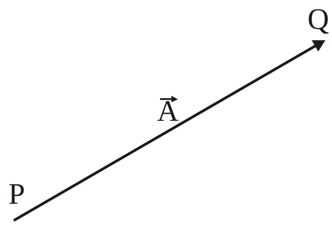
7. BÖLÜM

VEKTÖRLER

7.1. Giriş

Fizikte kütle, uzunluk, sıcaklık, hacim gibi yalnızca sayısal değeri olan büyüklüklere **skaler büyüklükler** denir. Bunlara doğrultu ve yön belirleme gereği yoktur. Bunların dışında yer değiştirme, hız, kuvvet, ivme gibi büyüklüklerin hem sayısal değerleri hem de yönleri vardır. Bunlara **vektörel büyüklükler** yani kısaca **vektör** denir. Bir vektör, başlangıç noktası denilen bir P noktasından, bitim noktası denilen Q noktasına yönlendirilmiş bir $\overrightarrow{PQ}$ doğru parçasıdır. Bir vektörün elemanları;



a) Başlangıç noktası **b)** Doğrultusu **c)** Yönü **d)** Büyüklüğü

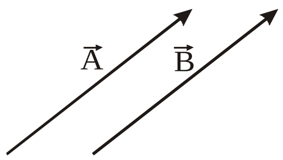
Yukarıdaki dört eleman bilindiği zaman, bir vektör tamamen belirtilmiş olur.

Vektörü $\vec{A}$ veya $\overrightarrow{PQ}$ ile gösteririz. Vektörün uzunluğu ise $|\overrightarrow{PQ}|$ veya $|\vec{A}|$ ile gösterilir.

7.2.Vektör Cebri

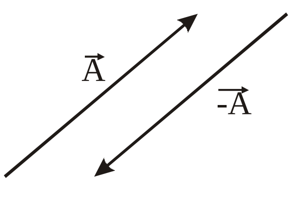
Sayıların cebrinde bildiğimiz toplama, çıkartma ve çarpma işlemleri uygun tanımlarla vektörlerin cebrine genişletilebilirler.

7.2.1.İki Vektörün Eşitliği: Büyüklüğü ve yönü aynı olan $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerine, başlangıç noktalarına bakılmaksızın eşittirler denir.



$\vec{A} = \vec{B}$ ile gösterilir.

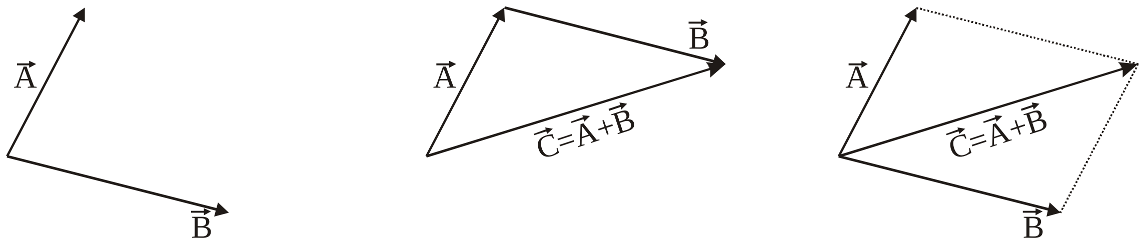
7.2.2.Bir Vektörün Negatifi: Yönü, $\vec{A}$ 'nün yönünün karşıtı fakat $\vec{A}$ ile aynı büyüklükte olan bir vektör $-\vec{A}$ ile gösterilir.



7.2.3.İki Vektörün Toplamı (Paralelkenar Kuralı)

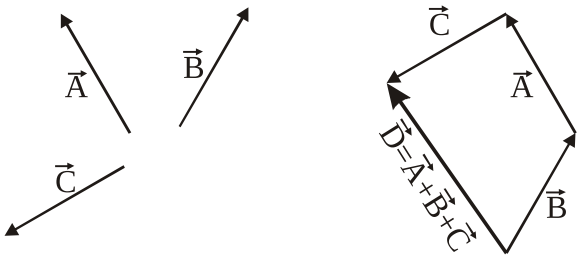
$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin toplamı veya bileşkesi, $\vec{B}$' nin başlangıç noktası $\vec{A}$' nın bitim noktasına birleştirilerek oluşturulan $\vec{C}$' dir. C toplamı $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ şeklinde yazılır.

En son şekil vektörlerin toplanmasına ait **paralelkenar** yasasıdır.



7.2.4. İkiden Fazla Vektörün Toplamı: (Çokgen yöntemi)

Bu yöntemde bileşke herhangi bir uygun noktadan başlayarak bir ölçeğe göre bütün vektörleri bir öncekinin ucuna eklemek sureti ile bulunur. Yani her vektörün başlangıcı bir önceki vektörün oklu ucu olur. Bu şekilde oluşan çokgeni tamamlamak üzere çizilen doğru, vektörlerin bileşkesi olur.



7.2.5.İki Vektörün Farkı: $\vec{A}$ ve $\vec{B}$' nin $\vec{A} - \vec{B}$ şeklinde gösterilen farkı öyle bir $\vec{C}$' dir ki $\vec{B}$ ile toplandığı zaman $\vec{A}$' yı verir. Buna eşdeğer olarak $\vec{A} - \vec{B}$, $\vec{A} + (-\vec{B})$ şeklinde tanımlanabilir. Eğer $\vec{A} = \vec{B}$ ise $\vec{A} - \vec{B}$ sıfır vektör olarak tanımlanır ve $\vec{0}$ ile gösterilir. $\vec{0}$ vektörünün büyüklüğü sıfırdır fakat yönü tanımlanmış değildir.

7.2.6.Bir Vektörün Bir Skalerle Çarpımı: Bir $\vec{A}$ vektörünün k skaleri ile çarpılması, büyüklüğü $\vec{A}$ 'nın büyüklüğünün k katı olan ve yönü k'nın pozitif veya negatif olmasına göre, $\vec{A}$ 'nın k ile aynı veya karşıtı olan bir $k\vec{A}$ dır. Eğer $k=0$ ise $k\vec{A}=0$ dır.

7.2.7. Vektör Cebrinin Özellikleri

$\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ üç vektör ve k, r iki skaler sayı olmak üzere;

1) $\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$ Toplama için değişme özelliği

2) $\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}$ Toplama için birleşme özelliği

3) $k.(r.\vec{A})=(k.r).\vec{A}=r.(k.\vec{A})$ Çarpma için birleşme özelliği

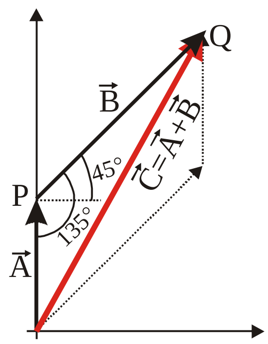
4) $(k+r)\vec{A}=k.\vec{A}+r.\vec{A}$ Çarpma için dağılma özelliği

5) $k.(\vec{A}+\vec{B})=k.\vec{A}+k.\vec{B}$ Çarpma için dağılma özelliği

Örnek: Bir araba tam kuzeye doğru 3km yaptıktan sonra kuzeydoğuya doğru 5km yol alıyor. Bu yer değiştirmelerini grafikle gösteriniz ve bileşke yer değiştirmeyi;

a)Grafikle, b) Hesapla belirtiniz.

Çözüm:a) Grafikle,



Uzunluk yaklaşık 7.4 km'dir. Doğrultusu 61.5 kuzey-doğudur.

b) Hesapla bulunması;

OPQ üçgeninden kosinüs kuralına göre

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2ABCos\widehat{OPQ}$$

$$= 3^2 + 5^2 - 2.3.5.Cos135^\circ = 34 + 15\sqrt{2} = 55{,}21 \Rightarrow C \cong 7{,}43 \quad (\text{yaklaşık})$$

Sinüs kuralından;

$$\frac{A}{\sin O\hat{Q}P} = \frac{C}{\sin O\hat{P}Q}$$

$$\sin O\hat{Q}P = \frac{A\sin O\hat{P}Q}{C} = \frac{3(0{,}707)}{7{,}43} = 0{,}2855 \Rightarrow O\hat{Q}P = 61^0 35'$$

$\overrightarrow{OQ}$ vektörünün büyüklüğü 7,43km ve doğrultusu kuzey-doğu ($45^o + 16^o 35'$) = $61^o 35'$ dır.

7.3. Birim Vektör

$\vec{a} = |\vec{a}| . \vec{u}$ eşitliğini sağlayan u vektörüne, a vektörü ile aynı doğrultu ve yöne sahip olan vektöre birim vektör denir. Buradan; $\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, $\vec{a}$ vektörünün doğrultu ve yönündeki birim vektör, $\vec{a}$ yı 1 ile çarpmak sureti ile bulunur. Kısaca uzunluğu 1 olan vektöre birim vektör denir.

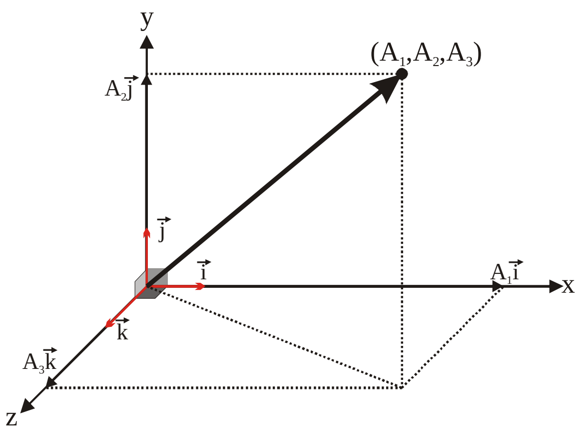
7.4. Dik Birim Vektör

Bir dik koordinat sisteminin pozitif x, y ve z eksenleri ile aynı yönde bulunan i, j ve k birim vektörleri dik birim vektörleridir. Aksi söylenmedikçe sağ dik koordinat sistemleri kullanılır.

Başlangıç noktaları çakışık olan ve aynı düzlemde bulunmayan $\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ vektörleri verildiğine göre, eğer sağ dişli bir vida A' dan B' ye 180^o küçük bir açı kadar döndürüldüğünde C yönünde ilerlerse $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ bir sağ sistem oluşturmaktadır denir.

7.5. Bir Vektörün Bileşenleri

Üç boyutlu uzayda herhangi bir $\vec{A}$, başlangıç noktası bir dik koordinat sisteminin O başlangıç noktasında bulunmak üzere gösterilebilirler.



Başlangıç noktası O olan bir A limit noktasının dik koordinatları (A_1, A_2, A_3) olsun.

