6. BÖLÜM

ÜSTEL ve LOGARİTMİK FONKSİYONLAR

6.1.Genel Üstel Fonksiyon

a > 0, x herhangi bir rasyonel veya irrasyonel sayı için;

f (x) = a^x şeklindeki fonksiyona genel üstel fonksiyon denir. Yani;

$$a^x : IR \rightarrow IR^+$$

olarak tanımlanır.

6.2.Üstel Fonksiyonun Özellikleri

i) a >1 için;

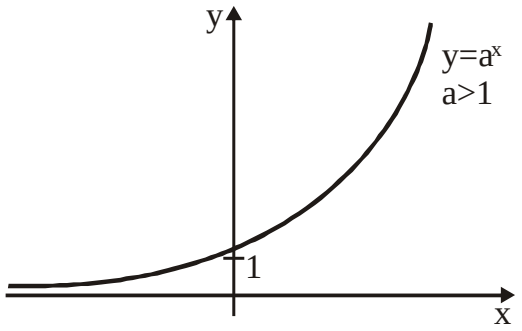
a) Fonksiyon artandır ve $\forall$ x $\in$ IR sayısı için $a^x \neq 0$'dır.

b) $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$ $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$ fonksiyon süreklidir.

c)Tablo

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
a^x	0	1	a	∞

d) Grafiği;



Şekil.6.1a >1 için y= a^x grafiği

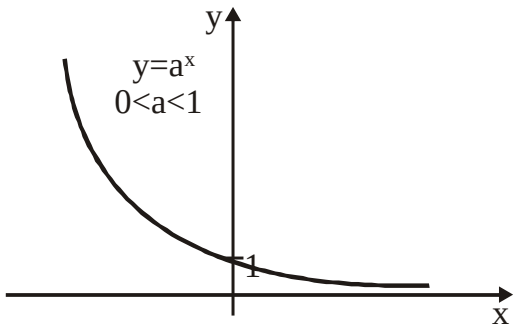
ii) a) 0 < a < 1 için fonksiyon azalandır.

b) $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$ $\lim_{x\to-\infty} a^x = \infty$ fonksiyon süreklidir.

c)Tablo

x	$-\infty$	0	$+\infty$
a^x	0	1	∞

d) Grafiği;



Şekil.6.2. 0 < a < 1 için y= a^x grafiği

a = 1 ise **x∈ IR** ve **a^x= 1**' dir.

Sonuç olarak, **a^x: (-∞ , ∞) → (0,** ∞) fonksiyonu bire-bir ve örten bir fonksiyondur ve aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1-) $a^x a^y = a^{x+y}$

2-) $\frac{a^x}{a^y} = a^{(x-y)}$

3-) $(a^x)^y = a^{x.y}$

4-) $(ab)^x = a^x b^x$

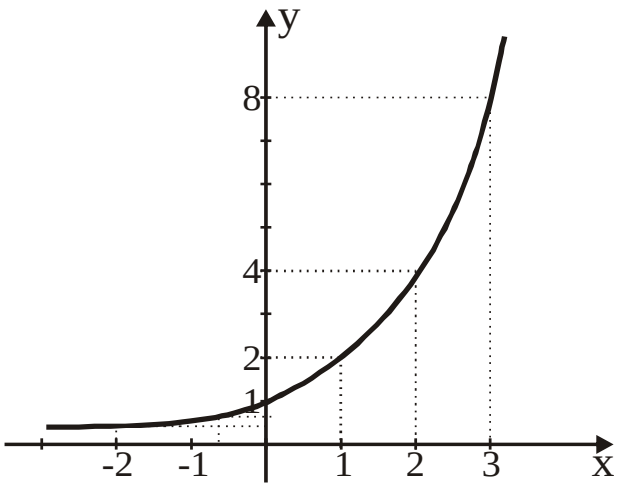
5-) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

Örnek.6.1: f (x) = 2^x üstel fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm.6.1: -4 ile 4 arasında 2^x üstel fonksiyonunun aldığı değerler aşağıdadır.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
2^x	0.0625	0.125	0.25	0.5	1	2	4	8	16

Bu tablodaki değerlere göre 2^x üstel fonksiyonunun grafiği aşağıdaki şekildedir.



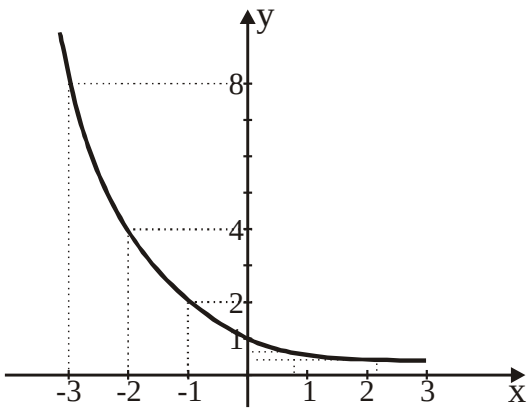
Şekil.6.3 f (x) = 2^x üstel fonksiyonunun grafiği

Örnek.6.2: $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm.6.2: -4 ile 4 arasında $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ fonksiyonunun aldığı değerler aşağıdadır.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$(1/2)^x$	16	8	4	2	1	0.5	0.25	0.125	0.0625

Bu tablodaki değerlere göre $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki şekildedir.



Şekil.6.4. $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ fonksiyonunun grafiği

6.3.e Sayısı

e irrasyonel bir sayı olup ondalık açılımı;

e = 2.71828182845.... şeklindedir. Limit yardımıyla $e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ olarak tanımlanır.

x	1	5	10	20	100	1000	5000
$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	2	2.488	2.653	2.594	2.705	2.717	2.718

Uygulamada e sayısı yaklaşık değer olarak kullanıldığından **e≈ 2.718** olarak alınır.

Buna göre, $f(x)=e^x$ fonksiyonu a > 1 için $f(x) = a^x$ fonksiyonun özel bir hali olup e tabanına göre üstel fonksiyon olarak adlandırılır ve $f(x) = a^x$ (a > 1) fonksiyonu ile aynı özelliklere sahiptir.

Yani; $\mathbf{e^x : IR \to IR^+}$

$\mathbf{x \to -\infty}$ **için** $\mathbf{e^x \to 0}$

$\mathbf{x \to +\infty}$ **için** $\mathbf{e^x \to +\infty}$

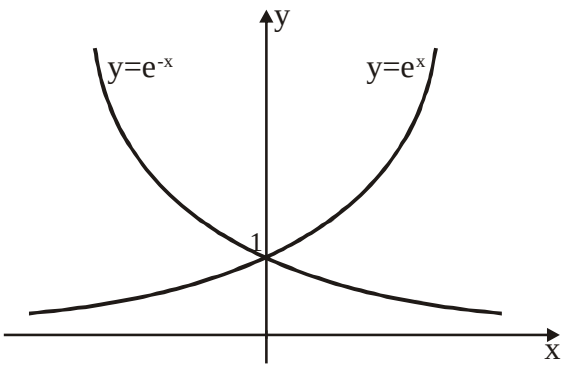
$f(x) = e^x$ fonksiyonunun özellikleri;

1) x = 0 için $e^x = 1$ 2) $\forall$ x için $e^x > 0$ 3) $\forall$ x için $e^x \neq 0$

4) $x \to -\infty$ için $e^x \to 0$ 5) $x \to +\infty$ için $e^x \to +\infty$

6) $e^x e^y = e^{x+y}$ 7) $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$ 8) $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

Bu özelliklere sahip olan $f(x) = e^x$ ve $f(x) = e^{-x}$ fonksiyonlarının grafiği aşağıdaki gibidir.



