10. BÖLÜM

TÜREVİN UYGULAMALARI

10.1. Hız Ve İvme

Daha önceki bölümlerde değindiğimiz hız ve ivme kavramlarını, bu bölümde, yüksek mertebeden türevlerin anlaşılması açısından genişleterek ele alalım.

Örnek 10.1: Bir yolcu treni fren yaparak bir istasyona yaklaşıyor. Trenin fren yaptığı andan itibaren kat ettiği mesafe **$s=120t-t^2$**ile veriliyor. Burada **t**, 0 ile 60 sn. arasında değişiyor. Buna göre;

i)Başlangıç ve bitiş hızlarını bulunuz.

ii)Başlangıç ve bitiş ivmesini bulunuz

Çözüm 10.1: i)Hız, kat edilen mesafenin (yol) zamana göre birinci türevine eşittir. Yani;

$$v = s' = \frac{ds}{dt} = 120 - 2t$$

Buna göre, başlangıç hızı t=0 sn. anındaki hızdır;

$$v = 120 - 2.(0) = 120 \quad m/sn$$

Bitiş hızı ise t=60 sn. esnasındaki hızıdır. Yani;

$v = 120 - 2.(60) = 0 \quad m/sn$ .Böylece, tren 60 sn'de durur.

ii) İvme hızın birinci türevine eşittir. Yani;

$$\mathrm{a} = \mathrm{v}' = \frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} = -2 \ \mathrm{m/sn}^2$$

Burada ivme değeri sabit olduğundan başlangıç ve bitiş ivmesi aynıdır.

10.2.Yüksek Mertebeden Türevler

Yukarıdaki örneklerde anlaşılacağı gibi ivme yolun zamana göre ikinci türevine eşittir. Bu şu şekilde ifade edilebilir:

$$\partial = s'' = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

Genelleştirecek olursak; y=f(x)fonksiyonu verildiğinde y 'nin türevinin türevine y=f(x) fonksiyonun ikinci mertebeden türevi denir ve;

$$y'',\ f''(x),\ \frac{d^2 y}{dx^2},\ D_x^2 y$$

sembolleri ile gösterilir.

Benzer olarak üçüncü mertebeden türev;

$$y''',\ f'''(x),\ \frac{d^3y}{dx^3},\ D_x^3 y$$

sembolleri ile gösterilir. Aynı mantıkla n. mertebeden türev;

$$y^n,\ f^n(x),\ \frac{d^ny}{dx^n}\ \text{veya}\ D_x^n y$$ sembolleri ile gösterilir.

Örnek 10.2: Bir çark θ açısı yaparak dönüyor ve bu dönüş $\theta = 0.004t^{5/2} + 0.1t^2$ formülleriyle veriliyor. Burada, t saniye cinsinden zamandır. Buna göre;

i) t=4 sn için w açısal hızını bulunuz.

ii) t=4 sn için α açısal ivmesini bulunuz.

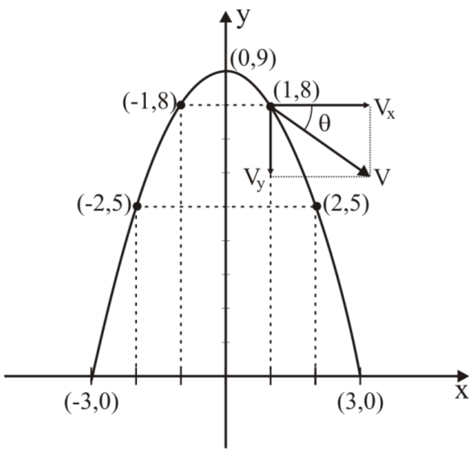
Çözüm 10.2: W Açısal hızı, θ açısal sapmanın türevidir.

Yani; $\omega = \theta' = \frac{d\theta}{dt} = 0.01t^{3/2} + 0.2t \Rightarrow t = 4\,\text{sn'deki};\ \omega = 0.01(4)^{3/2} + 0.2(4) = 0.\mathbf{88}\ \text{rad/sn.}$

α açısal ivmesi, w açısal hızının 1.türevine veya θ açısal sapmanın 2.türevine eşittir.

$$\alpha = w' = \frac{dw}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0.015t^{1/2} + 0.2 \Rightarrow t = 4\,\text{sn.'de};\quad \alpha = 0.015(4)^{1/2} + 0.2 = \underline{\underline{0.23\ \text{rad/sn}^2}}$$

Örnek 10.3: Bir cisim verilen bir parabolün bir bölümünde x=t , $y=9-t^2$ parametrik denklemleri ile hareket ediyor.t=1 sn. 'deki hız bileşenlerini ve bileşke hızı bulunuz. (Şekil.10.1)



Şekil 10.1. $y=9-t^2$ parabolü

Çözüm 10.3: x doğrultusundaki vektör bileşeni V_x ve; $V_x = \frac{dx}{dt}$

y doğrultusundaki vektör bileşeni V_y ve; $V_y = \frac{dy}{dt}$ olur.

Buna göre; $V_x = \dfrac{dx}{dt} = 1$ ve $V_y = \dfrac{dy}{dt} = -2t$ bulunur.

t=1 sn. 'deki değerler ise; V_x=1 m/sn ve V_x eğri boyunca sabittir. V_y=-2(1)=-2 m/sn

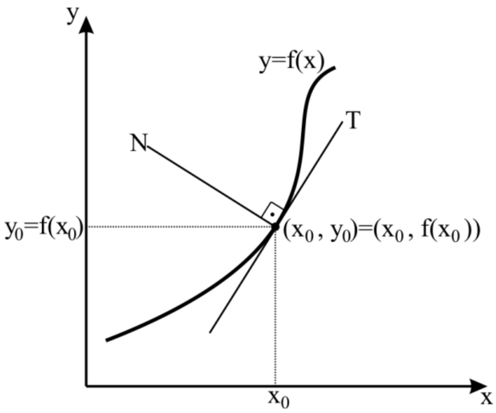
t=1 sn. 'deki bileşke hız; V bileşke hızının büyüklüğü (şiddeti) Pisagor Teoreminden;

$$V = \sqrt{V_x{}^2 + V_y^2} = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5} \cong 2.2\, m/sn.$$

θ negatif açısının değeri ise; $\theta = \text{Arc}\tan\dfrac{y}{x} = \text{Arc}\tan\dfrac{(-2)}{1} = -63.4°$ olarak bulunur.

10.3. Teğet Ve Normal Denklemi

Türevin en bilinen uygulamalarından biri de Teğet ve Normal denklemleridir. Şekil 10.2'de görüldüğü gibi $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğini ele alalım. $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğine veya $f(x)$ eğrisine x_0 noktasında teğet olan doğruya T (tangent) diyelim.



Şekil.10.2. y=f(x) fonksiyonunun grafiği

Analitik geometriden de hatırlanacağı gibi teğet doğruya dik olan N (Normal) doğrusunu çizelim. Buna göre, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğine (x_0, y_0) noktasında teğet olan doğrunun denklemi,

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

olarak yazılır. Burada, $y_0 = f(x_0)$ ve $m = f'(x_0)$ olup yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa,

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Teğet doğrunun denklemi elde edilir. $m_T \cdot m_N = -1$ (birbirine dik olan doğruların eğimlerinin çarpımı -1'dir) eşitliğinden $m_N = -\frac{1}{m_T}$ bulunur. Bu değer teğet doğrusu denkleminde yerine yazılırsa,

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$$

olarak Normal Doğru denklemi bulunur.

Sonuç olarak; herhangi bir $y = f(x)$ fonksiyonunun (x_0, y_0) noktasındaki Teğet ve Normal doğru denklemleri sırasıyla,

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \qquad \text{T.D.}$$

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) \qquad \text{N.D.}$$

olarak bulunur.

Örnek.10.4: $f(x) = 8x^5 - 4x^4 + 12x^3 + 6x^2 + 10x + 13$ fonksiyonunun x=1 noktasındaki Teğet ve Normal denklemlerini bulunuz.

Çözüm.10.4: $f(x) = 8x^5 - 4x^4 + 12x^3 + 6x^2 + 10x + 13$ ve $f'(x) = 40.\ x^4 - 16x^3 + 36x^2 + 12x + 10$

$f(1) = 8\ .\ (1)^5 - 4\ .\ (1)^4 + 12\ .\ (1)^3 + 6\ .\ (1)^2 + 10\ .\ 1 + 13 = 45$

$f'(1) = 40.\ (1)^4 - 16.\ (1)^3 + 36.\ (1)^2 + 12.\ 1 + 10 = 82$

$y - f(x_0) = f'(x_0).(x - x_0)$ T.D formülü

$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}\ .\ (x - x_0)$ N.D formülü

$y - 45 = 82.\ (x-1)$ T.D

$y - 45 = -\frac{1}{82}\ .\ (x-1)$ N.D

29) $y = f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 5x - 2$ fonksiyonunun $x = -0.5$ noktasındaki teğet ve normal denklemini bulunuz.

Çözüm :

$$f(\frac{-1}{2}) = 2.\left(\frac{-1}{2}\right)^4 - 3\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \frac{5(-1)}{2} - 2 = -\frac{41}{8}$$

$$f'(x) = 8x^3 - 6x + 5 \Rightarrow f'(\frac{-1}{2}) = 8\left(\frac{-1}{2}\right)^3 - \frac{6(-1)}{2} + 5 = 7$$

$$y - f(\frac{-1}{2}) = f'(\frac{-1}{2})(x + \frac{1}{2}) \qquad T.D.$$

$$y + \frac{41}{8} = 7(x + \frac{1}{2}) \quad \text{T.D} \quad \text{veya} \quad y + \frac{41}{8} = \frac{-1}{7}(x + \frac{1}{2}) \quad \text{N.D}$$

10.4. Maksimum, Minimum ve Büküm Noktaları

Bir önceki bölümde türevin geometrik anlamını, eğrinin herhangi bir noktasındaki eğim için bir formül olarak tanımlamıştık. Birinci türev veya eğim pozitif iken eğri artan bir grafik çizerken, negatif durumda eğri azalan bir grafik çizer. Eğer eğri bir yerel maksimum veya yerel minimum noktada döndüğünde, bu noktalarda teğet yatay bir doğru ve birinci türev veya eğim; **y'=*f*'(x)=0** 'dır. Bu noktalar basit olarak maksimum veya minimum noktalar olarak adlandırılırlar. **y'=0** olan noktalar sabit noktalar olarak adlandırılırlar.

İkinci türev ise eğimin değişim oranıdır ve eğrinin bükümlülüğü hakkında bilgi verir. İkinci türev pozitif iken, türev fonksiyonu (eğim) artan ve eğri yukarı doğru bükümlüdür. İkinci türev negatif iken, türev fonksiyonu (eğim) azalan ve eğri aşağı doğru bükümlüdür Eğrinin büküldüğü ve bükümlülüğün değiştiği noktada bükülme sıfır ve bu noktada ikinci türev $y'' = f''(x) = 0$ olur. **y''=0** olan noktalar kritik noktalar olarak adlandırılırlar. Bu nokta matematikte büküm noktası olarak bilinir.

Eğrilerin temel özelliklerini açıklaması açısından aşağıdaki örneği irdeleyelim.

Örnek 10.5: $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$ fonksiyonu verilsin.

Bu fonksiyonun maksimum ve minimum noktalarını bulunuz.

Çözüm 10.5: Bir maksimum veya minimum noktada birinci türev 0'a eşittir.

Yani; $y'=f'(x)=3x^2-12x+9=0$ olur.Bu denklem x'e göre çözülürse;

$3x^2-12x+9=0 \Rightarrow x^2-4x+3=0 \Rightarrow (x-1)(x-3)=0 \Rightarrow$ x=3 ve x=1 elde edilir.

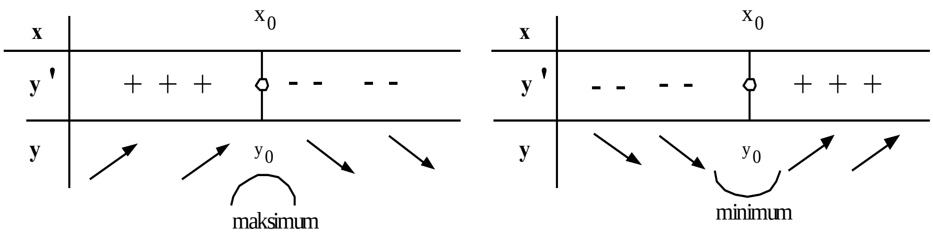
x=1, x=3 noktalarında y'= 0 'dır. Bu nedenle; x=1, x=3 noktaları sabit noktalardır. Bu noktalardan hangisinin minimum, hangisinin maksimum olduğunu belirlemek için aşağıdaki gibi bir tablo düzenleyip y ve y' işaretleri incelenir.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		+ + +		- - - - - -		+ + + + +	
y	$-\infty$	↗ ↗	7 maksimum	↘ ↘	3 minimum	↗ ↗	$+\infty$

Tablodan da görüldüğü gibi x=1 noktası maksimum noktadır. Çünkü, fonksiyon x=1 noktasının solunda artar iken x=1 noktasının sağında azalan bir grafik çizer. Bu, x=1 noktasının maksimum nokta olduğunu gösterir. Benzer şekilde, fonksiyon x=3 noktasının solunda azalan iken x=3 noktasının sağında artan bir grafik çizer. Bu, x=3 noktasının minimum nokta olduğunu gösterir.

10.4.1. Birinci Türev Testi

Eğer birinci türev bir sabit noktada pozitiften negatife işaret değiştirirse bu nokta yerel maksimum noktadır. Sabit noktada birinci türev negatiften pozitife işaret değiştirirse bu nokta yerel minimum noktadır.



Örnek.10.5 ile verilen fonksiyonun belirttiği eğrinin büküm noktasını bulunuz ve grafiğini çizelim.Bir büküm noktasında $y'' = f''(x) = 0$'dır. y''=6x-12=0 $\Rightarrow$6x-12=0 $\Rightarrow$ x=2

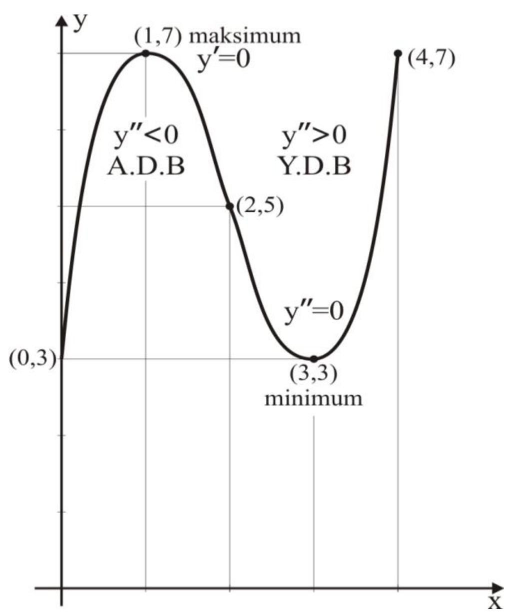
x=2 noktasında eğimin değişim oranı sıfırdır. Yani bükülme sıfırdır. x=2 noktasının büküm noktasını belirlemek için bükümlülüğün değişip değişmediğini kontrol etmek gerekir. Bunu aşağıdaki gibi basit bir tablo ile görelim;

x	1	2	3
y''	-6		6

y"(1)=6.(1)-12=-6

y"(3)=6.(3)-12=6

Görüldüğü gibi x=2 noktasında y" işaret değiştirmektedir. Bu x=2 noktasının büküm noktası olduğunu gösterir.(Şekil-10.3)



Şekil.10.3. $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$ fonksiyonunun grafiği

10.4.2. İkinci Türev Testi: Eğer x_0 gibi kritik bir noktada y'' negatif ise eğri aşağı doğru bükümlüdür ve x_0 bir yerel maksimum noktadır. Eğer x_0 gibi kritik bir noktada y'' pozitif ise eğri yukarı doğru bükümlüdür ve x_0 bir yerel minimum noktadır. Eğer y'' bir kritik noktada işaret değiştirirse bu nokta bir büküm noktasıdır. Tablo ile ifade edecek olursak;

x	$-\infty$	x_0	∞
y''	+ + +	0	- - - -
y	Yukarı Doğru Bükümlü	y_0 Büküm Noktası	Aşağı Doğru Bükümlü

x	$-\infty$	x_0	∞
y''	- - - -	0	+ + +
y	Aşağı Doğru Bükümlü	y_0 Büküm Noktası	Yukarı Doğru Bükümlü

şeklinde gösterebiliriz.