$\vec{A_1}, \vec{A_2}, \vec{A_3}$, $\vec{A}$ ’nın sırasıyla x, y ve z yönündeki dik vektör bileşenleri, veya sadece bileşen vektörleri denir. $A_1 \vec{i}, A_2 \vec{j}, A_3 \vec{k}$ ’ nın toplam veya bileşkesi $\vec{A}$ dır

$A = (A_1 \vec{i}, A_2 \vec{j}, A_3 \vec{k})$ dır.

$\vec{A}$ ’ nın (büyüklüğü) uzunluğu; $|\vec{A}| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$ iken özel olarak, O’yu (x, y, z) noktasına birleştiren $\vec{r}$ yer vektörü; $\vec{r} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$ ve uzunluğu $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ’dır.

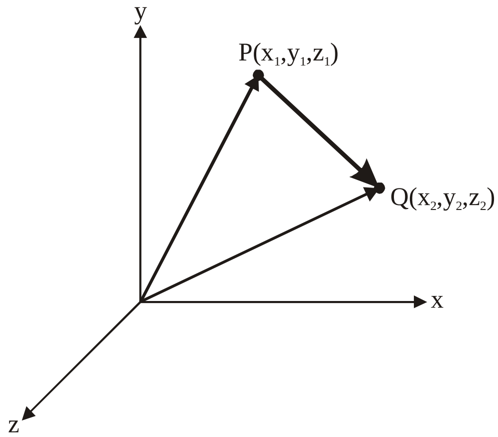
Başlangıç noktası P (x_1, y_1, z_1) ve bitim noktası Q (x_2, y_2, z_2) olan vektör; P’ nin yer vektörü $\vec{r_1} = x_1.\vec{i} + y_1.\vec{j} + z_1.\vec{k}$ ve Q’ nun yer vektörü : $\vec{r_2} = x_2.\vec{i} + y_2.\vec{j} + z_2.\vec{k}$ olsun.

Buna göre;

$$|\vec{PQ}| = \vec{r_2} - \vec{r_1} = \left(x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}\right) - \left(x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}\right)$$

$$= (x_2 - x_1).\vec{i} + (y_2 - y_1).\vec{j} + (z_2 - z_1).\vec{k}$$

$$|\vec{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



7.6.Lineer Bağımlı ve Lineer Bağımsız Vektörler

$\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ vektörleri ile k,r ve s skaler olmak üzere ;

$k\vec{A} + r\vec{B} + s\vec{C} = 0$

eşitliğini sağlayan hepsi aynı anda sıfır olmayan k, r, s skalerleri varsa $\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ vektörlerine lineer bağımlı vektörler denir. Aksi halde yani,

$k\vec{A} + r\vec{B} + s\vec{C} = 0$

eşitliği ancak k= r = s = 0 için sağlanıyorsa $\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ vektörlerine lineer bağımsız vektörler denir.

Örnek: $\vec{A} = (1, 1, 0)$, $\vec{B} = (0, 1, 0)$, $\vec{C} = (1, 0, 1)$ vektörlerinin lineer bağımsız olduklarını gösteriniz.

Çözüm: x, y, z bilinmeyen sabitler olmak üzere;

$$x\,(1, 1, 0) + y(0, 1, 0) + z\,(1, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

$$(x + z, x + y, z) = (0, 0, 0)$$

Buradan sistemin çözümünden x = y = z = 0 bulunur.

O halde, $\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ vektörleri lineer bağımsızdır.

Örnek: $\vec{A} = (1, 0, 1)$, $\vec{B} = (2, 1, 1)$, $\vec{C} = (4, 3, 1)$ vektörlerinin lineer bağımlı olup olmadığını araştırınız.

Çözüm: x, y, z bilinmeyen sabitler olmak üzere;

x (1, 0, 1) + y (2, 1, 1) + z (4, 3, 1) = (0, 0, 0) olsun.

(x + 2y + 4z, y + 3z, x+ y + z) = (0, 0, 0) olur.

Buradan,

$$\begin{aligned} x + 2y + 4z &= 0 \\ y + 3z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

homojen lineer denklem sistemi elde edilir. Sistemin sıfır çözümden başka çözümlerinin olması için katsayılar matrisinin determinantı sıfır olmalıdır, buna göre sistemin katsayılar matrisinin determinantını bulalım:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(1-3)+1(6-4)=0$ olduğundan, sıfır çözümden başka çözümleri de vardır.

$\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ lineer bağımlıdır. Determinantın değeri sıfırdan farklı olduğunda sıfır çözüm tek çözümdür. Bu durumda vektörler lineer bağımsızdır.

Örnek: $\vec{A}$ =(3,1,4), $\vec{B}$ =(-2,5,1), $\vec{C}$ =(4,7,9)vektörlerinin lineer bağımlı (yada lineer bağımsız olduğunu) olup olmadığını araştırınız.

Çözüm: x, y, z bilinmeyen sabitler olmak üzere,

x(3,1,4) + y(-2,5,1)+z(4,7,9)= (0,0,0)

$$\left.\begin{aligned} 3x-2y+4z&=0 \\ x+5y+7z&=0 \\ 4x+y+9z&=0 \end{aligned}\right\} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 0 \text{ olur.}$$

Lineer homojen denklem sistemini verir. Bu lineer homojen denklem sisteminin aşikar çözümden başka çözümleri vardır ve $p \in IR$ için x=-2p , y=-p ve z=p bir çözümdür. Yani verilen vektörler lineer bağımlı olup, herhangi bir $p \neq 0$ değeri için ;

$-2p.\vec{A} - p.\vec{B} + p.\vec{C}$ =0 ve buradan $2\vec{A} + \vec{B} - \vec{C}$ olur.

Bu son ifade verilen vektörler arasındaki lineer bağıntıdır.

Lineer bağımlılığın geometrik yorumu ise;

- Şimdi n=2 ve n=3 için, yani 2 ve 3 vektörün lineer bağımlı olmasının, geometrik olarak ne anlama geldiğini görelim. a,b,c$\neq 0$ olsun.
- $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ lineer bağımlı olduğunda x ve y'den en az biri sıfırdan farklıdır.

Varsayalım ki, $x \neq 0$ olsun. Dolayısıyla; $m = -\frac{y}{x}$ olmak üzere $\vec{A} = m\vec{B}$ yazılabilir. O halde iki vektör lineer bağımlıysalar paraleldirler. Tersine olarak, paralelseler lineer bağımlıdırlar.

$x\vec{A} + y\vec{B} + z\vec{C} = 0$, yani $\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$

lineer bağımlı vektörlerse x,y ve z' den en az biri sıfırdan farklıdır. Bu durumda;

$-\frac{y}{x} = m$ ve $-\frac{z}{x} = n$ olmak üzere; $\vec{A} = m\vec{B} + n\vec{C}$ yazılabilir.

Bunun anlamı $\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ ile aynı düzlemdedir.

O halde, üç vektör lineer bağımlıysa bunlardan biri diğer ikisinin lineer bileşkesi olarak yazılabildiğinden, üç vektör aynı düzlemdedir.

Tersine $\vec{A}$ vektörü $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ 'nin düzleminde değilse, $\vec{A}$ $\vec{B}$ $\vec{C}$ lineer bağımsızdır.

7.7. Skaler Çarpım

$$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|.Cos\theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

1) $\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$

2) $\vec{A}.\left(\vec{B}+\vec{C}\right) = \vec{A}.\vec{B}+\vec{A}.\vec{C}$

3) $k.\left(\vec{A}+\vec{B}\right) = \left(k.\vec{A}\right)+\vec{B} = \vec{A}+\left(k.\vec{B}\right) = \left(\vec{A}+\vec{B}\right).k$

4) $\vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = 1$
$\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0$

5) $\vec{A} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$, $\vec{B} = B_1\vec{i} + B_2\vec{j} + B_3\vec{k}$ iki vektör olsun.

$\vec{A}.\vec{B} = A_1.B_1 + A_2.B_2 + A_3.B_3$

$\vec{A}.\vec{A} = \vec{A}^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$

$\vec{B}.\vec{B} = \vec{B}^2 = B_1^2 + B_2^2 + B_3^2$

6) $\vec{A}.0 = 0.\vec{A} = 0$

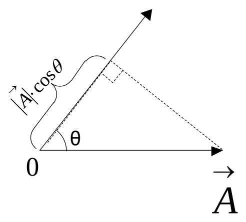
7) $\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|.Cos\theta$; θ bu vektörler arasındaki açıdır.

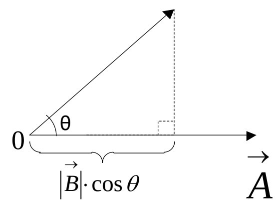
$0 \le \theta \le \pi$ olduğunda $\vec{A}.\vec{B} \le |\vec{A}.\vec{B}| \le |\vec{A}|.|\vec{B}|$ olur.

7.7.1. Skaler Çarpım ile İlgili Geometrik Yorumlar ve Sonuçlar

$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|.Cos\theta$, eşitliği gösteriyor ki;

1) İki vektörün skaler çarpımının mutlak değeri bunlardan birinin uzunluğu ile diğerinin bu vektör üzerindeki dik izdüşümü olan vektörün uzunluğunun çarpımına eşittir. Özel olarak; örneğin $\vec{A}$ birim vektör ise $\vec{A}.\vec{B}$, $\vec{B}$ vektörünün $\vec{A}$ vektörü üzerindeki dik izdüşümünün uzunluğudur. Üstelik bu durumda $(\vec{A}.\vec{B}).\vec{A}$ vektörü, $\vec{B}$ nin $\vec{A}$ vektörü üzerindeki dik izdüşüm vektörüdür.





2) Skaler çarpım ilgili vektörler arasındaki açıyı belirlemekte de kullanılır.

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}|.|\vec{B}|} \text{ veya analitik anlatımla; } \quad \cos\theta = \frac{A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}\sqrt{B_1^2 + B_2^2 + B_3^2}}$$

3) $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ arasındaki açı;

i. dar açı iken $\vec{A}\,.\,\vec{B} > 0$,

ii. geniş açı iken $\vec{A}\,.\,\vec{B} < 0$,

iii. $\theta = 0$ iken $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ aynı yönlü,

iv. $\theta = \pi$ iken $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ zıt yönlüdür.

