BÖLÜM 16

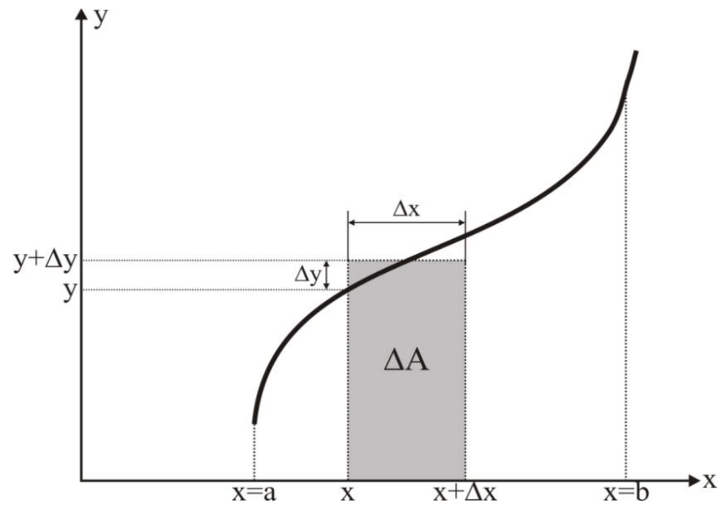
BELİRLİ İNTEGRALİN UYGULAMALARI

Bu bölümde, belirli integralin uygulamaları başlığı altında bir eğri altında kalan alan hesabı, iki eğri arasında kalan alan hesabı, dönel cisimlerin hacmi, dönel yüzeylerin yanal alanı, yay uzunluğu, ağırlık ve kütle merkezi, ortalama ve etkin değer gibi konular ele alınacak ve bu konulara ait örnekler çözülecektir.

16.1. Bir Eğri Altında Kalan Alan Hesabı

16.1.1. y = f(x) eğrisi, x – ekseni, x = a ve x = b doğruları ile sınırlı bölgenin alanı

y = f(x) eğrisi, x – ekseni, x = a ve x = b doğruları ile sınırlı bölgenin alanı aşağıdaki gibi olsun. (Şekil –16.1)



Şekil.16.1

f(x), [a,b] aralığında pozitif olsun (Şekil 16.1). **A = A(x)** fonksiyonu **x=a'dan x=b'ye** kadar alanı temsil ederken **ΔA** ise **x** ile **x+Δx** arasındaki alanı ifade eder. Buna göre;

$$\mathbf{y.\Delta x \leq \Delta A \leq (y+\Delta y).\Delta x}$$

olduğu açıktır . Bu son ifadeyi Δx ile bölersek;

$$\mathbf{y \leq \frac{\Delta A}{\Delta x} \leq y + \Delta y}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik, **A** alanının x'e göre değişim oranının **y** ile **y+Δy** arasında olduğunu gösterir. $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$ için;

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta A}{\Delta x} = \dfrac{dA}{dx}$ ve burada eşitsizlik; $y \le \dfrac{dA}{dx} \le y$ olur.

Böylece $y = \dfrac{dA}{dx} \Rightarrow dA = y.dx$ ve buradan her iki tarafın integrali alınarak;

$\int dA = \int ydx \Rightarrow A = \int y.dx$ veya $A = \int f(x)dx$ olarak elde edilir.

A = ∫ f(x) dx iken **A=F(x)+c** olur.

Burada ; **f (x) = F'(x)** olup **x = a, A = 0** iken **c = - F(a)** bulunur.

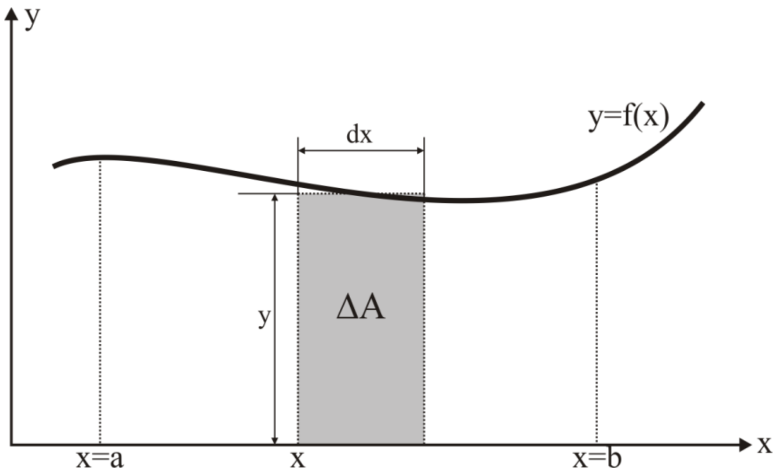
Bu değer, **A=F(x)+c** ifadesinde yerine yazılırsa;

A = F (x) - F (a)

alan fonksiyonu elde edilir. Bu son ifadede, x = b alınırsa y = f(x) eğrisi x = a, x = b doğruları ve x-ekseni arasında kalan alan;

A = F(b) – F(a) olarak bulunur.

Böylece, **y = f(x) eğrisi, x = a, x= b doğruları ve x- ekseni ile sınırlı bölgenin alanı** Şekil.16.2'dende görüldüğü gibi dikdörtgen şeklindeki dA elamanlarının toplamının bir Limiti olarak belirli integralle aşağıdaki gibi ifade edilir.



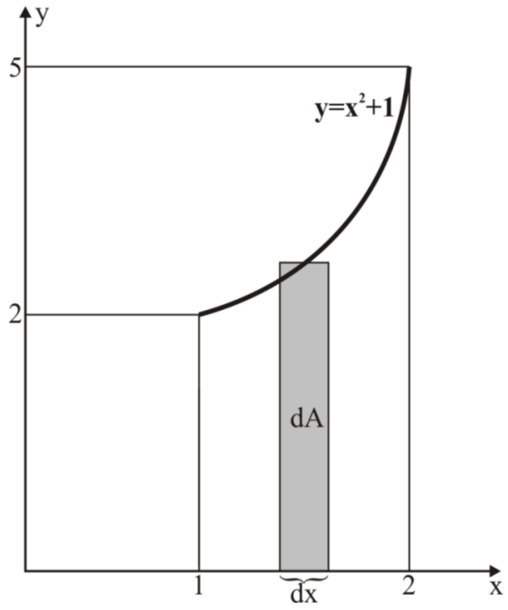
Şekil 16.2

Şekilde, **dA** alan elamanı **y-** yüksekliğine ve **dx-** genişliğine sahip olan bir dikdörtgendir.Buna göre; **dA = y.dx = f (x).dx**

olarak bulunur. Buradan, bu son ifadenin her iki tarafının integrali alınarak **dA** alan elamanlarının toplamının limiti olan **A** alanı **x = a**'dan **x = b**'ye kadar belirli integral yardımıyla;

$\mathbf{A} = \int_a^b \mathbf{ydx} = \int_a^b \mathbf{f(x)dx}$ olarak elde edilir. Bunu basit bir örnek ile açıklayalım.

Örnek.16.1: $y=x^2+1$ eğrisi x=1, x=2 doğruları ve x-ekseni ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz.



Şekil. 16.3

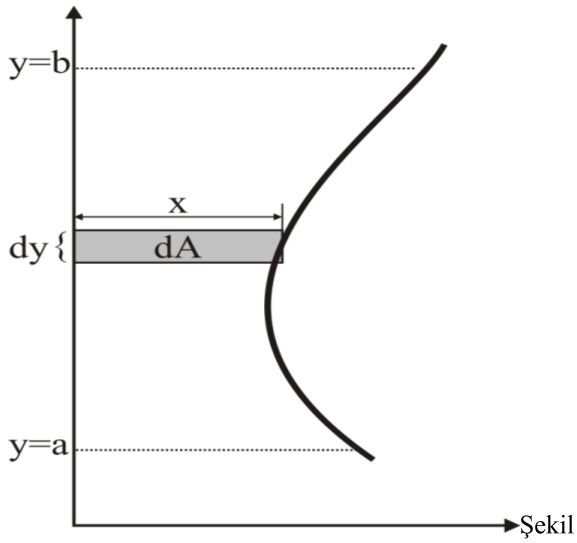
Çözüm.16.1: Şekil-16.3'deki taralı bölge $y=x^2+1$ eğrisi, x-ekseni, x=1, x=2 doğruları ile sınırlı bölgenin alanını göstermektedir. Bu sınırlı alan dA alan elemanlarının toplamına eşit olacağından bu toplamı;$A = \int dA = \int (x^2+1)dx$ ile bulabiliriz. Böylece x-ekseni doğrultusundaki elemanların x =1'den x =2'ye kadar olan toplamı;

$$A=\int_1^2 (x^2+1).dx = \left(\frac{x^3}{3}+x\right|_1^2$$

$$=\left(\frac{2^3}{3}+2\right)-\left(\frac{1^3}{3}+1\right)=\frac{10}{3}br^2$$

olarak elde edilir.

16.1.2. x = g(y) eğrisi, y-ekseni y = a, y = b doğruları ile sınırlı bölgenin alan hesabı



Şekil.16..4

Yandaki şekil x = g(y) eğrisi, y-ekseni, y = a ve y = b doğruları ile sınırlı bölgenin alanını göstermektedir (Şekil 16.4). x = g(y) eğrisi üzerindeki (x,y) noktasından x yüksekliği ve dy genişliğine sahip yatay alan elemanını bir dikdörtgen olarak alalım. Bu dikdörtgen elemanın alanına dA diyelim. Böylece toplam alan, dA elemanlarının toplamının Limiti olarak integral yardımıyla;

$\mathbf{A= \int dA = \int x dy}$ olarak elde edilir. Böylece x =g(y) eğrisi y = a, y = b doğruları ve y-ekseni ile sınırlı bölgenin alanı;

$$\mathbf{A = \int_a^b x.dy = \int_a^b g(y).dy} \quad \text{olur.}$$

Örnek.16.2: $y = x^2+1$ eğrisi y-ekseni, $y = 2$, $y = 5$ doğruları ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz.

Cevap 16.2 Yandaki şekil, $y = x^2+1$ eğrisi y-ekseni

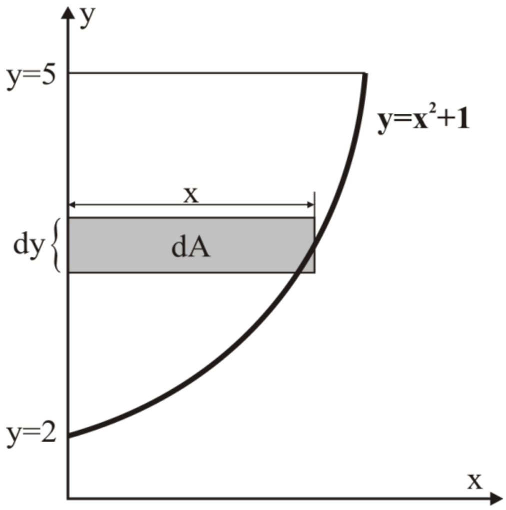
$y = 2$, $y = 5$ doğruları ile sınırlı bölgeyi göstermek üzere bu alan dA yatay alan elemanlarının toplamının bir limiti olarak;

$$dA = xdy \Rightarrow A = \int_a^b xdy \text{ elde edilir.}$$

Buna göre;

$$A = \int_2^5 x\,dy = \int_2^5 \sqrt{y-1}\,dy = \frac{2}{3}(y-1)^{\frac{3}{2}}\Big|_2^5$$

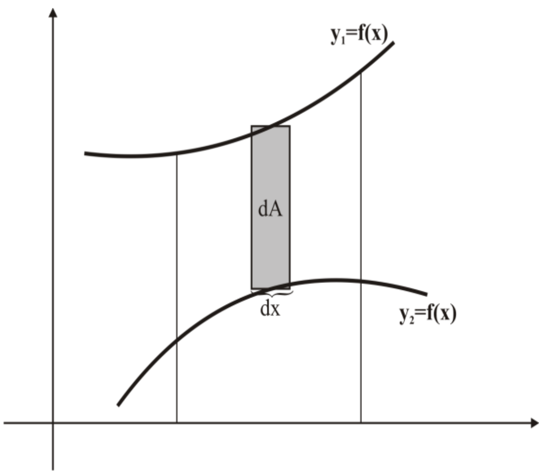
$$A = \frac{2}{3}\left[(5-1)^{\frac{3}{2}} - (2-1)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2}{3}[8-1] = \frac{14}{3}\,br^2 \text{ olur.}$$