10.5. Ekstremumlar (Maksimum veya Minimum Noktalar)

10.5.1. Maksimum ve Minimum ile ilgili Çözümlü Örnekler

1) $f : IR \to IR \qquad f(x) = \dfrac{x-3}{x^2+7}$ fonksiyonunun ekstremumlarını inceleyiniz.

Çözüm: $$f'(x) = \frac{x^2+7-(2x)\cdot(x-3)}{\left(x^2+7\right)^2} = \frac{x^2+7-2x^2+6x}{\left(x^2+7\right)^2} = \frac{-x^2+6x+7}{\left(x^2+7\right)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -x^2+6x+7=0$$

$(x+1)\quad(x-7)=0$ olur ve buradan x=-1 ve x=7 bulunur.

x	$-\infty$		-1		7		$+\infty$
y'		- - -	0	+ + +	0	- - -	
y	0	↘	$\frac{-1}{2}$ minimum	↗	$\frac{1}{14}$ maksimum	↘	0

$$f''(x) = \frac{(-2x+6)\left(x^2+7\right)^2 - \left(-x^2+6x+7\right)\left(2\left(x^2+7\right)\right).2x}{\left(x^2+7\right)^4}$$

$$= \frac{(-2x+6)\left(x^2+7\right) - \left(-x^2+6x+7\right).2x}{\left(x^2+7\right)^3} = \frac{-6x^2-28x+42}{\left(x^2+7\right)^3}$$

$f''(-1) = \dfrac{1}{8} > 0$ ve $f''(7) = \dfrac{-1}{392} < 0$ x = -1 minimum nokta x = 7 maksimum nokta

2) $f(x) = x.e^{\frac{1}{x}}$ fonksiyonunun ekstremumlarını inceleyiniz.

Çözüm: $f(x) = x.e^{\frac{1}{x}} \quad \Rightarrow \quad T.A = IR - \{0\} = (-\infty,0)\bigcup(0,\infty)$

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1.e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2}.e^{\frac{1}{x}}.x = 0 \Rightarrow \quad f'(x) = e^{\frac{1}{x}}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 0$$

$\mathbf{e^{\frac{1}{x}} \neq 0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\frac{x-1}{x} = 0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x = 1}$ ise $\qquad$ (1,e)minimum noktadır.

x	$-\infty$	0		1		$+\infty$
y'	+ +	‖	- - -	0	+ + +	
y		‖	↘	e minimum	↗	

3) $f(x) = \ln\left(\frac{2x-1}{x-2}\right)$ fonksiyonunun varsa ekstremumlarını bulunuz.

Çözüm: $f'(x) = \dfrac{\left(\frac{2x-1}{x-2}\right)'}{\left(\frac{2x-1}{x-2}\right)} = 0 \quad f'(x) = \left[\dfrac{2(x-2)-(2x-1)}{(x-2)^2}\right]\dfrac{(x-2)}{(2x-1)} = 0$

$$f'(x) = \frac{2x-4-2x+1}{(x-2)^2}.\frac{(x-2)}{(2x-1)} = 0 \text{ ise } f'(x) = \frac{-3(x-2)}{(x-2)^2.(2x-1)} = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{3}{(x-2).(2x-1)} = 0$$

$f'(x) \quad \forall\, x$ için negatiftir. Ekstremum yoktur.

4) $y = x^x$ ‘in varsa ekstremumlarını inceleyiniz.

Çözüm: $\ln y = \ln x^x$

$$\ln y = x.\ln x \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = \ln x + \frac{1}{x}.x \quad \begin{aligned} &\Rightarrow \quad y' = y(\ln x + 1) \\ &\Rightarrow \quad y' = x^x(\ln x + 1) = 0 \end{aligned}$$

$\mathbf{x^x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \ln x + 1 = 0}$ **ise** $\quad \mathbf{\ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
y'		- - -	0	+ + +	
y	$+\infty$	↘	$\left(\frac{-1}{e}\right)^{\left(\frac{-1}{e}\right)}$ minimum	↗	$+\infty$

5) $y = e^x.\cos x$ fonksiyonunun sabit noktalarını inceleyiniz.

Çözüm: $y' = e^x.\cos x - \sin x.e^x = e^x.(\cos x - \sin x) = 0$

$$e^x \neq 0 \Rightarrow (\cos x - \sin x) = 0 \text{ ise } \cos x = \sin x \Rightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{4}$$

6) $y = e^{x^2-2x}$ fonksiyonunun ekstremum noktalarını inceleyiniz.

Çözüm: $y' = (2x-2).e^{x^2-2x} = 0$

$e^{x^2-2x} \neq 0 \Rightarrow 2x-2 = 0 \Rightarrow x = 1$ olur.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'	- - -		0	+ + +	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{e}$ minimum	$\nearrow$	$+\infty$

7) $y = x^2.\ln x$ fonksiyonun ekstremum noktalarını inceleyiniz.

Çözüm:

$$y' = 2x.\ln x + \frac{1}{x}.x^2 = x.(2\ln x + 1) = 0$$

$$x = 0 \text{ ve } 2\ln x = -1 \text{ ise } \ln x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		$+\infty$
y'	- - -		0	+ + +	
y	$-\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{2e}$ minimum	$\nearrow$	$+\infty$

8) $y = x^3 + 3x^2 + 3x - 2$ fonksiyonunun ekstremum noktalarını bulunuz.

Çözüm: $y' = 3x^2 + 6x + 3 = 0 \rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = -1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'	+ + +		0	+ + +	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

ekstremum yoktur.

9) $y = x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 12x$ fonksiyonunun ekstremumlarını bulunuz.

Çözüm: $y' = 3x^2 + 9x - 12 = 0$

$x^2 + 3x - 4 = 0$ ise $(x-1)(x+4) = 0$ ve buradan $x_1 = 1 \quad x_2 = -4$ bulunur.

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
y '		+ + +	0	- - - - - -	0	+ + + + +	
y	$-\infty$	↗ ↗	56	↘ ↘ ↘	$\frac{-13}{2}$	↗ ↗	$+\infty$
			maksimum nokta		minimum nokta		

$(-4, 56)$ maksimum nokta $\left(1, -\frac{13}{2}\right)$ minimum nokta

Başka bir deyişle ; $y'' = 6x + 9$

$y''(-4) = -15 < 0 \quad \Rightarrow \quad (-4, 56)$ maksimum nokta

$y''(1) = 15 > 0 \quad \Rightarrow \quad \left(1, -\frac{13}{2}\right)$ minimum nokta

10) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ fonksiyonunun ekstremumlarını inceleyiniz.

Çözüm: $y' = \dfrac{(2x-2)(x-1) - 1(x^2 - 2x + 2)}{(x-1)^2} = 0$

$$y' = \frac{2(x-1)^2 - x^2 + 2x - 2}{(x-1)} = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{2x^2 - 4x + 2 - x^2 + 2x - 2}{(x-1)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x = 0$$

$$\Rightarrow \quad x(x-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad x_2 = 2$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y '		+ + +	0	- - - - - -	0	+ + + + +	
y	$-\infty$	↗ ↗	-2	↘ ↘ ↘	2	↗ ↗	$+\infty$
			maksimum nokta		minimum nokta		

$(0, -2)$ maksimum ve $(2, 2)$ minimum veya;

$$y'' = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2 - 2x)}{(x-1)^4}$$

$y''(0) = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad (0, -2)$ maksimum

$y''(2) = 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad (2, 2)$ minimum nokta olarak bulunur.

11) $y = x^4 - 2x^2 + 3$ fonksiyonunun ekstremumlarını 2.Türev yardımıyla bulunuz.

Çözüm: $y' = 4x^3 - 4x = 0 \rightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \rightarrow x_1 = 0 \;\; x_2 = 1 \;\; x_3 = -1$

$y'' = 12x^2 - 4 \Rightarrow y''(0) = 12.0^2 - 4 = -4 < 0 \;\; \Rightarrow \;\; (0,3)$ maksimum nokta

$y''(1) = 8 > 0 \;\; \Rightarrow \;\; (1,2)$ minimum nokta

$y''(-1) = 8 > 0 \;\; \Rightarrow \;\; (-1,2)$ minimum nokta

12) Neptün Oşinografi Enstitüsü'nde bir grup deniz biyoloğu soyu tükenmekte olan korunan bazı balina türlerinin ölçümünde gelecek on yıllarda daha dikkatli olunmasını önerdiler. Koruma altına alındıktan sonra yapılan ölçümler, bu türün beklenen popülasyonu;

$$\mathbf{N(t) = 3t^3 + 2t^2 - 10t + 600} \qquad (0 \le t \le 10)$$

Burada; N(t), t yıl sonundaki popülasyonun durumu olmak üzere, t=2 ve t=6 olduğunda balina popülasyonunun artış hızını bulunuz. Yapılan ölçümlere göre balina popülasyonu 8 yıl sonra ne büyüklüğe erişecektir?

Çözüm: Balina popülasyonunun herhangi bir t zamanındaki artışı şöyle verilir.

$$N'(t) = 9t^2 + 4t - 10$$

Özel olarak t=2 ve t=6 olduğunda balina popülasyonunun artış hızı;

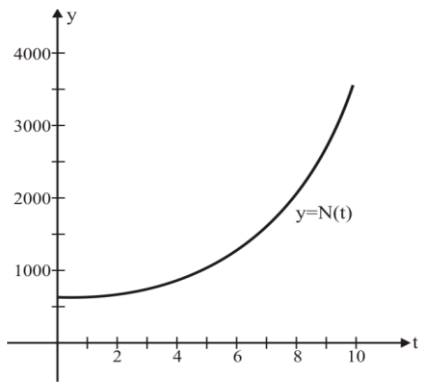
$$N'(2) = 9(2)^2 + 4(2) - 10 = 34$$

$$N'(6) = 9(6)^2 + 4(6) - 10 = 338$$

olarak elde edilir. Buna göre, balina popülasyonu her iki yılda 34, her 6 yılda da 338 artış gösterecektir. Balina popülasyonu sekiz yıl sonunda;

$$N(8) = 3(8)^3 + 2(8)^2 - 10(8) + 600 = 2184$$

balina olacaktır. N(t) fonksiyonunun grafiği Şekil .10.4'de verilmiştir.



Şekil.10.4. N(t) ile verilen t yıl sonraki balina popülasyonu.

13) Bir roketin aldığı yol t saniye cinsinden olmak üzere;

$s = f(t) = -t^3 + 96t^2 + 195t + 5 \qquad (t \geq 0)$ ile veriliyor.

a. Roketin herhangi bir t anındaki V hızını bulun.
b. Roketin hızını t=0, 30, 50, 65, ve 70 olduğunda bulunuz. Sonuçlarınızı açıklayınız.
c. b'deki sonuçları kullanarak ve roketin yörüngesinde hızın sıfır olduğu noktayı düşünerek roketin ulaştığı en yüksek mesafeyi bulunuz.

Çözüm: a) Roketin t anındaki hızı yolun türevidir.

$$V = f'(t) = \frac{ds}{dt} = -3t^2 + 192t + 195$$

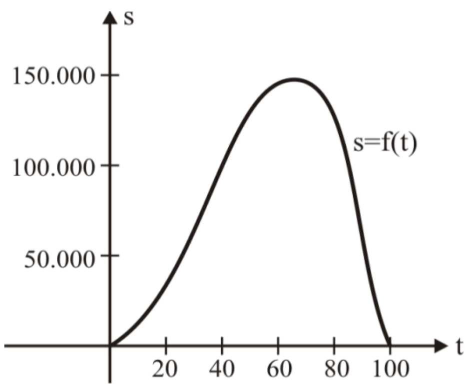
b) Roketin hızı t=0, 30, 50, 65 ve 70 olduğunda;

$$f'(0) = -3(0)^2 + 192(0) + 195 = 195$$
$$f'(30) = -3(30)^2 + 192(30) + 195 = 3255$$
$$f'(50) = -3(50)^2 + 192(50) + 195 = 2295$$
$$f'(65) = -3(65)^2 + 192(65) + 195 = 0$$
$$f'(70) = -3(70)^2 + 192(70) + 195 = -1065$$

veya 195, 3255, 2295, 0 ve –1065 m/s Buna göre, roket t=0 da 195 m/s ilk hıza sahiptir ve t=30'daki hızı 3255 m/s'dir. Uçuşun 50. saniyesinde roketin hızı t=30'daki hızdan daha düşük olan 2295 m/s'dir. Bunun anlamı roketin hızının daha sonra öğreneceğimiz gibi en yüksek hızına ulaştıktan sonra giderek azalmasıdır.

Yavaşlama sürer: t=65'te hız 0'dır ve t=70'te –1065m/s'dir. Bu sayı bize roketin uçuşun 70. saniyesinde dünyaya saniyede 1065 metre hızla çarptığını söyler.

c) (b)'deki sonuçlar roketin hızının t=65 iken sıfır olduğunu gösterir. Bu anda roketin yüksekliği maksimum olup; $s = f(65) = -(65)^3 + 96(65)^2 + 195(65) + 5 = 143{,}655$ m'dir. Roket yüksekliğinin değişimi Şekil 10.5'de görülmektedir.



Şekil.10.5. t saniye uçuşta f(t) ile verilen roketin yüksekliği

14) Milyonlarca dolar satışı yapılan bir DVD film satışının yayınlandıktan sonraki t yılda satış oranı ; $S(t) = 5t/(t^2 + 1)$ ile veriliyor. Buna göre;

a) Satışın değişim oranını bulunuz.

b) t=0 iken DVD satışları ne hızda değişir. Yayınlandıktan iki yıl sonra ne hızda değişir?

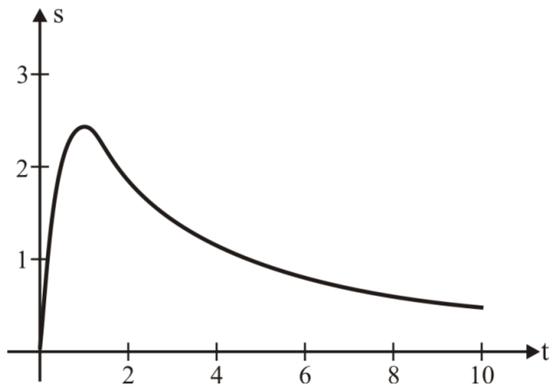
Çözüm: a)t zamanında değişen satışların oranı S'(t) ile verilir. Çarpım türevini kullanarak;

$$S'(t)=\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{5t}{t^2+1}\right)\right]=5\frac{d}{dt}\left[\frac{t}{t^2+1}\right]=5\left[\frac{(t^2+1)(1)-t(2t)}{(t^2+1)^2}\right]=5\left[\frac{t^2+1-2t^2}{(t^2+1)^2}\right]=\frac{5(1-t^2)}{(t^2+1)^2} \text{ olur.}$$

b)Yayınlandıktan sonra bir zamandaki DVD satışlarının değişim oranı;

$$S'(2)=\frac{5(1-4)}{(4+1)^2}=-\frac{3}{5}=-0.6 \text{ bulunur.}$$

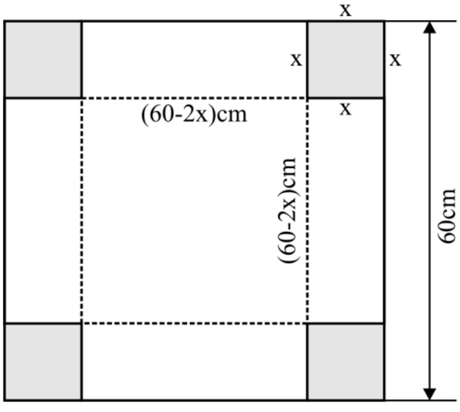
Bu oran yılda 600,000 $'lık bir azalışı gösterir. S fonksiyonunun grafiği Şekil.10.5'de gösterilmiştir.