Böylece $\theta \in \{0, \pi\}$ ise yani $\cos\theta = \pm 1$ ise $\vec{A} // \vec{B}$ olur. Ayrıca $\vec{A} \neq 0 \neq \vec{B}$ iken $\vec{A}\,.\,\vec{B} = 0$ ise $\cos\theta = 0$ ve dolayısıyla $\theta = \frac{\pi}{2}$ dir. Tersine $\theta = \frac{\pi}{2}$ ise $\vec{A}\,.\,\vec{B} = 0$ bulunur

Yani skaler çarpım iki vektörün dikliğini karakterize eder.

O halde ;

$\vec{A} \perp \vec{B} \Leftrightarrow \vec{A}\,.\,\vec{B} = 0$ olur. Örneğin; taban vektörleri olan $\vec{i}\,.\,\vec{j}\,,\,\vec{k}$ için;

$\vec{i}\,.\,\vec{j} = \vec{j}\,.\,\vec{k} = \vec{k}\,.\,\vec{i} = 0$ olduğundan ikişer ikişer birbirlerine diktirler.

Örnekler :

1) $\vec{i}\,.\,\vec{i} = |\vec{i}|\,.\,|\vec{i}|\,\mathrm{Cos}0^\circ = 1.1.1 = 1$

2) $\vec{i}\,.\,\vec{j} = |\vec{i}|\,.\,|\vec{j}|\,\text{Cos}90^\circ = 1.1.0 = 0$

3) $\vec{j}\,.\left(2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}\right) = 2.\,\vec{j}\,.\,\vec{i} - 3.\,\vec{j}\,.\,\vec{j} + \vec{j}\,.\,\vec{k} = 0 - 3 + 0 = -3$

4) $\left(2.\,\vec{i} - \vec{j}\right).\left(3.\,\vec{i} + \vec{k}\right) = 2.\,\vec{i}\,.\left(3.\,\vec{i} + \vec{k}\right) - \vec{j}\,.\left(3.\,\vec{i} + \vec{k}\right)$

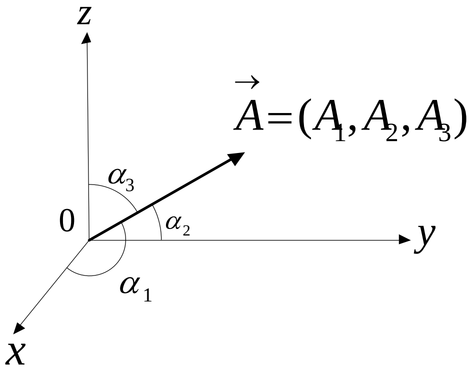
$= 6.\,\vec{i}\,.\,\vec{i} + 2.\,\vec{i}\,.\vec{k} - 3.\,\vec{j}\,.\,\vec{i} - \vec{j}\,.\,\vec{k} = 6 + 0 - 0 - 0 = 6$

7.8.Vektörlerin Doğrultu Açıları ve Doğrultman Kosinüsleri

Herhangi bir $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$ vektörünün koordinat eksenleriyle yaptığı açılar sırasıyla $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ olsun. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ açılarına $\vec{A}$'nın doğrultu açıları denir. $\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3$ sayılarına da $\vec{A}$'nın doğrultu(veya doğrultman) kosinüsleri denir.

$\cos\alpha_i = \dfrac{\vec{A_i}}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}}$, i= 1,2,3 bulunur. Buradan ; $\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1$ olur.

Böylece bir vektörün doğrultman kosinüsleri, bu vektör doğrultusundaki birim vektörün koordinatlarıdır demek yerinde olacaktır.



Örnek: $\vec{A} = i + j + k$, $\vec{B} = 2i - j + 3k$ veriliyor. Bunların uzunluklarını, doğrultman kosinüslerini ve aralarındaki açının kosinüsünü bulunuz.

$|\vec{A}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$ ve $|\vec{B}| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (3)^2} = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$

$\vec{A}$ 'nın doğrultman kosinüsleri $\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\vec{B}$ 'doğrultman kosinüsleri $\cos\beta_1 = \dfrac{2}{\sqrt{14}}, \cos\beta_2 = \dfrac{-1}{\sqrt{14}}, \cos\beta_3 = \dfrac{3}{\sqrt{14}}$ olur.

Buna göre; $\cos\theta = \dfrac{1.2 + 1.(-1) + 1.3}{\sqrt{3}.\sqrt{14}} = \dfrac{4}{\sqrt{42}}$ bulunur.

7.9.Vektörel Çarpım

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \text{ dir.} \quad \vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}|.|\vec{B}|.Sin\theta \quad (0 \le \theta \le \pi)$$

$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ yönü, A, B ve C bir sağ sistem oluşturacak tarzda A ve B nin düzlemine diktir.

Eğer $\vec{A} = \vec{B}$ ise veya $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ paralel iseler $\mathrm{Sin}\theta = 0$ ve $\vec{A} \times \vec{B} = 0$ 'dır.

$\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ vektörleri ve onlara ait dik birim vektörler $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ve r skaler olmak üzere aşağıdaki özellikler geçerlidir.

1) $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} = -(\vec{B} \times \vec{A})$

2) $\vec{A} \times \left(\vec{B} + \vec{C}\right) = (\vec{A} \times \vec{B}) + (\vec{A} \times \vec{C})$

$$\left(\vec{B} + \vec{C}\right) \times \vec{A} = (\vec{B} \times \vec{A}) + (\vec{C} \times \vec{A})$$

3) $r.\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) = \left(r.\vec{A}\right) \times \vec{B} = \vec{A} \times \left(r.\vec{B}\right) = \left(\vec{A} \times \vec{B}\right).r$

4) $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$

$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$

5) Eğer; $\vec{A} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$ ve $\vec{B} = B_1\vec{i} + B_2\vec{j} + B_3\vec{k}$ ise

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}.(A_2.B_3 - A_3.B_2) - \vec{j}.(A_1.B_3 - A_3.B_1) + \vec{k}.(A_1.B_2 - A_2.B_1)$$

6) $\vec{A}\times\vec{B}$ vektörü hem $\vec{A}$ hemde $\vec{B}$ vektörüne diktir.

7) $(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}=(\vec{A}.\vec{C})\,\vec{B}-(\vec{B}.\vec{C}).\vec{A}$

$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}.\vec{C})\,\vec{B}-(\vec{A}.\vec{B}).\vec{C}$

8) $\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|^2=\vec{A}^2.\vec{B}^2-(\vec{A}.\vec{B})^2$

9) $\vec{A}\times\vec{B}=\left|\vec{A}\right|.\left|\vec{B}\right|.\,\mathrm{Sin}\theta$, θ, $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ arasındaki açıdır.

Örnek : $\vec{A}=A_1\vec{i}+A_2\vec{j}+A_3\vec{k}$, $\vec{B}=B_1\vec{i}+B_2\vec{j}+B_3\vec{k}$ ise

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\end{vmatrix}$$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\vec{A}\times\vec{B}=\left(A_1\vec{i}+A_2\vec{j}+A_3\vec{k}\right)\times\left(B_1\vec{i}+B_2\vec{j}+B_3\vec{k}\right)$

$$\vec{A}\times\vec{B}=A_1\vec{i}\times\left(B_1\vec{i}+B_2\vec{j}+B_3\vec{k}\right)+A_2\vec{j}\times\left(B_1\vec{i}+B_2\vec{j}+B_3\vec{k}\right)+A_3\vec{k}\times\left(B_1\vec{i}+B_2\vec{j}+B_3\vec{k}\right)$$

$$=A_1B_1\underbrace{\vec{i}\times\vec{i}}_{0}+A_1B_2\underbrace{\vec{i}\times\vec{j}}_{\vec{k}}+A_1B_3\underbrace{\vec{i}\times\vec{k}}_{-\vec{j}}+A_2B_1\underbrace{\vec{j}\times\vec{i}}_{-\vec{k}}+A_2B_2\underbrace{\vec{j}\times\vec{j}}_{0}+A_2B_3\underbrace{\vec{j}\times\vec{k}}_{\vec{i}}$$

$$+A_3B_1\underbrace{\vec{k}\times\vec{i}}_{j}+A_3B_2\underbrace{\vec{k}\times\vec{j}}_{-i}+A_3B_3\underbrace{\vec{k}\times\vec{k}}_{0}$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\vec{i}.(A_2.B_3-A_3.B_2)-\vec{j}.(A_1.B_3-A_3.B_1)+\vec{k}.(A_1.B_2-A_2.B_1)$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\end{vmatrix}$$ determinantına eşit olduğu görülür.

Örnek : $\vec{A}=3\,\vec{i}-\vec{j}+2\,\vec{k}$ ve $\vec{B}=2\,\vec{i}+3\,\vec{j}-\vec{k}$ ise $\vec{A}\times\vec{B}$ nedir?

Çözüm: $\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -1 & 2\\ 2 & 3 & -1\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix}$

$=-5\,\vec{i}+7\,\vec{j}+11\,\vec{k}$

Örnek: Köşeleri P (2, 3, 5), Q (4, 2, -1), R (3, 6, 4) olan üçgenin alanını bulunuz.

Çözüm: $\vec{PQ}=(4-2)\,\vec{i}+(2-3)\,\vec{j}+(-1-5)\,\vec{k}=2\,\vec{i}-\vec{j}-6\,\vec{k}$

$\vec{PR}=(3-2)\,\vec{i}+(6-3)\,\vec{j}+(4-5)\,\vec{k}=\vec{i}+3\,\vec{j}-\vec{k}$

Üçgenin alanı $=\frac{1}{2}\left|\vec{PQ}\times\vec{PR}\right|=\frac{1}{2}\left|\left(2\,\vec{i}-j-6\,\vec{k}\right)\times\left(\vec{i}+3\,\vec{j}-\vec{k}\right)\right|$

$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & -6\\ 1 & 3 & -1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\left|19\,\vec{i}-4\,\vec{j}+7\,\vec{k}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{19^2+(-4)^2+7^2}=\frac{1}{2}\sqrt{426}\text{br}^2$

7.10.Üçlü Çarpım

Uzayda $\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ vektörlerinin bir vektörel ve bir skaler çarpımının bileşimine

$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right).\vec{C}$; $\vec{A}.\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)$, $\vec{B}.\left(\vec{A}\times\vec{C}\right)$ üç vektörün karma çarpımı denir.

$\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ vektörlerinin karma çarpımı $(\vec{A},\vec{B},\vec{C})$ ile gösterilir. Yani, karma

çarpım; $\vec{A}=A_1\,\vec{i}+A_2\,\vec{j}+A_3\,\vec{k}$, $\vec{B}=B_1\,\vec{i}+B_2\,\vec{j}+B_3\,\vec{k}$ ve $\vec{C}=C_1\,\vec{i}+C_2\,\vec{j}+C_3\,\vec{k}$ için;

$(\vec{A},\vec{B},\vec{C})=\vec{A}.\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\begin{vmatrix}A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\\ C_1 & C_2 & C_3\end{vmatrix}$ biçiminde bir determinant ile tanımlanabilir.

