüksekliğini bulmak için zeminde tam istasyonun altında duran bir kişinin olduğu noktaya B diyelim. B'den 200ft (1fit≈30.5cm) uzaklıkta bir A noktası alalım. A noktasında kulenin başlangıcı ile tepesi arasındaki açılara sırasıyla α ve β dersek kulenin yüksekliği ne olur?



Çözüm: Şeklimizi daha sistematik bir şekilde ifade edelim.

Tanβ=tan26° $= \frac{y}{200}$ ➔ y=200.tan26°değerini

Tanα=tan35° $= \frac{x+y}{200}$ formülünde yerine yazarsak;Tan35° $= \frac{x+200.\tan 26°}{200}$

➔200.tan35°-200.tan26= x ➔ x=42.5m bulunur.

5.5.Kartezyen Koordinat Sisteminde Trigonometrik Fonksiyonların İşaretleri

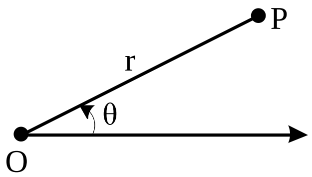
θ açısının altı trigonometrik fonksiyonu olan sinθ, cosθ, tanθ, cotanθ, secθ, cosecθ fonksiyonlarının bölgelere göre işaretleri aşağıda verilmiştir.

II. BÖLGE	I. BÖLGE
$\text{Sin}\theta > 0$ $\quad \text{Co}\tan\theta < 0$	$\text{Sin}\theta > 0$ $\quad \text{Co}\tan\theta > 0$
$\text{Cos} < 0$ $\quad \text{Sec}\theta > 0$	$\text{Cos}\theta > 0$ $\quad \text{Sec}\theta > 0$
$\text{Tan}\theta < 0$ $\quad \text{Co}\sec\theta < 0$	$\text{Tan}\theta > 0$ $\quad \text{Co}\sec\theta > 0$
III. BÖLGE	**IV. BÖLGE**
$\text{Sin}\theta < 0$ $\quad \text{Co}\tan\theta > 0$	$\text{Sin}\theta < 0$ $\quad \text{Co}\tan\theta < 0$
$\text{Cos} < 0$ $\quad \text{Sec}\theta < 0$	$\text{Cos}\theta > 0$ $\quad \text{Sec}\theta > 0$
$\text{Tan}\theta > 0$ $\quad \text{Co}\sec\theta < 0$	$\text{Tan}\theta < 0$ $\quad \text{Co}\sec\theta < 0$

Bu işaretleri belirlemenin bir başka yolu ise trigonometrik çemberde $(x,y)=(\cos\theta,\sin\theta)$ olduğundan her bir bölgedeki trigonometrik fonksiyon değeri ($\cos\theta$ ve $\sin\theta$) kullanılarak kolayca belirlenir.

II. BÖLGE	**I. BÖLGE**
(-x , y)	**(x , y)**
III. BÖLGE	**IV. BÖLGE**
(-x , -y)	**(x , -y)**

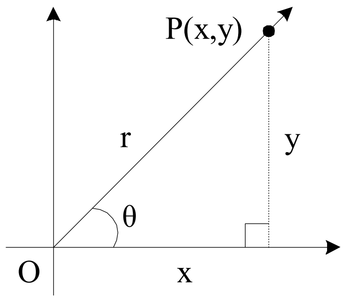
5.6.Kutupsal Koordinatlar



Kutupsal koordinatlarda şekilde görüldüğü gibi x-eksenine kutup ekseni, O (başlangıç noktası) noktasına kutup noktası (θ,r) çiftine de P noktasının kutupsal koordinatları denir. Düzlemin noktaları ile kutupsal koordinatlar arasında ki eşleme bire-bir değildir.

Çünkü (θ,r), $(\theta+2k\pi,r)$ $((\theta+(2k+1)\pi,-r)$ çiftleri aynı bir P noktasının kutupsal koordinatlarıdır. Bir P noktasının $P(\theta,r)$ şeklinde kutupsal koordinatları verildiğinde $x=r.\cos\theta;y=r.\sin\theta$ eşitlikleri yardımıyla P noktasının kartezyen koordinatlarını bulabiliriz.

Buna karşıt olarak P noktasının P(x,y) kartezyen koordinatları verilmiş ise x-ekseni kutup ekseni, orijin kutup seçilerek ;



$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad r = \mp\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{r\cos\theta}{r\sin\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

$\frac{y}{x} = \tan\theta$ ise $\theta = \arctan\frac{y}{x}$ bağıntıları ile

kartezyen koordinatlardan kutupsal koordinatlara dönüştürülür. Kutupsal koordinatlarda bir fonksiyon $r = f(\theta)$ veya $f(\theta,r)=0$ eşitlikleriyle tanımlıdır. Kartezyen koordinatlar ile kutupsal koordinatlar arasındaki ilişkiden dolayı kutupsal formda verilen fonksiyonu kartezyen koordinatlardaki ifadesini kartezyen formda verilen bir fonksiyonun kutupsal koordinatlardaki ifadesini bulabiliriz.

Örnek: Kartezyen koordinatları (4,-4$\sqrt{3}$) olan noktaların kutupsal koordinatlarını bulunuz.

Çözüm: $r = \mp\sqrt{x^2 + y^2} = \mp\sqrt{16+48} = \mp 8$

$$\frac{y}{x} = \tan\theta \Rightarrow \quad \frac{-4\sqrt{3}}{4} = \tan\theta \text{ ve } \theta = \arctan(-\sqrt{3}) \text{ ise } \theta = \frac{5\pi}{3} \text{ ve } P(\frac{5\pi}{3}, 8) \text{ dir.}$$

Örnek: $F(\theta, r) = r^3\text{Sin}\theta - 2r\text{Cos}\theta + 7r^2 + 2 = 0$ kutupsal denkleminin kartezyen denklemini bulunuz.

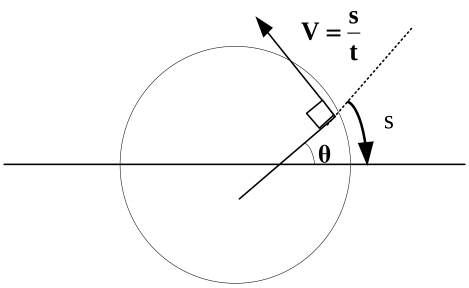
Çözüm: $x = r\,\text{Cos}\theta$, $y = r\,\text{Sin}\theta$ ve $r^2 = x^2 + y^2$ bağıntılarını denklemde yerine yazmak için denklemde x,y ve r^2 ifadelerini tekrar düzenlersek;

$r^2.r.\sin\theta - 2r\cos\theta + 7r^2 + 2 = 0$ olur ve $x = r\,\text{Cos}\theta$, $y = r\,\text{Sin}\theta$ ve $r^2 = x^2 + y^2$

değerlerini yerine yazarsak ; $(x^2 + y^2).(y + 7) - 2x + 2 = 0$ bulunur.

5.7.Açısal Hız

Şekilden de anlaşıldığı gibi yay uzunluğu s, birim zaman t, yarıçap r, açı θ olmak üzere; birim radyan cinsinden lineer hız $v = \frac{s}{t}$'dir . Bu ifade s yay uzunluğu formülünde $s = r.\theta$, her iki taraf t ile bölünerek; $\frac{s}{t} = r.\frac{\theta}{t}$ bulunur ve buradan;



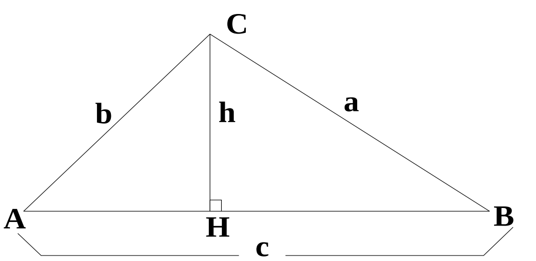
$V = r.w$ elde edilir. Burada lineer hız $V = \frac{s}{t}$ iken

açısal hız $w = \frac{\theta}{t}$ birim zamandaki radyan cinsinden hızdır.

5.8.Sinüs ve Kosinüs Kuralı

Özel üçgenlerin dışındaki üçgenlere herhangi üçgenler denir. Bu üçgenlerin kenar ve açılarından bazıları bilindiğinde diğer açı ve kenarları bulmak için sinüs ve kosinüs kuralları kullanılır.

5.8.1.Sinüs Kuralı: Herhangi bir ABC üçgenini göz önüne alalım. C kenarından AB doğrusuna h dikmesini inelim ve bunun AB'yi kestiği noktayı H ile belirtelim.



Buna göre sinüs kuralı;

$$\frac{a}{\sin a} = \frac{b}{\sin b} = \frac{c}{\sin c}$$

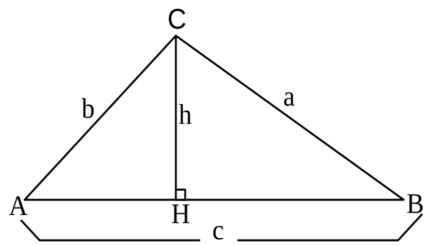
şeklinde ifade edilir.

Sinüs kuralının uygulanabilmesi için;

1) İki açı ve bu açılardan birinin karşısındaki kenar
2) İki kenar ve bu kenarlar arasındaki açı bilinmesi gerekir.

İspat:

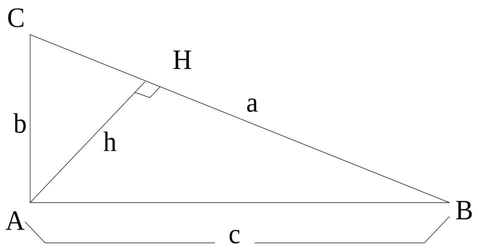
ACH üçgeninde; $\mathrm{SinA} = \dfrac{h}{b}$ ve $h = b.\mathrm{SinA}$



BCH üçgeninde; $\mathrm{SinB} = \dfrac{h}{a}$ ve $h = a.\mathrm{SinB}$

elde edilir.h=h olduğundan;

$a.\sin B = b.\mathrm{SinA} \Rightarrow \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$ ....(i)



Benzer olarak A noktasından CB Kenarına h dikmesi inilerek;

AHC üçgeninde; $\mathrm{SinC} = \dfrac{h}{b}$ ve $h = b.\mathrm{SinC}$

$\Rightarrow$AHB üçgeninde; $\mathrm{SinB} = \dfrac{h}{c}$ ve $h = c.\mathrm{SinB}$

elde edilir.h=h olduğundan; $c.\mathrm{SinB} = b.\mathrm{SinC} \Rightarrow \dfrac{b}{\mathrm{sinB}} = \dfrac{c}{\mathrm{sinC}}$ ....(ii)

olur. (i) ve (ii) ifadeleri birleştirilirse; $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ olur.