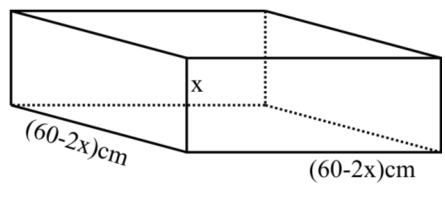


Şekil .10.5. DVD satışlarının değişim oranı

15) Kenar uzunluğu 60cm olan kare şeklindeki bir metal levhanın köşelerinden kare şeklinde parçalar kesilip atılıyor ve geri kalan kısımla üstü açık kutu yapılıyor. Kutu hacminin maksimum olması için kesilen parçanın uzunluğu ne olmalıdır.

Çözüm:





1) Maksimum. hacmi bulmak için değişkene x diyelim.
2) Denklemimiz, V = (Taban Alanı) .(Yükseklik)

$$V = (60 - 2x)^2 . x$$

3) Her iki tarafın türevini alırsak,

$$V' = \frac{dV}{dx} = x(2)(60-2x)(-2) + (60-2x)^2 = 0$$

$$= -4x(60-2x) + (60-2x)^2 = 0$$

$$= (60-2x)(-4x+60-2x) = 0$$

$$= (60-2x)(60-6x) = 0$$

4) Her bir çarpanı sıfıra eşitlersek ;

60-2x = 0 ise x = 30 cm

60-6x = 0 ise x = 10 cm olur.

5) 1.Türev tablosunun değişimi incelenerek;

x	$-\infty$		10		30		$+\infty$
y '		- - -	0	+ + +	0	- - -	
y		↗	16000 maksimum	↘	0 minimum	↗	

(10,1600) maksimum hacim değeri, yani x = 10 cm iken hacim 16000 cm^3'dür.

16) Çarpımları 100 olan, toplamları en küçük pozitif iki sayı nedir.

Çözüm: Sayılardan birisine x, diğerine y diyelim.

x : 1.pozitif sayı ve y: 2.pozitif sayı olsun. $x.y = 100$ ise $y = \frac{100}{x}$ olur. Buna göre;

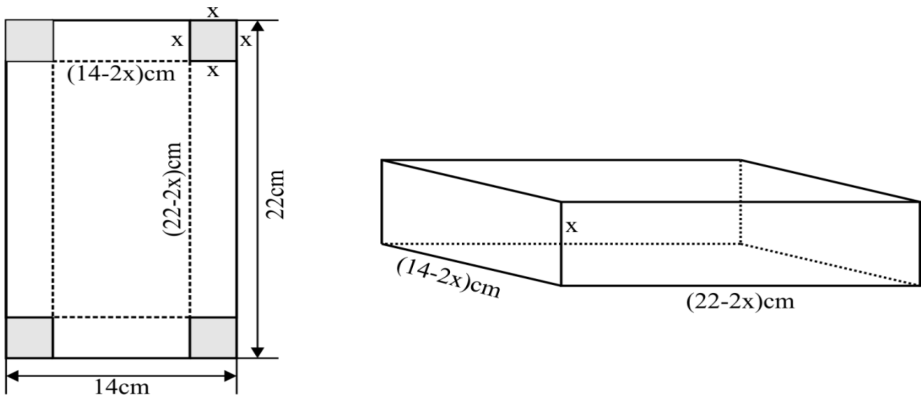
İki sayının toplamı ; $S = x + \frac{100}{x}$ bulunur. S'nin türevi alınıp sıfıra eşitlenerek;

$\frac{dS}{dx} = 1 - \frac{100}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 100 \Rightarrow x = \pm 10$ bulunur. Pozitif rakamları istediğimiz için

(-10)'u değil, (+10)'u alırız. Diğer rakam $\Rightarrow y = \frac{100}{10} = 10$ olur.

17) Eni 14cm boyu 22cm olan dikdörtgen şeklindeki bir metal levhanın köşelerinden kare şeklinde parçalar kesilip atılıyor ve geri kalan kısımla üstü açık kutu yapılıyor. Kutu hacminin maksimum olması için kesilen parçanın uzunluğu ne olmalıdır.

Çözüm:



1) Maksimum. hacmi bulmak için değişkene x diyelim.
2) Denklemimiz,V = (Taban Alanı) .(Yükseklik)

$$V = (22 - 2x).\,(14 - 2x).x$$

3) Her iki tarafın türevini alırsak,

$$V' = \frac{dV}{dx} = (-2)(14x - 2x^2) + (14 - 4x)(22 - 2x) = 0$$

$$V' = 312 - 144x + 12x^2 = 0$$

$$= x^2 - 12x + 26 = 0$$ denklemi elde edilir.

4) Bu denklemin çözümünden; $x_1 = 9.162$ ve $x_2 = 2.837$ bulunur.
5) 1.Türev tablosunun değişimi incelenerek;

x	$-\infty$		2.837		9.162		$+\infty$
y '		+++	0	----	0	+++	
y		↗	385,634 maksimum	↘	-145,63 minimum	↗	

(2.837, 385.634) maksimum hacim değeri, yani x = 2.837 cm iken hacim 385.634cm^3 ‘dür.

18) Şiddetleri sırasıyla a ve b olan A ve B gibi iki ısı kaynağı arasındaki uzaklık L dir.

A ve B arasında bulunan ve A dan uzaklığı x olan bir P noktasındaki ısı şiddeti

$$I = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(L - x)^2}$$

ile verildiğine göre, hangi P noktasındaki sıcaklık minimumdur.

Çözüm: 1.Türevi alıp sıfıra eşitleyip x'i çözelim:

$$I = ax^{-2} + b(L-x)^{-2}, \quad I' = \frac{dI}{dx} = -2ax^{-3} - 2b(L-x)^{-3}(-1) = 0$$

olur. Gerekli sadeleşmeler yapılarak;

$-\frac{a}{x^3} + \frac{b}{(L-x)^3} = 0$ ve buradan $\frac{b}{(L-x)^3} = \frac{a}{x^3}$ elde edilir.

Üçüncü dereceden kök alalım:

$\frac{a^{1/3}}{x} = \frac{b^{1/3}}{L-x}$ eşitliğinden;

$a^{1/3}$.L-$a^{1/3}x = b^{1/3}.x$ ve buradan $a^{1/3}$.L=$(a^{1/3} + b^{1/3})x$ olup

x = $\frac{a^{1/3}\,L}{a^{1/3}+b^{1/3}}$ olarak elde edilir.Bu değer için sıcaklık minimumdur.

19) Çapı 10 cm olan bir daire içine alanı maksimum olacak şekilde çizilen bir dikdörtgenin kenarlarını hesaplayınız(Şekil 10.6).

Çözüm: ABC üçgenine PİSAGOR teoremini uygulayıp y yi çözelim:

$x^2 + y^2 = 100 \quad ise \quad y = (100 - x^2)^{1/2}$ olur

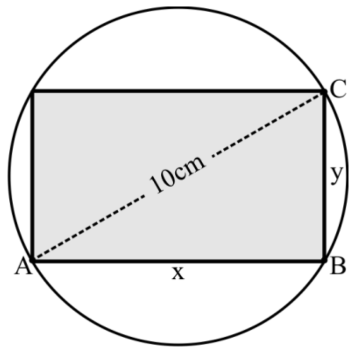
ve buradan dikdörtgenin Alanı;

A=x.y=$x(100 - x^2)^{1/2}$

Alanın türevini sıfıra eşitleyelim:

$$\frac{dA}{dx} = 1.(100 - x^2)^{1/2} + \frac{1}{2}x(100 - x^2)^{-1/2}(-2x)$$

$$\frac{dA}{dx} = \frac{(100 - x^2) - x^2}{(100 - x^2)^{1/2}} = \frac{100 - 2x^2}{(100 - x^2)^{1/2}} = 0$$



Şekil 10.6

Payın sıfıra eşit yazılmasından $x^2 = 50,\ x = 5\sqrt{2}$, olup $x^2 + y^2 = 100$ yerine konulmasından da y = $5\sqrt{2}$ elde edilir. Şu halde aranan şekil, kenar uzunluğu $5\sqrt{2}$ olan bir karedir.

20)Üçgen şeklinde bir levhadan, alanı en büyük (maksimum) olan bir dikdörtgen parça kesilmesi isteniyor. Bu üçgenin tabanı AC=a, yüksekliği BH=h olduğuna göre, kesilecek dikdörtgenin kenarları ne olmalıdır?

Çözüm: Şekil 10.7'deki üçgenden; $\frac{y}{a} = \frac{h-x}{h}$ yazılabilir.

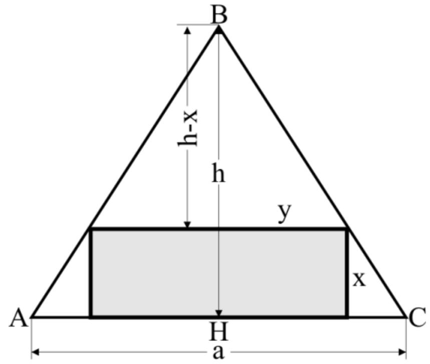
Buradan; $y = a(h - x)/h$ olur.

Dikdörtgenin alanını ifade edip türev alalım:

$A = x.y = \frac{a.x.(h-x)}{h}$ olduğuna göre;

$$\frac{dA}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{ahx - ax^2}{h}\right) = \frac{a}{h}(h - 2x) = 0 \text{ bulunur.}$$

Buradan; $x = h/2$ ve $y = a/2$ elde edilir.



Şekil 10.7

21) Merkezi M, yarıçapı R olan bir daire dışından bir P noktası alınıyor. P noktasından geçen herhangi bir kesen daireyi A ve B noktalarında kesiyor. M merkezinin bu eksene olan uzaklığı ne olmalıdır ki MAB üçgeninin alanı maksimum olsun (Şekil 10.8)

Çözüm: MHA dik üçgeninin AH kenarını hesaplayalım. $\overline{AH}^2 = R^2 - x^2 \rightarrow AH = (R^2 - x^2)^{1/2}$

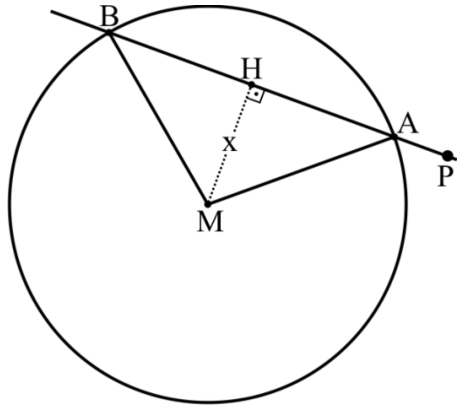
$AB = 2(R^2 - x^2)^{1/2}$ olduğuna göre;

$A(Alan) = \frac{2x(R^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{2} = x(R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$

yazılır. Bunun türevinden;

$$\frac{dA}{dx} = (R^2 - x^2)^{1/2} + \frac{x}{2}(R^2 - x^2)^{-1/2}(-2x) = 0$$

$\frac{R^2-x^2-x^2}{(R^2-x^2)^{1/2}} = 0,\ \ 2x^2 = R^2, x = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}R$ elde edilir.



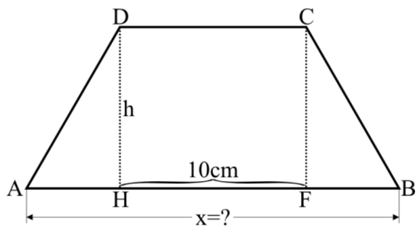
Şekil 10.8

22) ABCD yamuğunda BC=CD=DA=10 cm dir. (Şekil 10.9).Yamuğun alanının maksimum olabilmesi için AB kenarı ne olmalıdır?

Çözüm: AB=x olsun. Şekil 10.9'dan AH=(x-10)/2 yazılabilir (FB=AH). ADH dik üçgeninden h'yi hesaplayalım: $h^2 = \overline{AD}^2 - \overline{AH}^2$,

$h = \left[10^2 - \frac{(x-10)^2}{4}\right]^{1/2} = \frac{1}{2}(400 - x^2 + 20x - 100)^{1/2} = \frac{1}{2}(-x^2 + 20x + 300)^{1/2}$

Yamuğun alanında h'yi yerine yazalım;



Şekil 10.9

A=$\frac{(AB+DC)}{2}.h = \frac{x+10}{4}(-x^2+20x+300)^{1/2}$

$$\mathbf{A'} = \frac{dA}{dx} = \frac{1}{4}\frac{d}{dx}\left[(x+10).\sqrt{-x^2+20x+300}\right] = 0$$

türevinin sıfıra eşitlenmesiyle;

$$\frac{dA}{dx} = \frac{1}{4}\left[1.(-x^2+20x+300)^{1/2} + \frac{x+10}{2}(-x^2+20x+300)^{-\frac{1}{2}}(-2x+20)\right]=0$$

$$\frac{dA}{dx} = \left[\frac{-4x^2+40x+800}{4\sqrt{-x^2+20x+300}}\right]=0 \rightarrow \quad -4x^2+40x+800 = 0 \rightarrow \ x^2\text{-}10x\text{-}200=0$$

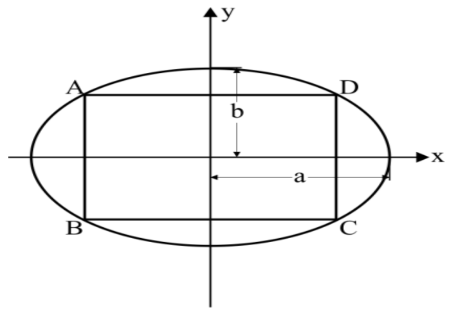
$x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25+200} = 5 \pm 15$ ve buradan; $x_2 = x = 20cm$ bulunur.

23) Şekil 10.10'da kenarları AB=4 cm, AD=6 cm olan bir dikdörtgenin dışına çizilen en büyük elipsin alanının, dikdörtgenin alanına oranını bulunuz.

Çözüm: Elipsin $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ denkleminden b yi çözelim:

$$b^2(a^2 - x^2) = a^2y^2, \quad b = \frac{ay}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

Bu ifadede, dikdörtgenin kenarlarından dolayı D noktasının D(3,2) koordinatlarını yerlerine yazarsak (x=3,y=2); $b = \frac{2a}{\sqrt{a^2-9}}$ elde edilir.



Şekil 10.10

Bunu elipsin alanında yerine koyalım.

$A = \pi ab = 2\pi\frac{a^2}{\sqrt{a^2-9}}$ olup türevini alıp sıfıra eşitlersek; $\frac{dA}{da} =$

$$2\pi\frac{d}{da}\left[\frac{a^2}{(a^2-9)^{\frac{1}{2}}}\right]=2\pi\frac{2a(a^2-9)-a^3}{(a^2-9)^{3/2}} = 0$$

Buradan; $2a^3 - 18a - a^3 = 0,$

$a(a^2-18) = 0,$ a=0, $a^2 = 18,$ a=$3\sqrt{2}$ bulunur.

Bunu $A = \pi ab = 2\pi\frac{a^2}{\sqrt{a^2-9}}$ da yerine yazarsak; $A = 2\pi.18/3 = 12\pi cm^2$

Dikdörtgenin alanı $A^* = 4 \cdot 6 = 24cm^2$ olduğundan aranan oran A/A'=$12\pi/24 = \pi/2$ olur.