Şekil. 16.5

16.2. İki Eğri Arasinda Kalan Alan Hesabi

16.2.1. $y_1=f(x)$, $y_2=g(x)$ eğrileri ile x=a, x=b Doğruları Arasında Kalan Alanın Hesabı



Şekil. 16.6

Yandaki şekil $y_1=f(x)$, $y_2=g(x)$ eğrileri x=a, x=b doğruları ile sınırlı alanı göstersin. (Şekil 16.6) Burada, bu sınırlı alanı **(A)** bulmak için küçük bir alan elamanını dikdörtgen olarak alalım ve bu elemana **dA** diyelim . Buna göre, **dA**, yüksekliği y_1-y_2 ve genişliği **dx** olan bir dikdörtgen olup bu dikdörtgen elemanın dA alanı ;

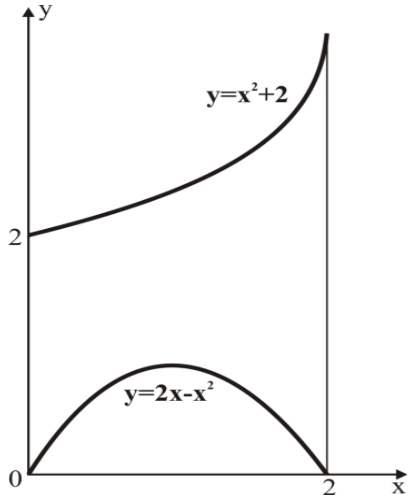
$dA=(y_1 - y_2)dx = [f(x) – g(x)]dx$ …………(*)

olur. Burada, **A**, bir bölgenin alanı olduğundan pozitif olmak zorundadır. Negatif çıkması ise **f(x) - g(x)** yerine **g(x) –f(x)** olması ile ortaya çıkar. Böylece (*) ifadesinin her iki yanının integrali alınırsa x=a , x=b sınırları için;

$$\mathbf{A = \int_a^b (y_1 - y_2).dx = \int_a^b (f(x) - g(x)).dx} \text{ olur.}$$

Örnek.16.3 : $y=x^2+2$ ile $y=2x-x^2$ eğrileri ve x=0, x=2 doğruları tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm.16.3 : $y=x^2+2$ ile $y=2x-x^2$ eğrileri ve x=0, x=2 doğruları tarafından sınırlanan bölgenin alanı aşağıdaki şekilde verilmiştir.(Şekil 16.7) Buna göre istenilen alan ;



Şekil 16.7

$$A=\int_a^b (y_1-y_2)dx$$

$$=\int_0^2\left(\left[x^2+2\right]-\left[2x-x^2\right]\right)dx$$

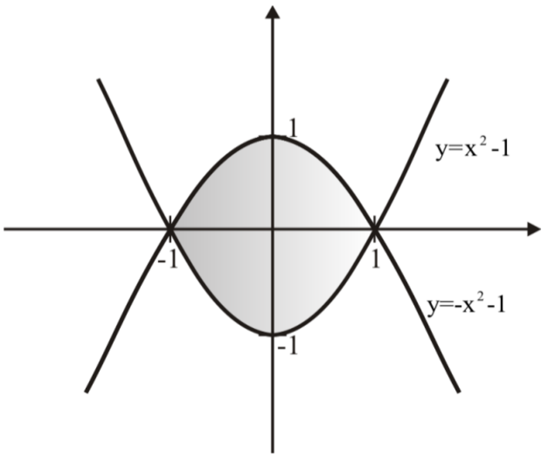
$$=\int_0^2\left(2x^2-2x+2\right)dx$$

$$=\left(\frac{2}{3}x^3-x^2+2x\right]_0^2=\frac{16}{3}\text{br}^2$$

olarak bulunur.

Örnek.16.4 : $y=x^2-1$ ile $y=-x^2+1$ eğrileri arasında kalan alanı bulunuz.

Çözüm.16.4 : Bu örnekte sınırlar verilmediği için integral sınırlarının hangi x'ler için olduğunu bulmamız gerekir. Şimdi bu eğrilerin grafiğini çizelim. (Şekil.16.8)



Şekil.16.8

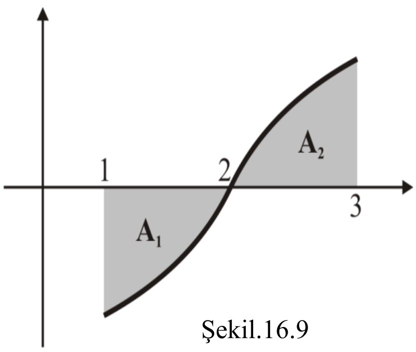
y=y ise $x^2-1=-x^2+1$
$2x^2-2=0$ ise $x^2-1=0$ ve $x=\pm 1$ olur.
Böylece x= -1 'den x=+1 'e kadar olan alan;

$$A=\int_{-1}^{1}(y_1-y_2)dx=\int_{-1}^{1}\left[(-x^2+1)-(x^2-1)\right]dx=\int_{-1}^{1}(-2x^2+2)dx=\left(-\frac{2}{3}x^3+2x\right]_{-1}^{1}=\frac{8}{3}\text{br}^2 \text{ olarak}$$

bulunur.

Örnek.16.5: $y=x^2-4$ eğrisi x=1, x=3 doğruları ve x-ekseni ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm.16.5: Şekilde görüldüğü gibi istenilen alan A_1 ve A_2 olmak üzere iki alanın toplamından ibarettir. (Şekil 16.9) Bu alanların toplamı belirli integralin özelliklerinden ;



Şekil.16.9

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad (c \in [a,b])$$

yardımıyla bulunur. Buradan fonksiyonun x-eksenini kestiği nokta; $x^2-4 = 0 \Rightarrow x=2$ olur.

Böylece istenilen alan;

$A = A_1 + A_2 = \int_1^2 (y_1 - y_2)dx + \int_2^3 (y_1 - y_2)dx$ yardımıyla;

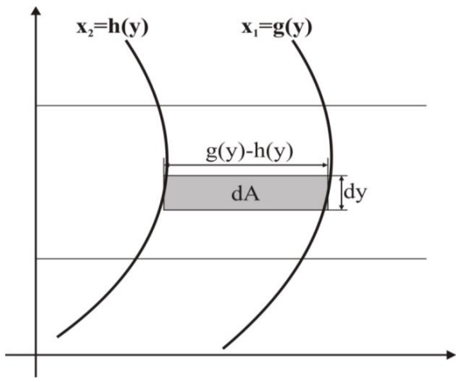
$$A = \int_1^2 \left(0 - \left(x^2 - 4\right)\right).dx + \int_2^3 \left(\left(x^2 - 4\right) - 0\right).dx = -\int_1^2 \left(x^2 - 4\right).dx + \int_2^3 \left(x^2 - 4\right).dx$$

$$A = \left(-\frac{x^3}{3} + 4x\right]_1^2 + \left(\frac{x^3}{3} - 4x\right]_2^3 = \frac{12}{3} = 4br^2$$

elde edilir.

16.2.2. $x_1=g(y)$, $x_2 = h(y)$ eğrileri ile y=a, y=b Doğruları Arasında Kalan Bölgenin Alanı

$x_1=g(y)$, **$x_2 = h(y)$** eğrileri **y=a**, **y=b** doğruları ile sınırlı bölgenin alanını göz önüne alalım. (Şekil. 16.10) Şekilde iki eğri arasında kalan alana **A** diyelim. Buna göre, genişliği **dy** ve yüksekliği **g (y) – h (y)** olan **dA** küçük alan elamanını göz önüne alalım.



Şekil.16.10

Buradan;**dA = [g(y)-h(y)]dy** bulunur.Her iki tarafın integrali alınırsa y = a, y = b sınırları itibarıyla dA alan elamanlarının toplamının limiti olarak istenilen sınırlı bölgenin alanı ;

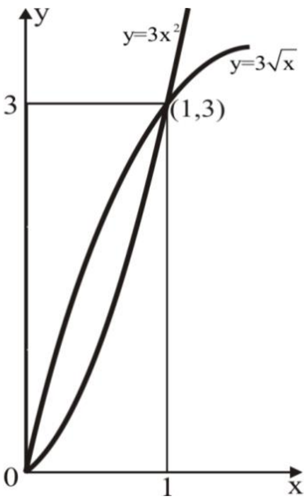
$$\mathbf{A} = \int_a^b (x_1 - x_2).dy = \int_a^b [g(y) - h(y)].dy$$ olarak elde edilir.

Örnek.16.6: $y=3\sqrt{x}$ ile $y=3x^2$ eğrileri arasında kalan sınırlı bölgenin alanını bulalım.

Çözüm.16.6: Öncelikle bu eğrilerin grafiği çizilir ve x ile y'nin sınırları belirlenir.(Şekil.16.11) Buna göre;

$$y=y \Rightarrow 3\sqrt{x}=3x^2 \qquad x_1=0 \text{ için } y_1=0$$
$$9x-9x^4=0 \Rightarrow x_1=0, x_2=1\ . \qquad x_2=1 \text{ için } y_2=3$$

Yandaki şekilde görüldüğü gibi istenilen alan hem x'in sınırlarına göre hemde y'nin sınırlarına göre çözülebilir. Böylece;



Şekil.16.11

$$A=\int_0^1 (y_1-y_2)dx=\int_0^1 (3\sqrt{x}-3x^2)dx \qquad \text{veya;} \quad \frac{y^2}{9}=x_2, \sqrt{\frac{y}{3}}=x_1$$
$$\left(2x^{\frac{3}{2}}-x^3\right]_0^1=1br^2$$

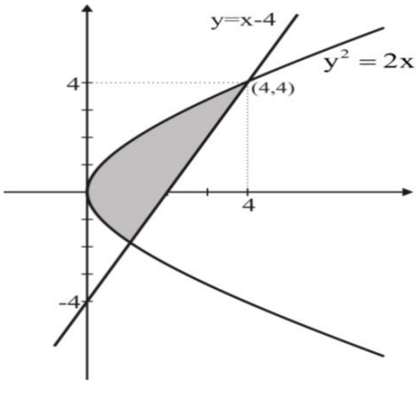
dersek;

$$A=\int_0^3 (x_1-x_2)dy=\int_0^3\left(\sqrt{\frac{y}{3}}-\frac{y^2}{9}\right).dy=\left(3\frac{2}{3}\left(\frac{y}{3}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{y^3}{27}\right]_0^3=1br^2$$

olarak bulunur.

Örnek.16.7: $y^2=2x$ eğrisi ile y=x-4 doğrusu arasında kalan sınırlı bölgenin alanını bulalım.

Çözüm.16.7: Bu fonksiyonların grafiklerini çizip istenilen alanı ve buna bağlı olarak x veya y'ye bağlı sınırlarımızı bulalım. (Şekil.16.12) $A=\int_a^b (x_1-x_2)dy$ idi. Böylece;



Şekil.16.12

$$\frac{y^2}{2}=x \quad \text{ve} \quad y+4=x \quad \text{ise} \quad x=x \quad \text{eşitliğinden}$$
$$\frac{y^2}{2}=y+4 \quad \text{buradan}; y^2-2y-8=0$$
$$\Rightarrow y_1=2, y_2=4 \quad \text{olarak elde edilir.}$$
$$A=\int_{-2}^4\left[(y+4)-\frac{y^2}{2}\right]dy=\left(\frac{y^2}{2}+4y-\frac{y^3}{6}\right]_{-2}^4=18br^2$$

bulunur.