5.8.2.Kosinüs Kuralı : Herhangi bir ABC üçgeninde;

i) İki kenar ve aralarındaki açı biliniyorsa

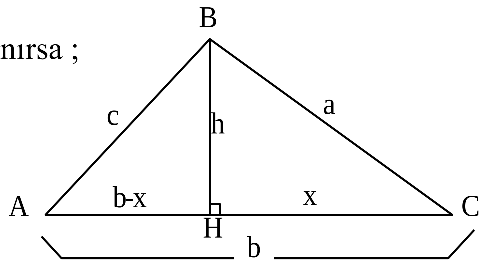
ii) Üç kenar biliniyorsa diğer istenen açı ve kenarlar bulunabilir. Bunun için aşağıdaki ABC üçgenini göz önüne alalım; Bu durumda;

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\mathrm{CosA}$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\mathrm{CosB}$ ifadeleri kosinüs kuralı olarak bilinir.

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\mathrm{CosC}$

İspat : AHB üçgeninde pisagor teoremi uygulanırsa ;



(i) $c^2 = (b-x)^2 + h^2$ elde edilir.

AHC dik üçgeninde pisagor uygulanırsa;

(ii) $a^2 = h^2 + x^2$ elde edilir.

(i) ve (ii) ifadelerini taraf tarafa çıkarırsak;

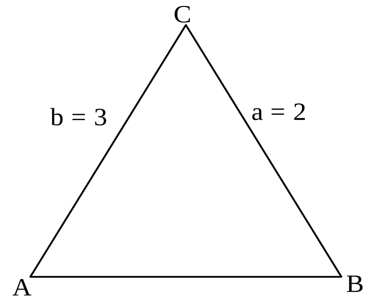
$$c^2 - a^2 = b^2 - 2bx + x^2 + h^2 - h^2 - x^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2bx \text{ olur. } \mathrm{CosC} = \frac{x}{a} \Rightarrow x = a.\mathrm{CosC}$$

değeri yukarıda yerine yazılırsa; $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\mathrm{CosC}$ bulunur.

Örnekler:

1)

Yandaki ABC üçgeninde;
$\hat{A} = 30°$
$a = 2cm$
$b = 3cm$
$\hat{B} = ?$

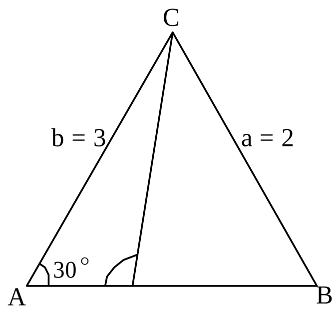


Çözüm: Çözümü iki yolla yapmak mümkündür. Bunlar ABC dar açılı üçgeninde veya AB'C geniş açılı üçgenindedir.

Sinüs kuralı iki kenar ve bunlardan birinin karşısındaki açı belli olduğundan uygulanabilir. Buna göre;

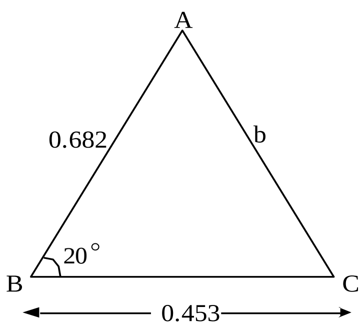
$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$'den $\mathrm{SinB} = \frac{b.(\mathrm{SinA})}{a}$ ise

SinB=0.75 ve B=$\mathrm{Sin}^{-1}(0.75) = 49°$



2) Herhangi bir ABC üçgeninde B=20^0, a=0.453 ve c=0.682 ise diğer bilinmeyenleri bulunuz.

Çözüm: İki kenar ve aralarındaki açı bilindiğine göre diğer kenar ve açılar kosinüs kuralı uygulanarak bulunabilir. Bunun için şeklimizi verilenlere göre çizelim.



$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\mathrm{CosB}$$

$$b^2 = (0.453)^2 + (0.681)^2 - 2(0.453)(0.681)\mathrm{Cos}\,20°$$

$$b^2 = 0.2052 + 0.4638 - 0.6170.(0.9397) = 0.0892$$

$$b = \sqrt{0.0892} = 0.299$$

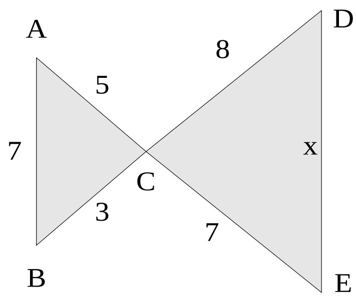
C açısını bulmak için sinüs uygulanırsa; $\mathrm{SinC} = \frac{C.(\mathrm{SinB})}{b} = \frac{(0.681)(0.3420)}{0.299} = 0.7790$

C= $\mathrm{Sin}^{-1}(0.7790) \Rightarrow C = 51.2°$ o halde A=180-B-C=180-51.2-20=108.8°

Fakat en büyük kenarın karşısında en büyük açı bulunacağından $\hat{C}$ =108.8° ve

A=180-B-C ➔ B=180-511.2-108.8⇒A=31.2° olarak bulunur.

3)Şekildeki x uzunluğunu bulunuz.



Çözüm:

$\overset{\Delta}{ABC}$ 'de Cosinüs Teoremi

$$7^2 = 3^2 + 5^2 - 2.3.5.\cos\hat{C}$$

$$15 = -30.\cos\hat{C} \Rightarrow \cos\hat{C} = -\frac{1}{2}$$

$\overset{\Delta}{DCE}$ 'de Cosinüs Teoremi

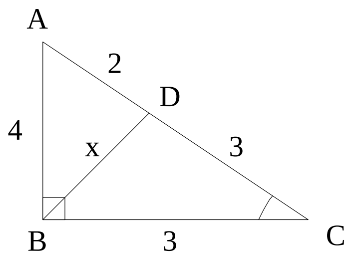
$$x^2 = 8^2 + 7^2 - 2.8.7.\cos\hat{C}$$

$$x^2 = 8^2 + 7^2 - 2.8.7.\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$x^2 = 64 + 49 + 56 = 169 \Rightarrow x = 13$$

4)Aşağıdaki üçgende x uzunluğu nedir?

Çözüm:



$\cos\hat{C} = \frac{3}{5}$ ise

$$x^2 = 3^2 + 3^2 - 2.3.3.\cos\hat{C}$$

$$x^2 = 3^2 + 3^2 - 2.3.3\cdot\frac{3}{5} \Rightarrow x^2 = \frac{36}{5} \Rightarrow x = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

5.9.Trigonometrik Fonksiyonların Periyodu

Eğer y=f(x) fonksiyonu $\forall x \in R$ ve $p \in R^+$ sayısı için; **f(x+p)=f(x)** şartını sağlıyorsa y=f(x) fonksiyonuna periyodik fonksiyon p sayısında da y=f(x) fonksiyonunun periyodu denir.

$$\left.\begin{array}{l} \sin^n(ax+b) \\ \cos^n(ax+b) \\ \sec^n(ax+b) \\ \mathrm{cosec}^n(ax+b) \end{array}\right\}$$

n tek doğal sayı ise; $p = \frac{2\pi}{|a|}$

$$\left.\begin{array}{l}\tan^{n}(ax+b)\\ \cot^{n}(ax+b)\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sin^{n}(ax+b)\\ \cos^{n}(ax+b)\\ \sec^{n}(ax+b)\\ \operatorname{cosec}^{n}(ax+b)\end{array}\right\} \quad n \text{ çift doğal sayı ise; } p=\frac{\pi}{|a|}$$

$$\left.\begin{array}{l}\tan^{n}(ax+b)\\ \cot^{n}(ax+b)\end{array}\right\}$$

Not: Toplam veya fark biçiminde verilen trigonometrik fonksiyonların periyotlarının bulunması için her birinin periyotları ayrı ayrı bulunur. Bu periyotların paydaları eşitlendikten sonra payların en küçük ortak katı bulunarak paya, ortak payda da paydaya yazılır.

Örnek: Aşağıdaki fonksiyonların periyodunu bulunuz.

$$a)f(x)=\operatorname{Sin}(5x+3) \qquad \Rightarrow\ p=\frac{2\pi}{5}$$

$$b)f(x)=3\operatorname{Tan}^{5}\left(\frac{x}{7}+4\right) \qquad \Rightarrow\ p=\pi\Big/\left(\frac{1}{7}\right)=7\pi$$

$$c)f(x)=5\operatorname{Cot}\left(\frac{-3x}{8}+\frac{3\pi}{5}\right) \qquad \Rightarrow\ p=2\pi\Big/\left|\frac{-3}{8}\right|=\frac{16\pi}{3}$$

$$d)f(x)=\frac{1}{2}\operatorname{Cosec}^{7}\left(\frac{x-\pi}{4}\right) \qquad \Rightarrow\ p=\frac{2\pi}{\left|\frac{1}{4}\right|}=8\pi$$

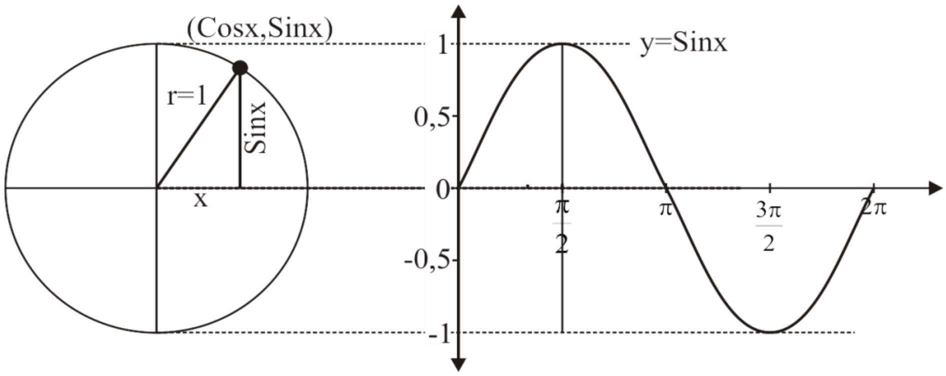
5.10.Trigonometrik Fonksiyonların Grafikleri

Sinüs ve Kosinüs eğrileri, dairesel hareket içeren matematiğin uygulamalarında kullanılır. Sinüs ve Kosinüs eğrilerinin bazı kullanım alanlarını yazacak olursak;

1- **Alternatif Akım-Elektrik**
2- **Pistonun hareketi**
3- **Işık, dalga ve diğer elektromanyetik dalgalar**
4- **Bir tel-yay vb. mekanik titreşimi**
5- **Akış hareketi**
6- **Bir sarkacın hareketi**
7- **Ses dalgaları**
8- **Dünya, güneş, ay, vb. yörünge hareketi**

Şimdi dairesel hareketle sinüs eğrisi arasındaki ilişkiyi görmek için [0, 2 π] aralığında y=sinx fonksiyonunun grafiğini çizelim.