24) $b^2x^2 + a^2y^2$=a^2b^2 elipsinin içine çizilebilecek maksimum alandaki bir dikdörtgenin alanını bulunuz.

Çözüm: Elipsin denkleminden y' yi çözelim:
$a^2y^2 = a^2b^2$-b^2x^2 ise $y = \frac{b}{a}(a^2-x^2)^{1/2}$ olur.
Dikdörtgenin alanı Şekil 10.11'e göre A=4xy olup, y'yi burada yerine yazarsak;

$A = \frac{4b}{a} x(a^2 - x^2)^{1/2}$ olur. x'e göre bu denklemin türevi alınırsa;

$\frac{dA}{dx} = \frac{4b}{a}\left[(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} - x^2(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\right]$

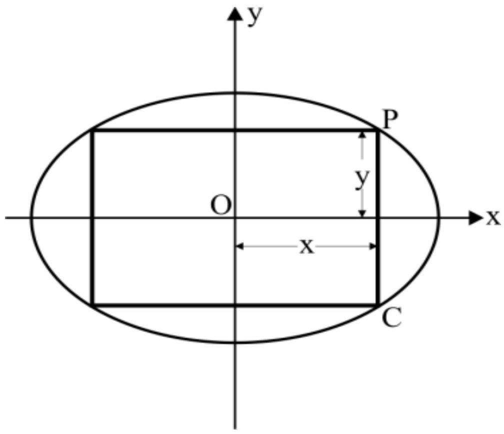
bulunur ve bu ifade sıfıra eşitlenerek;

$$\frac{dA}{dx} = \frac{4b}{a}\left[\frac{a^2 - x^2 - x^2}{(a^2 - x^2)^{1/2}}\right] = 0$$

Buradan; $a^2 - 2x^2 = 0$, $x = a/\sqrt{2} = \sqrt{2}a/2$

bulunur. Bu değeri;

$y = \frac{b}{a}(a^2 - x^2)^{1/2}$



Şekil 10.11

denkleminde yerine yazarsak $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ b olur. Sonuç olarak; x ve y değerlerini A=4xy alanında yerlerine yazarsak;$A = 4\frac{\sqrt{2}}{2}.a.\frac{\sqrt{2}}{2}.b = 2ab$ elde edilir.

25) Yarıçapı R olan bir küre içine çizilebilecek maksimum hacimdeki bir koninin taban yarıçapını ve yüksekliğini hesaplayınız.

Çözüm: Şekil 10.12'de $HM = HP - MP = x - R$ olduğundan HMK dik üçgeninden;

$r^2 = R^2 - (x - R)^2 = R^2 - x^2 + 2Rx - R^2$

$r^2 = -x^2$+2Rx yazılabilir. Koninin hacmini ifade edelim:

$V = \frac{1}{3}\pi r^2.x = \frac{1}{3}\pi(2Rx^2 - x^3)$

Hacmin türevinin sıfıra eşit yazılmasından;

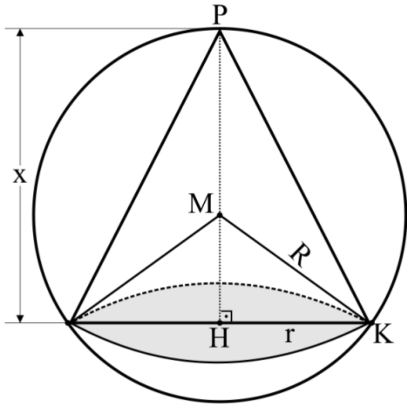
$$\frac{dV}{dx} = \frac{\pi}{3}(4Rx - 3x^2) = 0,$$

$\frac{dV}{dx} = x(4R - x^2) = 0$ *ise* $x = 4R/3$ elde edilir.

Bu $x = 4R/3$ değerini $r^2 = -x^2$+2Rx denkleminde yerine yazarsak;

$r^2 = -\frac{16}{9}R^2 + \frac{8}{3}R^2$= $8R^2/9$ veya r=$\frac{2\sqrt{2}}{3}R$

olarak bulunur.



Şekil 10.12

26) R yarıçaplı bir kürenin dışına yerleştirilebilecek en küçük hacimdeki bir koninin yüksekliğini ve yarıçapını hesaplayınız.(küre, koninin tabanına ve yanal yüzüne teğettir.)

Çözüm: Koninin taban yarıçapı r, yüksekliği x olsun (Şekil 10.13) PBO ve PMC dik üçgenlerinden ;

$\text{tg}\theta = \frac{R}{AB}$, $\text{tg}\theta = \frac{r}{x}$ ve bunlardan;

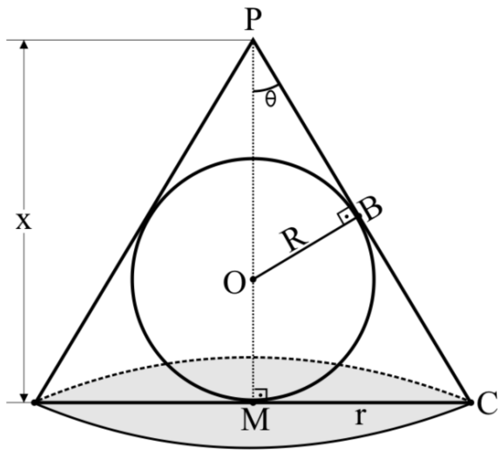
$\frac{r}{x} = \frac{R}{AB}$ yazılabilir.

$OH = MP - MO = x - R$ olduğundan

$\text{PB}=(\overline{OP}^2 - R^2)^{\frac{1}{2}} = [(x-R)^2 - R^2]^{\frac{1}{2}}$

$\text{PB} = (x^2 - 2Rx)^{1/2}$ olur.

$\frac{\text{r}}{\text{x}} = \frac{\text{R}}{\text{PB}}$ eşitliğinden r'yi çekip bunu yerine yazalım ve kare alalım:



Şekil 10.13

$r^2 = \frac{R^2x^2}{x^2-2Rx} = \frac{R^2x}{x-2R}$ ve buradan koninin hacmi:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 . x = \frac{1}{3}\pi\left[\frac{R^2x^2}{x-2R}\right]$$ bulunur.

$\pi \cdot R^2/3 = k$ yazıp x'e göre türev alalım;

$$\frac{dV}{dx} = k\frac{d}{dx}\left[\frac{x^2}{x-2R}\right] = k\left[\frac{(x-2R).2x - x^2.1}{(x-2R)^2}\right]$$ olur. Türevi sıfıra eşitlersek;

$\frac{dV}{dx} = k\left[\frac{x^2-4Rx}{(x-2R)^2}\right] = 0$ bulunur.Buradan $x(x-4R) = 0$, $x = 4R$ bulunur.

$x = 4R$ değeri $r^2 = \frac{R^2x}{x-2R}$ 'de yerine yazılırsa;

$r^2 = \frac{R^2.4R}{4R-2R} = 2R^2$, $r = \sqrt{2}R$ elde edilir.

27) Bir dik koninin içine çizilebilecek maksimum hacimdeki bir silindirin yüksekliğini hesaplayınız.

Çözüm: Koninin ve silindirin taban yarıçapları sırasıyla r ve y, yükseklikleri de h ve x olsun (Şekil 10.14). y ve x'i arıyoruz. ABE ve ACD üçgenlerinden $\frac{BE}{CD} = \frac{AE}{AD}$ yazılabilir.

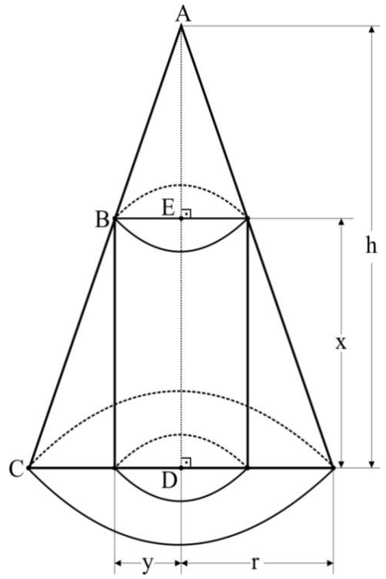
Bu ifadede BE=y, CD=r, AD=h, AE=h-x değerlerini;

$\frac{BE}{CD} = \frac{AE}{AD}$ ifadesinde yerine yazıp 'y'yi çekelim:

$\frac{y}{r} = \frac{h-x}{h}$, $y = \frac{r(h-x)}{h}$ olur.

Silindirin hacim ifadesinde y' yi yerine yazarsak:

$\text{V(x)} = \pi y^2 x = \frac{\pi r^2}{h^2}\text{x(h} - \text{x)}^2 = \text{k}(xh^2 - 2hx^2 + x^3)$ bulunur.($\text{k} = \pi r^2/h^2$)



Şekil 10.14

V'nin x'e göre türevi alınıp sıfıra eşitlenirse:

$V'(\mathrm{x}) = \mathrm{k}(h^2 - 4hx + 3x^2) = 0$ veya

$3x^2 - 4hx + h^2 = 0$ elde edilir.

Bu denklemin kökleri; x=h ve x=h/3 olduklarından bu köklerden hangisinin işimize yarayacağını 2.Türev testinden görelim:

$V''(\mathrm{x}) = \mathrm{k}(-4\mathrm{h} + 6\mathrm{x})$ türevinde x=h ve x=h/3

değerlerini yerine yazarsak;

$V''(\mathrm{h}) = \mathrm{k}(-4\mathrm{h} + 6\mathrm{h}) = 2\mathrm{kh} > 0$

Minimumu gösterdiği için h aranan kök değildir. $V''(\mathrm{h}/3) = \mathrm{k}(-4\mathrm{h} + 6\mathrm{h}/3) = -2\mathrm{kh} < 0$ olup

maksimum hacimdeki silindirin yüksekliği h/3 tür.

28) Dik silindir şeklinde ve 27 m^3 hacminde üstü açık bir su deposu yapılacaktır. Deponun tabanında kullanılacak malzemenin metre karesinin fiyatı, yanal yüzeyinde kullanılacak malzemenin m^2 sinin fiyatının iki katıdır.

Deponun en ucuza mal olacak boyutlarını hesaplayınız.

Çözüm: Deponun taban yarıçapı r, yüksekliği h olduğuna göre hacmi;

$V = \pi r^2 h = 27$ olur. Buradan; $\mathrm{H} = \frac{27}{\pi r^2}$ yazalım. Yanal yüzeyde kullanılacak malzemenin metre kare fiyatı p lira ise deponun toplam maliyeti;

$M = 2p.\pi r^2 + p.2\pi rh$ olur.(πr^2tabanalanı, $2\pi\mathrm{rh}$ yanal alan).h yi yerine koyalım:

$M = 2p\pi r^2 + 2\pi pr\frac{27}{\pi r^2} = 2\pi pr^2 + \frac{54p}{r}$ deponun maliyetinin minimum olması istediğine göre, bu fonksiyonun minimumu bulunacak demektir.

r ye göre türev alıp bunu sıfıra eşitlersek;

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi pr - \frac{54p}{r^2} = 0$$

Buradan;$r = \sqrt[3]{\frac{27}{2\pi}} = \frac{3}{\sqrt[3]{2\pi}}$ bulunur. İkinci türevde bunu yerine koyarak, minimuma karşılık olduğunu görelim:$\frac{d^2M}{dr} = 4\pi p + \frac{108p}{r^3} = 4\pi p + \frac{108p}{3^3/2\pi} = 4\pi p + 8\pi p = 12\pi p > 0$

Şimdi h' yi bulalım. Bunun için $\mathrm{H} = \frac{27}{\pi r^2}$ 'nin pay ve paydasını r ile çarpıp,r^3 yerine

$r = \sqrt[3]{\frac{27}{\pi}} = \frac{3}{\sqrt[3]{2\pi}}$ ' den elde edilen r^3 =27/2π yazarsak: $h = \frac{27r}{\pi r^3} = \frac{27.r}{\pi.27}.2\pi = 2r$ olur.

29) Bir pencere, bir dikdörtgen ile bunun üzerine yerleştirilmiş bir ikizkenar üçgenden ibarettir (Şekil 10.15). Üçgenin yüksekliği, tabanın 3/8 ine eşittir. Çevresi 9m olan bu pencereden maksimum miktarda ışık girmesi için boyutları ne olmalıdır?

Çözüm: Şekilden şu bağıntılar yazılabilir:

$h = \frac{3}{8}x,\ \ x + 2y + 2z = 9,\ \ z^2 = \mathrm{h}^2 + \frac{\mathrm{x}^2}{4}$ olup

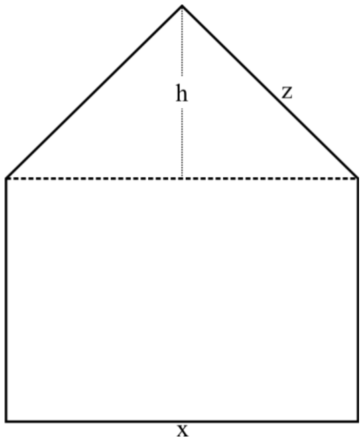
$h = \frac{3}{8}x$ değerini $z^2 = \mathrm{h}^2 + \frac{\mathrm{x}^2}{4}$

ifadesinde yerine yazarsak;

$z^2 = \frac{9}{64}x^2 + \frac{x^2}{4} = \frac{25}{64}x^2$ ve buradan $z = \frac{5}{8}x$ bulunur.

Bunu $x + 2y + 2z = 9$ ifadesinde yerine yazıp

y' yi çekelim: $x + 2y + \frac{5}{4}\mathrm{x} = 9,\ \ \mathrm{y} = \frac{1}{2}(9 - \frac{9\mathrm{x}}{4})$



Şekil 10.15

Pencereden maksimum miktarda ışık gelebilmesi için, alanın maksimum olması gerekir. Yukarıdaki h, y ve z'yi alan ifadesinde yerlerine yazarsak;

$A = xy + \frac{1}{2}hx = \frac{x}{2}\left(9 - \frac{9\mathrm{x}}{4}\right) + \frac{1}{2}.\frac{3}{8}\mathrm{x}^2 = \frac{9}{2}\mathrm{x} - \frac{15}{16}\mathrm{x}^2$ olur.

x'e göre türev alıp sıfıra eşitlersek;

$\frac{dA}{dx} = \frac{9}{2} - \frac{15}{8}x = 0$ ve buradan $\mathrm{x} = \frac{12}{5} = 2{,}40\mathrm{m}\ \ y = \frac{1}{2}(9 - \frac{9}{4}.\frac{12}{5}) = 1{,}80\mathrm{m}$

bulunur. Bu değerin ikinci türev değeri;

$A'' = -15/8 < 0$ olup $\mathrm{x} = 2{,}40\mathrm{m}$ ve $y = 1{,}80\mathrm{m}$ için alan maksimumdur.

30) Elektromotor kuvveti E, iç direnci r, dış direnci R olan bir pilin gücü; I,kapalı devreden geçen akım şiddeti olmak üzere;

$$I = \frac{E}{R + r},\ \ V = I.R\ \text{ ve }\ P = I.V = I.I.R = I^2R'\text{den(I yerine yazılarak)}$$

$P = \frac{E^2R}{(R+r)^2}$ Watt olur. P gücünü maksimum yapan R yi bulunuz.

Çözüm: P 'nin R ye göre türevi alınıp sıfıra eşitlenirse;

$\frac{dP}{dR} = E^2\frac{[(R+r)^2 - 2R(R+r)]}{(R+r)^4} = E^2\frac{(R+r) - 2R}{(R+r)^3} = E^2\frac{r - R}{(R+r)^3} = 0$ 'dan $R = r$ elde edilir.