Not: Eğer problemimiz hem x'in sınırlarına göre hemde y'nin sınırlarına göre ifade edilebiliyorsa bunlardan birisi kullanılarak yukarıdaki çözüme gidilir. x'in sınırları söz konusu olduğunda eğriden aşağıdaki eğri çıkarılarak integral alınırken y'nin sınırları söz konusu olduğunda sağdaki eğriden soldaki eğri çıkarılarak integral alınıp istenen alan aynı olarak bulunur.

Örnek.16.8: y = Sin 2x eğrisi , x = 0 , $x = \frac{2\pi}{3}$, y = 0 doğruları ile sınırlı alanı bulunuz.

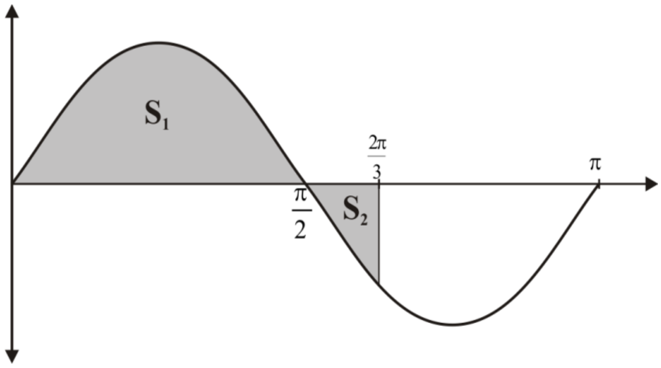
Çözüm.16.8: Eğri $[0, \frac{2\pi}{3}]$ aralığında x eksenini x=$\frac{\pi}{2}$ de kestiği için istenen alan iki parçalıdır.(Şekil 16.13)

$$S= \int_0^{2\pi/3} y.dx = \int_0^{2\pi/3} Sin2x.dx = \int_0^{\pi/2} Sin2x.dx + \int_{\pi/2}^{2\pi/3} Sin2x.dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} Sin2x.dx + \int_{\pi/2}^{2\pi/3} (-Sin2x)dx = -\frac{1}{2}Cos\ 2x\Big]_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}Cos\ 2x\Big]_{\pi/2}^{2\pi/3}$$

$$= -\frac{1}{2}(\operatorname{Cos}\pi - \operatorname{Cos}0) + \frac{1}{2}(\operatorname{Cos}\frac{4\pi}{3} - \operatorname{Cos}\pi) = -\frac{1}{2}(-1-1) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+1\right) = \frac{5}{4}br^2$$

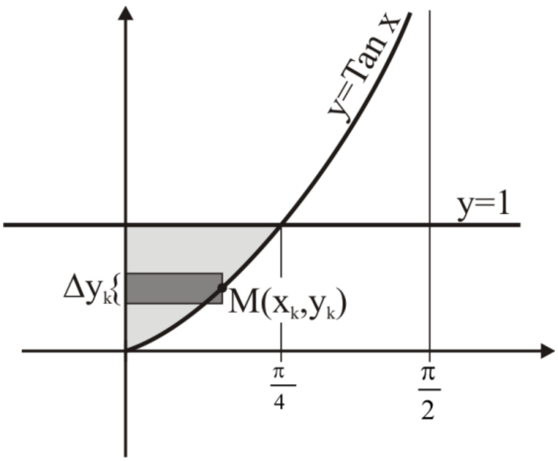
bulunur.



Şekil 16.13

Örnek.16.9: $y = \operatorname{Tan} x$,x = 0 , y = 1 ile sınırlı alanı bulunuz.

Çözüm.16.9: İstenen alan y ekseniyle sınırlı olduğundan yaklaşım dikdörtgenini yatay olarak alalım.(Şekil 16.14).



Şekil.16.14

$$A=\int_0^1 |x| dy = \int_0^1 Arctany dy$$

Buradan kısmi integral ile;

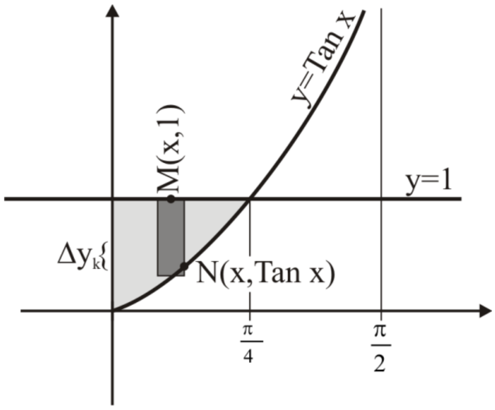
$$A = yArctany]_0^1 - \int_0^1 y \frac{1}{1+y^2} dy$$

$$= yArctany - \frac{1}{2}\ln(1+y^2)]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}$$

bulunur.

Not: Aynı alan, yaklaşım dikdörtgeni düşey alınarak(Şekil.16.15)



Şekil.16.15

$A = \int_0^{\pi/4} |y_1 - y_2| dx$

$A = \int_0^{\pi/4} (1 - Tanx) dx$

$A = x + \ln|Cosx|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$

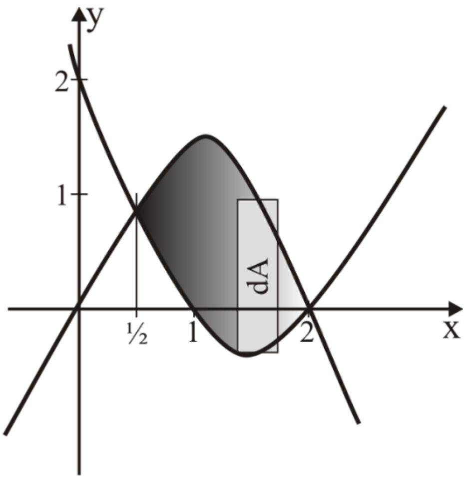
$A = (\frac{\pi}{4} + \ln\left|Cos\frac{\pi}{4}\right|) - (0 + \ln|Cos0|)$

$A = (\frac{\pi}{4} + \ln\frac{1}{\sqrt{2}}) - (0) = \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}$

şeklinde de bulanabilir.

Örnek.16.10: $y = x^2 - 3x + 2$ ile $y = -x^2 + 2x$ eğrileri arasındaki alanı bulunuz.

Çözüm.16.10: Önce denklemlerin ortak çözümü ile eğrilerin kesim notlarının apsislerini bulalım.(Şekil.16.16)



Şekil.16.16

$$\begin{cases} y = x^2 - 3x + 2 \\ y = -x^2 + 2x \end{cases}$$

$x^2 - 3x + 2 = -x^2 + 2x$

$2x^2 - 5x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = 2$ bulunur.Buna göre ;

$$A = \int_{1/2}^{2} |y_1 - y_2|\, dx = \int_{1/2}^{2} \big[[(-x^2 + 2x) - (x^2 - 3x + 2)\big]dx = \int_{1/2}^{2} (-2x^2 + 5x - 2)dx$$

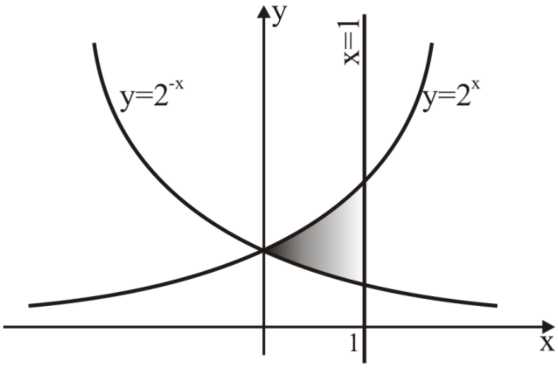
$$= -\frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x\Big]_{1/2}^{2} = \left(-\frac{16}{3} + 10 - 4\right) - \left(-\frac{1}{12} + \frac{5}{8} - 1\right)$$

$= \frac{2}{3} + \frac{11}{24} = \frac{9}{8} br^2$ bulunur.

Örnek.16.11: $y = 2^x,\ y = 2^{-x}\ ,\ x = 1$ ile sınırlı alanı bulunuz.

Çözüm.16.11: $A = \int_0^1 |\ y_1 - y_2|.dx$ idi.

$y = 2^x,\ y = 2^{-x}\ ,\ x = 1$ ile sınırlı alan aşağıdaki gibidir. (Şekil.16.17)



Şekil.16.17

$$A = \int_0^1 (2^x - 2^{-x})dx$$

$$= \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{2^{-x}}{\ln 2}\Big]_0^1 = \frac{1}{\ln 2}[(2 + 2^{-1}) - (2^0 + 2^0)]$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\left[2 + \frac{1}{2} - 2\right] = \frac{1}{2\ln 2}$$

$= \dfrac{1}{\ln 4}$ olarak bulunur.

Örnek.16.12: $x^2 + y^2 = 16$ çemberi ile $y^2 = 12(x-1)$ parabolü arasındaki alanı bulunuz.

Çözüm.16.12:

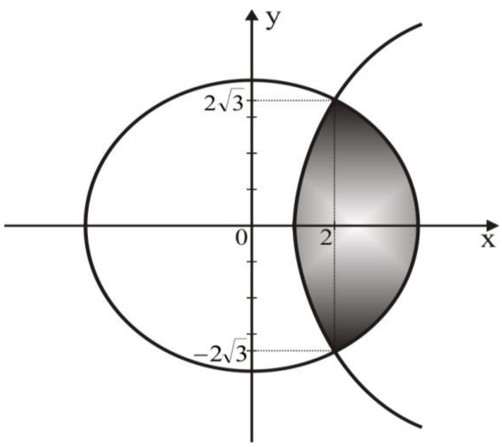
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ y^2 = 12(x-1) \end{cases}$$

Ortak çözümünden $x^2 + 12(x-1) = 16$ ve $x^2 + 12x - 28 = 0$

$x = 2 \lor x = -14$ bulunur.

$x = 2$ için $y^2 = 12$ ve $y = \pm 2\sqrt{3}$

$x = -14$ için $y^2 = -180$ ve $y \notin \mathbb{R}$ dir.Buna göre çemberle parabol $(2; 2\sqrt{3})$ ve $(2; -2\sqrt{3})$ noktalarında kesişirler (Şekil.16.18).



Şekil.16.18

İstenen alanın x eksenine göre simetrik olduğu da gözönüne alınarak:

$$A = 2\int_0^{2\sqrt{3}} |x_1 - x_2|.dy$$

$$= 2\int_0^{2\sqrt{3}} \left[\sqrt{16 - y^2} - \left(\frac{1}{12}y^2 + 1\right)\right]dy$$

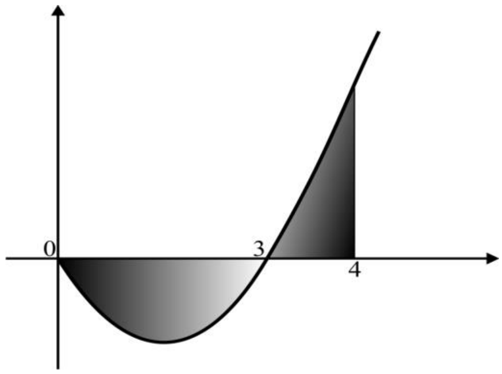
$$= 2\left[\frac{y}{2}\sqrt{16 - y^2} + 8\ Arcsin\frac{y}{4} - \frac{1}{36}y^3 - y\right]_0^{2\sqrt{3}}$$

$$= 2\left[\left(\sqrt{3}\,.\,\sqrt{4} + 8\,Arcsin\tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{2\sqrt{3}}{3} - 2\sqrt{3}\right) - (0)\right]$$

$= \frac{16\pi}{3} - \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{4}{3}(4\pi - \sqrt{3})$ bulunur.

Örnek.16.13: Hareketli bir cismin hız denklemi $v = t^2 - 3t$ dir.Cismin $[0\,,4]$ zaman aralığında aldığı toplam yolu bulunuz.

Çözüm.16.13: Hız – zaman grafiği Şekil.16.19'da çizilmiştir.Buna göre cismin hızı $(0\,,3)$ zaman aralığında negatif, $(3\,,4)$ zaman aralığında pozitiftir. Bu nedenle cismin $(0\,,3)$ zaman aralığında negatif yönde (geriye doğru), $(3\,,4)$ zaman aralığında pozitif yönde (ileriye doğru) gider.