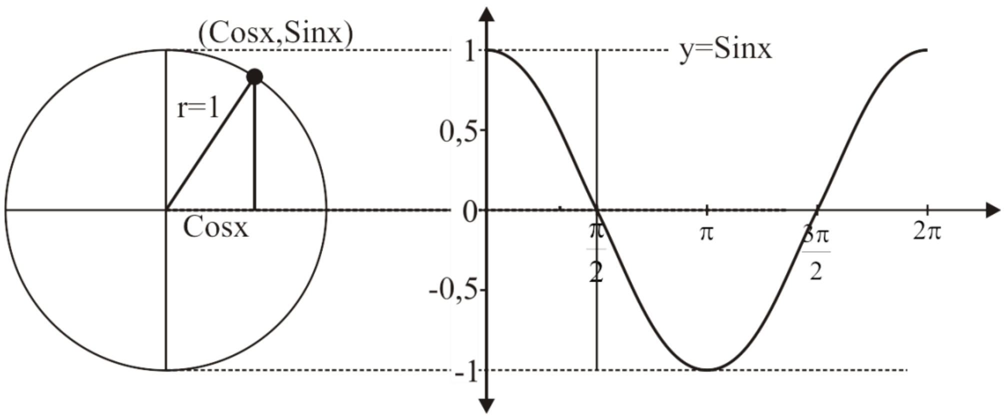
x (Derece)	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330
x (Radyan)	0	π / 6	π / 3	π / 2	2π / 3	5π / 6	π	7π / 6	4π / 3	3π / 2	5π / 3	11π / 6
y=sinx	0	0.5	0.87	1	0.87	0.5	0	-0.5	-0.87	-1	-0.87	-0.5



Şekilden de görüleceği gibi birim çember ile y=sinx fonksiyonunun $[0,2\pi]$ aralığındaki ilişkisi, r yarıçap vektörünün yüksekliğinin her bir x açısı için grafik üzerindeki y koordinatına bağlı olmasıdır. Yani, birim çemberde x açı cinsinden ölçüm iken grafikte radyan cinsinden ölçümdür ve bunlar yukarıdaki tabloda olduğu gibi aynı değerlerde birbirine

eşittir. Benzer şekilde $[0,2\pi]$ aralığında y=cosx eğrisini çizelim:

x (Derece)	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330
x (Radyan)	0	π / 6	π / 3	π / 2	2π / 3	5π / 6	π	7π / 6	4π / 3	3π / 2	5π / 3	11π / 6
y=sinx	0	0.87	0.5	0	0.5	0.87	-1	-0.87	-0.5	0	-0.5	-0.87



Böylece, y=sinx ve y=cosx fonksiyonları aynı grafik üzerinde karşılaştırılacak olursa bunların aynı değer kümesi $[-1,1]$ ‘e sahip oldukları ve periyodik bir fonksiyon oldukları görülür.

Bu periyot, $f(x+2k\pi)=f(x)$ olduğundan 2π olarak bulunur.

5.10.1.Trigonometrik Fonksiyonların Grafik Çizimleri

1) Fonksiyonun periyodu bulunur,

2) Bulunan periyoda uygun aralık seçimi yapılır,

3) Seçilen aralıkta fonksiyonun değişimi incelenir ve değişim tablosu hazırlanır,

4) Değişim tablosuna göre fonksiyonun grafiği çizilir,

5) Periyot aralığında çizilen grafik aynen tekrarlanır.

1. $f(x)=\sin x$ fonksiyonunun grafiği

1) $f(x)=\sin x$

$\sin(x+k\pi)=\sin x \Rightarrow \quad p=2k\pi \Rightarrow \quad k\in z$

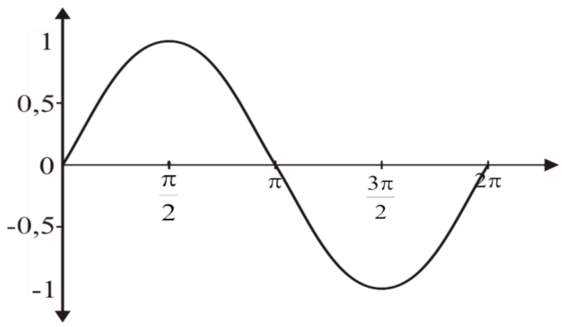
$k=1$ için 2π olduğundan $p=2\pi$

2) $[0,2\pi]$ uygun aralıktır.

3)

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
sinx	0	1	0	-1	0

4)



2. $f(x)=\cos x$ fonksiyonunun grafiği

1) $f(x)=\cos x$

$\cos(x+2k\pi)=\cos x \Rightarrow p=2k\pi \Rightarrow k\in z$

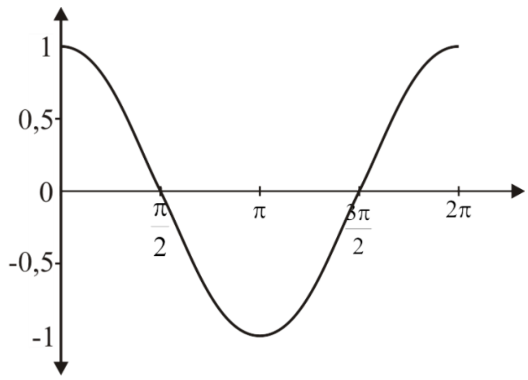
$k=1$ için 2π olduğundan $p=2\pi$

2) $[0,2\pi]$ uygun aralıktır.

3)

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
cosx	1	0	-1	0	1

4)



3. $f(x) = \tan x$ fonksiyonunun grafiği

1) $f(x) = \tan x$

$\tan(x + k\pi) = \tan x \Rightarrow p = k\pi \Rightarrow (k \in Z)$

$k = 1$ için π olduğundan $p = \pi$

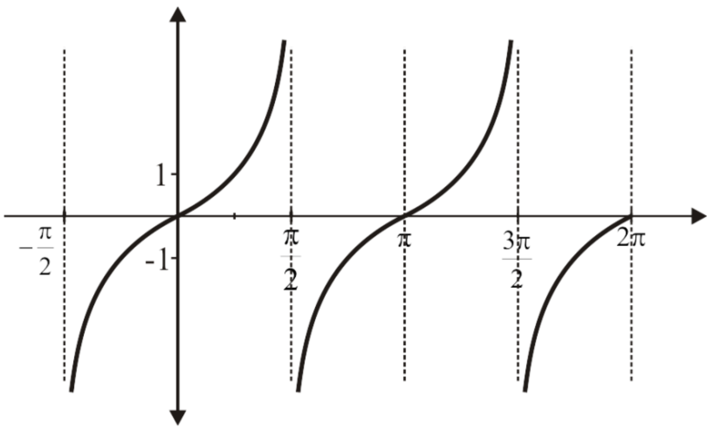
2) $x = \dfrac{\pi}{2}$ için $f(x) = \tan x$ fonksiyonu tanımsızdır.

Grafik $\dfrac{\pi}{2}$ doğrusunu kesmez. $[0, \pi] - \left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$ aralığında çizilir.

3)

x	0		$\pi/4$		$\pi/2$		$3\pi/4$		π
tanx	0	↗	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1	↗	0

4)



4. $f(x) = \cot x$ fonksiyonunun grafiği

1) $f(x) = \cot x$

$\cot(x + k\pi) = \cot x$ ise $p = k\pi$, ($k \in Z$)

$k = 1$ için π olduğundan $p = \pi$

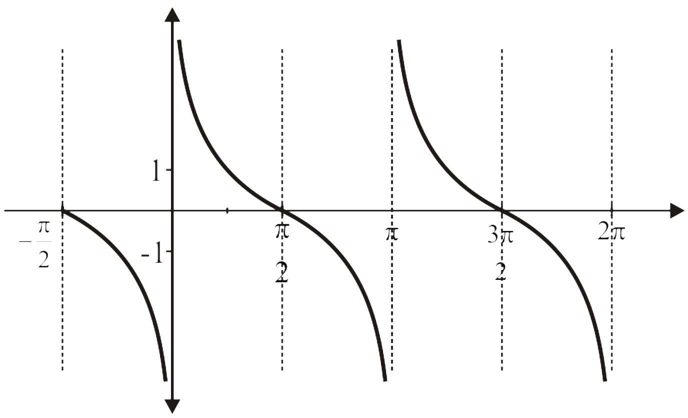
2) $x = 0$ ve $x = \pi$ için $f(x) = \cot x$ tanımsızdır.

Grafik $[0, \pi] - \{0, \pi\}$ aralığında çizilir.

3)

x	0		$\pi/4$		$\pi/2$		$3\pi/4$		π
cotanx	‖ $+\infty$	↘	1	↘	0	↘	-1	↘	$-\infty$ ‖

4)



5. $f(x) = \sec x$ fonksiyonunun grafiği

1) $f(x) = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ $p = 2\pi$

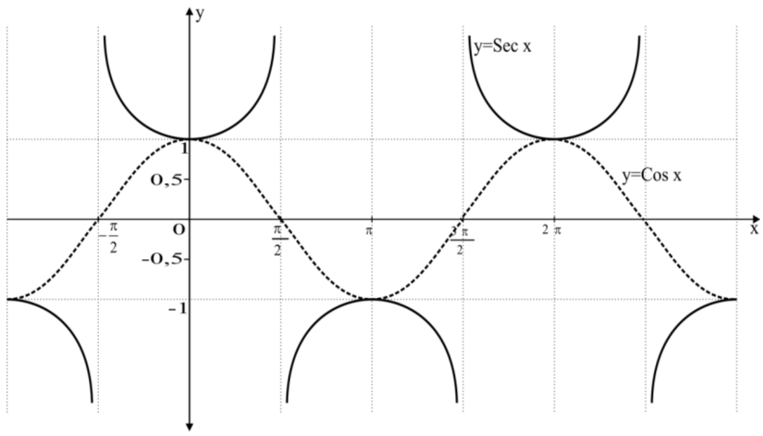
2) $x = \dfrac{\pi}{2}$ ve $x = \dfrac{3\pi}{2}$ için $f(x) = \sec x$ tanımsızdır.

Grafik $x = \dfrac{\pi}{2}$ ve $x = \dfrac{3\pi}{2}$ doğrularını kesmez. $[0, 2\pi] - \left\{\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right\}$ ’de çizilir.