10.5.2. Bükümlülük ile İlgili Çözümlü Örnekler

1) $\mathbf{y = \frac{1}{6}\left(x^3 - 6x^2 + 9x + 6\right)}$ artan, azalan olduğu aralıkları, varsa maksimum ve minimum noktaları bulup bükümlülüğünü inceleyiniz?

Çözüm: $f'(x) = y' = \frac{1}{6}\left(3x^2 - 12x + 9\right) = \frac{1}{2}\left(x^2 - 4x + 3\right)$

$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left(x^2 - 4x + 3\right) = 0$ ise $(x-3)(x-1) = 0$ ve buradan x=1 ; x=3 bulunur.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y '		+ + +	0	- - - - - -	0	+ + + + +	
y	$-\infty$	↗ ↗	1	↘ ↘ ↘	-1	↗ ↗	$+\infty$
			maksimum nokta		minimum nokta		

$(-\infty,1)$ ve $(3,\infty)$ aralıklarında fonksiyon artan iken $(1\,,3)$ aralığında fonksiyon azalır veya 2. türev testinden; $f''(1) = -1 < 0$ Yerel Maksimum ve $f''(3) = 1 > 0$ Yerel Minimum olur.

$f''(x) = y'' = \frac{1}{2}(2x - 4) = x - 2$ =0'dan x=2 bulunur. Buna göre;

x	$-\infty$	**2**	$+\infty$
y ''	- - -		+ + +
y	AşağıDoğru Bükümlü	**0** Büküm Noktası	YukarıDoğru Bükümlü

$(-\infty,2)$ aralığında eğri Aşağı doğru bükümlü ve $(2,\infty)$ aralığında eğri Yukarı doğru bükümlü iken (2,0) noktasında 2.türev işaret değiştirdiğinden (2,0) noktası büküm noktasıdır.

2) $f : IR \to IR \quad , f(x) = x^2.e^{-x}$ fonksiyonunun bükümlülüğünü inceleyiniz?

Çözüm: $f'(x) = 2x.e^{-x} - x^2.e^{-x} = e^{-x}\left(2x - x^2\right)$

$$f''(x) = (2-2x).e^{-x} - \left(2x - x^2\right).e^{-x} = 2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2xe^{-x} + x^2e^{-x} = \left(2 - 4x + x^2\right).e^{-x}$$

$e^{-x} > 0$ olduğundan $f''(x) = 0$ olması için; $x^2 - 4x + 2 = 0$ 'dan;

$x_1 = 2 + \sqrt{2}$ ve $x_2 = 2 - \sqrt{2}$ bulunur.

x	$-\infty$	$2-\sqrt{2}$		$2+\sqrt{2}$	$+\infty$
y ''	+ + +		- - -		+ + +
y	YukarıDoğru Bükümlü	$f(2-\sqrt{2})$ Büküm Noktası	AşağıDoğru Bükümlü	$f(2+\sqrt{2})$ Büküm Noktası	YukarıDoğru Bükümlü

$\left(-\infty, 2-\sqrt{2}\right)$ ve $\left(2+\sqrt{2}, \infty\right)$aralıklarındaYukarı Doğru $\left(2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}\right)$ aralığında Aşağı Doğru Bükümlüdür. $x=2-\sqrt{2}$ ve $x=2+\sqrt{2}$ noktaları büküm noktasıdır.

3) $f: IR \to IR \quad , f(x)=\ln(x^2+1)$ bükümlülüğünü inceleyiniz?

Çözüm: $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ ise $\quad f''(x)=\dfrac{2(x^2+1)-2x.2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$

$$f''(x)=0 \quad \Rightarrow \quad x^2-1=0 \text{ ise } x=\mp 1$$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
y''	---		+++		---
y	Aşağı Doğru Bükümlü	Ln2 Büküm Noktası	Yukarı Doğru Bükümlü	Ln2 Büküm Noktası	Aşağı Doğru Bükümlü

$(-\infty,-1)$ *ve* $(1,\infty)$ Yukarı Doğru Bükümlü iken $(-1,1)$ Aşağı Doğru Bükümlüdür.

Buna göre , (-1,Ln2) ve (1,Ln2) noktaları büküm noktasıdır.

4) $y=x^4-6x^3+12x^2-8x+1$ fonksiyonunun bükümlülüğünü inceleyiniz?

Çözüm: $y'=4x^3-18x^2+24x-8$

$$y''=12x^2-36x+24=x^2-3x+2=0 \text{ ise } (x-1)(x-2)=0 \text{ ve } x_1=1; x_2=2 \text{ bulunur.}$$

x	$-\infty$	1		2	$+\infty$
y''	+ + +		- - -		+ + +
y	YukarıDoğru Bükümlü	0 Büküm Noktası	AşağıDoğru Bükümlü	1 Büküm Noktası	YukarıDoğru Bükümlü

$(-\infty,1)$ve $(2,\infty)$ aralığında fonksiyon yukarı doğru bükümlü iken $(1,2)$ aralığında fonksiyon aşağı doğru bükümlüdür. $(1,0)$ *ve* $(2,1)$ noktaları ise 2.türev bu noktalarda işaret değiştirdiğinden büküm noktalarıdır.

10.6. Asimptotlar

10.6.1. Tanımlar

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\mp\infty$ ise $x=a$ ise Düşey Asimptot

$\lim\limits_{x\to\mp\infty} f(x)=a$ ise $y=a$ ise Yatay Asimptot

$\lim\limits_{x\to\mp\infty} f(x)=\infty \Rightarrow$ Eğik Asimptot olabilir.

$$\lim_{x\leftarrow\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty\Rightarrow \qquad \text{Eğik Asimptot yok.}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a\Rightarrow \lim_{x\to\infty}[f(x)-a.x]=b\Rightarrow y=ax+b \qquad \text{Eğik asimptot}$$

10.6.2. Asimptotlar ile ilgili Çözümlü Örnekler

1) $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+1}$ fonksiyonunun asimptotlarını bulunuz.

Çözüm: $x^2+1 \quad \forall$ x için $\neq 0$ dır. Yani düşey asimptot yoktur.

$$\lim_{x\to\infty}=\frac{x^2-3x+2}{x^2+1}=1 \Rightarrow y=1 \text{ yatay asimptot. Eğik asimptot yoktur.}$$

2) $y=\dfrac{2x^2-2x+3}{x+3}$ fonksiyonunun asimptotlarını inceleyiniz.

Çözüm: $x+3=0 \quad\Rightarrow\quad x=-3$

$$\lim_{x\to-3}\frac{2x^2-2x+3}{x+3}=\mp\infty$$

$x=-3$ doğrusu düşey asimptot. Payın derecesi paydanın derecesinden 1 büyük olduğunda eğik asimptot olabilir. Bunu bulmak için;

1.Yol : $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2-2x+3}{x+3}\right)\Big/x=\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-2x+3}{x+3}=2$

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-2.x]=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-2x+3}{x+3}-2x=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-2x+3-2x.(x+3)}{x+3}$$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{-8x+3}{x+3}=-8$ Öyleyse, y=2x-8 eğik asimptottur.

2.Yol : Pay paydaya bölünürse ;

$$\begin{array}{l|l}
2x^2-2x+3 & x+3 \\ \cline{2-2}
 & 2x-8 \\
\underline{-2x^2\mp 6x} & \\
-8x+3 & \\
\underline{-8x\mp 24} & \\
\quad 27 &
\end{array}$$

ise $y=2x-8$ eğik asimptottur.

3) $y=\dfrac{x^3+2}{x^2-1}$ fonksiyonunun asimptotlarını bulunuz.

Çözüm: $x^2-1=0 \quad\Rightarrow\quad x=+1 \qquad ; x=-1$

$\left.\begin{array}{l}x=+1\\x=-1\end{array}\right.$ doğruları düşey asimptottur.

Yatay asimptot yoktur. Payın derecesi paydadan büyük olduğu için;

$$x^3+2 \quad \Big| \; \frac{x^2-1}{x}$$

$\underline{x^3-x}$ y=x doğrusu eğik asimptottur.

$x+2$

4) $y=\left(\dfrac{x-2}{x}\right).e^{\frac{1}{x}}$ fonksiyonunun asimptotlarını bulunuz.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x-2}{x}\right).e^{\frac{1}{x}}=-\infty.e^{\infty}=-\infty \quad \Rightarrow \quad x=0$ doğrusu düşey asimptot.

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x}\right).e^{\frac{1}{x}}=1.e^{0}=1$ y = 1 doğrusu yatay asimptottur.

5) $y=\ln\left(\dfrac{x^2-4}{x^2-3x-4}\right)$ fonksiyonunun tanım aralıklarını, asimptotlarını, ekstremumlarını bulunuz.

Çözüm: Tanım Aralığı= $\ln\left(\dfrac{x^2-4}{x^2-3x-4}\right)>0$ ➔ T.A.= $(-\infty,-2)\cup(-1,2)\cup(4,\infty)$

$$y=\ln u \;\Rightarrow\; y'=\frac{u'}{u} \text{ idi . Buradan ; } y'=\left(\frac{x^2-4}{x^2-3x-4}\right)' \Big/ \left(\frac{x^2-4}{x^2-3x-4}\right)=0$$

$$y'=\frac{\left[2x\left(x^2-3x-4\right)-(2x-3)\left(x^2-4\right)\right]}{\left(x^2-3x-4\right)^2}.\frac{\left(x^2-3x-4\right)}{\left(x^2-4\right)}=0$$

$$y'=\frac{2x^3-6x^2-8x-2x^3-8x+3x^2-12}{\left(x^2-3x-4\right)\left(x^2-4\right)}=0$$

$$y'=\frac{-3x^2-12}{\left(x^2-3x-4\right)\left(x^2-4\right)}=0\rightarrow \begin{array}{l}-3x^2-12=0\\ -3x^2=12\end{array}$$

$x^2=-4$ ise $x\in IR$ yoktur. Ekstremum yoktur.

x	$-\infty$	-2	-1	2	4	$+\infty$
x^2-4	+ + +	- - -	- - -	+ + +	+ + +	
x^2-3x-4	+ + +	+ + +	- - -	- - -	+ + +	
$\dfrac{x^2-4}{x^2-3x-4}$	+ + +		+ + +	- - -	+ + +	

$$\lim_{x\to\mp\infty} \ln\left(\frac{x^2-4}{x^2-3x-4}\right) = \ln 1 = 0 \rightarrow y=0 \text{ doğrusu yatay asimptot.}$$

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \infty \quad \Rightarrow \quad x=-2 \qquad \text{Düşey asimptot.}$$

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \infty \quad \Rightarrow \quad x=-1 \qquad \text{Düşey asimptot.}$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \infty \quad \Rightarrow \quad x=2 \qquad \text{Düşey asimptot.}$$

$$\lim_{x\to 4} f(x) = \infty \quad \Rightarrow \quad x=4 \qquad \text{Düşey asimptot.}$$

10.7. Eğrilik

y=f(x) fonksiyonu y' = f '(x) türevi sürekli olan bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyonun grafiği üzerinde sabit bir A başlangıç noktasıyla herhangi bir P (x,y) noktası arasındaki yay uzunluğunu s ile gösterelim. s, x in bir fonksiyonu olarak düşünülebilir. Eğri üzerinde P (x,y) ile buna yakın bir Q (x+△x, y+△y) noktası arasındaki yay uzunluğu △s olsun(Şekil 10.16).

$\dfrac{\Delta s}{\Delta x} = \dfrac{\Delta s}{|PQ|} \cdot \dfrac{|PQ|}{\Delta x}$ Yazılabilir.

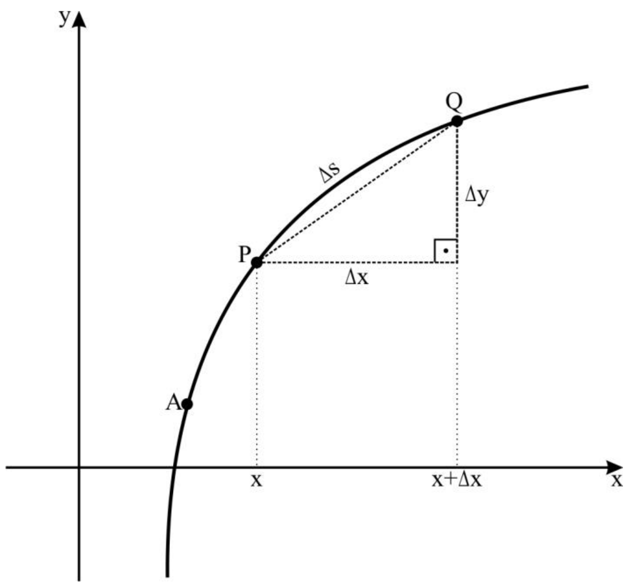
Buradan her iki yanın karesi alınarak;

$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = \left(\frac{\Delta s}{|PQ|}\right)^2 \cdot \left(\frac{|PQ|}{\Delta x}\right)^2 \left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2$$

$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = \left(\frac{\Delta s}{|PQ|}\right)^2 \cdot \frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}$$

$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = \left(\frac{\Delta s}{|PQ|}\right)^2 \cdot \left[1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right]$$

bulunur.



Şekil 10.16

Δx$\rightarrow$0 için Q noktası eğri üzerinde P ye yaklaşır. Bu durumda Δs yay uzunluğu |PQ| kiriş uzunluğuna yaklaşacağından$\left(\frac{\Delta s}{|PQ|}\right)\rightarrow 1$ olur. Buna göre yukarıdaki eşitliğin her iki yanınınΔx$\rightarrow$0 için limiti alınırsa;

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta s}{|PQ|}\right)^2 . \left[1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right]$$

$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ ve $\frac{ds}{dx} = \mp\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \mp\sqrt{1+(y')^2}$ bulunur.

Burada x ile s beraber artıyorlarsa işaret pozitif, x artarken s azalıyorsa negatif alınır. Benzer şekilde; $\frac{ds}{dy} = \mp\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$ dir. Eğri denkleminin x = h (t) , y = g (t) parametrik şeklinde verilmesi halinde ise;

$\frac{ds}{dt} = \mp\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$ olur. Biz eğri üzerindeki yönün, yay uzunluğu türevinin pozitif olacak şekilde belirlendiğini varsayacağız.

y= f (x) eğrisinin birbirine yakın P ve Q noktalarındaki teğetler arasındaki açı $\Delta\alpha$, PQ yayının uzunluğu Δs olsun (Şekil 10.17). $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ oranına PQ yayının **ortalama eğriliği**, bu oranın eğer varsa $\Delta s\rightarrow 0$ için limitine de eğrinin P noktasındaki **eğriliği** denir ve K ile gösterilir.

Yukarıdaki tanıma göre eğrilik;

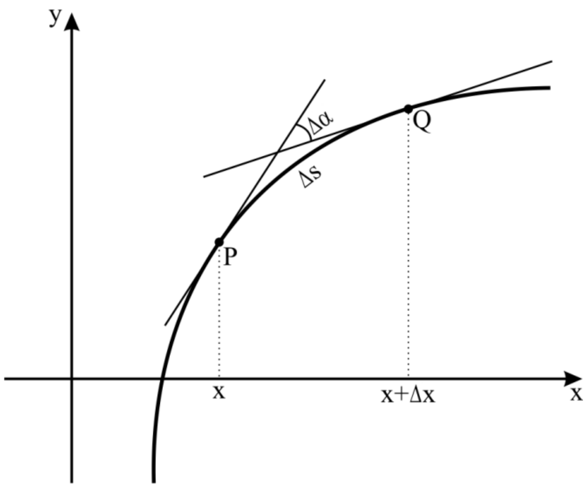
$$K = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds}\ olur.$$

$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha/dx}{ds/dx}$ şeklinde yazılabilir.

$\frac{dy}{dx} = \tan a$ olduğunu biliyoruz.