- Karma çarpım, vektörel çarpımla ilgili olduğu için yalnızca üç boyutlu uzayın vektörleri için tanımlıdır.

1. $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) = (\vec{B}, \vec{C}, \vec{A}) = (\vec{C}, \vec{A}, \vec{B}) = -(\vec{A}, \vec{C}, \vec{B}) = -(\vec{C}, \vec{B}, \vec{A}) = -(\vec{B}, \vec{A}, \vec{C})$

2. $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) = (\vec{A} + s\vec{B}, \vec{B}, \vec{C}) = (\vec{A}, \vec{B} + r\vec{C}, \vec{C})$

3. $(r\vec{A}, s\vec{B}, t\vec{C}) = (r, s, t)(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$

4. $(\vec{A}, \vec{A}, \vec{B}) = (\vec{A}, \vec{B}, \vec{B}) = (\vec{A}, \vec{B}, \vec{A}) = 0$

5. $(\vec{A} + \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}) = (\vec{A}, \vec{C}, \vec{D}) + (\vec{B}, \vec{C}, \vec{D})$

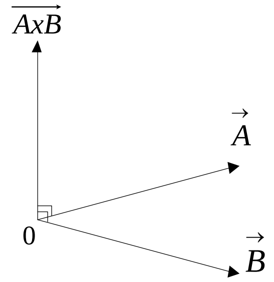
Lagrange Özdeşliği: Uzayda herhangi $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, $\vec{D}$ vektörleri için;

$\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) . \left(\vec{C} \times \vec{D}\right) = \left(\vec{A} . \vec{C}\right)\left(\vec{B} . \vec{D}\right) - \left(\vec{A} . \vec{D}\right)\left(\vec{B} . \vec{C}\right)$ özdeşliği geçerlidir.

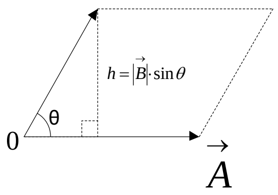
NOT : $\vec{A} . \left(\vec{B} \times \vec{C}\right)$ çarpımına bazen üçlü skaler çarpım veya kutu çarpım denir ve $\left[\vec{A} \quad \vec{B} \quad \vec{C}\right]$ şeklinde gösterilir. $\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right)$ çarpımına üçlü vektör çarpımı denir.

7.11.Vektörel ve Karma Çarpımın Geometrik Yorumları

1) $(\vec{A}, \vec{A}, \vec{B}) = \vec{A}.(\vec{A} \times \vec{B}) = 0$ ve $(\vec{B}, \vec{A}, \vec{B}) = \vec{B}.(\vec{A} \times \vec{B}) = 0$ eşitliklerinin sonucu olarak $\vec{A} \times \vec{B}$ vektörü hem $\vec{A}$ hemde $\vec{B}$ vektörüne diktir. Yani verilen iki vektöre (ve dolayısıyla da bu vektörlerin içinde bulunduğu veya paralel oldukları düzlemlere) de dik konumda bulunan bir vektör bulmak için bu vektörleri vektörel olarak çarpmak yeterlidir.



2) $\left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = |\vec{A}|\,.\,|\vec{B}|\,.\,\mathrm{Sin}\theta = |\vec{A}|.h$ olduğundan $\vec{A}\times\vec{B}$ 'nin uzunluğu $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ üzerinde kurulan paralelkenarın alanına eşittir. Verilen $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerini kenar kabul eden paralelkenarın alanı, $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ 'yi kenar kabul eden üçgenin alanının iki katıdır.



3) $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ arasındaki açıyı aşağıdaki gibi bulabiliriz.

$$\sin\theta = \frac{\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|}{|\vec{A}|.|\vec{B}|} \qquad \text{Örneğin; } \tan\theta = \frac{\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|}{\vec{A}.\vec{B}} \text{ diğer formüllerde elde edilebilir.}$$

4) $\vec{A}\times\vec{0} = \vec{0}\times\vec{A} = \vec{0}$ tanımından $\vec{A}\neq\vec{0}\neq\vec{B}$ iken $\vec{A}\times\vec{B}=\vec{0}$ olması özel hali;

$$\vec{A}\times\vec{B}=\vec{0} \Leftrightarrow \left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = 0 \Leftrightarrow |\vec{A}|.|\vec{B}|.\sin\theta = 0 \Leftrightarrow \sin\theta = 0 \Leftrightarrow \theta\in\{0,\pi\} \Leftrightarrow \vec{A}\,//\,\vec{B} \text{ olur.}$$

İki vektörün paralel olması için gerek ve yeter koşul bunların vektörel çarpımlarının sıfır vektörü olmasıdır. Yani vektörel çarpım işlemi paralelliği belirlemekte de kullanılabilir.

$$\vec{A}\times\vec{B}=\vec{0} \Leftrightarrow \exists s\in R \ni \vec{A}_i = s\,\vec{B}_i \Leftrightarrow \frac{\vec{A}_1}{\vec{B}_1} = \frac{\vec{A}_2}{\vec{B}_2} = \frac{\vec{A}_3}{\vec{B}_3} = s$$

5) Uzayda verilen herhangi $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ vektörlerinin vektörel çarpımı olarak $\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right) = \vec{u}$ olsun. $\vec{u}$ vektörü hem $\vec{A}\times\vec{B}$ hem de $\vec{C}$ vektörüne dik olduğundan $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ vektörlerinin oluşturduğu düzleme paraleldir.

$\vec{A}, \vec{B}, (\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$ vektörleri aynı düzleme paralel konumdadırlar, dolayısıyla aynı düzlemde (eş düzlemli) vektörler olarak düşünülebilirler.

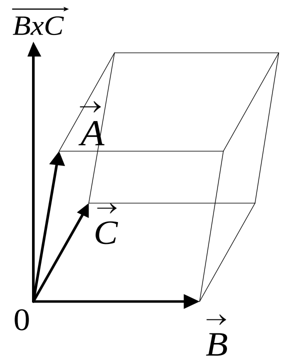
Başka bir anlatımla,

$\vec{A}, \vec{B}, (\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$ vektörleri [$\vec{C}$ 'ye bağlı olmaksızın] lineer bağımlıdırlar.

6) Uzayda herhangi $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ vektörlerinin oluşturduğu paralelyüzlüyü ele alalım.

$$(\vec{A},\vec{B},\vec{C}) = \vec{A}.\left(\vec{B}\times\vec{C}\right) = \left|\vec{A}\right|.\left|\vec{B}\times\vec{C}\right|.\text{Cos}\theta = \left|\vec{B}\times\vec{C}\right|.\left|\vec{A}\right|.\text{Cos}\theta \ \text{ olur.}$$

Burada; $\left|\vec{B}\times C\right|$ değeri $\vec{B}\, ve\, \vec{C}$ üzerine kurulan paralelkenarın (söz konusu paralelyüzlünün tabanı)alanıdır. $h = \left|\vec{A}\right|\cos\theta$ yüksekliği olduğundan $(\vec{A}\ ,\vec{B}\ ,\vec{C})$ karma çarpımı, $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ vektörleri üzerine kurulan paralel yüzlünün hacmini gösterir. Ayrıca $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ vektörlerinin sırası koordinat eksenleri gibi sıralanmışsa yani bir sağ sistem oluşturuyorlarsa bunların karma çarpımı pozitif aksi halde negatif bir sayıdır. Buna göre $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ üzerine kurulan paralelyüzlünün hacmini bulmak $(\vec{A}\ ,\vec{B}\ ,\vec{C})$ için mutlak değerini almak gerekir.



Özel olarak; $(\vec{A}\ ,\vec{B}\ ,\vec{C}) = 0$ ise $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ üzerine kurulan paralelyüzlünün hacmi sıfır demektir. Bu da $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ aynı düzlemde (eş düzlemli)olması demektir. O halde uzayda üç vektörün eş düzlemli(yani lineer bağımlı)olması için gerek ve yeter koşul onların karma çarpımlarının sıfır olmasıdır.

$$(\vec{A}\ ,\vec{B}\ ,\vec{C}) = 0 \Leftrightarrow \vec{A},\vec{B},\vec{C} \ \text{ eş düzlemli}$$

$$\Leftrightarrow \vec{A},\vec{B},\vec{C} \ \text{Lineer Bağımlı}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = 0$$

Dolayısıyla; $(\vec{A}\ ,\ \vec{B}\ ,\ \vec{C}) \neq 0 \Leftrightarrow \vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ eş düzlemli değil

$\Leftrightarrow \vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ lineer bağımsız $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0$ yazılabilir. Ayrıca,

$\vec{A}\ ,\ \vec{B}\ ,\ \vec{C}$ üzerine kurulan paralelyüzlünün hacmi ;

$$V = (\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{olur.}$$

7.12.Vektör Analizinde Aksiyomatik Yaklaşım

$\vec{r} = x.\ \vec{i} + y.\ \vec{j} + z.\ \vec{k}$ vektörünün bir koordinat sistemine göre (x, y, z) bileşenleri bilindiği zaman vektör belirtilmiş olur.Bir üç boyutlu vektör (A_1, A_2, A_3) reel sayılardan oluşan bir sıralı üçlüdür.

$\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$, $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$ ve $\vec{C} = (C_1, C_2, C_3)$ olarak verilsin. Buna göre;

1) $\vec{A_1} = \vec{B_1}$, $\vec{A_2} = \vec{B_2}$, $\vec{A_3} = \vec{B_3}$ ise $\vec{A} = \vec{B}$ dir.

2) $\vec{A} + \vec{B} = (A_1 + B_1\ ,\ A_2 + B_2\ ,\ A_3 + B_3)$

3) $\vec{A} - \vec{B} = (A_1 - B_1\ ,\ A_2 - B_2\ ,\ A_3 - B_3)$

4) $\vec{0} = (0,0,0)$

5) $k\vec{A} = k(A_1, A_2, A_3) = (kA_1, kA_2, kA_3)$

6) $\vec{A}\,.\,\vec{B} = (A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3)$

7) $\vec{A}$ nın büyüklüğü veya uzunluğu; $|\vec{A}| = \vec{A}\,.\,\vec{A} = \vec{A_1}^2 + \vec{A_2}^2 + \vec{A_3}^2$

Bu tanımlardan;

i) $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$ ii) $\vec{A} + \left(\vec{B} + \vec{C}\right) = \left(\vec{A} + \vec{B}\right) + \vec{C}$ iii) $\vec{A}\,.\left(\vec{B} + \vec{C}\right) = \vec{A}\,.\,\vec{B} + \vec{A}\,.\,\vec{C}$

gibi özellikler elde edilir.