3)

x	0		$\pi/2$		π		$3\pi/2$		2π
sec x	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

4)



6. $f(x)=\cos ecx$ fonksiyonunun grafiği

1) $f(x)=\cos ecx=\dfrac{1}{\cos x}$ $\qquad p=2\pi$

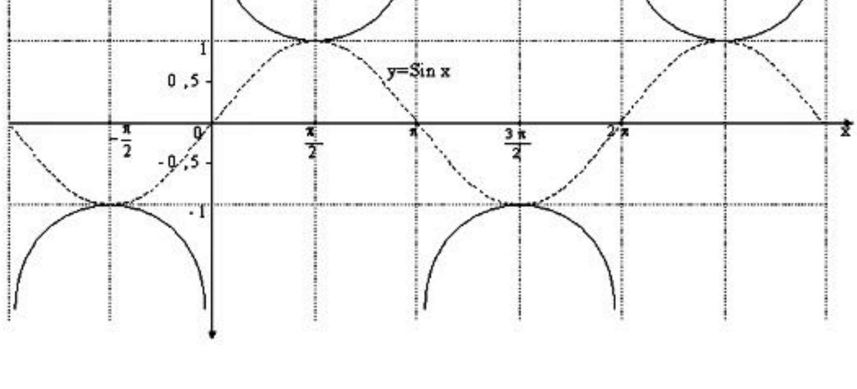
2) $x=0$, $x=\pi$ ve $x=2\pi$ için $f(x)=\cos ecx$ tanımsızdır.

Grafik $x=0$, $x=\pi$ ve $x=2\pi$ doğrularını kesmez. $[0,2\pi]-\{0,\pi,2\pi\}$ aralığında çizilir.

3)

x	0		$\pi/2$		π		$3\pi/2$		2π
cosec x	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖

4)



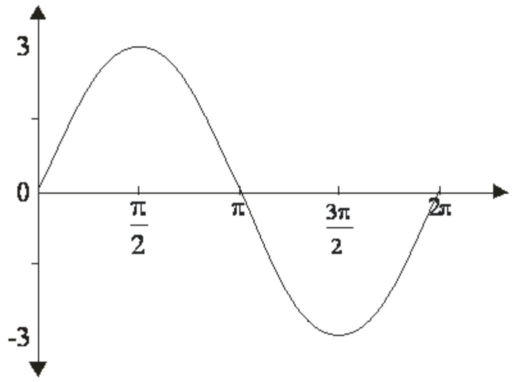
5.10.2. y=a.sinbx ve y=a.cosbx (a,b Є IR) grafikleri:

Genlik(Amplitude)= $\lvert a \rvert$	Periyod $= \dfrac{2\pi}{b}$	Frekans $= \dfrac{1}{\text{Periyod}} = \dfrac{b}{2\pi}$

Örnek: y=3sinx fonksiyonunun $[0,2\pi]$ aralığındaki grafiğini çiziniz.

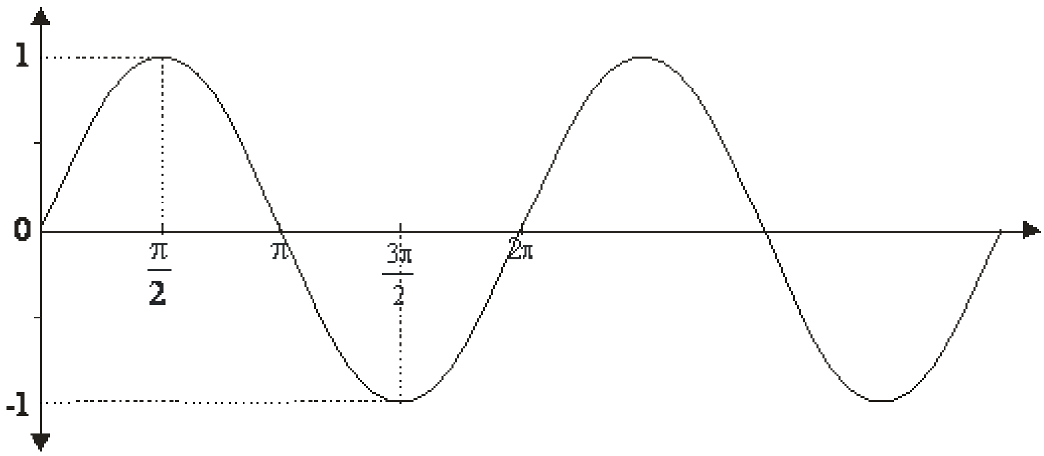
Periyot= 2π $\qquad$ $\lvert a \rvert = 3$

x	0	π / 6	π / 4	π / 3	π / 2	2π / 3	3π / 4	5π / 6	π
y=sinx	1	0.87	0.5	0	-0.5	-0.87	-1	-0.87	-0.5
y=3sinx	3	2.61	1.5	0	-1.5	-2.61	-3	-2.61	-1.5



Örnek: y=sin2x $\qquad \dfrac{2\pi}{2} = \pi$ (Periyod)

x	0	π / 6	π / 4	π / 3	π / 2	2π / 3	3π / 4	5π / 6	π
2x	0	π / 3	π / 2	2π / 3	π	4π / 3	3π / 2	5π / 3	2π
y=sin2x	0		1		0		-1		0

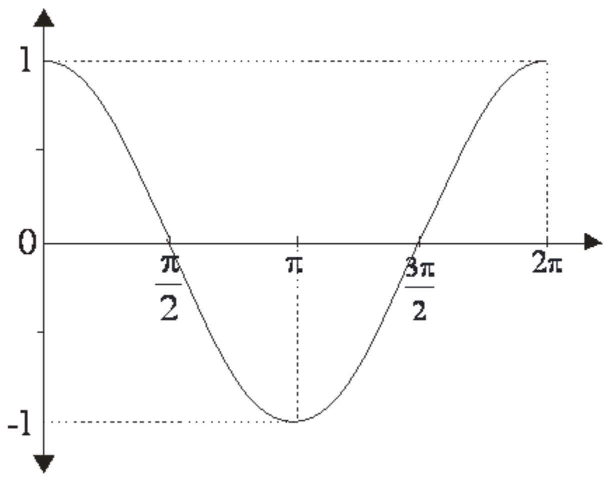


5.10.3. $y = a\sin(bx + \varphi)$ ve $y = a\cos(bx + \varphi)$ grafikleri :

Örnek: $y = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm:

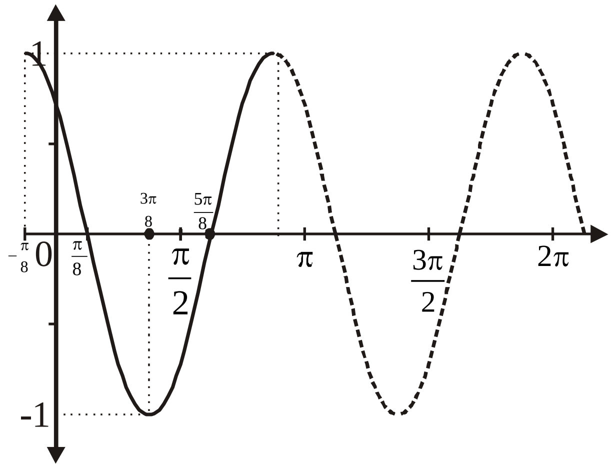
x	0	$\pi / 2$	π	$3\pi / 2$	2π
$x + \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$
$\sin(x + \frac{\pi}{2})$	1	0	-1	0	1



Örnek: $y = \cos(2x + \frac{\pi}{4})$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

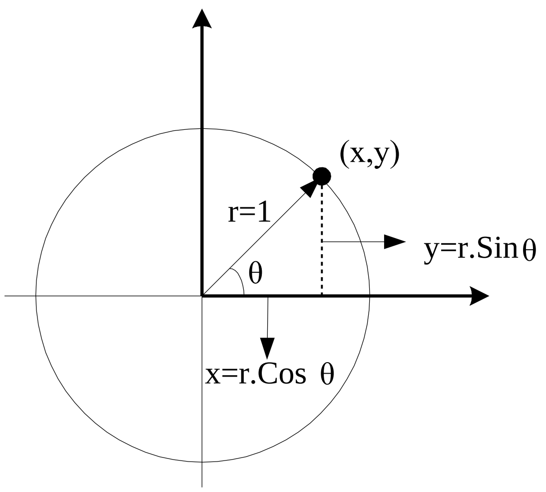
Çözüm:

2x	$-\pi / 8$	$\pi / 8$	$3\pi / 8$	$5\pi / 8$	$7\pi / 8$	$2\pi / 3$
$2x + \frac{\pi}{4}$	0	$\pi / 2$	π	$3\pi / 2$	2π	2π
$\cos(2x + \frac{\pi}{4})$	1	0	-1	0	1	0



5.11.Trigonometrik Özdeşlikler

i) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$



$$\sin\theta=\frac{y}{r}\ \text{ve}\ \cos\theta=\frac{x}{r}$$

$$\left.\begin{aligned} x&=r.\cos\theta\\ y&=r.\sin\theta \end{aligned}\right\}\ x^2+y^2=r^2$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} &r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta=r^2\\ &r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=r^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\cos^2\theta+\sin^2\theta=1}$$

ii)

$$\tan^2\theta+1=\sec^2\theta\Rightarrow\tan^2\theta=\sec^2\theta-1$$

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+1=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}=\sec^2\theta$$

iii)

$$\cot^2\theta+1=\operatorname{cosec}^2\theta\Rightarrow\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta-1$$

$$\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}+1=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{1}{\sin^2\theta}=\operatorname{cosec}^2\theta$$

iv) $\tan\theta.\operatorname{cosec}\theta=\sec\theta$

$$\sec^2\theta\ .\sin^2\theta\ +1=\sec^2\theta$$

$$\frac{1}{\cos^2\theta}.\sin^2\theta\ +1=\tan^2\theta\ +1=\sec^2\theta$$

$$\frac{1}{\cos^2\theta}(1-\cos^2\theta\ )+1=\frac{1}{\cos^2\theta}-1+1=\sec^2\theta$$

v) $\operatorname{cosec}x.\sec x-\cot x=\tan x$

vi) $\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$

$$\left(\frac{\sin\theta}{\sin\theta}\right).\left(\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)=\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta(1-\cos\theta)}=\frac{1-\cos^2\theta}{\sin\theta(1-\cos\theta)}$$

$$\frac{(1-\cos\theta).(1+\cos\theta)}{\sin\theta(1-\cos\theta)}=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\frac{\tan A+\cot A}{\tan A}=\sec^2 A.\cot^2 A$$

$$\frac{\tan A+\dfrac{1}{\tan A}}{\tan A}=\frac{\sec^2 A}{\tan^2 A}=\sec^2 A.\cot^2 A$$

vii) $\cos^2\theta-\sin^2\theta=\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Bu tür sorularda eşitliğin bir tarafından hareketle diğer tarafı elde edilir.

$$\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{1-\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{1+\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}=\frac{\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{\dfrac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}=\frac{(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{\cos^2\theta}\cdot\frac{\cos^2\theta}{1}=\cos^2\theta-\sin^2\theta \text{ olur.}$$