Buradan her iki yanın x'e göre türevi alınarak;

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (1+\tan^2\alpha)\frac{d\alpha}{dx}$$



Şekil 10.17

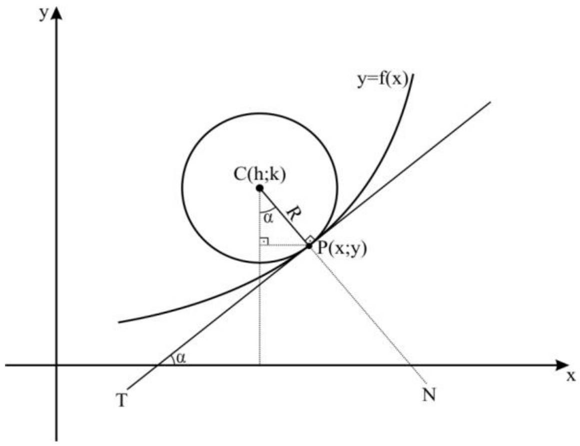
$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1+\tan^2 a} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ olur. $\frac{d\alpha}{dx}$ ve $\frac{ds}{dx}$ için daha önce bulduğumuz değerler

$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha/dx}{ds/dx}$ ifadesinde yerine yazılarak eğrilik formülü olarak;

$$K = \frac{\frac{d\alpha}{dx}}{\frac{ds}{dx}} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{y''}{[1+(y')^2]^{3/2}}\quad \text{bulunur.}$$

Bu formüle göre K ile y’’ aynı işaretlidir. y’’< 0 yani eğri aşağı doğru bükümlüyse K< 0 ve y’’ > 0 yani eğri yukarı doğru bükümlüyse K< 0 olur. y’’=0 olan noktada (büküm noktası) ise K=0 dır.

$K \neq 0$ olmak üzere $|\frac{I}{K}| = R$ ye **eğrilik yarıçapı** denir. P (x,y) noktasındaki normal üzerinde eğrinin içbükey olduğu yönde P’ den itibaren |PC|=R alınarak bulunan C noktasına P ye ait **eğrilik merkezi,** C merkezli R yarıçaplı çembere de **eğrilik çemberi** denir (Şekil 10.18)



Şekil 10.18

Eğrilik çemberinin merkezi C (h;k) ise $h = x - R.\sin\alpha$ $\quad ve \quad$ $k = y + R.\cos\alpha$ 'dır.

$$R = \frac{I}{K} = \frac{[1+(y')^2]^{3/2}}{y''}$$

$$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}$$

Değerleri yerlerine konarak C (h;k) merkezinin koordinatları;

$h = x - \frac{y'[1+(y')^2]}{y''}$ $\quad , \quad$ $k = y + \frac{1+(y')^2}{y''}$ bulunur. Eğrilik çemberinin denklemi ise;

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2$$

olur. P noktası y= f(x) eğrisini çizerken C eğrilik merkezi de bir eğri çizer. Buna y=f(x) eğrisinin evolütü denir. y=f(x) eğrisine de C’ nin çizdiği eğrinin involütü denir.

Örnek: $y = x^2 - 1$ eğrisinin P (-1;0) noktasındaki ;

a)Eğriliğini **b)**Eğrilik yarıçapını **c)**Eğrilik merkezini

d)Eğrilik çemberinin denklemini **e)**Eğrinin evolütünün denklemini bulunuz.

Çözüm:

a) y'=2x , y''=2 dir. P(-1;0) noktasında y' = -2 ve y'' = 2 olur. Buna göre P deki eğrilik;

$K = \frac{y''}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{(1+4)^{3/2}} = \frac{2}{5\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{25}$ bulunur.

b) $R = \left|\frac{I}{K}\right| = \frac{5\sqrt{5}}{2}$ dir.

c) Eğrilik merkezi C (h;k) ise

$$h = x - \frac{y'[1+(y')^2]}{y''} = -1 + \frac{2(1+4)}{2} = 4$$

$k = y + \frac{1+(y')^2}{y''} = 0 + \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$ 'dir. Buna göre C(4; $\frac{5}{2}$) olur.

d)Eğrilik çemberinin denklemi,

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2$'den $(x-4)^2 + \left(y-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{125}{4}$ bulunur.

e) Eğrinin herhangi bir (x;y) noktasındaki eğrilik merkezinin koordinatları

$$h = x - \frac{y'[1+(y')^2]}{y''} = x - \frac{2x(1+4x^2)}{2} = -4x^3$$

$$k = y + \frac{1+(y')^2}{y''} = x^2 - 1 + \frac{1+4x^2}{2} = \frac{6x^2-1}{2}$$

olur. h ve k arasında, bu iki eşitlikten x yok edilerek bulunacak bağıntı, C(h;k) eğrilik merkezinin geometrik yeri olan evolütün denklemini verir.

$$h = -4x^3 \ den \ x^3 = -\frac{h}{4} \ veya \ x^6 = \frac{h^2}{16}$$

$$k = \frac{6x^2-1}{2} \ den \ x^2 = \frac{2k+1}{6} \ veya \ x^6 = \left(\frac{2k+1}{6}\right)^3$$

Buradan da;

$$\frac{(2k+1)^3}{216} = \frac{h^2}{16} \ veya \ (2k+1)^3 = \frac{27}{2}h^2$$

bulunur. h=x ve k=y yazılarak bu denklem;

$(2y+1)^3 = \frac{27}{2}x^2$ şeklinde de yazılabilir.

Örnek : 2xy – y – x - 1 = 0 eğrisinin (1;0) noktasındaki eğrilik çemberinin denklemini bulunuz.

Çözüm: Kapalı fonksiyon türevine göre;2y + 2xy' – y' - 1 = 0

Tekrar türev alınarak; 4 y' + 2xy'' – y'' = 0

bulunur. Birinci eşitlikten (1;0) noktasında y' = 1, ikinci eşitlikten y'' = -4 bulunur.

$$K = \frac{y''}{[1+(y')^2]^{3/2}} = \frac{-4}{(1+1)^{3/2}} = \frac{-4}{2\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

$R = \left|\frac{I}{K}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$'dir. Eğrilik merkezinin koordinatları;

$h = x - \frac{y'[1+(y')^2]}{y''} = 1 - \frac{1\,(1+1)}{-4} = \frac{3}{2}$ ve $k = y + \frac{1+(y')^2}{y''} = 0 + \frac{1+1}{-4} = -\frac{1}{2}$ bulunur.

Eğrilik çemberinin denklemi;

$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ bulunur.

Örnek: $y = lnx$ eğrisinin eğrilik yarıçapının en küçük olduğu noktasını bulunuz.

Çözüm: $y' = \frac{1}{x}$, $y'' = -\frac{1}{x^2}$ ise $R = \left|\frac{\left[1+(y')^2\right]^{\frac{3}{2}}}{y''}\right| = \frac{(1+x^2)^{3/2}}{x}$

$\frac{dR}{dx} = \frac{(1+x^2)^{1/2}\,(2x^2-1)}{x^2} = 0$ 'dan $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *bulunur.* $\frac{dR}{dx}$ *türevi* $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ nin solunda negatif sağında pozitif olduğundan $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\, -\frac{1}{2}\,ln2\right)$ noktası y=lnx eğrisinin R eğrilik yarıçapının minimum olduğu noktadır.

Örnek : $x = t^2 - t$, $y = lnt$ parametrik denklemiyle verilen eğrinin t=1 noktasındaki

a) Eğriliğini **b)** Eğrilik çemberinin denklemini bulunuz.

Çözüm: a) $\frac{dx}{dt} = 2t - 1$ ve $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}$

Buradan ; $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{1}{t(2t-1)}$ ve tekrar türev alınarak;

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t(2t-1)}\right).\frac{dt}{dx} = \frac{1-4t}{t^2(2t-1)^2} \,.\, \frac{1}{2t-1} = \frac{1-4t}{t^2(2t-1)^3}$ bulunur.

t=1 için $\frac{dy}{dx} = 1$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -3$ olur.

$$K = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{-3}{(1+1)^{3/2}} = \frac{-3}{2\sqrt{2}} = -\frac{3\sqrt{2}}{4} \quad \text{bulunur.}$$

b) t=1 için x=0 ve y=0 dır. C(h;k) eğrilik merkezinin koordinatları

$$h = x - \frac{\frac{dy}{dx}\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\frac{d^2y}{dx^2}} = 0 - \frac{1(1+1)}{-3} = \frac{2}{3}$$

$$k = y + \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} = 0 + \frac{1+1}{-3} = -\frac{2}{3} \text{ bulunur.}$$

Eğrilik yarıçapı $R = \left|\frac{I}{K}\right| = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ *tür.*

Buradan eğrilik çemberinin denklemi;

$\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$ bulunur.

10.8. Belirsiz Şekiller

10.8.1.Tanım

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty \qquad \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$

$\lim\limits_{x\to x_0} k(x)=0 \qquad \lim\limits_{x\to x_o} l(x)=0$

$\lim\limits_{x\to x_0} j(x)=1$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler belirsizliklerdir.

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-g(x)\right]=\left[\infty-\infty\right]$ 2) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x).k(x)\right]=\left[0.\infty\right]$

3) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{k(x)}{l(x)}\right]=\left[\dfrac{0}{0}\right]$ 4) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$

Üstel Belirsizlikler

5) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{k(x)}=\left[\infty^0\right]$ 6) $\lim\limits_{x\to x_0} k(x)^{l(x)}=\left[0^0\right]$

7) $\lim\limits_{x\to x_0} j(x)^{f(x)}=\left[1^\infty\right]$

olarak tanımlanır.(3) ve (4) nolu belirsizliklerde L'Hospital Teoremi uygulanır.

Teorem.10.1: f ve g, (a,b) aralığında sürekli türevlere sahip iki fonksiyon olsun.

$x_0\in(a,b)$ noktasında; $f(x_0)=g(x_0)=0$ ve f' ve g' fonksiyonları da x_0 noktasında sürekli iken $g'(x_0)\neq 0$ olsun.Bu durumda; $\operatorname{Lim}\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$ olup yine $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ veya $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ belirsizlik devam ederse bu kural sonuç alınana kadar tekrarlanır.

10.8.2.Belirsiz Şekiller İle İlgili Çözümlü Örnekler

1) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{\log x}-\dfrac{1}{x-1}\right]$ limitini hesaplayınız?

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{\log x}-\dfrac{1}{x-1}\right]=(\infty-\infty)$ (Payda Eşitlesek)

$\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{x-1-\log x}{(x-1).\log x}\right]=\left[\dfrac{0}{0}\right]$ ve $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ olduğuna göre L'Hospital kuralına göre;

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-1-\log x)'}{((x-1).\log x)'}=\lim_{x\to1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\log x+\frac{x-1}{x}}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{x-1}{\cancel{x}}}{\frac{x.\log x+(x-1)}{\cancel{x}}}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x.\log x+x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

Yine L'Hospital uygularsak; $\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)'}{[(x-1)+x.\log x]'}=\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{\log x+1+1}=\frac{1}{2}$

2) $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{k/x}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{k/x}=1^{\infty}$

$$\lim_{x\to0}\ln(1+x)^{k/x}=\lim_{x\to0}\frac{k}{x}.\ln(1+x)=0.\infty\Rightarrow\quad\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{\frac{x}{k}}=\left[\frac{0}{0}\right]\text{(L'Hospitalden)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(\ln(1+x))'}{\left(\frac{x}{k}\right)'}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{k}}=k$$

$$\lim_{x\to0}\ln(1+x)^{k/x}=k\quad\Rightarrow\quad\lim_{x\to0}(1+x)^{k/x}=e^{k}$$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x}+1\right)^{x}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x}+1\right)^{x}=1^{\infty}$

$$\Rightarrow\quad\ln\left(\frac{2}{x}+1\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}x.\ln\left(\frac{2}{x}+1\right)=(0.\infty)$$

$$\Rightarrow\quad\lim_{x\to\infty}\frac{\left[\ln\left(\frac{2}{x}+1\right)\right]'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-2/\ x^{2}}{\frac{2}{x}+1}}{-\frac{1}{x^{2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-2/x^{2}}{\frac{x+2}{x}}}{-\frac{1}{x^{2}}}=\lim_{x\to\infty}-\frac{2}{x^{2}}.\frac{x}{(x+2)}\Big/-\frac{1}{x^{2}}$$

$$\Rightarrow\quad\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x.(x+2)}.x^{2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x+2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\qquad\text{(L'Hospital uygulanırsa)}$$

$$\Rightarrow\quad\lim_{x\to\infty}\frac{(2x)'}{(x+2)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{1}=2\Rightarrow\quad\lim_{x\to\infty}\ln\left(2/x+1\right)^{x}=2\quad\Rightarrow\quad\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x}+1\right)^{x}=e^{2}$$

4) $\lim\limits_{x\to e}(\ln x)^{\ln(x-e)}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to e}(\ln x)^{\ln(x-e)} = 1^{\infty}$

$$y = \lim_{x\to e}(\ln x)^{\ln(x-e)} \Rightarrow \ln y = \ln \lim_{x\to e}(\ln x)^{\ln(x-e)}$$

$$\ln y = \lim_{x\to e}\ln(\ln x)^{\ln(x-e)} \Rightarrow \ln y = \lim_{x\to e}\ln(x-e)\ln(\ln x) = (0.\infty)$$

$$\ln y = \lim_{x\to e}\frac{\ln(x-e)}{\dfrac{1}{\ln(\ln x)}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \qquad \text{(L'Hospital uygulanırsa)}$$

$$\ln y = \lim_{x\to e}\frac{[\ln(x-e)]'}{\left[\dfrac{1}{\ln(\ln x)}\right]'} = \lim_{x\to e}\frac{\dfrac{1}{x-e}}{\dfrac{-\dfrac{1}{x.\ln x}}{\ln^2(\ln x)}} = \lim_{x\to e} -\frac{x.\ln x.\ln^2(\ln x)}{x-e} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

(L'Hospital uygulanırsa)

$$\ln y = \lim_{x\to e}\left(\underbrace{-\frac{\ln x.\ln^2(\ln x) + \ln^2(\ln x) + 2.\ln x.\ln(\ln x)}{1}}_{\theta(x)}\right)$$

$$= \lim_{x\to e}\theta(x) = 0 \;\Rightarrow\; \ln y = 0 \;\Rightarrow\; y = e^0 = \mathbf{1} \;\Rightarrow\; \lim_{x\to e}(\ln x)^{\ln(x-e)} = e^0 = 1$$

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{1/x} + \dfrac{1}{x}\right)^x$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{1/x} + \dfrac{1}{x}\right)^x = (1)^{\infty}$

$$y = \left(e^{1/x} + \frac{1}{x}\right)^x \quad \Rightarrow \quad \ln y = x.\ln\left(e^{1/x} + \frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty}\ln y = \lim_{x\to\infty} x.\ln\left(e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}\right) = (0.\infty)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(e^{1/x} + \dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] \quad \text{(L'Hospital uygulanırsa)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(-\frac{1}{x^2}.e^{1/x}-\frac{1}{x^2}\right) \Big/ \left(e^{1/x}+\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{x^2}\left(e^{1/x}+1\right)}{-\frac{1}{x^2}\left(e^{1/x}+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{1/x}+1}{\left(e^{1/x}+\frac{1}{x}\right)} = 2$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty} e^{1/x}+1=2 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty} \ln y = 2 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty} y = e^2 \Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty}\left(e^{1/x}+\frac{1}{x}\right)^x = e^2$$