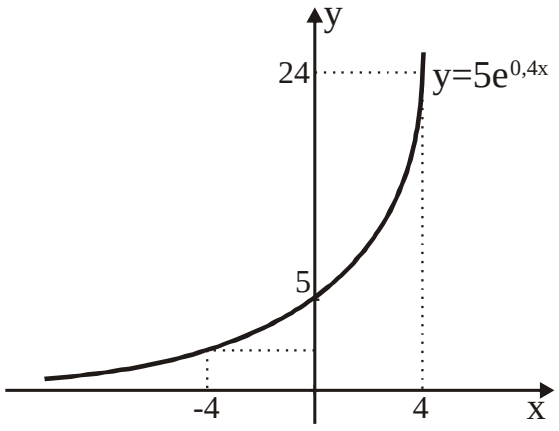
Şekil.6.5. $f(x) = e^x$ ve $f(x) = e^{-x}$ fonksiyonlarının grafiği

Örnek.6.3: $y = 5e^{0.4x}$ fonksiyonun grafiğini $-4 \le x \le 4$ aralığında çiziniz.

Çözüm.6.3: $y = 5e^{0.4x}$ fonksiyonun $-4 \le x \le 4$ aralığında x'in tamsayı değerleri;

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$\mathbf{5e^{0.4x}}$	1.009	1.509	2.247	3.352	5	7.459	11.128	16.601	24,765

olup bu değerlere karşı gelen $y = 5e^{0.4x}$ fonksiyonun grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil.6.6 $y = 5e^{0.4x}$ fonksiyonun grafiği

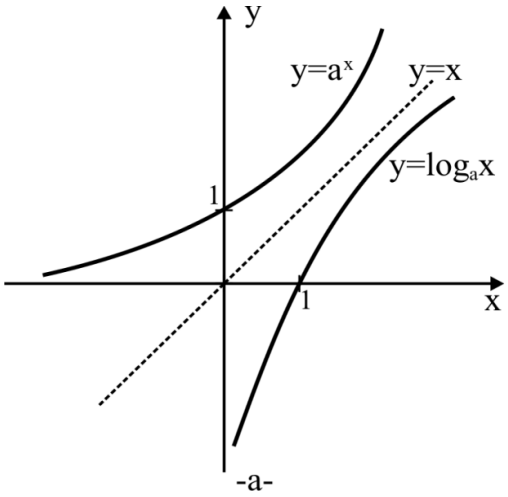
6.4. Logaritma Fonksiyonu

a > 0 ve **a ≠ 1** olmak üzere **y = a x** ise x, y'nin a tabanına göre logaritmasına eşittir denir ve bu **x = log$_a$y** şeklinde yazılır.

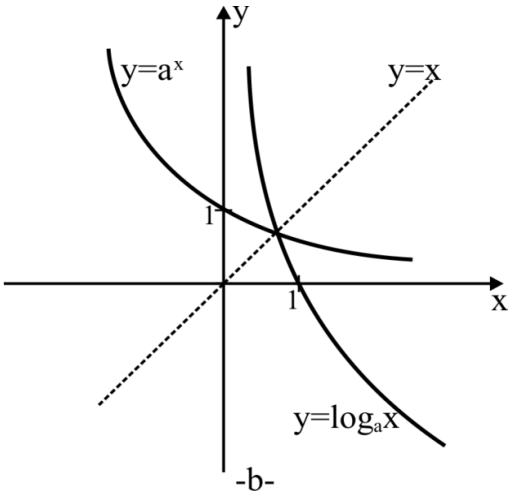
y = a^x ⇔ x = log$_a$y a > 0 ve a ≠ 1'dir.

f : IR→ IR$^+$, f(x) = a^x üstel fonksiyonunun ters fonksiyonu

f : IR$^+$→ IR , f(x) = log$_a$x olur.



Şekil .6.7.a y = a^x grafiği (a>1)



Şekil.6.7.b y = log$_a$x (0 < a < 1)grafiği

Şekil.6.7.a.b.' den de görüldüğü gibi **y = a^x** ile **y = log$_a$x** fonksiyonları ters fonksiyonlar olduklarından grafikleri de **y=x doğrusuna göre simetriktir**.

6.4.1. Logaritma Fonksiyonunun Özellikleri

1) Yalnız pozitif sayıların logaritması vardır. Sıfırın ve negatif sayıların logaritması yoktur.

2) $a^0 = 1$ olduğundan $\text{Log}_a 1 = 0$ dır. **3)** $a^1 = a$ olduğundan $\log_a a = 1$ dir.

4) a> 1 ise 1'den büyük sayıların logaritmaları pozitif, 1 den küçük sayıların logaritmaları negatiftir .

$$\lim_{x \to \infty} \log_a x = \infty \quad \text{ve} \quad \lim_{x \to -\infty} \log_a x = -\infty$$

5) 0 < a < 1 ise 1'den büyük sayıların logaritmaları negatiftir. 1'den küçük sayıların logaritmaları pozitiftir.

$$\lim_{x \to \infty} \log_a x = -\infty \quad \text{ve} \quad \lim_{x \to 0^+} \log_a x = \infty$$

6.4.2. Logaritma Formülleri

1) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ **2)** $\log_a\left(\sqrt[n]{x}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)\log_a x$

3) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ **4)** $\log_a x^n = n \log_a x$

5) $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ $(x>0)$ **6)** $\log_a b = \left(\frac{1}{\log_b a}\right)$

7) $a^{\log_a x} = x$ **8)** $\log_a a^x = x \log_a a = x$

Uygulamada en çok iki taban kullanılır. **10 tabanına** göre olan logaritmaya **bayağı logaritma** denir ve **$\log_{10}x$ = logx** ile gösterilirken **e tabanına** göre olan logaritmaya **doğal logaritma** denir **$\log_e x$ = lnx** ile gösterilir.

6.5. Üstel Ve Logaritmik Fonksiyonlara İlişkin Çözümlü Örnekler

1) $\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$

2) $\log 12 = \log(4.3) = \log 4 + \log 3$

3) $2\log_{10}x + 3\log_{10}(x+2) - \log_{10}3(x^2+5)$ tek bir logaritma ile ifade ediniz.

Çözüm: $= \log_{10}x^2(x+2)^3 - \log_{10}(x^2+5) = \log_{10}[(x^2(x+2)) / (x^2+5)]$

4) $\log_2 x + \log_2(x+2) = 3$ denklemini çözünüz.

Çözüm: $\log_2 x(x+2) = 3$

$x(x+2) = 2^3 \rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$ ise $(x+4)(x-2) = 0$ ve $x = -4$, $x = 2$ bulunur.

$x=-4 < 0$ için logaritma fonksiyonu tanımlı olmadığından çözüm olamaz. $x=2$ için çözümdür.