Şekil.16.19

Cismin aldığı toplam yol ise şekildeki taralı alanlar toplamı kadar olur.Buna göre

$$s = \int_0^4 |v|\,.\,dt = -\int_0^3 (t^2 - 3t)\,.dt + \int_3^4 (t^2 - 3t)dt$$

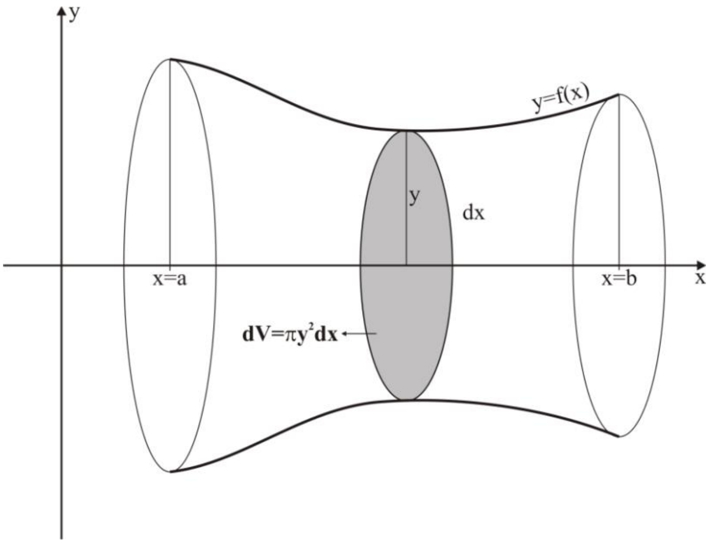
$$= -\left(\frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2}\right)\Bigg]_0^3 + \left(\frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2}\right)\Bigg]_3^4$$

$$= -\left(9 - \frac{27}{2}\right) - (0) + \left(\frac{64}{3} - 24\right) - \left(9 - \frac{27}{2}\right) = \frac{19}{3}$$ bulunur.

16.3. Dönel Cisimlerin Hacminin Bulunması

Belirli integralin uygulamaları sadece bir eğri altında kalan alan veya iki eğri arasında kalan alanı bulmaktan ibaret değildir. Bu nedenle bu ve takip eden bölümlerde bir eğrinin bir doğru veya bir eksen etrafında dönmesiyle oluşan dönel cismin hacmi, dönel yüzeylerin alanı, yay uzunluğu ve bunun yanısıra bir fonksiyonun efektif (etkin) değerini ve ortalama değerini ele alacağız.Sınırlı bir bölgenin bir eksen veya bir doğru etrafında dönmesiyle oluşan cisme **dönel cisim** denir. Sınırlı bir bölgenin alanı söz konusu iken bir dönel cismin hacmi söz konusu olur. Bu hacim hesaplanırken iki yöntem uygulanır.

16.3.1. Disk Yöntemi: **y = f(x) eğrisi, x-ekseni ile x = a ve x = b** doğruları ile sınırlı alanın



Şekil 16.20

x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan hacmi göz önüne alalım (Şekil 16.20). Buna göre, **V** hacim elamanını göstermek üzere bu elemanı bulmaya çalışalım. Şekilde görüldüğü gibi **dV** hacim elemanı bir disktir ve genişliği **dx'**dir. Disk bir dairesel silindir olup **y** yarıçapı ve **dx** yüksekliğine sahiptir.

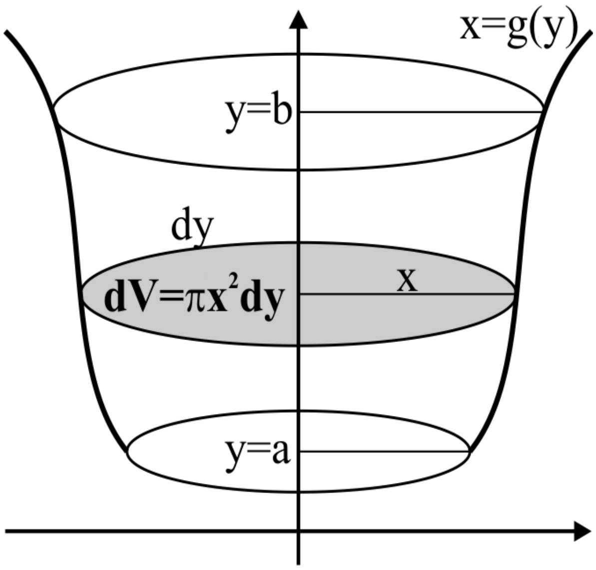
Buna göre;

dV= $\pi . y^2 dx$ … . . . …. (*)

olarak bulunur. Böylece, **V** hacmi **dV** dairesel disklerinin hacimleri toplamının limitidir. Yani, **x = a'dan x = b'ye kadar dV dairesel disklerinin toplamının limiti (*) ifadesinin her iki yanının integralinin alınmasıyla;**

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

olarak elde edilir.Benzer şekilde, **x = g(y)** eğrisi , **y-ekseni**, **y = a** ve **y = b** doğruları ile sınırlı bölgenin **y-ekseni** etrafında dönmesiyle oluşan dönel cismin hacmi şu şekilde bulunur.



Şekil.16.21

Yandaki şekil x=g(y) eğrisi, y-ekseni, y=a y=b doğruları ile sınırlı bölgeyi göstermektedir (Şekil-16.21). Bu alanın y-ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel cismin hacmine **V** diyelim.Bu cismi oluşturan **dV** hacim elamanlarının herbiri dairesel disktir ve bu diskin genişliği y'nin diferansiyeli **dy**'dir. Buradaki diskler dairesel silindir olup yarıçapları **x**, yükseklikleri **dy** olup **dV** hacim elemanı;

dV=$\pi x^2 dy$………………………………(*)

olur.

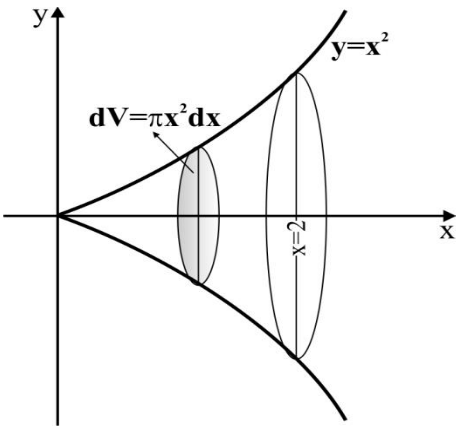
V hacim elemanı ise **dV** dairesel disklerinin hacimlerinin toplamının bir limiti olup (*) ifadesinin her iki yanının integrali alınıp y=a'dan y=b'ye kadar oluşan hacim elemanı;

$$\mathbf{V = \pi \int_a^b x^2 dy = \pi \int_a^b [g(y)]^2 dy}$$

olarak bulunur.

Örnek.16.14: $y = x^2$ eğrisi $y = 0$, $x = 2$ doğruları ile sınırlı bölgenin alanının x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan hacim nedir?

Çözüm.16.14: İlk önce sınırlı bölgemizin x- ekseni etrafında dönmesiyle oluşan hacmi göz önüne alalım (Şekil 16.22). Bir sınırlı bölgenin x-ekseni etrafında dönmesiyle oluşan hacmi V_x ile gösterirsek;



Şekil.16.22

$$Vx = \pi\int_0^2 y^2 dx = \pi\int_0^2 x^4 dx$$

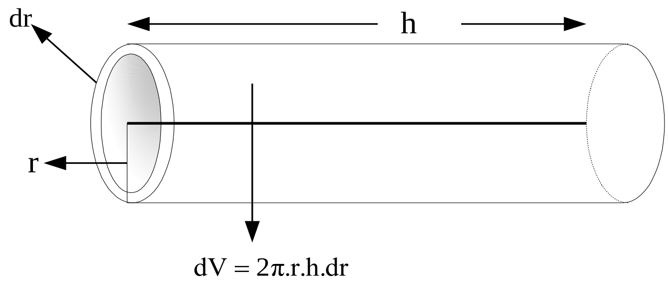
$$= \pi\left(\frac{x^5}{5}\right]_0^2$$

$$= \frac{32\pi}{5} br^3$$

olur.

16.3.2. Shell (Kabuk)(Tabaka) Yöntemi

Disk metodunda yukarıda gördüğümüz gibi sınırlı bir alanın bir eksen etrafında dönmesiyle oluşan cismin hacmini bulmak için bazen disk yerine ince zarlı bir kabuk (shell) kullanmak daha kolaydır.(Şekil.16.23)



Şekil.16.23

Burada, **dV** hacim elemanı yarıçapı **r**, yüksekliği **h** ve kalınlığı **dr** olan ince zarlı bir silindirik kabuktur. Böylece, **dV** hacim elemanlarının toplamının limiti r=a , r=b sınırları itibarı ile;

$$dV = 2\pi \int_a^b rhdr \text{ olur.}$$

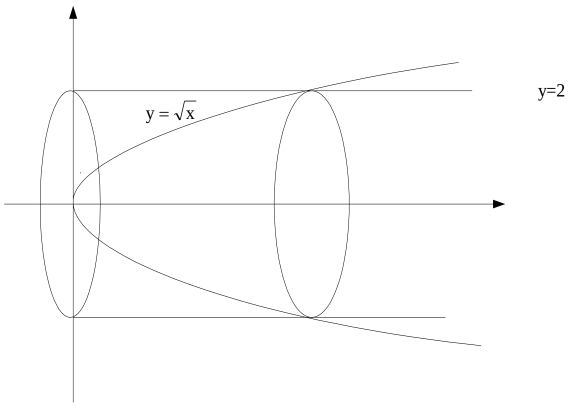
Bu hacim yukarıdaki Şekil görüldüğü gibi yükseklik boyunca dairesel dik silindirdir. (Şekil 16.23) Bu tabakanın uzunluğu kabuğun çevresine eşittir. Burada, **r,** kabuğun yarıçapıdır. Tabakanın **h** yüksekliği eğriye bağlıdır ve sınırlı alan döndüğünde buna bağlı olarak **dr** veya **dy** seçilir. Buna göre, **dV** hacim hacim elemanı;

$$dV=2\pi.r.h.dr$$

şeklindedir. **h yüksekliği, r yarıçapı ve dr kalınlığı dönme ekseni ve döndürülmüş alana bağlıdır. Yani h,r ve dr değerleri her bir problem için belirlenmek zorundadır.**

Örnek.16.15 : $y=\sqrt{x}, y=2, x=0$ eğrileri ile sınırlı bölgenin hacmi nedir.

Çözüm.16.15: Şeklimizdende görüldüğü gibi burada;



Şekil.16.24

r = y

h = x

dr = dy olur.Buna göre, **dV** hacim elemanı;

$$dV=2\pi rhdr=2\pi(y).(x).dy=2\pi y.y^2dy=2\pi y^3dy$$

ve buradan;

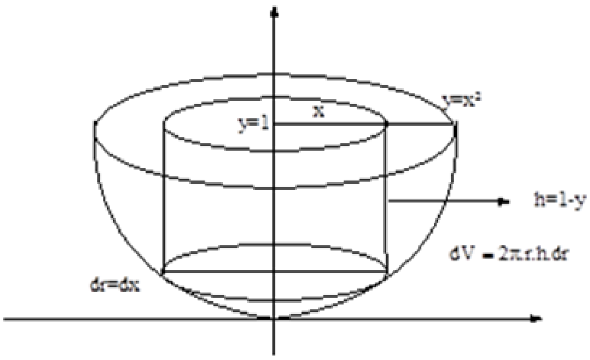
$$V=\int_0^2 dV=2\pi\int_0^2 y^3dy=2\pi\left(\frac{y^4}{4}\right]_0^2=8\pi \quad br^3$$

olarak bulunur.

Örnek.16.16: $y=x^2$ eğrisi x=0, y=1 doğruları ve y-ekseni ile sınırlı bölgenin y – ekseni etrafında dönmesi ile oluşan hacmi;

a) Shell Yöntemi b)Disk Yöntemi yardımıyla bulunuz.