6) $\lim\limits_{x\to e}\left(\ln^2 x\right)^{\left(\frac{1}{1-\ln x}\right)}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to e}\left(\ln^2 x\right)^{\left[\frac{1}{1-\ln x}\right]} = \left(1^{\infty}\right)$

$$y = \lim_{x\to e}\left(\ln^2 x\right)^{\left[\frac{1}{1-\ln x}\right]} \quad \Rightarrow \quad \ln y = \lim_{x\to e}\left[\frac{1}{1-\ln x}\right].\ln\left(\ln^2 x\right)$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to e} \ln y = \lim_{x\to e}\left[\frac{1}{1-\ln x}\right].\ln\left(\ln^2 x\right) = (0.\infty)$$

$$= \lim_{x\to e} \frac{\ln\left(\ln^2 x\right)}{1-\ln x} = \left[\frac{0}{0}\right] \text{L'Hospital uygulanırsa;} = \lim_{x\to e} \frac{\frac{2\ln x.\frac{1}{x}}{\ln^2 x}}{-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to e} -\frac{2}{x}\Big/\ln x \Big/ \frac{1}{x}$$

$$= \lim_{x\to e} -\frac{2}{x.\ln x}\Big/\frac{1}{x} = \lim_{x\to e} -\frac{2}{x.\ln x}.\frac{x}{1} = \lim_{x\to e} -\frac{2}{\ln x} = -2$$

$$\Rightarrow \quad \ln y = -2 \quad \Rightarrow \quad y = e^{-2} \qquad \Rightarrow \quad \lim_{x\to e}\left(\ln^2 x\right)^{\frac{1}{1-\ln x}} = \frac{1}{e^2}$$

7) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x-a}{\sin x - \sin a}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x-a}{\sin x - \sin a} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$ (L'Hospital uygulanırsa)$\Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1}{\cos a} = \sec a$

8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{x^3}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{x^3} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$ (L'Hospital uygulanırsa)

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x-\sin x)'}{\left(x^3\right)'} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] \text{(L'Hospital uygulanırsa)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)'}{(3x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \left[\frac{0}{0}\right] \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{(6x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$$

9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$ (L'Hospital uygulanırsa)

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \left[\frac{0}{0}\right] \text{(L'Hospital uygulanırsa)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \left[\frac{0}{0}\right] \text{(L'Hospital uygulanırsa)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{(2x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

10) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3+5x^4}{2x+x^3+3x^4}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3+5x^4}{2x+x^3+3x^4} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ (L'Hospital uygulanırsa)

$$\Rightarrow \lim_{x\to \infty} \frac{(3+5x^4)'}{(2x+x^3+3x^4)'} = \lim_{x\to \infty} \frac{20x^3}{12x^3+3x^2+2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \text{(L'Hospital uygulanırsa)}$$

$$= \lim_{x\to \infty} \frac{60x^2}{36x^2+6x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \Rightarrow \lim_{x\to \infty} \frac{120x}{72x+6} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \text{(L'Hospital uygulanırsa)}$$

$$= \lim_{x\to \infty} \frac{120}{72} = \frac{5}{3}$$

11) $\lim\limits_{x\to \infty} \left[\dfrac{x^2}{x-1} - \dfrac{x^2}{x+1}\right]$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to \infty} \left[\dfrac{x^2}{x-1} - \dfrac{x^2}{x+1}\right] = [\infty - \infty]$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x^2(x+1)-x^2(x-1)}{(x^2-1)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \Rightarrow \lim_{x\to \infty} \frac{x^3+x^2-x^3+x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to \infty} \frac{2x^2}{x^2-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to \infty} \frac{4x}{2x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to \infty} \frac{4}{2} = 2$$

12) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2+x-30}{\sqrt{x-1}-2}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2+x-30}{\sqrt{x-1}-2}=\begin{bmatrix}0\\ \hline 0\end{bmatrix}$ (L'Hospital uygulanırsa)

$$\lim_{x\to 5}\frac{\left(x^2+x-30\right)'}{\left(\sqrt{x-1}-2\right)'}=\lim_{x\to 5}\frac{2x+1}{\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}}=\frac{11}{\dfrac{1}{4}}=44$$

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x(1-e^x)}{(1+x)\log(1-x)}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x(1-e^x)}{(1+x)\log(1-x)}=\begin{bmatrix}0\\ \hline 0\end{bmatrix}$ (L'Hospital uygulanırsa)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x(1-e^x)\right)'}{\left[(1+x)\log(1-x)\right]'}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x(1-e^x)-e^{2x}\right)}{\log(1-x)-\dfrac{(1+x)}{(1-x)}}=\frac{-1}{-1}=1$$

14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{-3x}}{\sin 2x}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{-3x}}{\sin 2x}=\begin{bmatrix}0\\ \hline 0\end{bmatrix}$ (L'Hospital uygulanırsa...)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{3x}-e^{-3x}\right)'}{(\sin 2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{3e^{3x}+3e^{-3x}}{2\cos 2x}=\frac{6}{2}=3$$

15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^x$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^x=\left(1^\infty\right)$ ise $\mathbf{y=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^x}$ ise $\mathbf{Lny=Ln\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^x}$

$$\mathbf{\ln y=\lim_{x\to\infty}x.\ln\left(1-\frac{3}{x}\right)=(0.\infty)}$$

$$\ln y=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1-\dfrac{3}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}}=\begin{bmatrix}0\\ \hline 0\end{bmatrix}\rightarrow \text{L'Hospital uygulanırsa}$$

$$\ln y = \lim_{x \to \infty} \frac{\left(\ln\left(1 - \frac{3}{x}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}$$

$$\ln y = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{3}{x^2} \Big/ 1 - \frac{3}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{3}{x^2} \Big/ \frac{x-3}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{3}{x(x-3)}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{-3x^2}{\cancel{x}(x-3)} = \lim_{x \to \infty} \frac{-3x}{x-3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$ L'Hospital uygulanırsa;

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{(-3x)'}{(x-3)'} = \lim_{x \to \infty} \frac{-3}{1} = -3$$

$$\Rightarrow \ln y = -3 \Rightarrow y = e^{-3} \Rightarrow \lim_{x \to \infty} y = \frac{1}{e^3} \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^x = \frac{1}{e^3}$$

16) $\lim_{x \to 0^+} \left(e^x - 1\right).\cot x = ?$

Çözüm: $\lim_{x \to 0^+} \left(e^x - 1\right).\cot x = (0.\infty)$ ise $\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{\tan x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{1} = 1$

17) $\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{x-1}\right) = ?$

Çözüm: $\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{x-1}\right) = (\infty - \infty) = \lim_{x \to 1^+} \left(\frac{x - 1 - x.\ln x}{(x-1).\ln x}\right) = \left[\frac{0}{0}\right]$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 1^+} \frac{1 - \ln x}{x + 1} = +\frac{1}{2}$$

18) $\lim_{x \to 0} (\log x)^x = ?$

Çözüm: $\lim_{x \to 0} (\log x)^x = \left[\infty^0\right]$ ise $y = \lim_{x \to 0} (\log x)^x$

$$\ln y = \lim_{x \to 0} \ln (\log x)^x = \lim_{x \to 0} x.\ln(\log x) = (0.\infty) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(\log x)}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x} \Big/ \ln x}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} -\frac{\frac{1}{x.\ln x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} -\frac{x}{\ln x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$ L'Hospital uygulanırsa ;

$\ln y = \lim_{x\to 0} -x = 0$ ise $y = e^0 = 1$

19) $\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x} = ?$

Çözüm: $\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x} = \left[0^0\right]$

$$\ln y = \lim_{x\to 0^+} \sin x.\ln x = [\infty.\infty] \Rightarrow \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\csc x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$\ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\text{Cos}x}{\sin^2 x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \Rightarrow \ln y = \lim_{x\to 0^+} -\frac{\sin^3 x}{x\text{Cos}x} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\Rightarrow \ln y = \lim_{x\to 0^+} -\frac{3\sin^2 x.\text{Cos}x}{\text{Cos}x - x.\text{Sin}x} = \left[\frac{0}{1}\right] = 0 \quad \text{ise } y = e^0 = 1$$

20) $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$ limitini bulunuz.

Çözüm: $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \left[\infty^0\right] \Rightarrow \ln y = \lim_{x\to\infty} \ln x^{\frac{1}{x}}$

$$\ln y = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}.\ln x = [0.\infty] \Rightarrow \ln y = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \text{ ise}$$

$$\ln y = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0 \Rightarrow y = \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

10.9.Diferansiyel

Tanım: $\frac{dy}{dx}$ sembolünde görülen dx ve dy büyüklüklerini açıklayalım: $y = f(x)$ olmak üzere; dx büyüklüğüne "x" bağımsız değişkeninin diferansiyeli ve $dy = f'(x).dx$ olarak tanımlanan dy büyüklüğüne de "y " bağımlı değişkeninin diferansiyeli denir. Eşitlikte de görüldüğü gibi dy diferansiyeli x'in fonksiyonudur.

Teorem: f ve g türevlenebilen fonksiyonlar ise;

i) $d(f \mp g) = df \mp dg$

ii) $d(f.g) = gdf + fdg$

iii) $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2} \quad (g \neq 0)$

10.9.1. Diferansiyelin Geometrik Yorumu

$y = f(x)$ fonksiyonu $x = x_O$ ‘da türevlenebilen bir fonksiyon olup, x_O ’in civarında grafiği Şekil 10.19’da görüldüğü gibi olsun.

$|PH| = \Delta x$ ve $|QH| = \Delta y$

$|RH| = f'(x_O).|PH|$

$|RH| = f'(x_O).\Delta x$

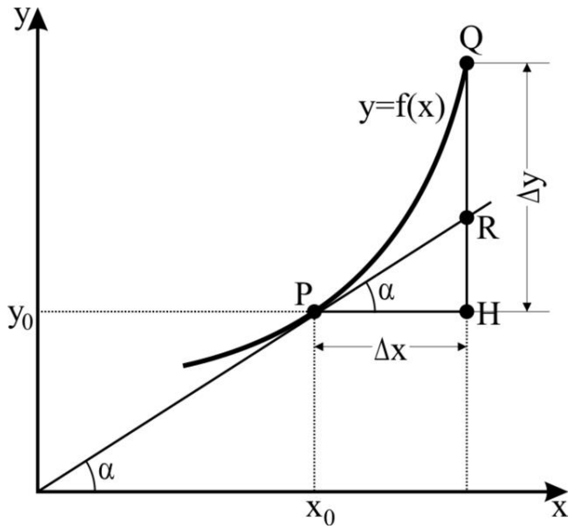
$|RH| = f'(x_O).dx \Rightarrow \Delta x = dx$

$\tan\alpha = f'(x_O) = \frac{|RH|}{|PH|}$

$\forall x$ için $|RH| = f'(x).dx = dy$

$|RH| = dy$ olduğundan

$|RH|$ f ’nin x_O’daki diferansiyeldir.



Şekil 10.19. Diferansiyelin geometrik yorumu

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ oranı için öyle bir $\varepsilon \to 0$ sayısı seçelim ki; $\Delta x \to 0$ iken $\varepsilon \to 0$ olsun. Buna göre ;

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_O) + \varepsilon$ dir

$\Rightarrow \Delta y = f'(x_O).\Delta x + \varepsilon.\Delta x \Rightarrow \Delta y \cong dy$ olur. Bunu birkaç örnekle açıklayalım.

Örnek : y = f (x) = x^2 + 3x fonksiyonu için Δx in x artmasına karşılık Δy artmasını ve dy diferansiyelini bulunuz.

Çözüm: Δy = f (x + Δ x) – f (x)

= $(x + \Delta x)^2$ + 3 (x + Δx) – (x^2 + 3x)

= (2x + 3) Δx + $(\Delta x)^2$ ‘dir. dy diferansiyeli ise;

dy= y’ . dx = (2x + 3) dx= (2x + 3). Δx bulunur.

Örnek : y = f (x) = x^3 fonksiyonunda x, x = 2 den itibaren Δx = 0,01 kadar artırılıyor. y’nin gerçek değişimi olan Δy’ yi ve dy diferansiyelini bulunuz.

Çözüm: $\Delta y = (2{,}01)^3 - (2)^3 = 8{,}120601 - 8 = 0{,}120601$ dir. y' deki değişimin yaklaşık değeri diferansiyelle, $x = 2$, $dx = 0{,}01$ alınarak

$dy = y' \cdot dx = 3x^2\, dx = 3.2^2 \cdot 0{,}01 = 0{,}12$

olarak bulunur. $\Delta Y - dy = 0{,}000601$ olup çok küçüktür. Buradan da yaklaşık hesaplamalarda $\Delta y \cong dy$ alınabileceği görülebilir.

10.9.2. Diferansiyel Kuralları

Bir $y = f(x)$ fonksiyonun diferansiyeli, $dy = y' \cdot dx$ formülü ile kolayca bulunabilir. Diğer taraftan bu formülden, diferansiyel alma kurallarının türev alma kuralları ile aynı olduğu da görülebilir. Örneğin:

$y = u \cdot v$ ise $dy = y' \cdot dx = (u' \cdot v + v' \cdot u)dx = u' \cdot v \cdot dx + v' \cdot u \cdot dx$ ‘dir.

$u' \cdot dx = du$ ve $v' \cdot dx = dv$ olduğuna göre;

$y = u \cdot v$ ise $dy = v \cdot du + u \cdot dv$ bulunur.

Bazı diferansiyel formülleri aşağıda verilmiştir.

Fonksiyon	**Diferansiyel**
1) $y = c$ (c sabit)	$dy = 0$
2) $y = c \cdot u$	$dy = c \cdot du$
3) $y = u \pm v \pm w \pm \dots$	$dy = du \pm dv \pm dw \pm \dots$
4) $y = u \cdot v$	$dy = v \cdot du + u \cdot dv$
5) $y = \frac{u}{v}$	$dy = \frac{v\,.du - u\,.\,dv}{v^2}$
6) $y = u^n$	$dy = n \cdot u^{n-1} \cdot du$
7) $y = \text{Sin } u$	$dy = \text{Cos } u \cdot du$
8) $y = \text{Cos } u$	$dy = -\text{Sin } u \cdot du$
9) $y = e^u$	$dy = e^u \cdot du$
10) $y = ln\, u$	$dy = \frac{du}{u}$

Örnek 1: Aşağıdaki fonksiyonların diferansiyellerini bulunuz.

a) $y = x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ b) $y = (x^2 - 3)^{5/2}$ c) $y = \text{Cos}^3\, 2x$

Çözümü:

a) $dy = d\,(x^3) - d\,(2x^2) + d\,(3x) - d\,(5)$ (3.formül)

$= 3x^2\, dx - 4x \cdot dx + 3dx = (3x^2 - 4x + 3)\, dx$

b) $dy = d\,(x^2 - 3)^{5/2} = \frac{5}{2}\,(x^2 - 3)^{3/2}\, d\,(x^2 - 3)$ (6.formül)

$= \frac{5}{2}\,(x^2 - 3)^{3/2}\, .2x \cdot dx = 5x\,(x^2 - 3)^{3/2}\, dx$

c) $dy = d\,(\text{Cos}^3\, 2x) = 3\,\text{Cos}^2 2x\, .d\,(\text{Cos} 2x)$ (8.formül)

$= 3\,\text{Cos}^2 2x \cdot (-2\,\text{Sin } 2x \cdot dx) = -6\,\text{Cos}^2 2x \cdot \text{Sin } 2x \cdot dx$

Örnek 2: $x^3 + x^2 y - 2y^2 = 3$ kapalı fonksiyonunda önce dy diferansiyelini, sonra bundan yararlanarak $\frac{dy}{dx}$ türevini bulunuz.

Çözüm: $d(x^3) + d(x^2y) - d(2y^2) = d(3)$

$3x^2 . dx + y . d(x^2) + x^2 .dy - 4y .dy = 0$

$3x^2 dx + y .2x . dx + x^2dy - 4y .dy = 0$

$(x^2 - 4y) dy = -(3x^2 + 2xy) dx$

$dy = -\frac{(3x^2+2xy)}{x^2-4y}.dx$ veya $\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2+2xy}{x^2-4y}$ bulunur.

Örnek 3: $y = e^{x/y}$ olduğuna göre dy ve $\frac{dy}{dx}$ i bulunuz.