5) $\log_2 13 = \frac{\log_{10} 13}{\log_{10} 2} \approx 3.7004$

6) $\log_a 4 = b$, $\log_a v = c$ ve $\log_a w = d$ için aşağıdaki her bir soruyu b,c ve d cinsinden hesaplayınız.

a) $\log_a(4v^2 + w^3) = ?$

Çözüm: $\log_a(4v^2 + w^3) = \log_a 4 + \log_a v^2 + \log_a w^3 = \log_a 4 + 2\log_a v + 3\log_a w = b + 2c + d$

b) $\log_a\left(\frac{4^4}{\sqrt[3]{(vw^2)}}\right) = ?$

Çözüm: $\log_a\left(\frac{4^4}{\sqrt[3]{(vw^2)}}\right) = \log_a 4^4 - \log_a (vw^2)^{\frac{1}{3}} = 4\log_a 4 - \left(\frac{1}{3}\right)\log_a (vw^2)$

$$= 4b - \left(\frac{1}{3}\right)\left[\log_a v + \log_a w^2\right] = 4b - \left(\frac{1}{3}\right)c - \left(\frac{2}{3}\right)d$$

7) $300e^x = 600$ ise x'i bulunuz.

Çözüm: $300e^x = 600$ ise $e^x = 2$ ve buradan $x = \ln 2 = 0.6931$ bulunur.

8) $5^{2x-1} = 7^{x+2} \Rightarrow x = ?$

Çözüm: $\ln(5^{2x-1}) = \ln(7^{x+2})$

$(2x - 1)\ln 5 = x\ln 7 + 2\ln 7$ ise $2x\ln 5 - x\ln 7 = \ln 5 + 2\ln 7$

$x(2\ln 5 - \ln 7) = \ln 5 + 2\ln 7$ ve buradan;

$$x = \frac{(\ln 5 + 2\ln 7)}{(2\ln 5 - \ln 7)} \Rightarrow x = \frac{(1.609 + 2(1.946))}{(2(1.609) - 1.946)} \cong 4.325$$

9) 28-Mart-1964'de Alaska'da Richter ölçeğine göre 8.5 şiddetinde deprem olmuştur. 2-Mayıs-1983'de California'da da Richter ölçeğine göre 6.5 şiddetinde başka bir deprem olmuştu. Alaska'daki deprem California'daki depremden ne kadar şiddetli olmuştur ?

Çözüm: Bir depremin büyüklüğü; $R = \log_{10}(\frac{A}{A_0})$ ile ilgili bir formüldür. Burada, $(\frac{A}{A_0})$ depremin şiddeti olarak bilinir. **A**, verilen bir depremin en büyük sismik dalgasının üzerinde ölçülen genişliğidir. **A_0**, aynı deprem merkezinde sıfır seviyeli depremin en büyük sismik dalgasının aynı sismograf üzerinde genişliğidir.A, ile California'daki, A_0 ile Alaska'daki anların deprem merkezinden 1000 km uzağındaki en büyük sismik dalganın genişliği olsun.Buna göre;

$$8.5 = \log_{10}(\frac{A}{A_0})_{1964} \quad \text{ve} \quad 6.5 = \log_{10}(\frac{A}{A_0})_{1983}$$

$$(\frac{A}{A_0})_{1964} = 10^{8.5} \quad \text{ve} \quad (\frac{A}{A_0})_{1983} = 10^{6.5}$$

8.5=2+6.5 olduğuna göre;

$$\left(\frac{A}{A_0}\right)_{1964} = 10^{6.5+2}$$

$$\left(\frac{A}{A_0}\right)_{1964} = 10^2(\frac{A}{A_0})_{1983}$$

olarak bulunur. Alaska depremi California depreminden 100 kez daha şiddetli olmuştur.

10) Uzun süreli bir grip salgınının yayılması $P(t)=\left(\frac{32000}{(1+50e^{-0.1t})}\right)$ ile tanımlanıyor. P(t) hastalığın ortaya çıkmasından t hafta sonra etkilenen insanların sayısıdır.
2000 insan ne kadar süre sonra hastalanmış olacaklardır.

Çözüm:

$\left(\frac{32000}{(1+50e^{-0.1t})}\right)=2000 \Rightarrow 2000(1+50e^{-0.1t})=32000 \Rightarrow 2000+100000e^{-0.1t}=32000$

$\Rightarrow 100000e^{-0.1t}=30000 \Rightarrow e^{-0.1t}=0.30 \Rightarrow -0.1t=\ln 0.30 \Rightarrow -0.1t=-1.2040 \Rightarrow t=12.04$ olur.12 hafta sonra 2000 kişi bu hastalıktan etkilenmiş olacaktır.

11) Ülke nüfusunun $f(t)=50.10^6.e^{0.025(t-1984)}$ formülüne göre değiştiğini kabul edelim. Burada zaman birimi yıldır.t=1984 için $f(1984)=50.10^6$ 0.025 (%o25) nüfus artış katsayısıdır. Buna göre Türkiye nüfusu ne zaman 100 milyon olur?

Çözüm: $f(t)=50.10^6.e^{-0,025\times 1984}=c.e^{at}$

$T=\frac{\log_e 2}{a}=\frac{Ln2}{a}$ (Yarılanma süresi)

$T=\frac{0,69}{0,025}=27,6$ yıl bulunur.1984+27,6≅2011 yılında nüfus 100 milyon olur.

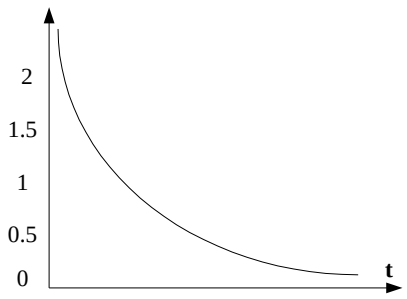
12)Şekildeki devrede V sabit gerilim kaynağı, R direnç ve C kondansatördür. Anahtar kapatıldıktan sonra devreden geçen akım;

$I=I_0.e^{\frac{-t}{RC}}$ denklemi ile bulunur. Burada I_0 ilk akımdır ve $I_0=\frac{V}{R}$ ile bulunur. V=100V;

$R=5.10^3\Omega$ ve C=200μF ($0,2.10^{-3}$F) olarak verildiğine göre, devreden geçen akımın t=0 ile t=5 sn aralığında değişimini çiziniz.

Çözüm:I için verilen eşitlik;

$I=\frac{V}{R}.e^{\frac{-t}{RC}}=\frac{100}{5.10^3}e^{-t/(5.10^3\times 0,2.10^{-3})}=2e^{-\frac{t}{1}}=2e^{-t}$



6.6. Kazanç Ölçüleri

Yapılan araştırmalar ve elde edilen tecrübeler sonucunda insan kulağının ses seviyelerindeki değişimlere logaritmik olarak cevap verdiği görülmüştür.

$$Ap(bels) = \log P_{OUT} - \log P_{İN} = \log P_{OUT} / P_{İN}$$

Ölçüm birimi "bel" Alexander Graham Bell'e ithafen bel olarak adlandırılmıştır. Bel sözcüğü günümüzde nadir olarak kullanılmaktadır çünkü bu sözcük çok büyük ünitelerde ele alınmakta kullanılmaktadır. Bel'in yerine normalde ölçümlerimizde birim olarak desibeli kullanmaktayız. 1decibel (dB), 1/10 bel'e eşittir. Buradan;

Güç kazancı; $Ap(dB) = 10 \log P_{OUT} / P_{İN}$

Gerilim kazancı; $Av(dB) = 20 \log V_{OUT} / V_{İN}$

Örnek.6.4:Yükseltecin çıkış gücü 30W'dır. Giriş gücü ise 100mW'dır. Güç kazancı kaç desibeldir.

Çözüm.6.4:$Ap(dB) = 10 \log P_{OUT} / P_{İN} = 10 \log 30W / 100mW = 10 \log 300 = 24.8dB$

Örnek.6.5: Bir yükseltecin giriş gücü 50µW'dır ve güç kazancı 40dB ise çıkış gücü kaç W'dır?