7.12.1.Birim Vektörler : $\vec{i}=(1,0,0)$, $\vec{j}\,(0,1,0)$, $\vec{k}\,(0,0,1)$ olarak tanımlansın.

$\vec{A}=A_1\,\vec{i}+A_2\,\vec{j}+A_3\,\vec{k}$, $\vec{B}=B_1\,\vec{i}+B_2\,\vec{j}+B_3\,\vec{k}$ olsun. Buna göre;

$\vec{A}\times\vec{B}=\left(A_2B_3-A_3B_2\,,\ A_3B_1-A_1B_3\,,\,A_1B_2-A_2B_1\right)$ bulunur.

$\vec{A}\,.\,\vec{B}=|A|.|B|.\mathrm{Cos}\theta \Rightarrow \left|\vec{A}\times\vec{B}\right|=A.B.\mathrm{Sin}\theta$

Örnekler : $A(1,0,2)$, $B(3,1,4)$, $C(0,-1,1)$, $D(0,0,-2)$ noktaları verilmektedir

a) $\left(\vec{AC}+\vec{BC}\right)+\vec{AD}=\vec{AC}+\left(\vec{BC}+\vec{AD}\right)$ olduğunu gösteriniz.

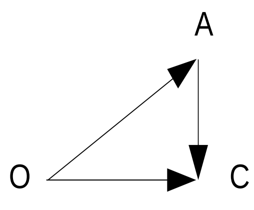
b) $\vec{AB}+\vec{BA}=0$ olduğunu gösteriniz.

c) $\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CD}=\vec{AD}$ olduğunu gösteriniz.

d) $\left(3\,\vec{AB}+2\,\vec{DC}\right)$, $\left(\vec{AB}+\vec{BC}\right)$ hesaplayınız.

Çözüm:

a)Vektörlerin toplama kuralına göre ; $\vec{AC}=\vec{OC}-\vec{OA}$ ise $A(1,0,2)$, $C(0,-1,1)$ için yer vektörleri;



$$\left.\begin{array}{l}\vec{OA}=\vec{A}=\vec{i}+2\,\vec{k}\\[2ex]\vec{OC}=\vec{C}=-\vec{j}+\vec{k}\end{array}\right\}\vec{AC}=\vec{C}-\vec{A}=-\vec{j}+\vec{k}-\vec{i}-2\,\vec{k}=-\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$$

Benzer yoldan:

$\vec{BC} = -3\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{AD} = -\vec{i} - 4\vec{k}$

$$\left(\vec{AC} + \vec{BC}\right) + \vec{AD} = \left(-\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}\right) + \left(-3\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}\right) - \vec{i} - 4\vec{k} = -5\vec{i} - 3\vec{j} - 8\vec{k}$$

$$\vec{AC} + \left(\vec{BC} + \vec{AD}\right) = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} + \left(-3\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}\right) + \left(-\vec{i} - 4\vec{k}\right) = -5\vec{i} - 3\vec{j} - 8\vec{k}$$

b) $\vec{AB} + \vec{BA} = \left(\vec{OB} - \vec{OA}\right) + \left(\vec{OA} - \vec{OB}\right) = 0$

c) $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \left(\vec{OB} - \vec{OA}\right) + \left(\vec{OC} - \vec{OB}\right) + \left(\vec{OD} - \vec{OC}\right) = \vec{OD} - \vec{OA} = \vec{AD}$

d) $\left(3\vec{AB} + 2\vec{DC}\right) = 3\left(2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}\right) + 2\left(-\vec{j} + 3\vec{k}\right) = 6\vec{i} + \vec{j} + 12\vec{k}$

$$\left(\vec{AB} + \vec{BC}\right) = \left(2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}\right) + \left(-3\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}\right) = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$$

2) $\vec{A} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ $\quad \vec{B} = 2\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$ $\quad \vec{C} = -5\vec{j}$ ise;

a) $|\vec{A}|$, $|\vec{B}|$, $|\vec{C}|$ **b)** $\left|\vec{A} + \vec{B}\right|$, $|\vec{A}| + |\vec{B}|$ **c)** $\left|\vec{A} - \vec{B}\right|$, $|\vec{A}| - |\vec{B}|$ hesaplayınız.

Çözüm :

a) $|\vec{A}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14} \cong 3{,}7416$

$|\vec{B}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{4+1+16} = \sqrt{21} \cong 4{,}5825$

$|\vec{C}| = \sqrt{(-5)^2} = 5$ bulunur.

b) $\vec{A} + \vec{B} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$

$$\left|\vec{A} + \vec{B}\right| = \sqrt{9+9+1} = \sqrt{19} \cong 4{,}3588 \rightarrow |\vec{A}| + |\vec{B}| = \sqrt{14} + \sqrt{21} = 3{,}7416 + 4{,}5825 = 8{,}3241$$

c)

$$|\vec{A}|-|\vec{B}|=\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}-\sqrt{2^2+1^2+4^2}=\sqrt{14}-\sqrt{21}\cong-0.8409$$

$$\left|\vec{A}-\vec{B}\right|=\left|(\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k})-(2\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k})\right|=\left|-\vec{i}+\vec{j}-7\vec{k}\right|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-7)^2}=\sqrt{51}=7.141$$

3) $\vec{A}=2\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k}$ $\quad B=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$ olsun. Buna göre;

a) $\vec{a}$ **b)** $\vec{A}+\vec{B}$ **c)** $\vec{A}-\vec{B}$ vektörlerinin doğrultusundaki birim vektörleri bulunuz

Çözüm : **a)**Verilen bir vektör doğrultusundaki birim vektör;

$$a=\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}=\frac{2\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k}}{\sqrt{2^2+4^2+5^2}}=\frac{2\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k}}{\sqrt{4+16+25}}=\frac{2\vec{i}}{\sqrt{45}}+\frac{4\vec{j}}{\sqrt{45}}-\frac{5\vec{k}}{\sqrt{45}}$$

b) $\vec{A}+\vec{B}=2\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k}+\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}=3\vec{i}+6\vec{j}-2\vec{k}$

$$\vec{n}=\frac{\vec{A}+\vec{B}}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{3\vec{i}+6\vec{j}-2\vec{k}}{\sqrt{9+36+4}}=\frac{3}{7}\vec{i}+\frac{6}{7}\vec{j}-\frac{2}{7}\vec{k}$$

c) $\vec{A}-\vec{B}=\vec{i}+2\vec{j}-8\vec{k}\rightarrow\vec{n}=\dfrac{\vec{i}+2\vec{j}-8\vec{k}}{\sqrt{1+4+64}}=\dfrac{1}{\sqrt{69}}\vec{i}+\dfrac{2}{\sqrt{69}}\vec{j}-\dfrac{8}{\sqrt{69}}\vec{k}$

4) $\vec{A}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, $B=\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}$, $C=\vec{i}-\vec{k}$ veriliyor.Buna göre;

a) $\vec{A}.\vec{B}=\vec{B}.\vec{A}$ **b)** $\vec{A}.\left(\vec{B}+\vec{C}\right)=\vec{A}.\vec{B}+\vec{A}.\vec{C}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm : **a)** $\vec{A}.\vec{B}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=2.1+(-1).(-4)+1.2=8$

$\vec{B}.\vec{A}=b_1a_1+b_2a_2+b_3a_3=1.2+(-4).(-1)+2.1=8$

b) $\vec{B}+\vec{C}=\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}+\vec{i}-\vec{k}=2\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k}$

$\vec{A}.\left(\vec{B}+\vec{C}\right)=2.(2)+(-1).(-4)+1.1=9$

$$\vec{A}+\vec{B} = 2.1+(-1).(-4)+1.2 = 2+4+2 = 8 \Rightarrow \vec{A}.\left(\vec{B}+\vec{C}\right) = \vec{A}.\vec{B}+\vec{A}.\vec{C} = 9$$

$$\vec{A}.\vec{C} = 2.1+(-1).(0)+1.(-1) = 2-1 = 1$$

5) $\vec{A} = \vec{i}+2\vec{k}$, $\vec{B} = -\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}$ vektörleri arasındaki açının kosinüsünü bulunuz.

Çözüm : $\vec{A}.\vec{B} = \left|\vec{A}\right|.\left|\vec{B}\right|.\text{Cos}\theta \Rightarrow \qquad \left|\vec{A}\right| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \Rightarrow \quad \left|\vec{B}\right| = \sqrt{1+16+9} = \sqrt{26}$

$$\vec{A}.\vec{B} = 1.(-1)+0.4+2.3 = 5 \quad \Rightarrow \quad 5 = \sqrt{5}.\sqrt{26}.\text{Cos}\theta \Rightarrow \text{Cos}\theta = \sqrt{\frac{5}{26}} \text{ bulunur.}$$

6) $\vec{A} = \vec{i}+m\vec{j}+4\vec{k}$ ve, $\vec{B} = 2\vec{i}+\vec{j}+m\vec{k}$ vektörleri verilmektedir. Bu iki vektörün birbirlerine dik olabilmesi için ‘m’ ne olmalıdır?

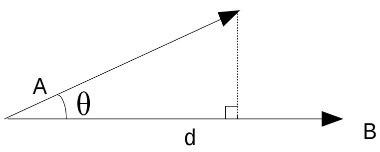
Çözüm: Aradaki açının kosinüsü sıfır olduğunda A ve B vektörleri birbirine dik olur.

$$\vec{A}.\vec{B} = \left|\vec{A}\right|.\left|\vec{B}\right|.\text{Cos}\theta \quad \Rightarrow \quad \theta = 0$$

$$\vec{A}.\vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{A}.\vec{B} = (-1)2+m.1+4.m = 0 \Rightarrow 5m = 2 \Rightarrow m = \frac{2}{5} = 0,4 \text{ olur.}$$

7) $\vec{A} = a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_1\vec{k}$ vektörünün, $\vec{B} = b_1\vec{i}+b_1\vec{j}+b_1\vec{k}$ vektörü üzerindeki dik izdüşümünü bulunuz.