Çözüm.16.16: i) Problemimizi shell metodu ile çözelim. Öncelikle bunun için şeklimizi çizelim.(Şekil 16.25) Shell metodunda;



Şekil.16.25

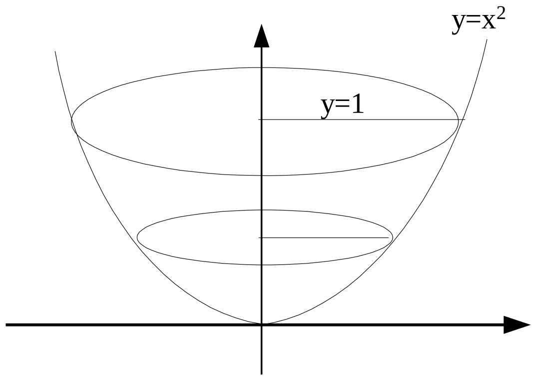
h = 1-y ve r = xdr = dx değerleri dV hacim elemanında yerine yazılırsa;

$dV=2\pi rhdr=2\pi.x.(1-y)dx \quad =2\pi(x).(1-x^2)dx$

olur. Buna göre V hacmi;

$$V=\pi\int_a^b x^2dy=\pi\int_0^1 ydy=\pi\left(\frac{y^2}{2}\right]_0^1=\frac{\pi}{2}br^3$$

ii) Disk yöntemi: Aynı problemin şeklini disk yöntemi için çizelim. (Şekil-16.19)



$$V_y = \pi\int_a^b x^2\,dy = \pi\int_a^b y.dy$$

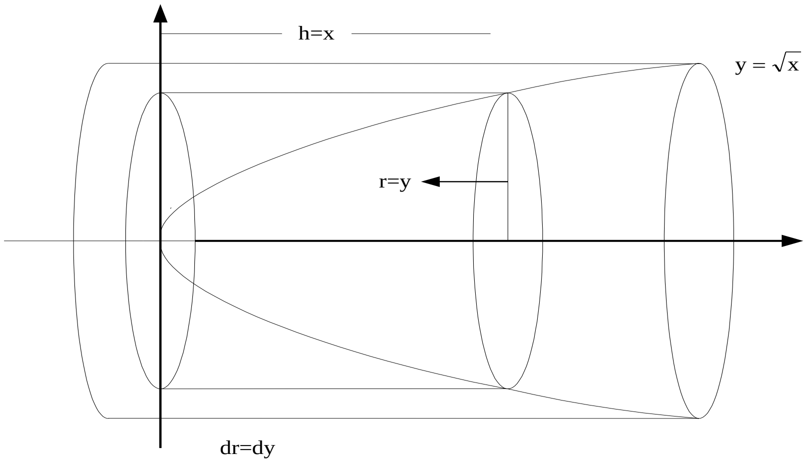
$$= \pi\left|\frac{y^2}{4}\right|_0^2 = \frac{\pi}{2}br^3$$

Şekil.16.26

Örnek.16.17:

$y=\sqrt{x}$, $y=2$ ve $x=0$ ile sınırlı bölgenin x - ekseni etrafında dönmesiyle oluşan hacmi shell metodunu kullanarak bulunuz.

Çözüm.16.17:



Şekil.16.27

Şekil-16.27'de görüldüğü gibi $y=\sqrt{x}$, y=2 ve x=0 ile sınırlanan bölgenin x-ekseni etrafında dönmesiyle elde edilen cisme r=y ile yarıçapı, h=x ile yüksekliği ve dr=dy alalım . Hacim elemanını bulmak için yukarıdaki değerler yerine yazılırsa;

$$dV=2\pi rhdr=2\pi(y)(x)dy=2\pi(y)(y^2)dy=2\pi y^3dy$$

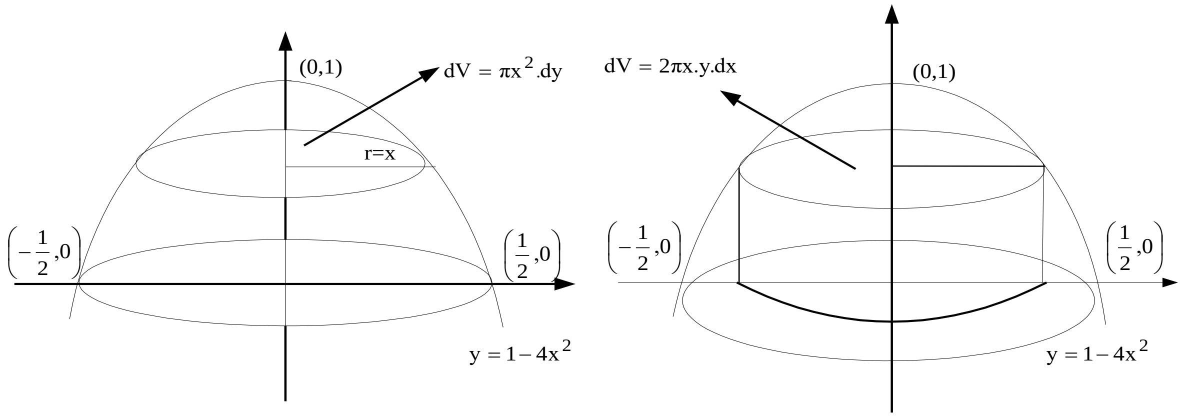
olur. Buradan istenen V hacmi;

$$V=\int_0^2 dv = 2\pi\int_0^2 y^3\,dy = 2\pi\left|\frac{y^4}{4}\right|_0^2 = 8\pi$$

olarak elde edilir.

Örnek.16.18: $y = 1\text{-}4x^2$, $x = 0$ ve $y = 0$ parabolü ile sınırlı bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cisim hacmini bulunuz.

Çözüm.16.18:



(Şekil. 16.28 – a – b)

(Şekil 16.28-a)'da verilen cisim hacmini disk metodu kullanarak çözelim. Burada x^2 yerine (1-y) / 4 konularak;

$$V = \pi \int_0^1 x^2\, dy = \pi \int_0^1 \frac{1-y}{4} dy = \frac{\pi}{4} \left| y - \frac{y^2}{4} \right|_0^1 = \frac{\pi}{8}$$

olarak bulunur. (Şekil 16.21-b)' deki cismi şimdide shell metodunu kullanarak çözelim. Şeklin yarıçapı r=x , yüksekliği h=y ve dr=dx alarak hacim elemanını bulalım.

$$dV = 2\pi xy dx = 2\pi x(1-4x^2)dx = 2\pi(x-4x^3)dx$$

y=0 'a göre x'in pozitif değerinin alınmasıyla integralin üst sınırı bulunmuş olur.

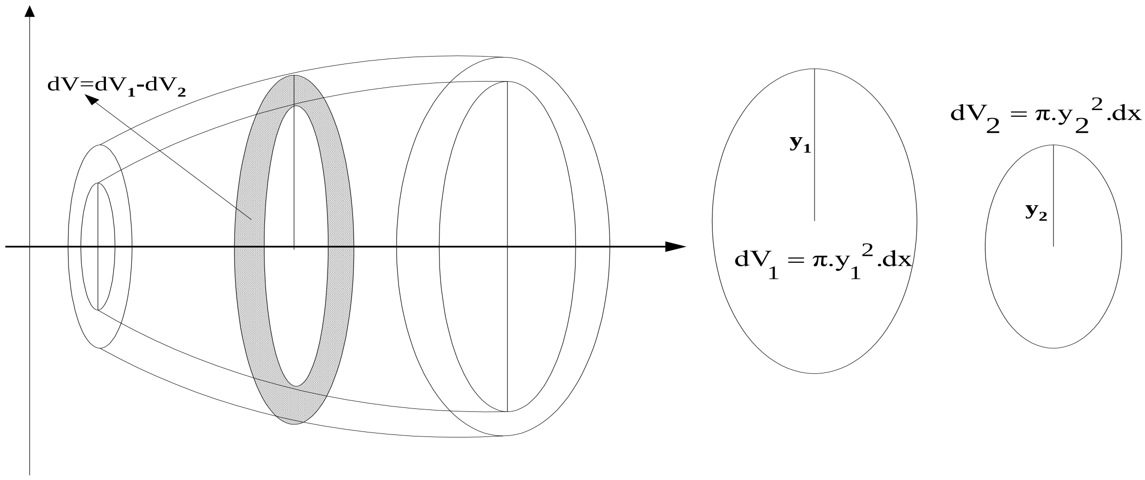
$1 - 4x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1/4$ ve $x = \pm 1/2$ bulunur.Buna göreV hacmi;

$$V = 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x - 4x^3\right) . dx = 2\pi \left| \frac{x^2}{2} - x^4 \right|_0^{1/2} = \frac{\pi}{8} \text{ bulunur}$$

Böylece, aynı değer shell ve disk metoduyla bulunmuş oldu.

16.3.3. İki Eğri Arasında Kalan Sınırlı Bölgenin Alanının Bir Eksen Etrafında Döndürülmesiyle Oluşan Dönel Cismin Hacmi

16.3.3.1. $y_1 = f(x)$, $y_2 = g(x)$ eğrileri ile $x = a$, $x = b$ doğruları arasında kalan sınırlı bölgenin alanının x-ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel cismin hacmi



Şekil 16.29

(Şekil 16.29)'da da görüldüğü gibi bu iki eğri arasında kalan sınırlı bölgenin x-ekseni etrafında dönmesiyle oluşan hacim, eğrilerin hacimleri farkına eşittir. Bu hacmi bulmak için hacim elemanı olarak alınan dairesel disklerin hacimlerini göz önüne alalım.

$y_1 = f(x)$ eğrisine ait dairesel diskin hacmi $\rightarrow \mathbf{dV_1 = \pi y_1^2 dx}$

$y_2 = g(x)$ eğrisine ait dairesel diskin hacmi $\rightarrow \mathbf{dV_2 = \pi y_2^2 dx}$

Buna göre bu iki hacim elemanı arasındaki fark bize taralı olarak gösterilen dairesel diskin hacmini verir. Yani;

$$\mathbf{dV = dV_1 - dV_2 = \pi(y_1^2 - y_2^2)dx} \quad \text{olur.}$$

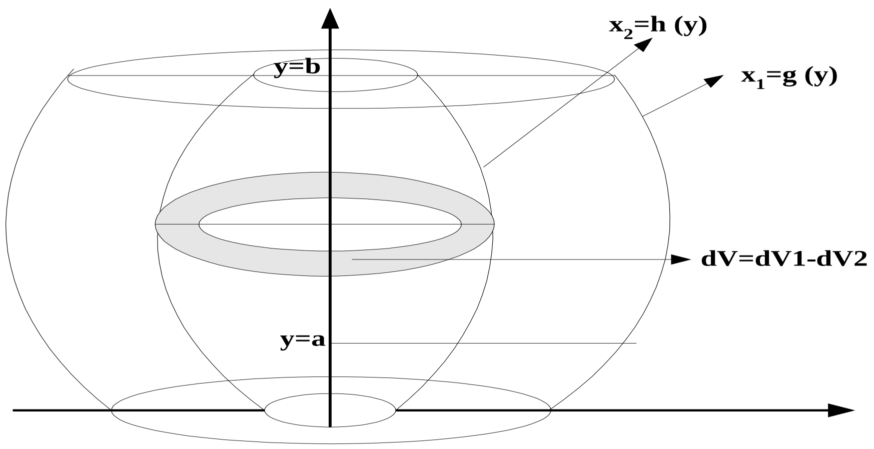
Böylece dV hacim elemanlarının toplamının limiti yani integrali;

$\int dv = \int \pi(y_1^2 - y_2^2)dx$ **ve böylece x=a ' da x=b ' ye kadar istenilen hacim;**

$$\mathbf{V_x = \pi \int_a^b \left(y_1^2 - y_2^2\right)dx \ \ yada \ \ V_x = \pi \int_a^b \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2\right)dx}$$

olarak bulunur.