Çözüm.6.5:$Ap(dB) = 10 \log P_{OUT} / P_{İN}$ $\quad 40dB = 10 \log P_{OUT} / 50\mu W$

Her iki tarafı 10'a bölersek: $4dB = \log P_{OUT} / 50\mu W$

Eşitliği logaritmadan kurtarırsak: $10^4 = P_{OUT} / 50\mu W$

Her iki tarafı da 50µW'a bölersek: $P_{OUT} = 0.5W$ çıkar.

Örnek.6.6: Bir yükseltecin giriş voltajı 50mV çıkış voltajı 1.73V'dur ve $R_{OUT}=R_{İN}$ ise voltaj kazancı kaç dB'dir?

Çözüm.6.6:$Av(dB) = 20 \log V_{OUT} / V_{İN} = 20 \log 1.73V / 50mV = 20 \log 34.6 = 30.8dB$

Örnek.6.7: Voltaj kazancı -6dB, çıkış voltajı 700mV olan bir yükseltecin giriş voltajı nedir?

Çözüm.6.7:$Av(dB) = 20 \log V_{OUT} / V_{İN}$ $\quad -6dB = 20 \log 700mV / V_{İN}$

Her iki tarafı da 20 'ye bölersek: $-0.3dB = \log 700mV / V_{İN}$

Eşitliği logaritmadan kurtarırsak: $10^{-0.3} = 700mV / V_{İN}$

$V_{İN} = 1.4V$ çıkar.

6.7. Referans Seviyeleri

Bazı örneklerde çıkış güçleri yada çıkış voltajları giriş değerleri referans alınarak verilir. Bazen diğer referans seviyelerinde kullanılmaktadır. Genel olarak kullanılan referans seviyelerinden biri 6mW'dır. Diğer bir değişle, 0 dB eşittir 6mW'a denir. Diğer bir referans seviyesi 1mW'dır. Referans 1mW olduğunda, desibel ölçümü **dBm** olarak isimlendirilir. Eğer güç dBm olarak verilirse, giriş gücünün 1mW olduğunu anlarız.

Örnek.6.8:Güç kazancı 33dBm olan yükseltecin çıkış gücü nedir?

Çözüm.6.8: Ap(dB) =10 log P_{OUT} / $P_{İN}$ 33dBm = 10 log P_{OUT} / 1mW

Her iki tarafı 10'a bölersek: 3.3dBm = log P_{OUT} / 1mW

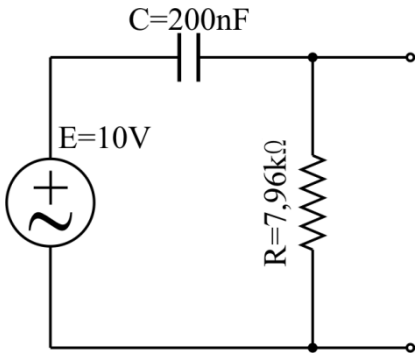
Eşitliği logaritmadan kurtarırsak: $10^{3.3}$ = P_{OUT} / 1mW

Her iki tarafı da 1mW'a bölersek: P_{OUT} = 2W çıkar.

6.8. Frekans Cevabı

6.8.1. Bode Eğrileri

Bode analizörü devre yada sistemin frekans cevabını bulmakta kullanılan kullanışlı bir alettir. Şekil.6. 8'deki RC devresinin frekans cevap karakteristiğini Bode analizörü ile ele alalım. AC devre analizinden çağrışım yapacak olursa X_C'nin frekansa göre değiştiğini ve kesim frekansı f_{CO}'nun X_C = R olduğu zaman gerçekleştiğini hatırlamalıyız. Çıkış voltajı R üzerinden alındığından V_{OUT} = V_R'dir. Voltaj kazancını öğrendiğimiz eşitliği kullanarak bulabiliriz.



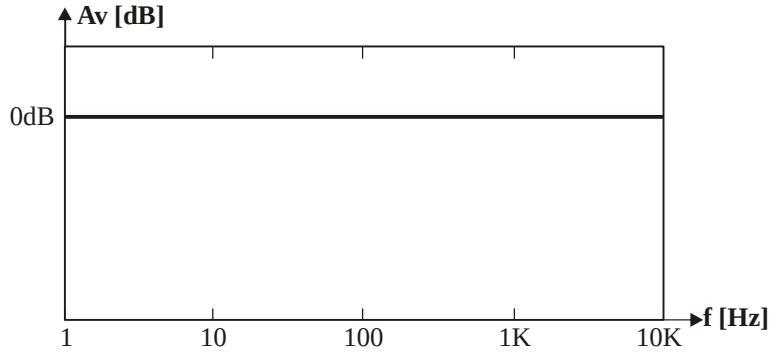
Şekil.6. 8. RC devresinin frekans cevap karakteristiğinin Bode analizörü

Av(dB)= 20 log V_{OUT} / $V_{İN}$

Yüksek frekanslarda V_{OUT} = $V_{İN}$ Buradan; Av(dB)= 20 log 10V / 10V = 0dB

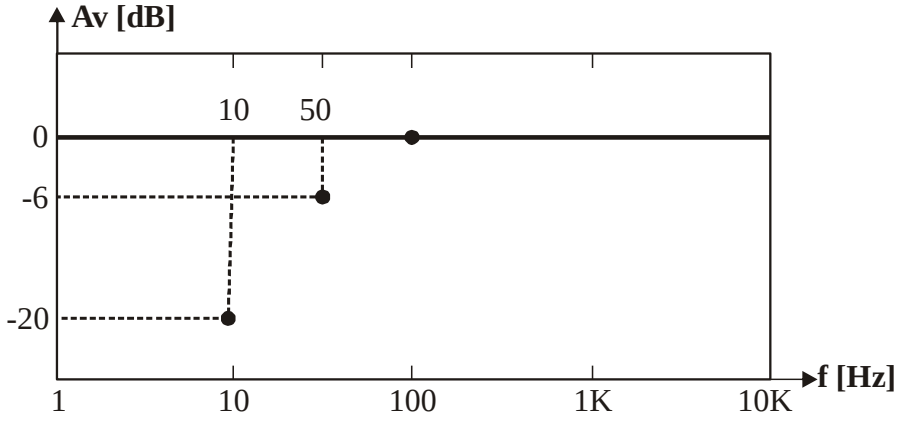
Bu devre için mümkün olan maksimum kazanç 0dB'dir.