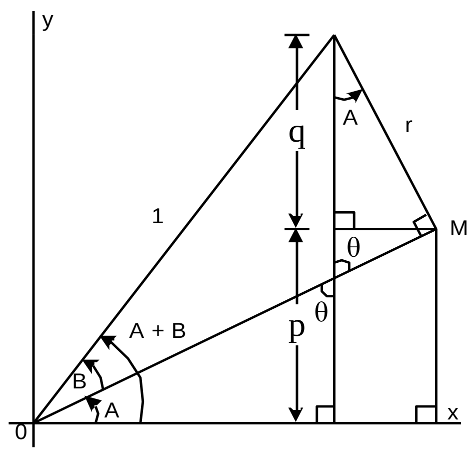
viii) $\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{\sin\theta.(1-\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}=\frac{\sin\theta(1-\cos\theta)}{\sin^2\theta}=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} \text{ olur.}$$

$(1-\cos\theta)$

5.11.1.Toplam ve Fark Formülleri



$$\sin A.\cos B+\cos A.\sin B=\left(\frac{P}{OM}\right).\left(\frac{OM}{1}\right)+\left(\frac{q}{r}\right).\left(\frac{r}{1}\right)=p+q$$

$$\sin(A+B)=\frac{p+q}{1}=p+q$$

$\sin A=\frac{P}{OM}\Rightarrow \quad \cos B=\frac{OM}{1}\Rightarrow \sin B=\frac{r}{1}\Rightarrow \quad \cos A=\frac{q}{r}$ öyleyse;

$$\sin(A+B)=\sin A.\cos B+CosA.\sin B$$

$$\sin[A+(-B)]=\sin A.\cos(-B)+\cos A.\sin B$$
$$=\sin A.(\cos B)+\cos A.\sin(-B)$$

$$\sin(A-B)=\sin A.\cos B-\cos A.\sin B$$

Benzer yollardan gidilirse;

$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B \qquad \cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$

$\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B} \qquad \tan(A-B)=\dfrac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$

$\cot(A+B)\dfrac{\cot A\cot B-1}{\cot A+\cot B} \qquad \cot(A-B)\dfrac{-\cot A\cot B-1}{\cot A-\cot B}$ şeklinde bulunabilir.

5.11.2.Yarım Açı Formülleri

sin2x=2sinx.Cosx $\qquad \sin\dfrac{x}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}$

$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x \qquad \cos\dfrac{x}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$

$\tan 2x=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x} \qquad \tan\dfrac{x}{2}=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

$\mathrm{Co}\tan 2x=\dfrac{\cot an^2 x-1}{2\mathrm{Co}\tan x} \qquad \mathrm{Co}\tan\dfrac{x}{2}=\dfrac{\mathrm{Sinx}}{1-\mathrm{Cosx}}=\dfrac{1+\mathrm{Cosx}}{\mathrm{Sinx}}$

Örnek : $\quad \cos x=-\dfrac{7}{9}\Rightarrow \sin\dfrac{x}{2}, \quad \cos\dfrac{x}{2}, \quad \tan\dfrac{x}{2}\ =\ ?$

Çözüm:

$$\sin\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{7}{9}}{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\Rightarrow$$

$$\cos\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{7}{9}}{2}}=\frac{1}{3}\text{ ve}$$

$\tan\frac{x}{2} = 2\sqrt{2}$ olarak bulunur.

5.11.3.Trigonometride İki Açının Toplamı veya Farkı İçin Örnekler

Örnek: Aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız.

a) $\sin 105^\circ$ **b)** $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 15^\circ - \frac{1}{2}\sin 15^\circ$ **c)** $\cos^2 75^\circ - \sin^2 75^\circ$ **d)** $\sin 18^\circ.\cos 12^\circ + \cos 18^\circ \sin 12^\circ$

Çözüm:

a) $\sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ) = \sin 60^\circ.\cos 45^\circ + \cos 60^\circ.\sin 45^\circ$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

b) $\frac{\sqrt{3}}{2}.\cos 15^\circ - \frac{1}{2}.\sin 15^\circ = \cos 30^\circ.\cos 15^\circ - \sin 30^\circ.\sin 15^\circ = \cos(30^\circ + 15^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\cos^2 75^\circ - \sin^2 75^\circ = \cos 75^\circ.\cos 75^\circ - \sin 75^\circ.\sin 75^\circ = \cos(75^\circ + 75^\circ) = \cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\sin 18^\circ.\cos 12^\circ + \cos 18^\circ.\sin 12^\circ = \sin(18^\circ + 12^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

5.11.3.1.Yarım Açı Örnekleri

Aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız.

Örnek: 1)a) $\frac{\sin 36^\circ}{\sin 12^\circ} - \frac{\cos 36^\circ}{\cos 12^\circ} = ?$ **b)** $\sin\frac{\pi}{24}.\cos\frac{\pi}{24}.\cos\frac{\pi}{12} = ?$

2) a) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ve $\sin x = \frac{3}{4}$ ise $\sin 2x$ 'in değeri nedir?

b) $\sin 37^\circ = 0,6$ ise $\cos 16^\circ$ 'yi hesaplayınız.

c) $\tan 2x = \frac{4}{3}$ ise $\tan x$ değerlerini bulunuz.

Çözümler:1) a) $\frac{\sin 36^\circ}{\sin 12^\circ} - \frac{\cos 36^\circ}{\cos 12^\circ} = \frac{\sin 36^\circ.\cos 12^\circ - \cos 36^\circ.\sin 12^\circ}{\sin 12^\circ.\cos 12^\circ}$

$$= \frac{\sin(36^\circ - 12^\circ)}{\frac{1}{2}\cdot\sin 24^\circ} = \frac{\sin 24^\circ}{\frac{1}{2}\cdot\sin 24^\circ} = 2$$

b) $\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{24}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

2) a) $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $\sin x = \frac{3}{4}$ verilenlere göre istenenleri hesaplayalım.

$$\sin 2x = 2\sin x.\cos x = 2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

b) $\sin 37^\circ = 0,6$

$$\cos 16^\circ = \sin 74^\circ = 2.\sin 37.\cos 37 = 2\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{8}{10} = 0,96$$

c) $\tan 2x = \frac{4}{3} \Rightarrow \tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} \longrightarrow \tan x = t \;\; \frac{4}{3} = \frac{2.t}{1-t^2} \Rightarrow 4-4t^2 = 6t$

$$\begin{matrix} 2t^2+3t-2=0 \\ (2t-1)\cdot(t+2)=0 \end{matrix} \Rightarrow t_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow t_2 = -2$$

$$\tan x = \frac{1}{2} \Rightarrow \quad \tan x = -2$$

5.11.3.2.Dönüşüm Örnekleri (Çarpım)

Aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız.

1) a) $\tan 255^\circ + \tan 15^\circ$ **b)** $\frac{\sin 50^\circ + \sin 10^\circ}{\sin 40^\circ}$ **c)** $\frac{\sin 48^\circ + \sin 12^\circ}{\cos 48^\circ + \cos 12^\circ}$ **d)** $\cos 36^\circ - \cos 72^\circ$

2)(Ters Dönüşüm)

a) $\frac{\cos 50^\circ.\cos 40^\circ}{\sin 80^\circ}$ **b)** $2\sin 45^\circ.\cos 15^\circ$ **c)** $\cos 20^\circ.\cos 40^\circ.\cos 60^\circ.\cos 80^\circ$

Çözümler:

1) a) $\tan 255^\circ + \tan 15^\circ = \frac{\sin 255^\circ}{\cos 255^\circ} + \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{\sin 255^\circ.\cos 15^\circ + \sin 15^\circ.\cos 255^\circ}{\cos 255^\circ.\cos 15^\circ}$

$$= \frac{\sin(255^\circ + 15^\circ)}{\cos(270^\circ - 15^\circ).\cos 15^\circ} = \frac{\sin 270^\circ}{-\sin 15^\circ.\cos 15^\circ} = \frac{-1}{-\frac{1}{2}\cdot\sin 30^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = 4$$

b) $\frac{\sin 50^\circ + \sin 10^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{2.\sin\left(\frac{50^\circ + 10^\circ}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{50^\circ - 10^\circ}{2}\right)}{\sin 40^\circ} = \frac{2\sin 30^\circ.\cos 20^\circ}{2\sin 20^\circ.\cos 20^\circ}$

$$= \frac{2\cdot\frac{1}{2}\cdot 1}{2.\sin 20^\circ} = \frac{1}{2.\sin 20^\circ}$$

c) $\frac{\sin 48^\circ + \sin 12^\circ}{\cos 48^\circ + \cos 12^\circ} = \frac{2\sin 30^\circ.\cos 18^\circ}{2\cos 30^\circ.\cos 18^\circ} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

d) $\cos 36^\circ - \cos 72^\circ = -2\sin\left(\frac{36^\circ + 72^\circ}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{36^\circ - 72^\circ}{2}\right)$

$$= -2\sin 54^\circ.\sin\left(-18^\circ\right) = \frac{2\sin 18^\circ.\cos 18^\circ.\cos 36^\circ}{\cos 18^\circ} = \frac{\sin 36^\circ.\cos 36^\circ}{\cos 18^\circ} = \frac{\frac{1}{2}\sin 72^\circ}{\sin 72^\circ} = \frac{1}{2}$$

2) a) $\dfrac{\cos 50^\circ.\cos 40^\circ}{\sin 80^\circ} = \dfrac{\frac{1}{2}\left[\cos 90^\circ + \cos 10^\circ\right]}{\sin 80^\circ} = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot\cos 10^\circ}{\cos 10^\circ} = \dfrac{1}{2}$

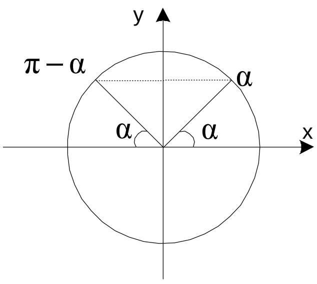
b) $2\sin 45^\circ \cos 15^\circ = 2\cos 45^\circ \cos 15^\circ = 2\cdot\dfrac{1}{2}\left[\cos 60^\circ + \cos 30^\circ\right] = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

c) $\cos 20^\circ.\cos 40^\circ.\cos 60^\circ.\cos 80^\circ = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\cos 20^\circ.\sin 20^\circ.\cos 40^\circ.\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}\cdot\sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\frac{1}{2}\cdot\sin 80^\circ.\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{1}{8}\cdot\frac{\frac{1}{2}.\sin 160^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{1}{16}\cdot\frac{\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{1}{16}$$

5.12.Trigonometrik Denklemlerin Çözümleri

1. $[0,2\pi]$ olmak üzere $\sin x = \sin\alpha$ denkleminin çözümü:



$\left[0,2\pi\right]$ aralığında sinüsü $\sin\alpha$ olan iki açı vardır. Birinci açı α, diğeri ise ($\pi-\alpha$)'dır. Genel çözüm elde etmek için her birine $k\in Z$ olmak üzere $2k\pi$ eklenir.