Çözüm:A vektörünün B vektörü üzerindeki dik izdüşümü şekildeki gibidir.



$$\vec{A}.\vec{B} = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|.\text{Cos}\theta$$

$$d = \left|\vec{A}\right|.\text{Cos}\theta \quad , \quad \text{Cos}\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{\left|\vec{A}\right|.\left|\vec{B}\right|} \quad \text{ve} \quad d = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{\left|\vec{B}\right|}$$

8) $\vec{A} = 2\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}$ vektörünün, $\vec{B} = \vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ vektörü üzerindeki dik izdüşümünü bulunuz.

Çözüm : $d=\dfrac{\vec{A}\,.\,\vec{B}}{\left|\vec{B}\right|}=\dfrac{2.1+(-3).2+6.2}{\sqrt{1+4+4}}=\dfrac{2-6+12}{3}=\dfrac{8}{3}$

9) $\vec{A}=\left(\vec{i}+2\,\vec{j}-3\,\vec{k}\right)$, $\vec{B}=\vec{i}+2\,\vec{j}$, $\vec{C}=-\vec{i}+\vec{j}$ olduğuna göre;

a) $\vec{A}\times\vec{B}$, $\vec{A}\times\vec{C}$ b) $\left(\vec{C}-\vec{A}\right)\times 2\vec{B}$ ifadelerini bulunuz.

Çözüm :a) $\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & -3\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix}=\vec{i}\,(6)-\vec{j}\,(3)+\vec{k}\,(2-2)=\vec{6i}-3\,\vec{j}$

$\vec{A}\times\vec{C}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & -3\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=\vec{i}\,(3)-\vec{j}\,(-3)+\vec{k}\,(1+2)=3\,\vec{i}+3\,\vec{j}+3\,\vec{k}$

b) $\left(\vec{C}-\vec{A}\right)\times 2\,\vec{B}$

$\vec{C}-\vec{A}=-\vec{i}+\vec{j}-\left(\vec{i}+2\,\vec{j}-3\,\vec{k}\right)=-\vec{i}+\vec{j}-\vec{i}-2\,\vec{j}+3\,\vec{k}=-2\,\vec{i}-\vec{j}+3\,\vec{k}$

$\left(\vec{C}-\vec{A}\right)\times 2\,\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & -1 & 3\\ 2 & 4 & 0\end{vmatrix}=\vec{i}\,(-12)-\vec{j}\,(-6)+\vec{k}\,(-6)=-12\,\vec{i}+6\,\vec{j}-6\,\vec{k}$

10) A $(1,0,0)$, B $(0,1,0)$ ve C $(0,0,1)$ noktalarının meydana getirdikleri düzleme, A noktasında dik olan birim vektörü ifade ediniz.

Çözüm : $\vec{AB}=-\vec{i}+\vec{j}$ $\quad \vec{AC}=-\vec{i}+\vec{k}$

$$\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}(1)-\vec{j}(-1)+\vec{k}(1)=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$$

$$\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right|=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}\Rightarrow n=\frac{\vec{AB}\times\vec{AC}}{\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right|}=\frac{\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{3}}$$

11) $A(-1,2,3)$, $B(1,1,1)$ ve $C(2,-1,3)$ noktalarının meydana getirdiği düzleme A noktasında dik olan birim vektörü ifade ediniz.

Çözüm: $\vec{AC}=(3,-3,0)$, $\vec{AB}=(2,-1,-2)$ ise $\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -3 & 0\\ 2 & -1 & -2\end{vmatrix}=6\vec{i}+6\vec{j}+3\vec{k}$

$$\vec{n}=\frac{6\vec{i}+6\vec{j}+3\vec{k}}{\sqrt{36+36+9}}=\frac{3(2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k})}{9}=\frac{2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}}{3}$$

12) $A(1,0,1)$, $B(0,1,1)$, $C(1,1,0)$ noktalarının meydana getirdikleri üçgenin alanı nedir?

Çözüm:

$$\left.\begin{aligned}\vec{AB}&=B-A=(-1,1,0)\\ \vec{AC}&=C-A=(0,1,-1)\end{aligned}\right\}\ \vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=\vec{i}(-1)-\vec{j}(1)+\vec{k}(-1)=-\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$$

$$S(ABC)=\frac{1}{2}\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{3}\,br^2$$

13) $\vec{A}=\vec{i}$, $\vec{B}=-\vec{j}$, $\vec{C}=3\vec{k}$ vektörlerinin oluşturduğu paralel yüzlünün hacmi nedir?

Çözüm : $\vec{A}.\left(\vec{B}\times\vec{C}\right) = V_{ABC}$ = Paralel yüzlünün hacmi

$$\vec{B}\times\vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3\,\vec{i} \qquad \text{ise } \vec{A}.\left(\vec{B}\times\vec{C}\right) = (1,0,0).(-3,0,0) = -3 \Rightarrow V = 3br^3$$

14) A (-1,2,3), B (0,-4,7) ve C(-5,1,0) veriliyor. Buna göre;

a) $\vec{A}$ vektörünün $\vec{B}$ vektörü üzerine izdüşüm vektörünü bulunuz.

Çözüm:

$$d = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{\left|\vec{B}\right|} \Rightarrow d = \frac{(-1).0 + 2.(-4) + 3.7}{\sqrt{(-4)^2 + 7^2}} = \frac{-8+21}{\sqrt{16+49}} = \frac{13}{\sqrt{65}}$$

b) $\vec{A}$ vektörünün $\vec{C}$ vektörü üzerine izdüşüm vektörünü bulunuz.

Çözüm:

$$d = \frac{\vec{A}.\vec{C}}{\left|\vec{C}\right|} = \frac{\mathbf{(-1).(-5) + 2.1 + 3.0}}{\sqrt{\mathbf{(-5)^2 + 1^2}}} = \frac{\mathbf{5+2}}{\sqrt{\mathbf{26}}} = \frac{\mathbf{7}}{\sqrt{\mathbf{26}}}$$

c) $\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ vektörlerinin meydana getirdikleri paralel yüzlünün hacmini bulunuz.

Çözüm:

$\vec{A}.\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)$ = Paralel yüzlünün hacmi

$$\vec{B}\times\vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -4 & 7 \\ -5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -7\,\vec{i} - 35\,\vec{j} - 20\,\vec{k}$$

$$\vec{A}.\left(\vec{B}\times\vec{C}\right) = (-1,2,3).(-7,-35,-20) = -123 \Rightarrow V = 123br^3$$

d) $\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ vektörlerinin meydana getirdikleri üçgenin alanını bulun.

Çözüm:

d) $\vec{AB} = B - A = \left(0-(-1)\right)\vec{i} + \left(-4-2\right)\vec{j} + \left(7-3\right)\vec{k} = \vec{i} - 6\vec{j} + 4\vec{k}$

$\vec{AC} = C - A = \left(-5-(-1)\right)\vec{i} + \left(1-2\right)\vec{j} + \left(0-3\right)\vec{k} = -4\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$

Üçgenin alanı $= \frac{1}{2}\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|\left(\vec{i} - 6\vec{j} + 4\vec{k}\right)\times\left(-4\vec{i} + -\vec{j} - 3\vec{k}\right)\right|$

$$\vec{AB}\times\vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -6 & 4 \\ -4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i}\left(18+4\right) - \vec{j}\left(-3+16\right) + \vec{k}\left(-1-24\right) = 22\vec{i} + 13\vec{j} - 25\vec{k}$$

$$\frac{1}{2}\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{22^2 + 13^2 + (-25)^2}\,\text{br}^2$$

e) $\vec{A}$, $\vec{B}$ vektörleri arasındaki açının kosinüsünü hesaplayınız.

Çözüm:

$$\text{Cos}\theta = \frac{\vec{A}\,.\,\vec{B}}{\left|\vec{A}\right|.\left|\vec{B}\right|} = \frac{(-1).0 + 2.(-4) + 3.7}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2}\sqrt{(-4)^2 + 7^2}} = \frac{13}{\sqrt{14}\sqrt{65}}$$

f) $\vec{A}$, $\vec{B}$ vektörlerinin meydana getirdiği paralel kenarın alanını hesaplayınız.

Çözüm:

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 7 \end{vmatrix} = 26\vec{i} + 7\vec{j} + 4\vec{k} \Rightarrow \left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = \sqrt{26^2 + 7^2 + 4^2}$$

g) $\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ vektörlerinin doğrultularındaki birim vektörleri bulunuz.

Çözüm:

$$a = \frac{\vec{A}}{\left|\vec{A}\right|} = \frac{-\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2}} = -\frac{\vec{i}}{\sqrt{14}} + \frac{2\vec{j}}{\sqrt{14}} + \frac{3\vec{k}}{\sqrt{14}}$$

$$b = \frac{\vec{B}}{\left|\vec{B}\right|} = \frac{-4\vec{j} + 7\vec{k}}{\sqrt{(-4)^2 + 7^2}} = -\frac{4\vec{j}}{\sqrt{65}} + \frac{7\vec{k}}{\sqrt{65}}$$

$$c = \frac{\vec{C}}{\left|\vec{C}\right|} = \frac{-5\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{(-5)^2 + 1^2}} = -\frac{5\vec{i}}{\sqrt{26}} + \frac{\vec{j}}{\sqrt{26}}$$

h) $\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ vektörlerinin meydana getirdiği düzleme A noktasında dik olan birim vektörü bulunuz.

Çözüm:

h) $\vec{AB} = B - A = \vec{i} - 6\vec{j} + 4\vec{k}$

$\vec{AC} = C - A = -4\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -6 & 4 \\ -4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 22\vec{i} + 13\vec{j} - 25\vec{k} \text{ ise } n = \frac{22\vec{i} + 19\vec{j} + 23\vec{k}}{\sqrt{22^2 + 19^2 + 23^2}} =$$

15) $\vec{A} = -2\vec{j} + 3\vec{k}$; $\vec{B} = \vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$; $\vec{C} = -5\vec{i} + 6\vec{k}$ veriliyor.

a) $\vec{A}$ vektörünün $\vec{B}$ vektörü üzerine izdüşüm vektörünü bulunuz.

$$d = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{\left|\vec{B}\right|} \Rightarrow d = \frac{0.1 + (-2).3 + 3.(-4)}{\sqrt{1^2 + 3^2 + (-4)^2}} = \frac{-6 - 12}{\sqrt{1 + 9 + 16}} = \frac{-18}{\sqrt{26}}$$

b) $\vec{A}$ vektörünün $\vec{C}$ vektörü üzerine izdüşüm vektörünü bulunuz.

$$d = \frac{\vec{A}.\vec{C}}{\left|\vec{C}\right|} \Rightarrow d = \frac{0.(-5) + (-2).0 + 3.6}{\sqrt{(-5)^2 + 0^2 + 6^2}} = \frac{18}{\sqrt{61}}$$

c) $\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ vektörlerinin meydana getirdikleri paralel yüzlünün hacmini bulunuz.