$y = e^{x}/_{y}$ ise $\ln y = \frac{x}{y}$

Çözüm: $\ln y = \frac{x}{y}$'nin her iki tarafının türevini alırsak;

$\frac{dy}{y} = \frac{ydx - x\ dy}{y^2}$ olur ve buradan;

y. dy = y.dx – x.dy veya (x + y) . dy = y . dx bulunur. Bu ifadede y'yi yalnız bırakırsak;

$dy = \frac{y}{x+y}$ dx olur ve böylece $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+y}$ olarak elde edilir.

Örnek 4: x = 2 Sin t + Cos 2t ve y = 2 Cost + Sin 2t olduğuna göre $\frac{dy}{dx}$ i bulunuz.

Çözüm: dx = (2 Cost – 2 Sin 2t) dt ve dy = (- 2Sin t + 2 Cos 2t) dt'dir. Buradan

$\frac{dy}{dx} = \frac{Cos\ 2t - Sint}{Cost - Sin\ 2t}$ bulunur.

10.9.3. Diferansiyel Yardımıyla Yaklaşık Hesaplama

y = f (x) fonksiyonunda x e verilen Δx artması için y'nin Δy değişme miktarının $\Delta y \cong dy$ olduğunu biliyoruz. Bu özellik, fonksiyon artışlarının yaklaşık olarak diferansiyelle bulunabilmesini sağlar ki bu da hesaplamayı kolaylaştırır. Çünkü dy'yi bulmak, y'nin gerçek artışı olan Δy'yi bulmaktan daha kolaydır.

Örnek.1: $y = \frac{x}{x^2+1}$ fonksiyonunda x değişkeni x = 3 den x = 3,02 ye kadar artırılıyor. y'deki değişimi diferansiyelle yaklaşık olarak bulunuz.

Çözüm: x = 3 , Δx = dx = 0,02 alınarak

$dy = y' . dx = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}\ dx = \frac{-8}{10^2}$. 0,02 = - 0,0016 bulunur. Buna göre x , x = 3 den itibaren

Δx = 0,02 kadar artırılırsa y , yaklaşık olarak dy = - 0,0016 kadar değişir.(0,0016 azalır).

Örnek.2: $\sqrt{38} \cong ?$

Çözüm: $y = \sqrt{x} = x^{1/2}$

$y' = \frac{1}{2} . x^{-1/2} \Rightarrow dy = y'.dx = \frac{1}{2\sqrt{x}} . dx$

x=36 alalım $dx = x_2 - x_1 = 38 - 36 = 2$ olur.

$y' = \frac{1}{2} . x^{-1/2} \Rightarrow dy = y'.dx = \frac{1}{2\sqrt{x}} . dx = \frac{1}{2\sqrt{36}} . 2 = \frac{1}{6}$

$dy = y_2 - y_1 = \sqrt{38} - \sqrt{36} = \frac{1}{6}$ ise $\sqrt{38} - 6 = \frac{1}{6} \Rightarrow \sqrt{38} \cong \frac{37}{6}$

Örnek 3: $\sqrt[3]{127}$nin değerini yaklaşık olarak hesaplayınız.

Çözüm: $y = \sqrt[3]{x}$ fonksiyonunda x = 125 için $y = \sqrt[3]{125^2} = 5$ dir.

x ‘e $\Delta x = 2$ artması verelim.

$dy = y' . dx = \frac{1}{3 . \sqrt[3]{x^2}} dx = \frac{1}{3 . \sqrt[3]{125^2}} . 2 = \frac{2}{75} = 0{,}02\overrightarrow{6}$

bulunur. O halde;

$\sqrt[3]{127} = \sqrt[3]{125} + \Delta y \cong \sqrt[3]{125} + dy = 5 + 0{,}02\overrightarrow{6} = 5{,}02\overrightarrow{6}$dır.

Örnek.4: $\sqrt[3]{61} \cong ?$

Çözüm: $\boldsymbol{y = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}}$

$y' = \frac{1}{3} . x^{-2/3} \Rightarrow dy = y'.dx = \frac{1}{3.\sqrt[3]{x^2}} . dx$

$y = \sqrt[3]{x}$ fonksiyonunda x = 64 için $y = \sqrt[3]{64^2} = 3$

x = 64 için $dx = x_2 - x_1 = 61 - 64 = -3$

$dy = \frac{1}{3.\sqrt[3]{x^2}} . dx = \frac{1}{3.\sqrt[3]{64^2}} . (-3) = -\frac{1}{16}$

$dy = y_2 - y_1 = \sqrt[3]{61} - \sqrt[3]{64} = -\frac{1}{16} + 4 = \sqrt[3]{61} = \frac{63}{16}$

Örnek.5: Yarıçapı r=10 cm olan bir metal levha ısıtılınca genleşerek r=10,05 cm olmaktadır. Alandaki yaklaşık artışı bulunuz.

Çözüm: Dairenin alanı s = πr^2 olup r = 10 cm ve dr = 0,05 cm. alınarak alandaki yaklaşık artış;

ds =s'.dr = $2\pi r$. dr = 20 π . 0,05 = π = 3,14 cm^2 bulunur.

10.9.4. Ardışık Diferansiyeller

y= f(x) fonksiyonunun diferansiyelinin diferansiyeline bu fonksiyonun 2. mertebeden diferansiyeli denir ve bu d^2y veya d^2 f (x) simgeleriyle gösterilir.

Bu tanıma göre

$d^2y = d(dy) = d(y' . dx) = (y' . dx)' . dx = (y'' . dx) . dx$ $\quad d^2y = y'' . dx^{2'}$ dir.

y = f (x) in 3., 4., …., n . mertebeden diferansiyelleri benzer biçimde tanımlanır.

3 . mertebeden diferansiyel: $d^3y = y''' . dx^3$

4 . mertebeden diferansiyel: $d^4y = y^{(4)} . dx^4$

n . mertebeden diferansiyel: $d^ny = y^{(n)} . dx^n$

şeklindedir. Bu formüllerden ardışık türev formülleri;

$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$, $y''' = \frac{d^3y}{dx^3}$, $y^{(4)} = \frac{d^4y}{dx^4} \ldots\ldots y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$ olarak yazılır.

Örnek.1: $y = x^3 - 2x^2 + x - 3$ fonksiyonunun 3 . mertebeden diferansiyelini bulunuz.

Çözüm: $dy = (3x^2 - 4x + 1)\, dx$

$d^2y = (6x - 4)dx^2$

$d^3y = 6 . dx^3$

Örnek.2: $y = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun ardışık diferansiyellerini bulunuz.

Çözüm: $dy = -\frac{1}{x^2}\, dx$

$d^2 y = \frac{1.2}{x^3}\, dx^2$

$d^3 y = -\frac{1.2.3}{x^4} dx^3$

$d^ny = (-1)^n \frac{1.2.3 \ldots\ldots\ldots\ldots n}{x^{n+1}} dx^n = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}\, dx^n$

Örnek.3 : $z = x.e^x$ ise $d^nz = ?$

Çözüm: $dz = (e^x + xe^x)\, dx = (x + 1)\, e^x\, dx$

$d^2z = [\, e^x + (x + 1)\, e^x\,]\, dx^2 = (x + 2)\, e^x . dx^2$

$d^3z = [e^x + (x + 2)\, e^x\,]\, dx^2 = (x + 3)\, e^x\, dx^3$

$d^nz = (x + n)\, e^x dx^n$

Örnek.4: Bir çemberin yarıçapı 6cm'den 6,25cm'ye değiştirilirse çemberin yarıçapındaki artış miktarı ne kadar olur?

Çözüm: $Ç = 2\pi r \rightarrow Ç' = 2\pi \Rightarrow \frac{dÇ}{dr} = 2\pi \Rightarrow dÇ = 2\pi.dr = 2\pi.(0,25) = 0,5\pi$

Örnek.5: Bir dairenin yarıçapı 8,4m'den 5m'ye değiştirilirse dairenin alanındaki azalma miktarı ne kadar olur?

Çözüm: $A = \pi.r^2 \rightarrow A' = 2\pi r \Rightarrow \frac{dA}{dr} = 2\pi r \Rightarrow dA = 2\pi r dr = 2\pi.5(3,4) = 34\pi$

Örnek.6: Bir kürenin yarıçapı 2,5cm'den 3,8cm'ye değiştirilirse kürenin hacmindeki artış ne kadar olur?

Çözüm: $V=\frac{4}{3}\pi r^3 \to V'=\frac{4}{3}\pi 3R^2 \Rightarrow \frac{dV}{dr}=4\pi r^2 \Rightarrow dV=4\pi r^2 dr=4\pi.4^2(1{,}3)=83{,}2\pi$

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki denklemlerden $\frac{ds}{dx}$ yay uzunluğu türevlerini bulunuz.

1) $y=x^3$ $\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+9x^4}$

2) $x^2+4y^2=8$ $\frac{ds}{dx}=\sqrt{\frac{32-3x^2}{32-4x^2}}$

3) $6xy=x^4+1$ $\frac{ds}{dx}=\frac{x^4+1}{2x^2}$

Aşağıdaki fonksiyonlar için $\frac{ds}{dt}$ türevlerini bulunuz.

4) $x=t^3\ ,\ y=3t^2-1$ $\frac{ds}{dt}=|3t|.\sqrt{t^2+4}$

5) $x=\sin t\ ,\ y=2\,Cos\,t$ $\frac{ds}{dt}=\sqrt{1+3Sin^2\,t}$

Aşağıdaki eğrilerin yanlarında verilen noktalarındaki eğriliklerini bulunuz.

6) $y=2x^2\ ,\ x1=0\ ve\ x2=\frac{1}{4}$ $(K1=4\ ve\ K2=\sqrt{2})$

7) $y=Sin\,x\ ,\ x=\frac{\pi}{2}(K=-1)$

8) $y^2=12x\ ,(3;6)\left(K=-\frac{\sqrt{2}}{24}\right)$

9) $y^2(2-x)=x^3(1;1)\left(K=\frac{3\sqrt{5}}{25}\right)$

10) $x=3t^2\ ,\ y=3t-t^3\ ,\ t=1\ de$ $\left(K=-\frac{1}{6}\right)$

11) $x=\cos t+\sin t\ ,\ y=\sin t-t\cos t\ ,\ t=\pi\ de$ $\left(K=-\frac{1}{\pi}\right)$

Aşağıdaki eğrilerin yanlarında verilen noktalarındaki eğrilik yarıçaplarını bulunuz.

12) $y=e^x\ ,\ x=0$ $\left(R=2\sqrt{2}\right)$

13) $xy=4\ ,\ x=1$ $\left(R=\frac{17\sqrt{17}}{8}\right)$

14) $y=Cosx\ ,\ x=\frac{\pi}{3}\left(R=\frac{7\sqrt{7}}{4}\right)$

15) $x^3+xy^2-6y^2=0\ \ (3;3)\left(R=5\sqrt{5}\right)$

16) $x=t-Sint\ ,\ y=1-Cost\ ,\ t=\pi\ de$ $(R=4)$

Aşağıdaki eğrilerin yanlarında verilen noktalarındaki eğrilik çemberlerinin denklemlerini bulunuz.

17) $y^2=12x\ ,\ \left(\frac{3}{4};3\right)\left[\left(x-\frac{33}{4}\right)^2+\left(y+\frac{3}{4}\right)^2=\frac{243}{16}\right]$

18) $y = \frac{4-x}{2x+1}$, $x = 1$ $\left[\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}\right]$

19) $ay^2 = x^3$, $(a;a)$ $\left[\left(x + \frac{11a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{16a}{3}\right)^2 = 61a^2\right]$

Aşağıdaki eğrilerin evolüt denklemlerini bulunuz.

20) $y^2 = 12x$ $[81y^2 = 4(x-6)^3]$

21) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $[(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}]$

22) $x = Cos\, t + t\, Sin\, t$, $y = Sin\, t - t\, Cos\, t$ $[x^2 + y^2 = 1]$

23) Aşağıdaki fonksiyonların dy diferansiyellerini bulunuz

a) $y = (3 - 2x)^4$ $dy = -8\,(3 - 2x)^3 \,.\, dx$

b) $y = Sin\, 3x^2$ $dy = 6x\, Cos\, 3x^2 \,.\, dx$

c) $y = Arctan\sqrt{x}$ $dy = \frac{1}{2\sqrt{x\,(1+x)}}\, dx$

d) $y = e^{1/x^2}$ $dy = -\frac{2}{x^3}\, e^{1/x^2} \,.\, dx$

e) $y = \ln Cos\, x$ $dy = -\,Tan\, x \,.\, dx$

24) Aşağıdaki bağıntılardan diferansiyel yardımıyla $\frac{dy}{dx}$i bulunuz.

a) $3x^2 - 4y^2 = 12$ $\frac{dy}{dx} = \frac{3x}{4y}$

b) $2xy^2 - 3x^2 y = 5$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{2y\,(y-3x)}{x\,(4y-3x)}$

c) $xy = \ln(x + y)$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2 + xy - 1}{x^2 + xy - 1}$

25) Δx in yeteri kadar küçük olması koşuluyla $\sqrt{x + \Delta x} \cong \sqrt{x} + \frac{\Delta x}{2\sqrt{x}}$ olduğunu gösteriniz ve bu formülden yararlanarak $\sqrt{37}$ ve $\sqrt{117}$ nin yaklaşık değerlerini bulunuz.

($\sqrt{37} \cong 6{,}083$; $\sqrt{117} \cong 10{,}818$)

26) $\sqrt[n]{x + \Delta x} \cong \sqrt[n]{x} + \frac{\Delta x}{n\,.\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ olduğunu gösteriniz ve bu formülden yararlanarak $\sqrt[3]{25}$, $\sqrt[3]{85}$ sayılarının yaklaşık değerlerini bulunuz.

($\sqrt[3]{25} \cong 2{,}926$; $\sqrt[4]{85} \cong 3{,}037$)

27) $y = x^3 - 2x^2$ fonksiyonunda x, 4'den 4,01'e artırılıyor. y'nin değişimini diferansiyelle bulunuz. (dy = 0,32)

28) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ de x ,1' den 0,97 ye azaltılıyor. y'nin değişimini diferansiyelle bulunuz. (dy = 0,015) 7) $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 5$ fonksiyonunun x = 2,03 için yaklaşık değerini bulunuz. (5,06)

29) Yarıçapı r = 10 cm olan dairesel bir levha ısıtılınca genleşerek yarıçapı 10,15 cm olmaktadır. Alandaki yaklaşık artmayı bulunuz. (ds = 9,42 cm^2)

30) Bir öğrenci bir küpün ayrıt uzunluğunu 0,01 cm hata ile 9 cm olarak ölçmüştür. Bu durumda küpün hacminde yapılan hata ne olur? (dc = 2,43 cm^3)

31) 5 cm yarıçaplı bir kürenin yarıçapı 4,8 cm. ye düşürüldüğünde:

a) Hacmindeki, b) Yüzey alanındaki azalmayı bulunuz.

a) dv= -62,8 cm^3; b) ds= -25,12

32) Aşağıdaki fonksiyonların istenen mertebeden diferansiyellerini bulunuz.

a) $y = x^2e^x$	ise	$d^2\, y = ?$	C:	$(x^2 + 4x + 2)\, e^x \,.\, dx^2$
b) $y = \ln x$	ise	$d^3\, y = ?$	C:	$\frac{2}{x^3} \,.\, dx^3$
c) $y = \frac{\ln x}{x}$	ise	$d^3\, y = ?$	C:	$\frac{11-6\ln x}{x^4}\, dx^3$
d) $y = x^n$	ise	$d^n\, y = ?$	C:	$n\,!dx^n$
e) $y = x^2 .\ln x$	ise	$d^n\, y = ?$	C:	$\frac{(-1)^{n-1}\, 2\,(n-3)!}{x^{n-2}} dx^n \quad (n \geq 3)$
f) $e^x + e^y = 1$	ise	$d^2\, y = ?$	C:	$-e^{x-2y} \,.\, dx^2$