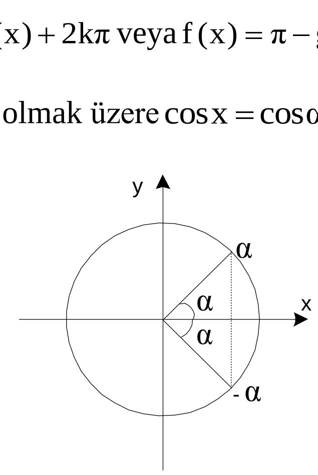
$\sin x = \sin\alpha = \sin(\pi-\alpha)$

$x_1 = \alpha + 2k\pi$ veya $x_2 = \pi - \alpha + 2k\pi \qquad k\in Z$

Genel olarak, $k\in Z$ olmak üzere; $\sin f(x) = \sin g(x)$

$f(x) = g(x) + 2k\pi$ veya $f(x) = \pi - g(x) + 2k\pi$ eşitliklerini sağlayan $x\in R$ değerler kümesidir.

2. $\left[0,2\pi\right)$ olmak üzere $\cos x = \cos\alpha$ denklemlerinin çözümü:



$\left[0,2\pi\right)$ aralığında kosinüsü $\cos\alpha$ olan iki açı vardır. Birinci açı α diğeri ise $-\alpha$ 'dır. Genel çözüm elde etmek için her birine $k\in Z$ olmak üzere $2k\pi$ eklenir.

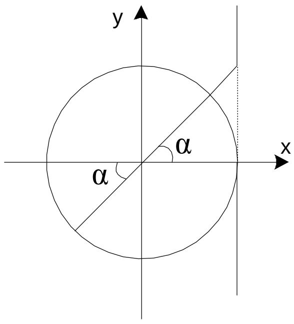
$\cos x = \cos\alpha = \cos(-\alpha)$

$x_1 = \alpha + 2k\pi$ veya $x_2 = -\alpha + 2k\pi \qquad k\in Z$

Genel olarak, $k \in Z$ olmak üzere; $\cos f(x) = \cos g(x)$

$f(x) = g(x) + 2k\pi$ veya $f(x) = -g(x) + 2k\pi$ eşitliklerini sağlayan $x \in R$ değerlerinin kümesidir.

3. $[0,2\pi)$ olmak üzere $\tan x = \tan \alpha$ denklemlerinin çözümü:

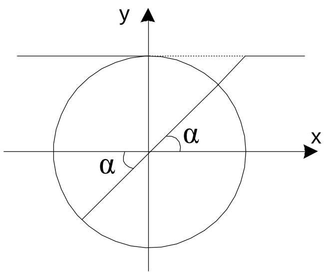


$[0,2\pi)$ aralığında tanjantı, $\tan \alpha$ olan iki açı vardır. Birinci açı α, diğeri ise $(\pi + \alpha)$'dır. Burada iki açı arasında π kadar fark olduğundan α'ya $k \in Z$ olmak üzere $k\pi$ eklenerek genel çözüm bulunur.

$\tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = \alpha + k\pi \quad k \in Z$

Genel olarak, $k \in Z$ olmak üzere; $\tan f(x) = \tan g(x) \Rightarrow f(x) = g(x) + k\pi$ 'dır.

4. $[0,2\pi)$ olmak üzere $\cot x = \cot \alpha$ denklemlerinin çözümü:



$[0,2\pi)$ aralığında kotanjantı, $\cot \alpha$ olan iki açı vardır. Birinci açı α, diğeri ise $(\pi + \alpha)$'dır. α ile $(\pi + \alpha)$ arasında π kadar fark olduğundan α'ya $k \in Z$ olmak üzere $k\pi$ eklenerek genel çözüm bulunur.

$\cot x = \cot \alpha \Rightarrow x = \alpha + k\pi \quad k \in Z$

Genel olarak, $k \in Z$ olmak üzere; $\cot f(x) = \cot g(x) \Rightarrow f(x) = g(x) + k\pi$ 'dır.

Örnek: Aşağıdaki trigonometrik denklemleri çözünüz.

a) $\text{Sin } 2x = \frac{1}{2}$ b) $\text{Cos } x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\tan 3x . \tan 2x = 1$

Çözüm : a) $\text{Sin } 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Sin } 2x = \text{Sin}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \text{Sin}\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow$

$$2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{veya} \quad 2x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k \Rightarrow Ç = \left\{ x \middle| x_1 = \frac{\pi}{12} + k \quad \text{veya} \quad x_2 = \frac{5\pi}{12} + k \ , \ k \in Z \right\}$$

$$\text{b) } \text{Cos}x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{Cos}x = \text{Cos}\frac{\pi}{6} = \text{Cos}\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k \quad \text{veya} \quad x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2k$$

$$Ç = \left\{ x \middle| x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{veya} \quad x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ , \ k \in Z \right\}$$

c) $\tan 3x \tan 2x = 1 \Rightarrow \tan 3x = \dfrac{1}{\tan 2x} \Rightarrow \tan 3x = \cot 2x \Rightarrow \tan 3x = \left(\tan \dfrac{\pi}{2} - 2x\right)$

$3x = \dfrac{\pi}{2} - 2x + 2\pi \Rightarrow 5x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{k\pi}{5} \quad , \quad k \in Z \Rightarrow = \left\{ x \middle| x_1 = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{k\pi}{5} \;\; , \;\; k \in Z \right\}$

Örnek: $\tan\left(3x + \dfrac{\pi}{8}\right) = -\tan\left(x - \dfrac{\pi}{12}\right)$ denklemini çözünüz.

Çözüm: $\tan f(x) = \tan g(x) \Rightarrow f(x) = k\pi + g(x)$ kök formülü uygulanırsa;

$\tan\left(3x + \dfrac{\pi}{8}\right) = \tan\left(-x + \dfrac{\pi}{12}\right) \Rightarrow 3x + \dfrac{\pi}{8} = k\pi + \left(-x + \dfrac{\pi}{12}\right)$

$\Rightarrow 4x = k\pi - \dfrac{\pi}{24} \Rightarrow Ç = \left\{ x \mid x = \dfrac{k\pi}{4} - \dfrac{\pi}{96}, k \in Z \right\}$

Örnek: $\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ denklemini çözelim.

Çözüm: $\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3} + \pi\right)$ olur. (- içeri alınırken cosinüslü ifadelerde π eklenir.)

$\cos f(x) = \cos g(x) \Rightarrow f(x) = 2k\pi \mp g(x)$ olur.

$2x + \dfrac{\pi}{3} = 2k\pi \mp \left(x - \dfrac{\pi}{3} + \pi\right)$

$2x + \dfrac{\pi}{3} = 2k\pi \mp \left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right)$

$2x + \dfrac{\pi}{3} = 2k\pi + \left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right) \rightarrow x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{3}$

$2x + \dfrac{\pi}{3} = 2k\pi - \left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right) \rightarrow x = \dfrac{2k\pi}{3} - \dfrac{\pi}{3}$

$Ç = \left\{ x \mid x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{3} \vee x = \dfrac{2k\pi}{3} - \dfrac{\pi}{3}, k \in Z \right\}$

Örnek: $2\cos^2 x = 1 + \sin x$ denklemini çözelim.

Çözüm: Bu tip denklemlerde her iki taraf aynı fonksiyon cinsinden yazılır. Burada $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ yazılabilir.

$2(1 - \sin^2 x) = 1 + \sin x \Rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ sinx=t dersek.

$2t^2 + t - 1 = 0 \Rightarrow (2t-1)(t+1) = 0 \Rightarrow 2t = 1 \Rightarrow t_1 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow t + 1 = 0 \Rightarrow t_2 = -1$

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin f(x) = \sin g(x) \Rightarrow f(x) = 2k\pi + g(x) \\ \sin f(x) = \sin g(x) \Rightarrow f(x) = 2k\pi + (\pi - g(x)) \end{array}}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow Ç_1 = \left\{ x \mid x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} V x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, k \in Z \right\}$$

Ç=Ç$_1$∪Ç$_2$

$$\sin x = -1 \Rightarrow Ç_2 = \left\{ x \mid x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in Z \right\}$$

Örnek: Secx = 4Cosx denklemini çözünüz.

Çözüm: $\sec x = 4\cos x \Rightarrow \frac{1}{\cos x} = 4\cos x \Rightarrow 1 = 4\cos^2 x \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos x = \mp\frac{1}{2}$

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow Ç_1 = \left\{ x \mid x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi V x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z \right\}$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow Ç_2 = \left\{ x \mid x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi V x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z \right\}$$

Örnek: $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm: cosx=t dersek. $\begin{matrix} 2t^2 - 3t + 1 = 0 \\ (2t-1)(t-1) = 0 \end{matrix} \Rightarrow t_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow t_2=1$

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \mp \frac{\pi}{3} \Rightarrow Ç_1 = \left\{ x \mid x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} V x = 2k\pi + \frac{5\pi}{3} \right\}$$

$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi \Rightarrow Ç_2 = \{ x \mid x = 2k\pi, k \in z \}$$

Örnek: $\sin 6x + 2\sin 4x + \sin 2x = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm:

$$\sin 6x + \sin 2x = 2.\sin\left(\frac{6x+2x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{6x-2x}{2}\right) = 2\sin 4x.\cos 2x$$

$$2\sin 4x.\cos 2x + 2\sin 4x = 2\sin 4x(\cos 2x + 1) = 0$$

$$2\sin 4x = 0 \Rightarrow \sin 4x = 0 \Rightarrow \sin 4x = \sin k\pi \Rightarrow 4x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4}$$

$$\cos 2x = -1 \Rightarrow \cos 2x = \cos\pi \Rightarrow 2x = 2k\pi \mp \pi \Rightarrow x = k\pi \mp \frac{\pi}{2}$$

$$Ç = \left\{ x \mid x = \frac{k\pi}{4} V x = k\pi \mp \frac{\pi}{2}, k \in Z \right\}$$

bulunur.

Örnek: $\sin x + \sqrt{3}.\cos x = 1$ denklemini çözünüz.

Çözüm:

$$\left.\begin{matrix} \cos x + a\sin x = b \\ \text{veya} \\ a\cos x + \sin x = b \end{matrix}\right\} \text{şeklindeki denklemlerde } a=\tan\theta \text{ yazılır.}$$

Bu örnekte; $\sqrt{3}=\tan 60^{\circ}$ yazılır.