16.3.3.2 :x_1 = g(y), x_2 = h(y) eğrileri ile y = a, y = b Doğruları Arasında Kalan Sınırlı Bölgenin Alanının y-ekseni Etrafında Dönmesiyle Oluşan Dönel Cisim Hacmi



Şekil-16.30

16.3.3.1'dekine benzer olarak istenilen hacim formulünü bulmak için ele alınan hacim elemanı (taralı olarak gösterilen dairesel disklerin arasındaki hacim) dairesel disklerin hacimleri farkına eşittir. (Şekil-16.30)

$dV_1 = \pi x_1^2 dy \rightarrow$ Büyük dairesel diskin hacmi.

$dV_2 = \pi x_2^2 dy \rightarrow$ Küçük dairesel diskin hacmi.olmak üzere;

$dV = dV_1 - dV_2 = \pi(x_1^2 - x_2^2)dy$**…………..(*)**olarak bulunur. Böylece dV hacim elemanlarının toplamının limiti yani (*) ifadesinin integrali istenilen V hacmi;

$\int dv = \int \pi(x_1^2 - x_2^2)dy$

Ve x = a , x = b sınırları itibarıyla

$$V_y = \pi \int_a^b \left(x_1^2 - x_2^2\right).dy$$

veya

$$V_y = \pi \int_a^b \left([g(y)]^2 - [h(y)]^2\right).dy$$ olarak bulunur.

(*) V_y : y-ekseni etrafında dönen cismin hacmini verir.

(**) V_x = x- ekseni etrafında dönen cismin hacmini ifade eder.

Örnek .16.19: $x^2 + y^2 = 1$ çemberinin $y = 2$ doğrusu etrafında dönmesiyle elde edilen halkanın hacmini bulunuz.

Çözüm.16.19: Şekil.16.31'de $y = 2$ doğrusuna paralel olarak alınan dA alan elemanının bu doğruya olan ortalama uzaklığı, $(2 - y)$, boyu $2\sqrt{1 - y^2}$, eni Δy olduğundan bu dikdörtgenin $y = 2$ etrafında dönmesiyle elde edilen hacim elemanının hacmi

$\Delta v = 2\pi \,.(2 - y)\, 2\sqrt{1 - y^2}\Delta y$ dir.

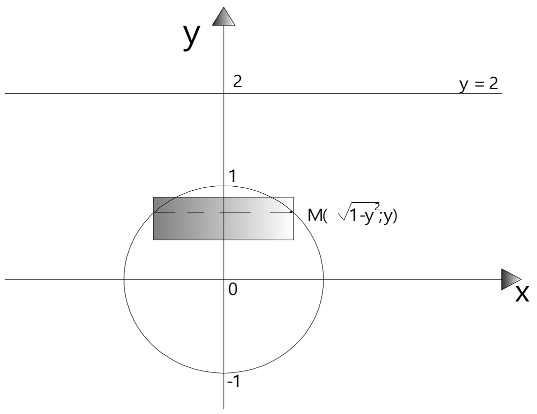
Buna göre istenen V hacmi;

$$\mathrm{v} = 4\pi \int_{-1}^{1} (2 - \mathrm{y})\sqrt{1 - \mathrm{y}^2}\, \mathrm{dy}$$

$$= 8\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - y^2}\, dy - 4\pi \int_{-1}^{1} \mathrm{y}\sqrt{1 - \mathrm{y}^2}\, \mathrm{dy}$$

$$= 8\pi \left[\frac{y}{2}\sqrt{1 - y^2} + \frac{1}{2} Arcsiny + \frac{4\pi}{3}(1 - y^2)^{3/2}\right]_{-1}^{1}$$

$$\mathrm{v} = 4\pi^2 \mathrm{birim}^3 \text{ bulunur.}$$



Şekil.16.31

Örnek.16.20: $\mathrm{y} = -\mathrm{x}^2 + 4x$ ile $\mathrm{y} = \mathrm{x}^2 - 2\mathrm{x}$ eğrilerinin sınırladığı düzlem parçasının $\mathrm{x} = -1$ doğrusu etrafında dönmesiyle elde edilen hacmi bulunuz.

Çözüm.16.20: Şekil.16.32'de dA alan elemanının $\mathrm{x} = -1$ dönme ekseninden ortalama uzaklığı $(\mathrm{x} + 1)$, uzunluğu $(-x^2 + 4x) - (x^2 - 2x) = -2x^2 + 6x$, genişliği Δx olup bunun $\mathrm{x} = -1$ doğrusu etrafında dönmesiyle elde edilen hacim elemanının hacmi

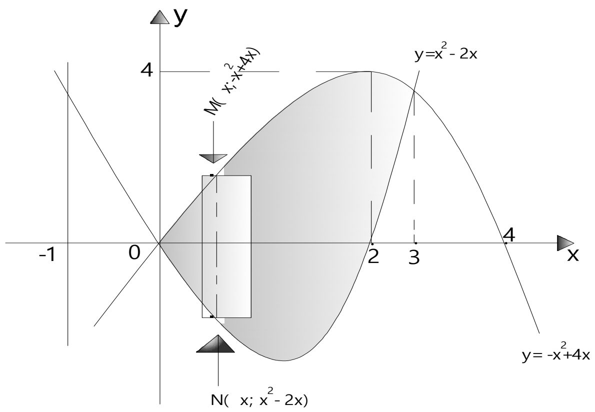
$$\Delta v = 2\pi(x + 1)(-2x^2 + 6x)\Delta x \text{ dir.}$$

Buna göre istenen V hacmi;

$$\mathrm{V} = 2\pi \int_0^3 (x + 1)(-2x^2 + 6x)\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^3 (-2x^3 + 4x^2 + 6x)\, dx$$

$$= 2\pi \left[(\frac{-2x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} + 6x^2\right]_0^3 = 45\,\pi \text{ birim}^3 \text{ bulunur.}$$



Şekil.16.32

Örnek.16.21: $y = x^2$ eğrisi ile $y = x + 2$ doğrusunun sınırladığı düzlem parçasının;

a) x ekseni etrafında,

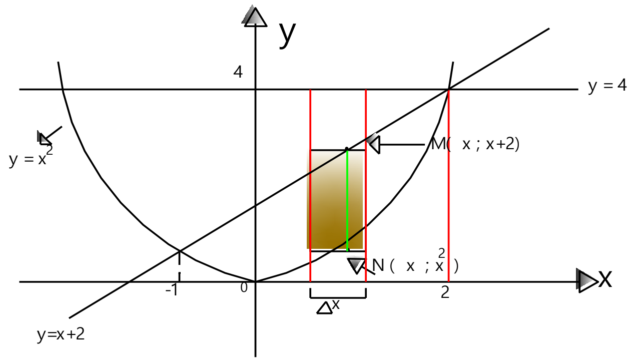
b) $y = 4$ doğrusu etrafında dönmesiyle elde edilen hacimleri bulunuz.

Çözüm.16.21: a) Şekil.16.33'de verilen fonksiyonların grafikleri çizilmiştir. Taralı dA alan elemanının x ekseni etrafında dönmesiyle elde edilen hacim elemanı;

$\Delta v = \pi(x+2)^2 \, \Delta x - \pi(x^2)^2 \, \Delta x = \pi[(x+2)^2 - x^4] \, \Delta x$ dir.

Buna göre istenen V hacmi;

$v = \pi \int_{-1}^{2} [(x+2)^2 - x^4] \, dx = \pi \left[\frac{(x+2)^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{2} = \frac{72}{5}\pi \ birim^3$ bulunur.



Şekil.16.33

b) Şekil.16.33'de dA alan elemanının $y = 4$ doğrusu etrafında dönmesiyle elde edilen V hacim elemanı;

$\Delta V = \pi(4 - x^2)^2 \, \Delta x - \pi[4 - (x+2)]^2 \, \Delta x = \pi[(4 - x^2)^2 - (2 - x)^2]\Delta x$ olur.

Buna göre istenen hacim;

$$V = \pi \int_{-1}^{2} [(4 - x^2)^2 - (2 - x)^2] dx$$

$$V = \pi \int_{-1}^{2} (x^4 - 9x^2 + 4x + 12) \, dx = \frac{108}{5} \pi \ \text{birim}^3 \quad \text{bulunur.}$$

Örnek.16.22: $y^2 = x$ parabolü ile $x = 4$ doğrusu arasındaki alanın x=4 doğrusu etrafında dönmesiyle elde edilen cismin hacmini

a)Disk yöntemiyle,

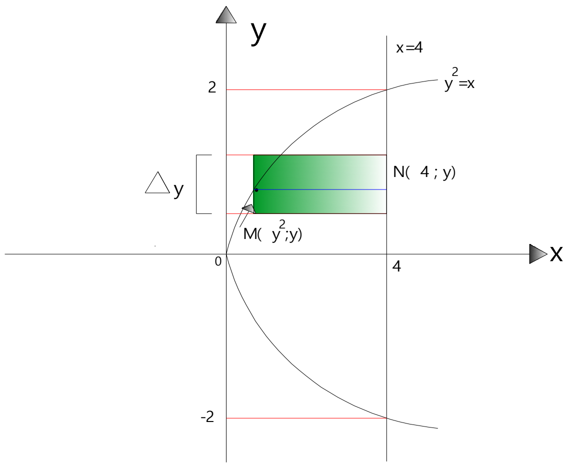
b)Shell yöntemiyle bulunuz.

Çözüm.16.22: a) Şekil.16.34'de x=4 dönme eksenine dik olarak alınan dA alan elemanının boyu $(4 - y^2)$, eni Δy olduğundan bunun eksen etrafında dönmesiyle elde edilen diskin hacmi;

$$\Delta v = \pi(4 - y^2)^2 . \Delta y$$

Buna göre istenen V hacmi;

$$v = \pi \int_{-2}^{2} (4 - y^2)^2 \, dy = 2\pi \int_{0}^{2} (4 - y^2)^2 \, dy = \frac{512}{15} \pi \ birim^3 \quad \text{bulunur.}$$



Şekil.16.34

b)Şekil.16.35'de $x = 4$ dönme eksenine paralel olarak alınan dA alan elemanının dönme ekseninden ortalama uzaklığı $(4 - x)$, boyu $2\sqrt{x}$, eni Δx olduğundan bunun $x = 4$ doğrusu etrafında dönmesiyle elde edilen silindirik kabuğun hacmi

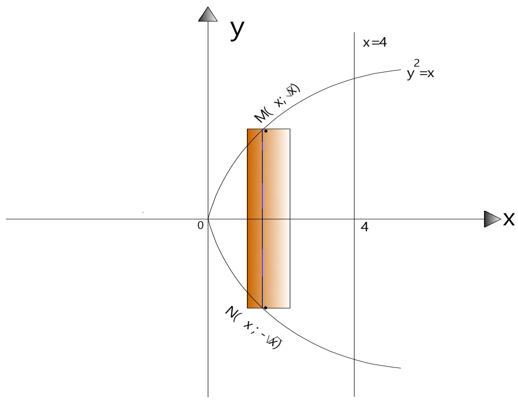
$$\Delta \mathrm{V} = 2\pi(4 - x) . 2\sqrt{x}\Delta x \text{ dir.}$$

Buna göre istenen V hacmi:

$$\mathrm{V} = \int_{0}^{4} 2\pi . (4 - x) . 2\sqrt{x} \, dx$$

$$\mathrm{V} = 2\pi \int_{0}^{4} \left(8x^{1/2} - 2x^{3/2}\right) dx = \frac{512}{15} \pi \ \text{birim}^3$$

olarak bulunur.



Şekil.16.35

Örnek.16.23: $y = Sinx$ eğrisinin birinci kemerinin x ekseniyle sınırladığı alanın y ekseni etrafında dönmesiyle elde edilen hacmi bulunuz.