$\vec{A}.\left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = V_{ABC}$ = Paralel yüzlünün hacmi

$$\vec{B}\times\vec{C}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 3 & -4\\ -5 & 0 & 6\end{vmatrix}=18\,\vec{i}+14\,\vec{j}+15\,\vec{k}\Rightarrow\quad \vec{A}.\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=(0,-2,3).(18,14,15)=27\text{br}^3$$

d) $\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ vektörlerinin meydana getirdikleri üçgenin alanını bulun.

$$\vec{AB}=B-A=(1-0)\,\vec{i}+(3-(-2))\,\vec{j}+(-4-3)\,\vec{k}=\vec{i}+5\,\vec{j}-7\,\vec{k}$$

$$\vec{AC}=C-A=(-5-0)\,\vec{i}+(0-(-2))\,\vec{j}+(6-3)\,\vec{k}=-5\,\vec{i}+2\,\vec{j}+3\,\vec{k}$$

$$\text{Üçgenin alanı }=\frac{1}{2}\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right|=\frac{1}{2}\left|\left(\vec{i}+5\,\vec{j}-7\,\vec{k}\right)\times\left(-5\,\vec{i}+2\,\vec{j}+3\,\vec{k}\right)\right|$$

$$\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 5 & -7\\ -5 & 2 & 3\end{vmatrix}=\vec{i}\,(15+14)-\vec{j}\,(3-35)+\vec{k}\,(2+25)=29\,\vec{i}+32\,\vec{j}+27\,\vec{k}$$

$$\frac{1}{2}\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{29^2+32^2+27^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2594}\text{br}^2$$

e) $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörleri arasındaki açının kosinüsünü hesaplayınız.

$$\text{Cos}\theta=\frac{\vec{A}.\vec{B}}{\left|\vec{A}\right|.\left|\vec{B}\right|}=\frac{0.1+(-2).3+3.(-4)}{\sqrt{0^2+(-2)^2+3^2}\sqrt{1^2+3^2+(-4)^2}}=\frac{-18}{\sqrt{13}\sqrt{26}}$$

f) $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin meydana getirdiği paralelkenarın alanını hesaplayınız.

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & -2 & 3\\ 1 & 3 & -4\end{vmatrix}=-\,\vec{i}+3\,\vec{j}+2\,\vec{k}$$

$$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|=\sqrt{(-1)^2+3^2+2^2}=\sqrt{14}\text{ br}^2$$

g) $\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ vektörlerinin doğrultularındaki birim vektörleri bulunuz.

$$a=\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}=\frac{0\,\vec{i}-2\,\vec{j}+3\,\vec{k}}{\sqrt{0^2+(-2)^2+3^2}}=-\frac{2\,\vec{j}}{\sqrt{13}}+\frac{3\,\vec{k}}{\sqrt{13}}$$

$$b=\frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}=\frac{\vec{i}+3\,\vec{j}-4\,\vec{k}}{\sqrt{1^2+3^2+(-4)^2}}=\frac{\vec{i}}{\sqrt{26}}+\frac{3\,\vec{j}}{\sqrt{26}}-\frac{4\,\vec{k}}{\sqrt{26}}\text{ ve}$$

$$c=\frac{\vec{C}}{|\vec{C}|}=\frac{-5\,\vec{i}+0\,\vec{j}+6\,\vec{k}}{\sqrt{(-5)^2+0^2+6^2}}=-\frac{5\,\vec{i}}{\sqrt{61}}+\frac{6\vec{k}}{\sqrt{61}}\quad \text{olarak bulunur.}$$

h) $\vec{A}$, $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ vektörlerinin meydana getirdiği düzleme A noktasında dik olan birim vektörü bulunuz.

$$\vec{AB}=B-A=\vec{i}+5\,\vec{j}-7\,\vec{k}\quad \text{ve}\quad \vec{AC}=C-A=-5\,\vec{i}+2\,\vec{j}+3\,\vec{k}$$

$$\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 5 & -7\\ -5 & 2 & 3\end{vmatrix}=29\,\vec{i}+32\,\vec{j}+27\,\vec{k}\ \text{ ise }\ n=\frac{29\,\vec{i}+32\,\vec{j}+27\,\vec{k}}{\sqrt{29^2+32^2+27^2}}$$

Soru

A(-2, 3, -1) **1.** V_{ABC} = ?
B(-1, 0, 2) **2.** S_{ABC} = ?
C(3, -1, 4) **3.** A ve B için cosθ=?d =? S=?

Cevap

1. $V_{ABC}=\begin{pmatrix}-2 & 3 & -1\\ -1 & 0 & 2\\ 3 & -1 & 4\end{pmatrix}=-2(0+2)-3(-4-6)-1(1-0)=-4+30-1=25br^2$

2. $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\ x\ \overrightarrow{AC}\right|$

$\overrightarrow{AB}=\vec{B}-\vec{A}=i-3j+3k$
$\overrightarrow{AC}=\vec{C}-\vec{A}=5i-4j+5k$

$$\overrightarrow{AB}\ x\ \overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}i & j & k\\ 1 & -3 & 3\\ 5 & -4 & 5\end{pmatrix}=i(-15+12)-j(5-15)+k(-4+15)$$

$\overrightarrow{AB}\ x\ \overrightarrow{AC} = -3i + 10j + 11k$

$S_{ABC} = \sqrt{(-3)^2 + 10^2 + 11^2} = \sqrt{\dfrac{280}{2}}$

3.a. $S = |A\ x\ B|$

$$\vec{A}\ x\ \overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = i\,(6-0) - j(-4-1) + k(0+3) = 6i + 5j + 3k$$

$S = \sqrt{6^2 + 5^2 + 3^2}$
$= 70br^2$

3.b.

$|\vec{A}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$

$|\vec{B}| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 2^2 = \sqrt{5}}$

$\vec{A}.\vec{B} = (-2).(-1) + 3\,.0 + (-1).2 = 0$

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \frac{0}{\sqrt{14}\sqrt{5}}$$

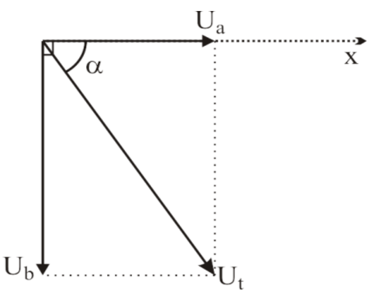
16) Seri bağlı A ve B yüklerinin gerilimleri sırasıyla $U_a = 60V$ ve $U_b = 90V$ olarak verilmektedir.

a) U_b, U_a'dan 90° geri fazda,

b) U_b, U_a'dan 60° ileri fazda,

olması durumlarında toplam gerilimi (U_t) ve faz açısını (α) hesaplayınız.?

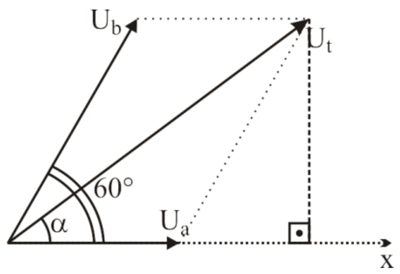
Çözüm:a)



$U_t = \sqrt{U_a^{\ 2} + U_b^{\ 2}} = \sqrt{60^2 + 90^2} = 108{,}16V$

$Cos\alpha = \dfrac{U_a}{U_t} = \dfrac{60}{108{,}16} = 0{,}554 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 56{,}35°$

b)

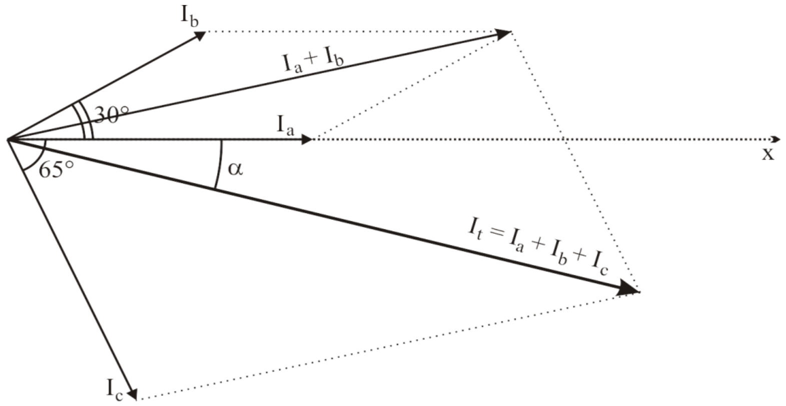


$$U_t = \sqrt{\left(U_a + U_b \cdot Cos60°\right)^2 + \left(U_b \cdot Sin60°\right)^2} = \sqrt{\left(60 + 90 \cdot Cos60°\right)^2 + \left(90 \cdot Sin60°\right)^2}$$

$$U_t = \sqrt{105^2 + 77,94^2} = 130,76V$$

$$Cos\alpha = \frac{U_a + U_b \cdot Cos60°}{U_t} = \frac{105}{130,76} = 0,803 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 36,58°$$

17) Şekilde birbirine paralel bağlı A, B, C yüklerinin çektikleri akımlara ait vektör diyagramı görülmektedir. Akımların büyüklükleri $I_a = 12A$, $I_b = 10A$ ve $I_c = 15A$ olarak verildiğine göre toplam akımı ve x- ekseni ile yaptığı açıyı bulunuz.



Çözüm: Tüm akımların **x** ekseni izdüşümlerinin toplamı;

$$I_x = I_a + I_b \cdot Cos30° + I_c \cdot Cos65° = 12 + 10 \cdot Cos30° + 15 \cdot Cos65° = 27A$$

Benzer şekilde Tüm akımların **y** ekseni izdüşümlerinin toplamı;

$$I_y = I_b \cdot Sin30° - I_c \cdot Sin65° = 10 \cdot Sin30° + 15 \cdot Sin65° = -8,6A$$

$$I_t = \sqrt{I_x^{\,2} + I_y^{\,2}} = \sqrt{27^2 + 8,6^2} = 28,3A \; Cos\alpha = \frac{I_x}{I_t} = \frac{27}{28,3} = 0,954 \quad \Rightarrow \alpha = 17° geri$$

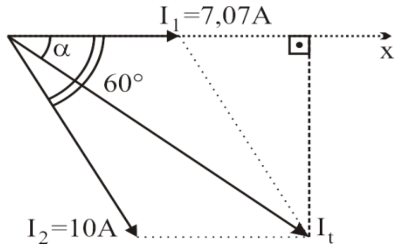
18) $i_1 = 10 \cdot Sin\omega t \quad i_2 = 14,1 \cdot Sin\left(\omega t - 60°\right)$ akımlarının etkin değerlerini vektörel olarak gösteriniz. Bu iki akımın bileşkesi olan toplam akımı ve -x- ekseni ile yaptığı açıyı bulunuz. Genel ifadesini yazınız.