$\sin x+\tan 60^{\circ}.\cos x=1$

$\Rightarrow \sin x+\dfrac{\sin 60}{\cos 60}\cdot\cos x=1\Rightarrow \sin x.\cos 60+\cos x.\sin 60=\cos 60\Rightarrow \sin(x+60)=\dfrac{1}{2}$

$x+60=2k\pi+\dfrac{\pi}{6}\Rightarrow \sin(x+60)=\sin\dfrac{\pi}{6}$

$x=2k\pi-\dfrac{\pi}{6}\qquad \Rightarrow \sin(x+60)=\sin\dfrac{5\pi}{6}$

$x+60=2k\pi+\dfrac{9\pi}{6}\Rightarrow x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}Ç=\left\{x\mid x=2k\pi-\dfrac{\pi}{6}Vx=2k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in Z\right\}$

Örnek: $\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x=2$ denklemini çözelim.

Çözüm:

$\sqrt{3}=\tan\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow \tan\dfrac{\pi}{3}\cdot\cos 2x+\sin 2x=2$

$\dfrac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}\cdot\cos 2x+\sin 2x=2\Rightarrow \sin\dfrac{\pi}{3}\cdot\cos 2x+\cos\dfrac{\pi}{3}\cdot\sin 2x=2\cos\dfrac{\pi}{3}$

$\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=2\cdot\dfrac{1}{2}\Rightarrow \sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=1\Rightarrow \sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\dfrac{\pi}{2}$

$2x+\dfrac{\pi}{3}=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\rightarrow Ç_1$

$2x+\dfrac{\pi}{3}=2k\pi+\pi-\dfrac{\pi}{2}\rightarrow Ç_2$

$Ç=Ç_1\cup Ç_2=\left\{x\mid x=k\pi+\dfrac{\pi}{12},k\in Z\right\}$

Örnek: $2\sin x-\sec x=0$ denklemini çözünüz.

Çözüm:

$2\sin x-\dfrac{1}{\cos x}=0\Rightarrow 2\sin x\cos x-1=0$

$\Rightarrow \sin 2x-1=0\Rightarrow \sin 2x=1\Rightarrow \sin 2x=\sin\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow 2x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow 2x=2k\pi+\pi-\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow x=k\pi+\dfrac{\pi}{4}\rightarrow Ç=\left\{x\mid x=k\pi+\dfrac{\pi}{4},k\in Z\right\}$

Örnek: $\cot x + \dfrac{\sin x}{1+\cos x} = 2$ denklemini çözünüz.

Çözüm:

$$\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1+\cos x} = 2 \Rightarrow \frac{(1+\cos x)\cos x + \sin x.\sin x}{\sin x(1+\cos x)} = 2$$

$$\Rightarrow \cos^2 x + \cos x + \sin^2 x = 2\sin x + 2\sin x\cos x \Rightarrow \cos^2 x + \sin^2 x + \cos x = 2\sin x + 2\sin x\cos x$$

$$\Rightarrow \frac{1+\cos x}{\sin x(1+\cos x)} = 2 \Rightarrow \frac{1}{\sin x} = 2 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow Ç = \left\{ x \mid x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} V x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \right\}$$

5.13.Toplam ve Çarpım Formülleri

i) Toplamın Çarpıma Dönüştürülmesi

$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}$$
$$\sin A - \sin B = 2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$
$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}$$
$$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}.\sin\frac{A-B}{2}$$

ii) Çarpımın Toplama Dönüştürülmesi

$$\sin A.\cos B = \frac{1}{2}\left[\sin(A+B) + \sin(A-B)\right]$$
$$\cos A.\cos B = \frac{1}{2}\left[\cos(A+B) + \cos(A-B)\right]$$
$$\sin A.\sin B = -\frac{1}{2}\left[\cos(A+B) - \cos(A-B)\right]$$

5.14.Trigonometrik Eşitlikler

1)

$\forall \theta \in R$ için;

$$\sin\theta = \sin(2k\pi + \theta)$$
$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$
$$\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta$$
$$\sin(\frac{\pi}{2} + \theta) = \cos\theta$$
$$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$$
$$\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$$
$$\sin(\frac{3\pi}{2} - \theta) = -\cos\theta$$
$$\sin(\frac{3\pi}{2} + \theta) = -\cos\theta$$

2)

$\forall \theta \in R$ için;

$$\cos\theta = \cos(2k\pi + \theta)$$
$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$
$$\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta$$
$$\cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\sin\theta$$
$$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$$
$$\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$$
$$\cos(\frac{3\pi}{2} - \theta) = -\sin\theta$$
$$\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) = \sin\theta$$

3)

$$\forall\theta \in R \text{ için} ;\ \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\pi$$

$$k \in Z \text{ için} ,$$

$$\tan\theta = \tan(2k\pi + \theta)$$

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta$$

$$\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cot\theta$$

$$\tan(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\cot\theta$$

$$\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$$

$$\tan(\pi + \theta) = \tan\theta$$

$$\tan(\frac{3\pi}{2} - \theta) = \cot\theta$$

$$\tan(\frac{3\pi}{2} + \theta) = -\cos\theta$$

4)

$$\forall\theta \in R \text{ için} ;\ \theta = k\pi,$$

$$k \in Z \text{ için} ,$$

$$\cot\theta = \cot(2k\pi + \theta)$$

$$\cot(-\theta) = -\cot\theta$$

$$\cot(\frac{\pi}{2} - \theta) = \tan\theta$$

$$\cot(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\tan\theta$$

$$\cot(\pi - \theta) = -\cot\theta$$

$$\cot(\pi + \theta) = \cot\theta$$

$$\cot(\frac{3\pi}{2} - \theta) = \tan\theta$$

$$\cot(\frac{3\pi}{2} + \theta) = -\tan\theta$$

5.15.Ters Trigonometrik Fonksiyonlar

Bir fonksiyonun tersinin olabilmesi için bire-bir ve örten olması gerekir. Fakat trigonometrik fonksiyonlar R den R ye bire-bir ve örten değildir. Bu nedenle, tanım kümeleri R olarak seçilirse, bu fonksiyonların bire-bir ve örten oldukları alt kümeler seçilerek ters trigonometrik fonksiyonlar tanımlanabilir.

1) Arcsinx fonksiyonu

Sinüs fonksiyonu, $\text{IR} \rightarrow [-1,1]$ örten fakat bire-bir olmayan bir fonksiyondur. Bu fonksiyonun tanım aralığı $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ alırsak bire-bir ve örten olur.

$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1,1]$, $\quad f(x) = \sin x$ fonksiyonunun ters fonksiyonu

$f^{-1}(x) = \sin^{-1} x$ veya $f^{-1} = Arc\sin x$ şeklinde gösterilir.

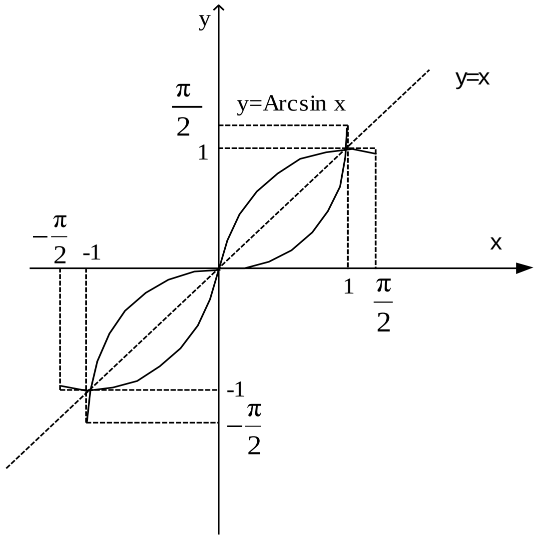
$Arc\sin : [-1,1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dir.

$y = f(x) = \sin x \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = \sin^{-1} y$ ise $x = Arc\sin y$

Ters fonksiyonda x ile y yer değiştirilirse,

$y = Arc\sin x$ bulunur. Arcsinx fonksiyonunun grafiği :

Arcsinx fonksiyonunun grafiği y = sin x fonksiyonunun $y = x$ doğrusuna göre simetriğidir.



2) Arccosx fonksiyonu

Kosinüs fonksiyonu, $IR \rightarrow [-1,1]$ örten fakat birebir olmayan bir fonksiyondur.

Bu fonksiyonun tanım aralığını $[0,\pi]$ alırsak, birebir ve örten olur.

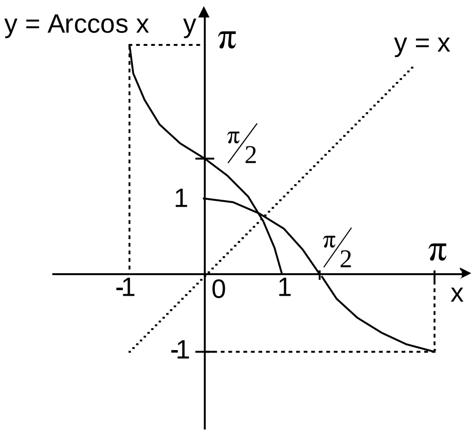
$f:[0,\pi] \rightarrow [-1,1]$ $f(x) = \cos x$ fonksiyonunun ters fonksiyonu

$f^{-1}(x) = \cos^{-1} x$ veya $f^{-1}(x) = Arc\cos^{-1} x$ şeklinde gösterilir.

$\text{Arc}\cos : [-1,1] \rightarrow [0,p]$ dir. $y = f(x) = \cos x \Leftrightarrow x = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = Arc\cos y$

Ters fonksiyonda x ile y yer değiştirirse $y = Arc\cos x$ olur.

Arccosx fonksiyonun grafiği:



Arccosx fonksiyonunun grafiği $y = \cos x$ fonksiyonunun $y = x$ doğrusuna göre simetriğidir.

3) Arctanx fonksiyonu

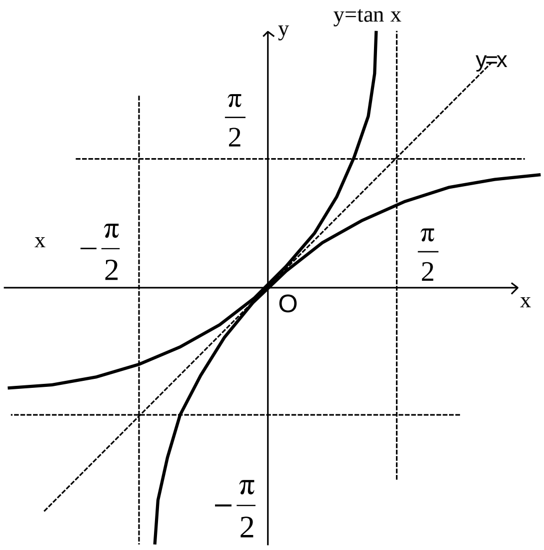
Tanjant fonksiyonunun tanım kümesini $\mathrm{IR} \rightarrow \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z \right\}$ ve değer kümesini , R alırsak bu fonksiyon birebir ve örten olmaz. Bu fonksiyonun tanım aralığını $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ alırsak, birebir ve örten olur.