Analizör için yarı logaritmik grafik kağıdı kullanılmaktadır. Frekans bağımsız değişkendir ve logaritmik ölçek boyunca grafiği çıkarılır. A ölçeği A_V içindir ve bu seçim bize kazancı en düşük -20dB'den itibaren değiştirmemize izin vermektedir. İlk şekilde ölçek yatay çizilmiştir. Yarı logaritmik kağıdımız minimum frekansı 1Hz'den başlamak üzere 4 saykıla ayrılmıştır. (Şekil.6.9) Bu bize kazancı elde ettiğimiz frekansı 1Hz ile 10Khz arasında görebilmemizi sağlamaktadır. Kesim frekansı 100Hz'dir. f_{CO} = 1 / 2 * π * C * R = 100Hz



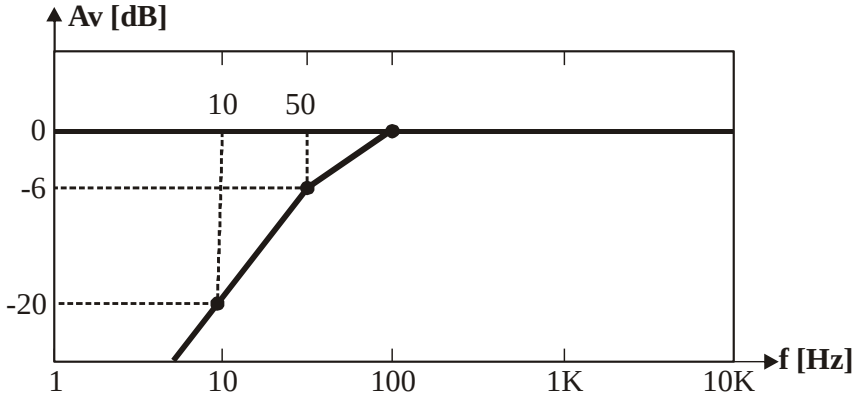
Şekil.6..9. Analizör için yarı logaritmik grafik kağıdı

Şekil.6.10.'da 100Hz noktasının grafiği yatay hattımızın üzerine çıkmıştır. Frekans hattımızın diğer noktalarında kazanç değişecektir. -6dB octave ve -20dB decade'te olduğu gibi. Octave değişim, frekansın yarısı yada iki katı olan frekanstır. Decade değişim ise, frekansın 10 kat değiştiği frekanstır. (Şekil.6.10)



Şekil.6.10. 100Hz noktasının grafiği

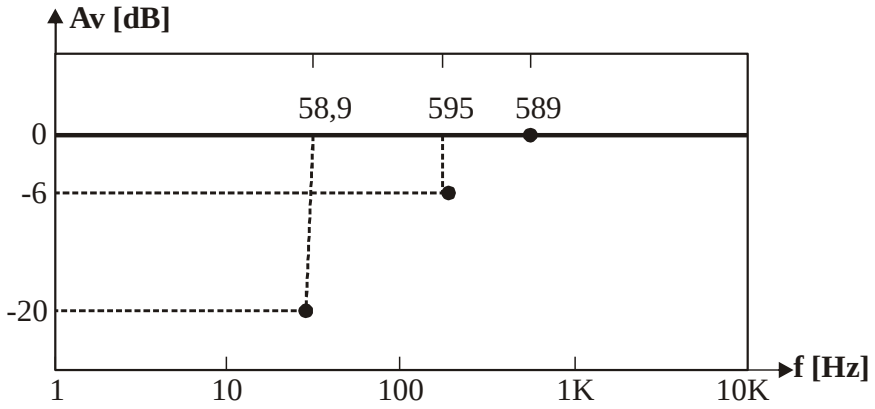
Kazanç düştüğünde frekansta düşmektedir. Şekil.6.10'da kazanç -6dB ve frekansın 50Hz olduğu yere ikinci nokta çizilmiştir. $f_{CO} = 0.1$ olduğu yerde çizilmiştir. Şekil.6.11'de bu üç nokta düz bir doğru ile birleştirilmiştir. Bu bizim Bode grafiğimizdir. Bode analizöründe tüm çizimler bu yolla yapılmaktadır. Kazanç düştüğü zaman frekansta azalır şekil.6.11'de olduğu gibi. Kazanç düştüğü zaman frekans da azalır (Şekil.6.11).



Şekil.6..11. Bode Grafiği

Örnek.6.9:Şekil.6.8'e göre C = 100nf ve R = 2.7K ise Bode analizöründeki grafiğini çizin.

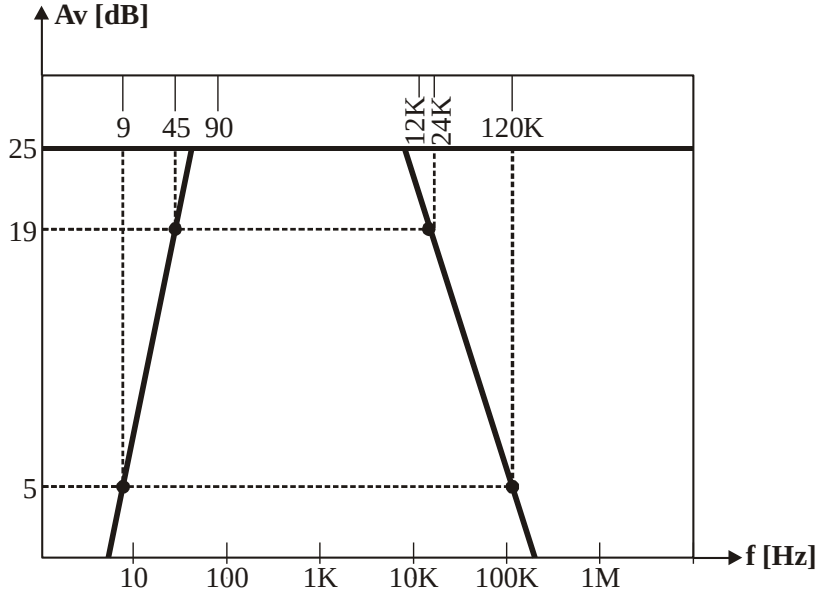
Çözüm.6.9 : f_{CO} = 589Hz ve Bode grafiği şekil.6.12'de gösterilmiştir.



Şekil.6..12. Bode Analizör Grafiği

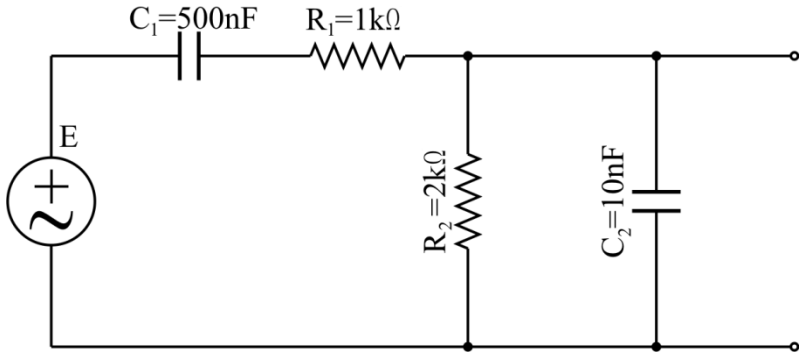
Örnek.6.10 :Yükseltecin orta frekans kazancı 25dB, düşük kesim frekansı(f_1) 90Hz, yüksek kesim frekansı(f_2) 12Khz'dir. Yükseltecin Bode analizöründeki frekans cevabını bulun.

Çözüm .6.10: 5 saykıllık yarı logaritmik grafik kağıdı kullanacağız. Ölçek A_V için seçilmiştir ve yatay hat 25dB'de çizilmiştir. Önce düşük kesim frekansını çizelim. İlk nokta f_1'dir ve 25dB'dir. İkinci nokta (6dB aşağıda) f_1 / 2 ve 19dB. Üçüncü nokta (20dB aşağıda) f_1 / 10 ve 5dB. Yüksek kesim frekansı f_2 ve 25dB kullanarak çizilir, 2 f_2 ve 19dB, 10 f_2 ve 5dB. Tüm çizim Şekil .6.13'de gösterilmiştir.