Çözüm: Sinyalin periyodu T=2π/a=2π'dir. Periyodu 2π olan bir sinyalin etkin değeri $\mathrm{I} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$

$$i_1 = 10 \cdot Sin\omega t \quad \Rightarrow \quad I_{1\max} = 10A \quad ve \quad I_1 = \frac{10}{\sqrt{2}} = 7,07A$$

$i_2 = 14{,}1 \cdot Sin(\omega t - 60°) \quad \Rightarrow \quad I_{2\max} = 14{,}1A \quad ve \quad I_2 = \frac{14{,}1}{\sqrt{2}} = 10A$

Buna göre vektör diyagramı aşağıdaki gibi çizilir.



$I_t = \sqrt{(I_1 + I_2 \cdot Cos60°)^2 + (I_2 \cdot Sin60°)^2} = \sqrt{(7{,}07 + 10 \cdot Cos60°)^2 + (10 \cdot Sin60°)^2}$

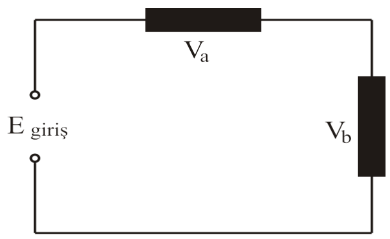
$U_t = \sqrt{12{,}07^2 + 8{,}66^2} = 14{,}85A$

$Tan\alpha = \frac{I_2 \cdot Sin60°}{I_1 + I_2 \cdot Cos60°} = \frac{8{,}66}{12{,}07} = 0{,}707 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \tan^{-1}(0{,}707) = 35{,}64°$

Bileşke akımın maksimum değeri $I_{t\max} = I_t \cdot \sqrt{2} = 14{,}85 \cdot \sqrt{2} = 21A$

Bileşke akımın genel ifadesi $i_t = 21 \cdot Sin(\omega t - 35{,}64°)$

19)



Şekildeki devrede $v_a = 30 \cdot Sin(377t + 60°)$ ve $v_b = 50 \cdot Sin(377t + 30°)$ verildiğine göre giriş geriliminin genel ifadesini bulunuz.

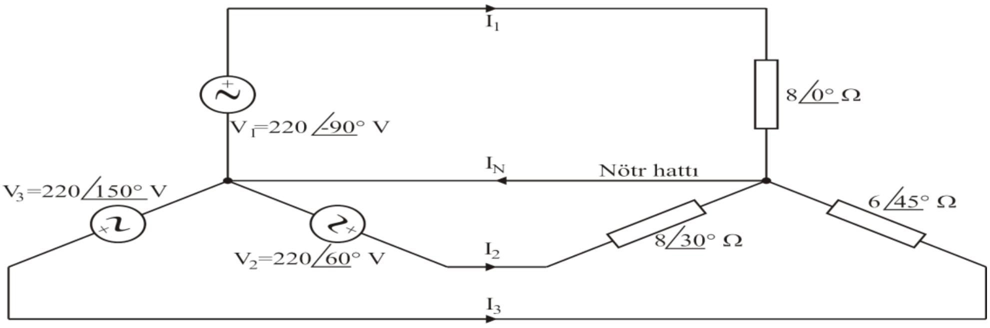
Çözüm: $v_a = 30 \cdot Sin(377t + 60°) \quad \Rightarrow \quad V_a = \frac{30}{\sqrt{2}}\angle 30° = 21{,}2\angle 60° V = 10{,}6 + j18{,}35V$

$v_b = 50 \cdot Sin(377t + 30°) \quad \Rightarrow \quad V_b = \frac{50}{\sqrt{2}}\angle 30° = 35{,}3\angle 30° V = 30{,}57 + j17{,}65V$

$E_{giriş} = V_a + V_b = (10{,}6 + j18{,}35) + (30{,}57 + j17{,}65) = 41{,}17 + j36V = 54{,}8\angle 41{,}2° V$

$e_{giriş} = e_{\max} \cdot Sin(\omega t + \varphi) = 54{,}8 \cdot \sqrt{2} \cdot Sin(377t + 41{,}2°) = 71{,}5 \cdot Sin(377t + 41{,}2°)V$

20) Şekildeki yıldız bağlı dengesiz sistemde nötr hattından geçen akımları bulunuz ve sistemin vektör diyagramını çiziniz.

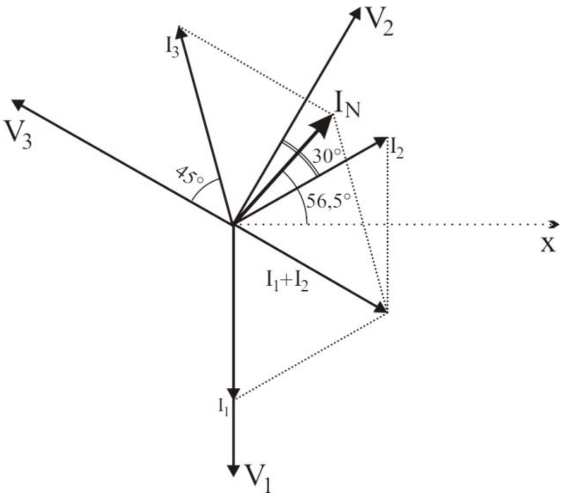


Çözüm: Fonksiyonun tanımı;

$$I_1 = \frac{V_1}{Z_1} = \frac{220\angle -90°}{8\angle 0°} = 27,5\angle -90° A$$

$$I_2 = \frac{V_2}{Z_2} = \frac{220\angle 60°}{8\angle 30°} = 27,5\angle 30° A$$

$$I_3 = \frac{V_3}{Z_3} = \frac{220\angle 150°}{6\angle 45°} = 36,66\angle 105° A$$



$$I_N = I_1 + I_2 + I_3$$

$$I_N = 27,5\angle -90° + 27,5\angle 30° + 36,66\angle 105°$$

$$I_N = 27,5\left(Cos\left(-90\right)° + jSin\left(-90\right)°\right) + 27,5\left(Cos30° + jSin30°\right) + 36,66\left(Cos105° + jSin105°\right)$$

$$I_N = -j27,5 + 23,82 + j13,75 - 9,488 + j35,41 = 14,332 + j21,66 A$$

$$I_N = 25,97\angle 56,5° A$$

ALIŞTIRMALAR

1) A(-3, 6, 4) ve B(-1, 4, 2) vektörleri verildiğine göre;

a) $\cos\theta = ?$ b) d=? c)S=? d) a=? e) b=?

2) Köşeleri A(-2, 3, 4), B(1, -5, -3) ve C(-2, 4, -3) olan üçgenin alanı nedir ?

3) Kenarları A(2, -3, -4), B(-1, 3, 2) ve C(-3, 4, 5) olan dörtyüzlünün hacmi nedir ?

4) $\left.\begin{array}{l} \vec{A} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} \\ \vec{B} = -3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k} \end{array}\right\} \cos\theta = ?, d = ?, S = ?$

$$\left.\begin{aligned}&\textbf{5) } \vec{A} = -2\vec{i} + 3\vec{k}\\&\vec{B} = 4\vec{i} - 5\vec{j}\\&\vec{C} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}\end{aligned}\right\}$$ veriliyor. Kenarları A, B, C olan paralel yüzlünün hacmi nedir ?

$$\left.\begin{aligned}&\textbf{6) } \vec{A} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}\\&\vec{B} = 4\vec{i} - 3\vec{j}\\&\vec{C} = -2\vec{j} + 5\vec{k}\end{aligned}\right\}$$ vektörleri veriliyor.Köşeleri A, B, C olan üçgenin alanı nedir?

7)Köşeleri A(-2, 3, 1), B(1, 0, -3) ve C(0, 4, -1) olan üçgenin alanı nedir?

8)Köşeleri A(1, -3, 0), B(-1, 4, -2) ve C(0, 2, -5) olan dörtyüzlünün hacmi nedir?

9)A(3, 0, -4) ve B(-2, 4, -1) vektörleri verildiğine göre;

a) $\cos\theta = ?$ b)d=?c)S=?d)a=?e)b=?

$$\left.\begin{aligned}&\textbf{10) } \vec{A} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}\\&\vec{B} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}\\&\vec{C} = 3\vec{i} - 4\vec{j}\end{aligned}\right\}$$ vektörleri veriliyor.A ve B vektörleri arasındaki ;

a) $\cos\theta = ?$ b)d=? c)S=? d)a=? e)b=? f) Köşeleri A, B, C olan üçgenin alanı nedir ?

g) Kenarları A, B, C olan paralel yüzlünün hacmi nedir ?

$$\left.\begin{aligned}&\textbf{11) } \vec{A} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}\\&\vec{B} = -3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}\end{aligned}\right\}\cos\theta = ?, d = ?, S = ?$$

$$\left.\begin{aligned}&\textbf{12) } \vec{A} = 3\vec{i} - 2\vec{j}\\&\vec{B} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}\\&\vec{C} = -2\vec{j} - 5\vec{k}\end{aligned}\right\}$$ vektörleri veriliyor.Kenarları A, B, C olan üçgenin alanı nedir ?

$$\left.\begin{aligned}&\textbf{13) } \vec{A} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}\\&\vec{B} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}\\&\vec{C} = -\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}\end{aligned}\right\}$$ veriliyor.Kenarları A, B, C olan paralel yüzlünün hacmi nedir ?

14) $\left.\begin{aligned} \vec{A} &= 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k} \\ \vec{B} &= -\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} \end{aligned}\right\} \cos\theta = ?, d = ?, S = ?$

15) $\left.\begin{aligned} \vec{A} &= -3\vec{i} + 2\vec{j} \\ \vec{B} &= -2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k} \\ \vec{C} &= 2\vec{j} - 5\vec{k} \end{aligned}\right\}$ vektörleri veriliyor.Köşeleri A, B, C olan üçgenin alanı nedir ?

16) $\left.\begin{aligned} \vec{A} &= -2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k} \\ \vec{B} &= -2\vec{i} + \vec{j} - 5\vec{k} \end{aligned}\right\} \cos\theta = ?, d = ?, S = ?, a = ?, b = ?$