$f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \rightarrow \mathrm{IR}$, $f(x) = \tan x$ fonksiyonunun ters fonksiyonu $f^{-1}(x) = \tan^{-1} x$ veya $f^{-1}(x) = Arc\tan x$ şeklinde gösterilir.

$Arc\tan : \mathrm{IR} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ dir.

$y = f(x) = \tan x \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = \tan^{-1} y \quad \Leftrightarrow x = Arc\tan y$

Ters fonksiyonda x ile y yer değiştirirse, $y = Arc\tan x$ olur.



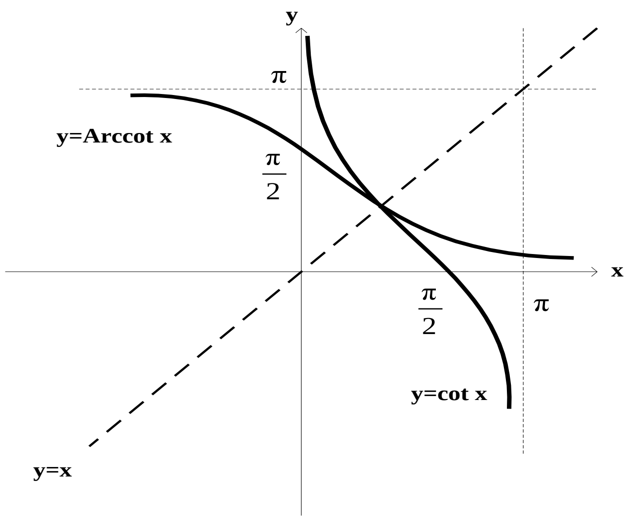
Arctanjant fonksiyonun grafiği tanjant fonksiyonunun grafiğinin $y = x$ doğrusuna göre simetriğidir.

4) Arccotanx fonksiyonu : Kotanjant fonksiyonunun bire bir ve örten olduğu aralıklardan biri $(0,\pi)$ aralığıdır. Bu nedenle , $f : (0,\pi) \rightarrow \mathrm{IR}$, $f(x) = \cot x$ fonksiyonun ters fonksiyonu;

$f^{-1}(x) = \cot^{-1} x$ veya $f^{-1}(x) = Arc\cot x \Rightarrow Arc\cot : \mathrm{IR} \rightarrow (0,\pi)$dir.

$$y = f(x) = \cot x \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = \cot^{-1} y \Leftrightarrow x = Arc\cot y$$

Ters fonksiyonda x ile y yer değiştirirse, $y = Arc\cot x$ olur. Arccotanjant fonksiyonun grafiği:



Arccotanjant fonksiyonun grafiği cotanjant grafiğinin $y = x$ doğrusuna göre simetriğidir.

Örnekler:

1) Aşağıdaki değerleri bulunuz.

a) $Arc\sin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ **b)** $Arc\cos\left(\frac{1}{2}\right)$ **c)** $Arc\tan(-1)$ **d)** $Arc\cot\left(-\sqrt{3}\right)$

Çözüm: a) $Arc\sin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\right) = x \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin x$

$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ aralığında bulunan ve sinüsü $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$'den açının ölçüsü $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$'dür. $x = -\frac{\pi}{4}$

olur. Yani, $Arc\sin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\right) = -\frac{\pi}{4}$

b) $Arc\cos\left(\frac{1}{2}\right) = x \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \cos x$

$[0,\pi]$ aralığında bulunan ve kosinüsü $\left(\frac{1}{2}\right)$ olan açının ölçüsü $\left(\frac{\pi}{3}\right)$'tür.

$x = \frac{\pi}{3}$ yani, $Arc\cos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$

c) $Arc\tan(-1) = x \Leftrightarrow -1 = \tan x$

$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ aralığında bulunan ve tanjantı (-1) olan açının ölçüsü $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$'dür. $x = \left(-\frac{\pi}{4}\right)$

yani $Arc\tan(-1) = -\frac{\pi}{4}$

d) $Arc\cot\left(-\sqrt{3}\right)=x \Leftrightarrow \left(-\sqrt{3}\right)=\cot x \Rightarrow (0,\pi)$ aralığında bulunan ve kotanjantı $-\sqrt{3}$ olan açının ölçüsü $\left(\frac{5\pi}{6}\right)$'dır. $x=\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ yani $Arc\cot\left(-\sqrt{3}\right)=\frac{5\pi}{6}$

2) $Arc\tan\left(\frac{3}{4}\right)=x$ ise $\sin x+\cos x$ ifadesinin eşitini bulunuz.

Çözüm: $Arc\tan\left(\frac{3}{4}\right)=x \Rightarrow \tan x=\frac{3}{4}$ olduğundan istenenler hesaplanırsa;

$$\sin x=\frac{3}{5}, \cos x=\frac{4}{5} \quad \Rightarrow \sin x+\cos x=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}=\frac{7}{5} \text{ bulunur.}$$

3) $Arc\tan 3+Arc\cot\left(\frac{1}{2}\right)$ toplamının değerini bulunuz.

Çözüm: $Arc\tan 3=\alpha \Leftrightarrow \tan\alpha=3$

$$Arc\cot\left(\frac{1}{2}\right)=\beta \Leftrightarrow \cot\beta=\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \tan\beta=2$$

Buna göre; $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-(\tan\alpha.\tan\beta)}=\dfrac{3+2}{1-(3.2)}=-1$

$$\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}. \text{ O halde } Arc\tan 3+Arc\cot\left(\frac{1}{2}\right)=\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4} \text{ tür.}$$

4) $\sin(2\text{Arctg}7)=?$

Çözüm:

$$\sin(2\text{Arctg}7)=\sin 2x$$

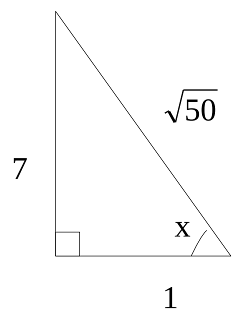
$$\sin 2x=2\sin x\cos x$$

$\text{Arcg}7=x$

$\text{tg}(\text{Arctg}7)=\text{tgx} \Rightarrow \sin 2x=2\cdot\frac{7}{\sqrt{50}}\cdot\frac{1}{\sqrt{50}} \Rightarrow$

$7=\text{tgx}$

$$\sin(2\text{Arctg}7)=\frac{7}{25}$$

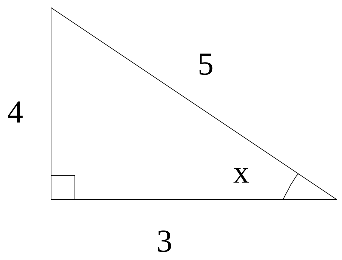


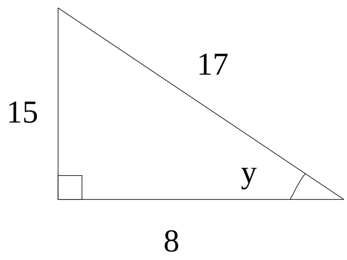
5) $A=\sin\left(\text{Arcsin}\frac{3}{5}+\arccos\frac{8}{17}\right) \Rightarrow A=?$

Çözüm: $\sin(x + y) = \sin x.\cos y + \cos x.\sin y$

$$\mathrm{Sin}\cdot\mathrm{Arc}\sin\frac{3}{5} = \mathrm{Sin}\,x \Rightarrow \frac{3}{5} = \mathrm{Sin}\,x \quad \text{ve} \quad \mathrm{Cos}\cdot\mathrm{Arc}\cos\frac{8}{17} = \mathrm{Cos}\,y \Rightarrow \frac{8}{17} = \mathrm{Cos}\,y$$

$$\mathrm{Sin}(x+y) = \frac{3}{5}\cdot\frac{8}{17} + \frac{4}{5}\cdot\frac{15}{17} \Rightarrow \mathrm{Sin}(x+y) = \frac{24+60}{85} = \frac{84}{85}$$





ALIŞTIRMALAR

1. 72 derece kaç grad'dır?

2. 16 grad kaç radyandır?

3. –1320 derecenin esas ölçüsü nedir?

4. –900 grad'ın esas ölçüsü kaç radyandır?

5. $\frac{45\pi}{8}$ radyanın esas ölçüsü kaç radyandır?

6. $\frac{-23\pi}{8}$ radyanının esas ölçüsü kaç grad'dır?

7. $4\cos\pi + 3\sin\frac{3\pi}{2} - 5$ ifadesinin sayısal değeri nedir?

8. f(x)=cotg x fonksiyonunun tanım cümlesi nedir?

9. f(x)=(5-sinx)(8+sinx) ise f(x)'in en büyük değeri nedir?

10. f(x)=(7+cosx)(13-cosx) ise f(x)'in en küçük değeri nedir?

11. tg x-cotg x=5 ise $\mathrm{tg}^2x.\cot g^2x$ neye eşittir.

12. $\cos ec^2x - \cot g^2x$ 'in eşitini bulunuz.

13. cos 2760 neye eşittir?

14. cotg 13420 neye eşittir?

15. cos 15 neye eşittir?

16. $\cos x - \sin x = \frac{1}{5}$ ise sin 2x nedir?

17. $\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} = \frac{2}{3}$ ise sin x nedir?

18. cos 83=t ise sin 14 nedir?

19. $\frac{1}{\sin 10} + \frac{\sqrt{3}}{\cos 10}$ neye eşittir?

20. $\sin 2x = \frac{1}{5}$ ise $\sin^4 x + \cos^4 x$ nedir?

21. $\frac{\sin 2x}{2\cos^2 x}$ neye eşittir?

22. cos 50 = m ise cos 70 . sin 20 nedir?

23. $\sin^4 x - \cos^4 x$ neye eşittir?

24. $\cos^2 15 - \sin^2 15$ ' in sayısal değeri nedir?

25. cos 50=k ise cos 80 nedir?

26. $\cos\frac{\pi}{8}$ neye eşittir?

27. $\frac{\cos 15 - \sin 15}{\cos 15 + \sin 15}$ 'in sayısal değeri nedir?

28. f(x)=tg x-1 ise f(x)'in grafiğini çiziniz.

29. f(x)=3sin x+2 ise f(x) in grafiğini çiziniz.

30. f(x)= - cos 4x ise f(x) in grafiğini çiziniz.

31. f(x)=cos 3x+2 ise f(x) in grafiğini çiziniz.

32. $\sin^2 x - \sin x - 6 = 0$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

33. cos 2x=1 denkleminin çözüm kümesi nedir?

34. $[0, 2\pi]$ arasında sin 8x +sin 2x = 2sin 5x denkleminin çözüm kümesi nedir?

35. $[0, 360]$ arasında $tg^2 x - (\sqrt{3}+1)tg\, x + \sqrt{3} = 0$ denkleminin çözüm kümesi nedir?