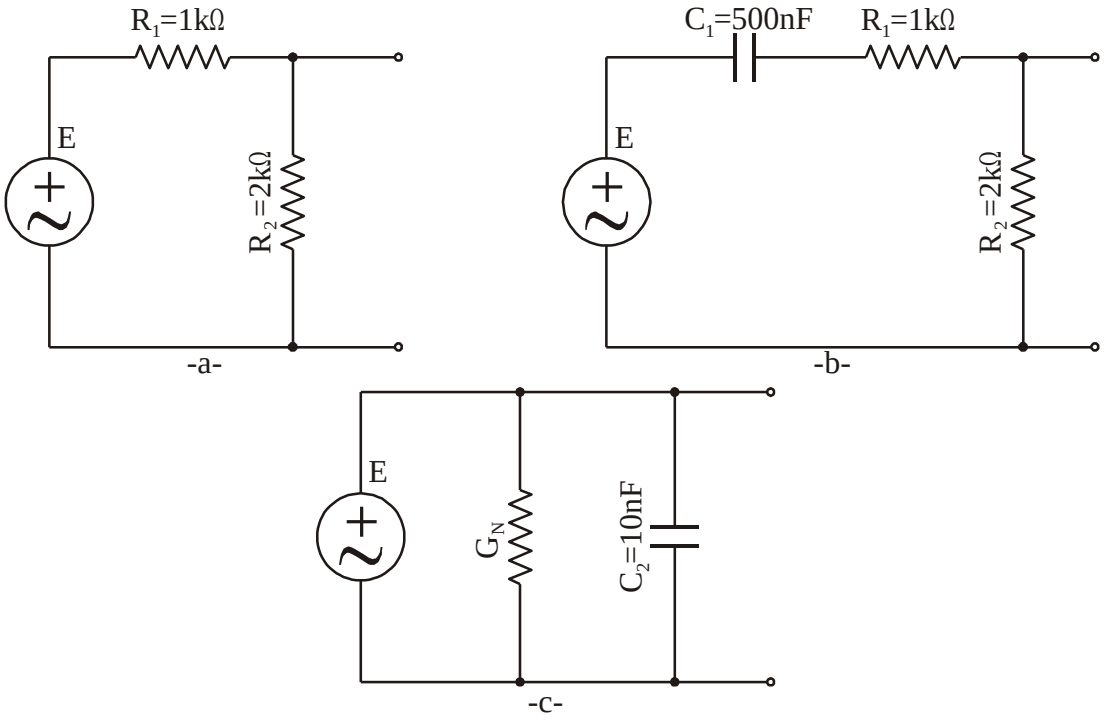
Şekil.6..13. Yükseltecin Bode Analizör Grafiği

Şekil.6.14.'deki devreyi ele alalım. Bu gibi devrelerde, orta frekans kazancını bulabiliriz. C_1 ve C_2'nin etkisini göz ardı ederek ve R_2'nin toplam direnç $R_1 + R_2$ üzerindeki etkisi ele alınarak bunu gerçekleştirebiliriz. $R_2 / (R_1 + R_2) = V_{OUT} / V_{IN}$



Şekil.6. 14. Eşdeğer Frekans Devresi

Orta frekans eşdeğer devresi şekil.6.15(a)'da gösterilmiştir. (Pratikte kablo kapasitansı gibi faktörler frekans cevabına etki edebilir.)



Şekil.6.15(a).Şekil.6.14'ün orta frekans eşdeğer devresi

Şekil.6.15(b). Şekil.6.14'ün alçak frekans eşdeğer devresi

Şekil.6.15. Şekil.6.14'ün yüksek frekans eşdeğer devresi

Orta frekans şu formülle bulunur : $Av(dB)= 20 \log R_2 / (R_1 + R_2)$

Bu devre için : $Av(dB)= 20 \log 2K / (1K + 2K) = -3.52dB$

Eğer frekans artarsa , C_2'ninreaktansı artar ve üzerinde bazı gerilim düşümleri meydana gelebilir. Bu çıkış voltajının artmasının nedenidir. Eğer frekans azalırsa, buda çıkış voltajının düşmesine neden olur. Düşük frekans eşdeğer devresi şekil.6.15(b)'de görüldüğü gibidir. Yüksek frekansta, C_1'in reaktansı göz ardı edilebilecek bir değer alır, ama C_2'nin suseptansı bir faktör haline gelmiştir. C_2 paralel bir eleman etkisi gösterdiği zaman, devreyi

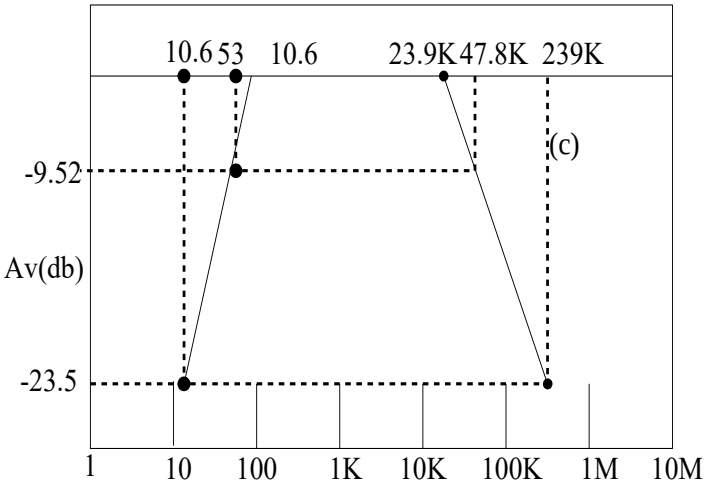
R_2'de nortonize edersek, R_1, C_2 ve R_2'nin hepsinin paralel olarak şekil.6.15.(c)'deki gibi gösterildiği gibi bir eşdeğer devreye ulaşırız.

Örnek.6.11:Şekil.6.14'deki devre için f_1 ve f_2'yi bul ve Bode analizöründe göster.

Çözüm.6.11 : $f_1 = 1 / 2 * \pi * C * (R_1 + R_2) = 1 / 2 * 3.14 * 500 * 10^{-9} * 3 * 10^3 = 106$

$f_2 = (G_1 + G_2) / 2 * \pi * C_2 = 1.5 * 10^{-3} / 2 * 3.14 * 10 * 10^{-9} = 23.9Khz$

Şekil.6.16'dabode analizör grafiği gösterilmektedir.



Şekil.6.16.Örnek 6.14'ün Bode analizör grafiği

6.8.2. Frekans Cevap Eğrisi

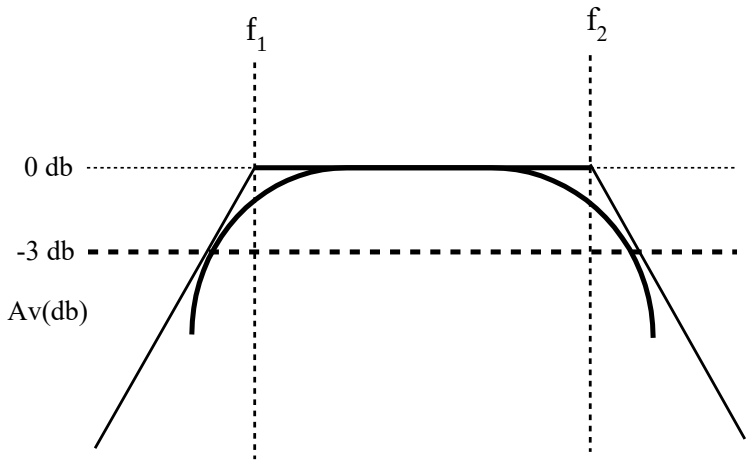
Bode analizör sonuçları özellikle kesim frekansı etrafında bazı hatalar içermektedir. Biliyoruz ki, f_{CO}' da kazanç 3dB'nin altındadır. Hata f_{CO}'nun 1 dekat altında yada üstünde 0'dır. Kazancın düşürülmesi (maksimum kazançtan) her frekansta aşağıdaki formüller kullanılarak bulunabilir.