Çözüm.16.23: Shell yöntemiyle bulalım. Şekil.16.36'da dA alan elemanının eksenden ortalama uzaklığı x, boyu Sin x, eni Δx olduğundan bunun y ekseni etrafında dönmesiyle oluşan silindirik kabuğun hacmi

$$\Delta v = 2\pi\, x.Sin\, x.\Delta x$$

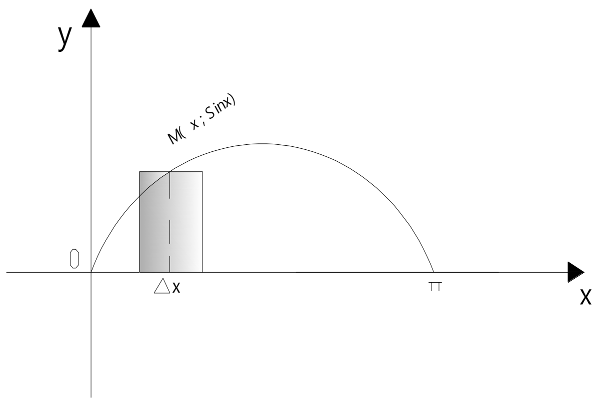
dir. O halde istenen V hacmi:

$$v = 2\pi \int_0^\pi x.Sinx.dx$$

olur.Buradan $u = x$, $dv = Sinx.dx$ alınarak kısmi integral ile

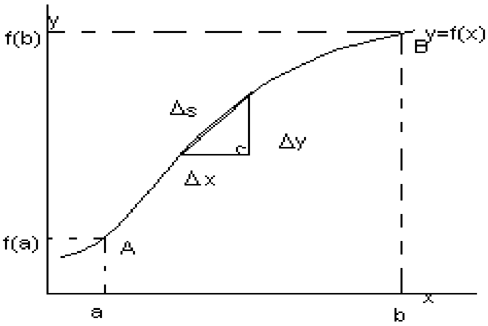
$$v = 2\pi(-x\, Cos\, x + Sin\, x)]_0^\pi = 2\pi^2 birim^3$$

bulunur.



Şekil.16.36

16.4. Yay Uzunluğu



f:[a,b] $\rightarrow$ **IR** sürekli türeve sahip pozitif bir fonksiyon olsun. (Şekil.16.37) Bu eğrinin A ve B noktaları arasındaki uzaklığı bulmaya çalışalım. **Δs** ile göstereceğimiz eğrinin küçük bir parçasının uzunluğunu gözönüne alalım. Pisagor teoremine göre;

Şekil.16.37

$(\Delta s)^2 \cong (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ alınabilir. Bu son ifadenin her iki yanı $(\Delta x)^2$ ile bölünerek;

$$\frac{(\Delta s)^2}{(\Delta x)^2} \cong 1 + \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}$$

bulunur. Buradan son ifadenin her iki tarafının karekökü alınarak;

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

elde edilir. Ayrıca ; $\Delta x \rightarrow 0$ için;

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{ds}{dx}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

ve böylece;

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

olarak bulunur. Böylece, A ve B noktaları arasındaki eğri uzunluğu yukarıda bulunan **ds** eğri parçası uzunluklarının toplamının limiti olarak integral yardımıyla ;

$$\mathbf{s} = \int_a^a \sqrt{1 + \left(\left(\frac{dy}{dx}\right) \right)^2}\, dx \text{ bulunur.}$$

Buna göre, **y = f(x)** eğrisinin **x = a**'dan **x = b**'ye kadar olan parçasının uzunluğu;

$$\mathbf{s} = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx \text{ olur.}$$

Eğer, **x = g(y)** eğrisinin **y = c**'den **y = d**'ye kadar olan kısmının uzunluğu bulunmak istenirse yukarıdaki mantığa benzer olarak;

$$s=\int_c^d \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy \quad \text{veya} \quad s=\int_c^d \sqrt{1+(x')^2}\,dy \text{ elde edilir.}$$

Örnek.16.24: x = 0'dan x = 4 'e kadar $y^2 = x^3$ eğrisinin I.bölgedeki uzunluğunu bulunuz.

Çözüm.16.24: $y^2 = x^3 \Rightarrow y = x^{3/2} \Rightarrow dy/dx = 3/2x^{1/2}$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{9x}{4}$$

Böylece, s yay uzunluğu; $s=\int_0^4 \sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\,dx$ formülünden;

$$s=\int_0^4 \sqrt{1+\frac{9x}{4}}\,dx \text{ olur.}$$

Eğer $1+\frac{9x}{4}=u$ dersek $\frac{9}{4}dx=du$ elde edilir ve bu değerler s integralinde u'nun sınırları itibariyle yerine yazılırsa ; $x=0$ için $u=1$ ve $x=4$ için $u=10$

$$s=\int_1^{10}\frac{4}{9}\sqrt{u}\,du=\frac{4}{9}\frac{2}{3}\left|u^{3/2}\right|_1^{10}$$

$$=\frac{8}{27}(10^{3/2}-1^{3/2})=\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1) \text{ olarak bulunur.}$$

Örnek 16.25: $x^2+y^2 = r^2$ merkezil çemberinin çevresini bulunuz.

Çözüm 16.25:

$$y=\sqrt{r^2-x^2}\,(r>0)$$

$$y'=-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

$$(y')^2=\frac{x^2}{r^2-x^2}$$

$$\begin{pmatrix} x=r\sin Q \\ dx=\cos Q.dQ \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{4}s=r\int_0^r\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_0^r\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx=\int_0^r\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}dx$$

$$\frac{1}{4}s=r\int_0^r\frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}}=r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{r\cos Q dQ}{\sqrt{r^2-r^2\sin^2 Q}}=r\int_0^{\frac{\pi}{2}}dQ$$

$$\frac{1}{4}s=r\left(Q\ \Big|_0^{\frac{\Pi}{2}}\right.=r\left(\tfrac{\Pi}{2}-0\right)\Rightarrow s=2.\Pi.r \text{ olur}$$

$$x=0\Rightarrow Q=0$$

$$x=r\Rightarrow Q=\frac{\pi}{2}$$

Örnek.16.26: f:[1,e]→IR, f(x) = $\left(\frac{1}{4}\right)$ x^2-lnx gösterdiği eğrinin uzunluğunu bulunuz.

Çözüm.16.26:

$$s=\int_1^e \sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_1^e \sqrt{1+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{x^2}}\,dx$$

$$y'=\frac{1}{2}x-\frac{1}{x}$$

$$(y')^2=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{x^2}$$

$$=\int_1^e \sqrt{\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{x}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_1^e \left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{x}\right)dx=\left(\frac{1}{4}x^2+\ln x\right|_1^e$$

$$=\left(\frac{1}{4}e^2+\ln e\right)-\left(\frac{1}{4}(1)^2+\ln 1\right)=\frac{1}{4}\left(e^2-7\right)br^2$$

Yay Uzunluğu ile ilgili Alıştırmalar

1. $y = x^{3/2}$ eğrisinin $x = 0$'dan $x = \frac{7}{3}$'e kadar olan uzunluğu bulunuz.

2. $y = \log\cos x$ eğrisinin $x = 0$'dan $x = \frac{\pi}{3}$'e kadar olan uzunluğunu bulunuz.

3. $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{\frac{x}{a}})$ eğrisinin $x = 0$'dan $x = x_1$'e kadar olan uzunluğu nedir?

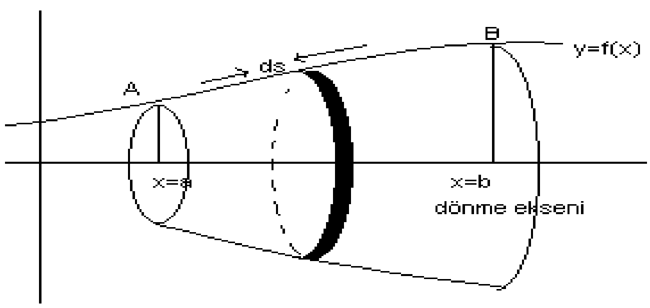
4. $y = 2\sqrt{x}$ eğrisinin $x = 0$'dan $x = 3$'e kadar uzunluğu nedir?

5. $y = 2e^{\sqrt{x}}$ eğrisinin $x = 0$'dan $x = 1$'e kadar uzunluğu nedir?

6. $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}$ eğrisinin $x = 1$'den $x = 3$'e kadar uzunluğu nedir?

16.5 Dönel Yüzeyin Yanal Alanı

Bir alanın bir eksen etrafında dönmesiyle oluşan cisme **dönel cisim** denir. Böyle bir cismin yüzey alanına ise **dönel yüzeyin yanal alanı** denir. Bir dönel yüzeyin yanal alanını gösteren aşağıdaki şekli gözönüne alalım. (Şekil 16.38)



Şekil 16.38

y = f(x) eğrisi x = a, x = b doğruları ve x-ekseni ile ile sınırlı bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanı Şekil. 16.38’den de görüldüğü gibi koyu renkli olan dairesel kesitlerin alanları toplamına eşittir. Bu toplamı bulmadan önce bu dairesel kesitlerden birinin alanını **dS** ve **ds** olarak kesitin kalınlığını ifade eden yay uzunluğunu alırsak;**dS = 2πyds …………. (1)** olur.

Burada; $ds = \sqrt{1+\left(\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)^2}dx$ değeri (1)’de yerine yazılırsa ;

$dS = 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$ olarak bulunur. Böylece a’dan b’ye kadar böyle elemanların

alanları toplamı integral yardımıyla; $S = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$ şeklinde bulunur.

Özet olarak

i) f:[a,b]→IR sürekli türeve sahip pozitif bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyon gösterdiği eğri parçasının x-eksenini etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin yanal alanı;

$\mathbf{S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f\,'(x)]^2}\,dx}$ olarak bulunur.Benzer şekilde;

ii) g:[a,b]→IR sürekli türeve sahip olan pozitif bir fonksiyon olsun . Bu fonksiyonun gösterdiği eğrinin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin yanal alanı;

$\mathbf{S = 2\pi\int_a^b g(y)\sqrt{1+[g'(y)]^2}\,dy}$ **veya** $\mathbf{S = 2\pi\int_a^b x\sqrt{1+(x')^2}\,dy}$ olarak elde edilir.

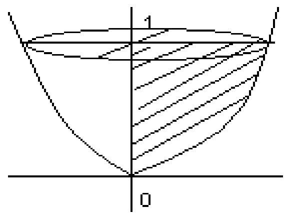
Örnek.16.27: f(y) = x^2 eğrisi y =1 , x = 0 doğruları ile sınırlı bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin yanal alanını bulunuz .

Çözüm.16.27: $s = 2\pi\int_0^1 x\sqrt{1+(x')^2}\,dy = 2\pi\int_0^1 \sqrt{y}\sqrt{1+\frac{1}{4y}}\,dy$

$y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y} \Rightarrow x' = \frac{1}{2\sqrt{y}} \Rightarrow (x')^2 = \frac{1}{4y}$

$\Rightarrow = 2\pi\int_0^1 \sqrt{y}\,\frac{\sqrt{4y+1}}{2\sqrt{y}}dy = \pi\int_0^1 \sqrt{4y+1}\,dy$

$= \pi\frac{1}{4}\frac{2}{3}(4y+1)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{\Pi}{6}(5\sqrt{5}-1)\ \text{br}^2$



Şekil 16.39

olarak bulunur.

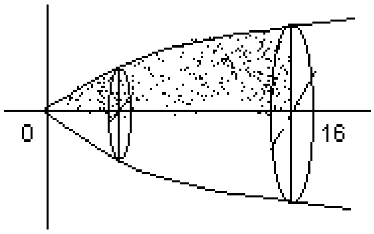
Örnek.16.28: x = 0 ‘ dan x = 16 ya kadar olan $y^2 = 16x$ parabolünün x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin yanal alanını bulunuz. (Şekil-16.40)

Çözüm.16.28:

$$y^2 = 16x \Rightarrow y = 4\sqrt{x}$$

$$y' = \frac{4}{2\sqrt{x}}$$

$$(y')^2 = \frac{4}{x}$$



Şekil 16.40

$$s = 2\pi\int_0^{16} y\sqrt{1+(y')^2}\,dx = 2\pi\int_0^{16} 4\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{4}{x}}\,dx$$

$$= 8\pi\int_0^{16}\sqrt{x+4}\,dx = 8\pi\frac{2}{3}((x+4)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{16}$$

$$= \frac{16}{3}\pi\left(20\sqrt{20}-8\right) \cong 1365\text{br}^2 \text{ bulunur.}$$

16.5.1 Dönel Yüzeyin Yanal Alanı ile İlgili Alıştırmalar

1) $y = \frac{x^2}{9}$ eğrisi x=0, x=3 doğruları ile sınırlı bölgenin (x) ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin yanal alanı nedir?