RC yüksek geçiren filtre için : $Av = 20 \log 1 / \sqrt{[1 + (f_1 / f)^2]}$

f_1 düşük kesim frekansı f ise sorudaki frekanstır.

RC düşük geçiren filtre için : $Av = 20 \log 1 / \sqrt{[1 + (f / f_2)^2]}$

f_2 yüksek kesim frekansı için f ise sorudaki frekanstır. Gerçek eğim ve Bode analizör şekil.6.17.'de birlikte çizilmiştir.



Şekil.6.17.Örnek 6.14'ün gerçek eğim ve Bode analizör grafiği

Örnek.6.12:Şekil.6.14'e göre, 50Hz ve 100Khz'deki kazançları ve bu frekanstaki eğimi Bode analizörde bulun.

Çözüm.6.12 :Özel olarak orta frekanstaki kazanç (maksimum kazanç) 50Hz'de -3.52dB ile sınırlandırılmaktadır.

$Av = 20 \log 1 / \sqrt{[1 + (f_1 / f)^2]} = 20 \log 1 / \sqrt{[1 + (106Hz / 50Hz)^2]} = -7.4dB$

Bu bize -3.52dB'den 7.4dB aşağıda olduğumuzu anlatmaktadır.

Sonuçta kazanç;

$Av(dB) = -3.52dB + (-7.4dB) = -10.9dB$ bulunur.

100Khz'de;

$Av = 20 \log 1 / \sqrt{[1 + (f / f_2)^2]} = 20 \log 1 / \sqrt{[1 + (100Khz / 23.9Khz)^2]} = -12.7dB$

Sonuçta buradaki kazanç ise;

$Av(dB) = -3.52 + (-12.7dB) = -16.2dB$ bulunur.

Bode analizör şekil 6.16'da gösterilmiştir. Bode analizör 50Hz ve 100Khz'deki kazanç hesaplarımızın doğruluğunu göstermektedir.

6.9. RC Devreleri

Bu kısımda kapasitörlerin şarj ve deşarjlarını logaritmik eşitlikler kullanarak hesaplayacağız. Seri RC devrelerinde kapasitör şarjı için şu eşitlik kullanılmaktadır.

$v_C = E (1 - e^{-t / (R.C)})$

v_C = Kondansatör uçlarındaki gerilimin değişimi (V)

t = Zaman (s)

R = Direnç (Ω)

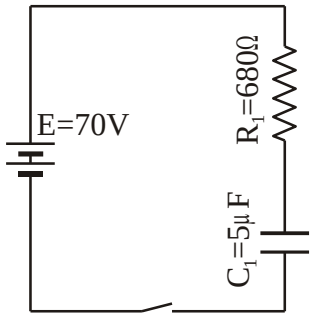
C = Kapasitans (F)

E = Uygulanan gerilim (V)

Deşarj esnasında kondansatör uçlarındaki gerilimin değişimi $v_C = V_0.e^{-t/(R.C)}$

$\mathbf{V_0}$=Deşarj başlamadan önce kondansatör uçlarındaki gerilim (V

Örnek.6.13 : Şekil.6.18'de anahtar kapandıktan sonraki V_R ve v_C nedir?



Çözüm.6.13 : $v_C = E\,(1 - e^{-t/R*C}) = 17.8V$(t nin değeri nedir?)

V_R Kirchhoff'un gerilimler kanununu kullanarak bulunabilir.

$V_R = E - v_C = 70 - 17.8V \Rightarrow V_R = 52.2V$

Örnek.6.14: Şekil.6.18'e göre kondansatörün şarjı sürecinde $v_C = 40V$ ise t kaçtır?

Çözüm.6.14 : $v_C = E\,(1 - e^{-t/R*C}) \Rightarrow 40 = 70\,(1 - e^{-t/R*C})$

Buradan; t = 2.88msn

Örnek .6.15: Şekil.6.18'e göre $v_C = 30V$ ise t kaçtır?

Çözüm.6.15 : $v_C = E\,(1 - e^{-t/R*C}) \Rightarrow 30 = 70\,(1 - e^{-t/R*C})$

Buradan; t = 3.17 msn

Örnek.6.16:Çalışma gerilimi 110V yol alma akımı 27,5 A olan bir şönt motorun endüvi devresi direnci 0,25 ohm'dur. Motor hafif yük altında yol aldığına göre ; toplam yol verme direncini ve ayrı ayrı basamak dirençlerini hesaplayınız?

Çözüm.6.16:

Motor hafif yük altında yol aldığına göre k=1,5 alınabilir.

Yol verme direncinin tümü:

$$R_y = \frac{U}{I_y} - R_a = \frac{110}{27,5} - 0,25 = 3,75\ ohm$$

$R_1 = R_a + R_y = 0,25 + 3,75 = 4$ ohm

Kademe sayısı:

$$n = \frac{\log \frac{R_1}{R_a}}{\ell o g k} = \frac{\ell o g \frac{4}{0,25}}{\ell o g 1,5} = \frac{\ell o g 16}{\ell o g 1,5}$$

(Logaritma cetvelinden log 16 =1,204, log 1,5=0,1761 dir).

n =$\frac{1,204}{0,1761}$ = 6,83 olur. Kademe sayısı tam sayı olacağı için n=7 alınır. Bu değerler için k yeniden hesaplanırsa 1,486 değeri bulunur. Şu halde k=1,5 değil 1,486 alınacaktır. Buna göre kademe dirençleri bulunursa:

k=$\frac{R_1}{R_2}$ $buradan\ R_2 = \frac{R_1}{k} = \frac{4}{1,486} = 2,691\ ohm$

R_2=R_1-r_1 den r_1=R_1-R_2=4-2,691=1,309 ohm

k =$\frac{R_2}{R_3}$ $R_3 = \frac{R_2}{k} = \frac{2,691}{1,486} = 1,81\ ohm$

R_3=R_2-r_2 den r_2=R_2-R_3=2,691-1,81=0,880 ohm

Aynı şekilde devam edilirse :

R_4=$\frac{R_3}{k} = \frac{1,81}{1,486} = 1,219,\quad r_3 = R_3 - R_4 = 1,721 - 1,219 = 0,592\ ohm$

R_5=$\frac{R_4}{k} = \frac{1,219}{1,486} = 0,821,\quad r_4 = R_4 - R_5 = 1,219 - 0,821 = 0,398\ ohm$

R_6=$\frac{R_5}{k} = \frac{0,821}{1,486} = 0,553,\quad r_5 = R_5 - R_6 = 0,821 - 0,553 = 0,268\ ohm$

R_7=$\frac{R_6}{k} = \frac{0,553}{1,486} = 0,372,\quad r_6 = R_6 - R_7 = 0,553 - 0,372 = 0,181\ ohm$

ve $r_7 = R_7 - R_a = 0,372 - 0,25 = 0,122$ ohm olur.

Kademe dirençleri toplanırsa 3,75 ohm olduğu görülür.

Örnek .6.17:

220 V , 40 amperlik bir doğru akım motorun endüvi direnci 0,4 Ω'dur. Yol alma akımı normal akımın 1,25 katı ve yol verme basamak sayısı 10 olduğuna göre ,yol verme direnci ile basamak direncini bulunuz.

U=220 V , $I_n = 40\ A$

Çözüm.6.17:

$I_y = 1,25.I_n = 1,25.40 = 50\ A$

$R_y = \frac{U}{I_y} - R_a = \frac{220}{50} - 0,4 = 4\ \Omega$

$R_1 = R_a + R_y = 0,4 + 4 = 4,4\ \Omega$

Yol verme direnci basamak sayısı bilindiğine göre k sabitesi:

k =$\sqrt[n]{\frac{R_1}{R_a}} = \sqrt[10]{\frac{4,4}{0,4}} = \sqrt[10]{11}$

$\ell o g.\ k = \frac{\ell o g 11}{10} = \frac{1,0414}{10} = 0,1041$

(logaritması 0,10414 olan sayı 1,27 dir).

k =1,27

k=$\frac{R_1}{R2}$ $buradan$ $R_2 = \frac{R_1}{k} = \frac{4,4}{1,27} = 3,47$

r_1=R_1-R_2=4,4-3,47=0,93Ω

R_3=$\frac{R_2}{k}=\frac{3,47}{1,27}=2,73,$ $\quad r_2=R_2-R_3=3,47-2,73=0,74\ \Omega$

R_4=$\frac{R_3}{k}=\frac{2,73}{1,27}=2,15,$ $\quad r_3=R_3-R_4=2,73-2,15=0,58\ \Omega$

R_5=$\frac{R_4}{k}=\frac{2,15}{1,27}=1,69,$ $\quad r_4=R_4-R_5=2,15-1,69=0,46\ \Omega$

Hesaplamaya bu şekilde devam edilirse:

r_5=0,36

r_6=0,28

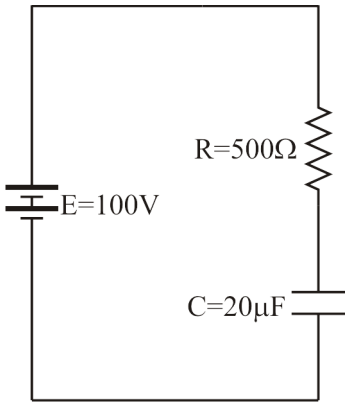
r_7=0,224

r_8=0,176

r_9=0,138

r_{10}=0,112 olarak bulunur.

Örnek.6.18



Şekilde verilen kondansatör şarj devresinin;

a. Kondansatör uçlarındaki gerilim ve kondansatörden geçen akım denklemlerini bulunuz.
b. Zaman sabitini ve bir zaman sabiti süresi sonunda kondansatör uçlarındaki gerilimi bulunuz.
c. Kondansatör tam dolduğunda uçlarındaki gerilimi bulunuz.

Çözüm.6.18:

a) $v_C=E.\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)=100.\left(1-e^{-\frac{t}{500.20.10^{-6}}}\right)=100.(1-e^{-100t})$

$$i_c=\frac{E}{R}.e^{-\frac{t}{RC}}=\frac{100}{500}.e^{-\frac{t}{500.20.10^{-6}}}=0,2.e^{-100t}$$

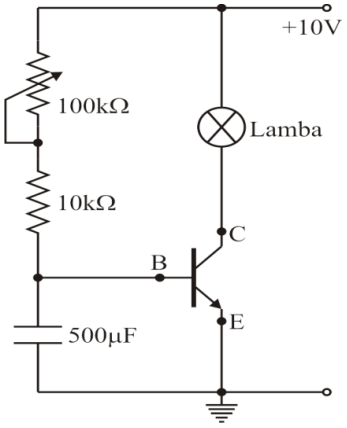
b) $\tau=R.C=500.20.10^{-6}=10^{-2}\ s.$

$$v_C=100.(1-e^{-100t})=100.\left(1-e^{-100.10^{-2}}\right)=63,2\ V$$

c) $5.\tau=5.R.C=5.500.20.10^{-6}=5.10^{-2}\ s.$

$$v_C=100.(1-e^{-100t})=100.\left(1-e^{-100.5.10^{-2}}\right)=99,32\ V$$

Örnek 6.19 : Şekildeki devrede transistörün iletime geçebilmesi için kondansatör uçlarındaki gerilimin 0,7V'a ulaşması gerekiyor. Devreye enerji verildiğinde lambanın yanması için geçmesi gereken süreyi hesaplayınız.



Çözüm 6.19:

Transistör kesimde iken sistem bir R-C seri devresidir. Bu durumda kondansatör uçlarındaki gerilimin denklemi

$$v_C = E.\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

olarak yazılır. Değerler yerine konulursa;

$$v_C = E.\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \quad \Rightarrow \quad 0{,}7 = 10.\left(1 - e^{-\frac{t}{110.10^3.500.10^{-6}}}\right)$$

$$0{,}7 = 10.\left(1 - e^{-\frac{t}{55}}\right)$$

$$0{,}7 = 10 - 10.e^{-\frac{t}{55}}$$

$$e^{-\frac{t}{55}} = 0{,}93$$

$$\ln e^{-\frac{t}{55}} = \ln 0{,}93$$

$$-\frac{t}{55}\ln e = -0{,}07257069$$

$$t = 55.0{,}07257069 = 3{,}991s$$

olarak lambanın yanması için gereken süre bulunur.

ALIŞTIRMALAR

1) $\log_{\sqrt[3]{4}} \sqrt[5]{27}.\log_{\sqrt{3}} \sqrt[4]{125}.\log_5 \sqrt[13]{32}$ işleminin sonucu nedir?

2) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} 32.\log_{\sqrt[3]{2}} \sqrt[7]{243}$ işlemini sonucu nedir?

3) $\log_5 3 = p$ ise $\log_{625} 27$ nedir ?

4) $7^{\frac{1}{\log_5 7}}$ nedir ?

5) $e^{\ln 3+\ln 5}$ nedir ?

6) $\frac{1}{\log_a abcd}+\frac{1}{\log_b abcd}+\frac{1}{\log_c abcd}+\frac{1}{\log_d abcd}$ işleminin sonucu nedir ?

7) log 2= a ve log 3 = b ise $\log_{72} 12$ işleminin sonucu nedir ?

8) $\log_6 2 = a$ ise $\log_6 3$ nedir ?

9) $\log_5 \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x.....}}} = 7$ ise x nedir ?

10) $\log_3 \sqrt[5]{x\sqrt[5]{x\sqrt[5]{x.....}}} = 7$ ise x nedir ?

11) $\log x = \frac{5}{7}$ ise $\sqrt[3]{x^2\sqrt{\frac{1}{x}.\sqrt[5]{x^3}}}$ nedir ?

12) log x = 1,15 ise $\sqrt[23]{x^{40}}$ nedir ?

13) $5\log_4 x - \frac{2}{7}\log_4 3 = -10$ ise x nedir ?

14) $27^{tg\,x} = 3^{-\sqrt{3}}$ ise x'in en küçük derece ölçüsü nedir ?

15) $100.10^x = \sqrt{(1000)^5}$ ise x nedir ?

16) $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810$ ise x nedir ?

17) $4^{x+1} + \frac{64}{4^x} = 257$ ise x nedir ?

18) $5^{3x-4} = 2^{2x+1}.3^{4x-5}$ ise x nedir ?

19) $-\log_2 3.7\log_5 6.\log_3 2.3\log_6 5$ işleminin sonucu nedir ?

20) $4\log_7 e^{\ln 21-\ln 3}$ işleminin sonucu nedir ?