2) $y^2 = 24 - 4x$ eğrisi x=3, x=6 doğruları ile sınırlı bölgenin (x) ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin yanal alanı nedir?

3) $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$ eğrisi, x=1, x=3 doğruları ile sınırlı bölgenin (x) ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin yanal alanı nedir?

4) $y = e^{-x}$ eğrisi, x=0, x=5 doğruları ile sınırlı bölgenin (x) ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin yanal alanı nedir?

5) $y = 3x^2$ eğrisi, x=0, x=5 doğruları ile sınırlı bölgenin (y) ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin yanal alanı nedir?

6) $y = 4 - x^2$ eğrisi, x=0, x=2 doğruları ile sınırlı bölgenin (y) ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin yanal alanı nedir?

7) $y = 24 - x^2$ eğrisi, x=0, x=2 doğruları ile sınırlı bölgenin (y) ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin yanal alanı nedir?

8) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ eğrisinin I. bölge ile sınırlı kısmının x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin yanal alanı nedir?

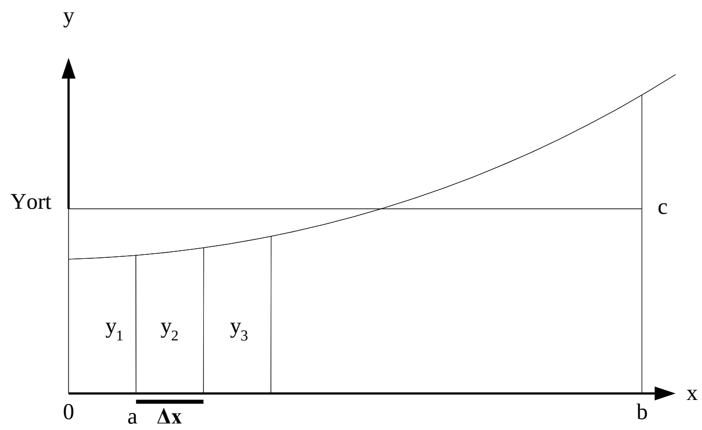
9) $y^2 = 4x$ eğrisi, x=0, x=3 doğruları ile sınırlı bölgenin (x) ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin yanal alanı nedir?

10) $y^2 = x+3, y^2 = 4x$ eğrileri arasındaki sınırlı bölgenin (x) ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin yanal alanı nedir?

16.6. Bir Fonksiyonun Ortalama ve Etkin (Efektif) Değerleri

16.6.1. Bir Fonksiyonun Ortalama Değeri

Hatırlanacağı gibi y = f(x) eğrisi x = a , x = b doğruları ve x-ekseni ile sınırlı bölgenin alanı; $A = \int_a^b f(x)dx$ olarak elde edilmişti. Aşağıdaki şekilde taralı bölge bu alanı göstermektedir.(Şekil 16.41)



Şekil 16.41

Aynı aralık içersinde bu fonksiyon ortalama ordinatı olan y_{ort} değeri eğri altında kalan alan ile aynı değere sahip olan **abcd** dikdörtgeninin alanıdır. Yani;

$$(b-a).y_{ort} = A = \int_a^b f(x)dx$$

ve buradan; $y_{ort} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ olarak bulunur.

Örnek.16.29: v=V_{max}Sinwt sinüsodial gerilimin yarı dairesinin ortalama ordinatını bulunuz.

Çözüm.16.29: a = 0, b = π olduğuna göre ;

$$V_{ort} = \frac{V_{max}}{\pi - 0}\int_0^\pi \sin wt.dt = \frac{V_{max}}{\pi}\left|-\text{Cos}wt\right|_0^\pi$$

$$= \frac{V_{max}}{\pi}(-\cos\pi + \cos 0) = \frac{2}{\pi}V_{max} = 0{,}637V_{max}$$

olarak bulunur.

16.6.2 Bir Fonksiyonun Etkin Değeri

Bir fonksiyonun etkin değeri **(rms: root-mean-square)** ordinatların karesinin ortalamasının kareköküdür. Eğer, Şekil.16.41'de Δx eşit uzunluğunda bölünmüş n tane y değerini göz önüne alırsak;

$$\text{rms} \cong \sqrt{\frac{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2}{n}} \quad \text{veya} \quad \text{rms} \cong \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}{n}}$$

olur.Bu ifadede pay ve payda Δx ile çarpılırsa ; $\text{rms} \cong \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \Delta x}{n\Delta x}}$

elde edilir. Burada **n.Δx, (b-a)** aralık genişliğini verir. n sonsuza yaklaşırken ;

$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \Delta x = \int_a^b [f(x)]^2 dx$ elde edilir. Buna göre;

$\text{rms} = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x)]^2 dx}$ ifadesi bir fonksiyonun etkin değerini veren formüldür.

Örnek.16.30: Önceki örneğin sinüsodial voltajı için rms değerini bulunuz.

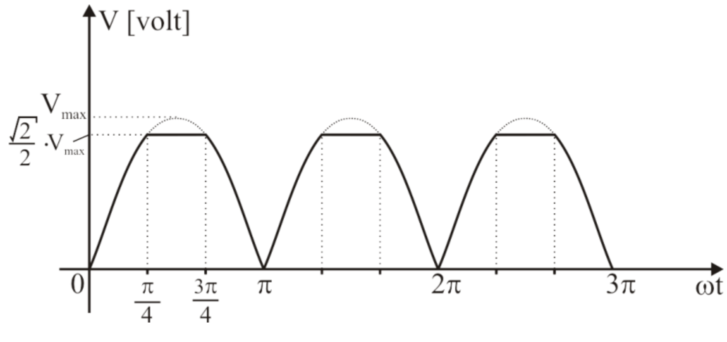
Çözüm.16.30: a=0, b=π değerleri rms formülünde yerine yazılarak ;

$$\text{rms} = \sqrt{\frac{1}{\pi - 0} \int_0^\pi V_{max}^2 \, \text{Sin}^2 wt\,dt} = \sqrt{\frac{V_{max}^2}{\pi - 0} \int_0^\pi \text{Sin}^2 wt\,dt}$$

$$\int_0^\pi \text{Sin}^2 wt\,dt = \left(\frac{wt}{2} - \frac{\text{Sin}\,2wt}{4} \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2} - \frac{\text{Sin}\,2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

olur. Bu sonucu **rms** ' de yerine yazarsak; $\text{rms} = \sqrt{\frac{V_{max}^2}{\pi} \frac{\pi}{2}} = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}} = 0{,}707 V_{max}$ elde edilir.

Örnek.16.31: Tam dalga doğrultulmuş sinüsoidal gerilim şekil.16.42'de gösterildiği gibi kırpılmıştır. Bu fonksiyonun ortalama ve etkin değerlerini hesaplayınız.



Şekil.16.42

Çözüm.16.31: Fonksiyonun tanımı;

$$0 < \omega t < \frac{\pi}{4} \qquad \Rightarrow \qquad u = U_{\max} \cdot Sin\omega t$$

$$\frac{\pi}{4} < \omega t < \frac{3\pi}{4} \qquad \Rightarrow \qquad u = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot U_{\max}$$

$$\frac{3\pi}{4} < \omega t < \pi \qquad \Rightarrow \qquad u = U_{\max} \cdot Sin\omega t$$

$$U_{ortalama} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\cdot d(\omega t)$$

$$U_{ortalama} = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} U_{\max}\cdot Sin\omega t\cdot d(\omega t) + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot U_{\max}\cdot d(\omega t) + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} U_{\max}\cdot Sin\omega t\cdot d(\omega t)\right]$$

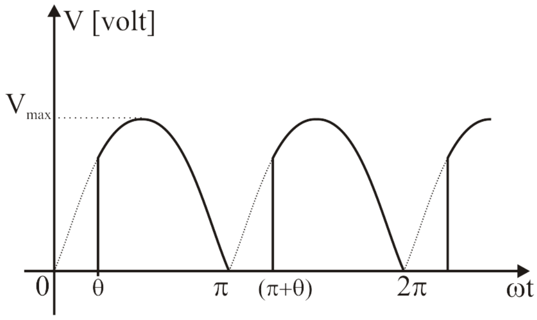
$$U_{ortalama} = \frac{U_{\max}}{\pi}\left[(-Cos\omega t)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot \omega t\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} + (-Cos\omega t)\Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\right]$$

$$U_{ortalama} = \frac{U_{\max}}{\pi}\left[\left(-Cos\frac{\pi}{4}\right) - (-Cos0) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) + (-Cos\pi) - \left(-Cos\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

$$U_{ortalama} = \frac{U_{\max}}{\pi}\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}\pi}{4} + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = \frac{U_{\max}}{\pi}\left[-\sqrt{2} + 2 + \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}\pi}{4}\right]$$

$$\boxed{U_{ortalama} = 0,5401\cdot U_{\max}}$$

Örnek.16.32: Geciktirilmiş tam dalga doğrultulmuş sinüsoidal gerilimin ortalama değeri naksimum değerinin yarısına eşit olduğuna göre gecikme açısını (θ) hesaplayınız . (Şekil.16.43)



Şekil.16.43

Çözüm.16.32: Fonksiyonun tanımı;

$$U_{ortalama} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\cdot d(\omega t)$$

$$U_{ortalama} = \frac{1}{\pi}\int_\theta^\pi U_{\max}\cdot Sin\omega t\cdot d(\omega t) = \frac{U_{\max}}{\pi}(-Cos\omega t)\Big|_\theta^\pi$$

$$U_{ortalama} = \frac{U_{\max}}{\pi}(-Cos\pi + Cos\theta)$$

$U_{ortalama} = \frac{U_{max}}{2}$ olarak verildiğine göre

$$\frac{U_{\max}}{2} = \frac{U_{\max}}{\pi}(-Cos\pi + Cos\theta) = \frac{U_{\max}}{\pi}(1 + Cos\theta)$$

$$\frac{U_{\max}}{2} - \frac{U_{\max}}{\pi} = \frac{U_{\max}}{\pi}Cos\theta \qquad \Rightarrow \qquad Cos\theta = \frac{\frac{\cancel{U_{\max}}}{2} - \frac{\cancel{U_{\max}}}{\pi}}{\frac{\cancel{U_{\max}}}{\pi}}$$

$$Cos\theta = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\right)\cdot\pi = 0,57 \qquad \Rightarrow \qquad \theta = Cos^{-1}0,57 = 55,249°$$

16.6.3. Bir Fonksiyonun Ortalama Değeri ile ilgili Alıştırmalar

1. $y = 4\sin x$ fonksiyonu'nun $x = 0$'dan $x = \pi$ arasındaki ortalama değeri nedir?

2. $y = 2\sin^3 \dfrac{x}{2}$ fonksiyonu'nun $x = 0$ ile $x = 2\pi$ arasındaki ortalama değeri nedir?

3. $Q = (2+\sqrt{t})^2$ fonksiyonu'nun $t = 0$ ile $t = 1$ arasındaki ortalama değeri nedir?

4. $Q = \dfrac{1}{3}t^3\sqrt{9-t^2}$ fonksiyonu'nun $t = 0$ ile $t = 3$ arasındaki ortalama değeri nedir?

5. $V = \dfrac{16}{3}t - \dfrac{1}{2}t^2$ bir parçacığın hızına bağlı denklemdir. Buna göre, $t = 0$ ile $t = 16sn$ arasındaki ortalama hızı nedir?

6. $V = \dfrac{4t}{\sqrt{t+2}}$ hız denklemi veriliyor. Buna göre, $t = 2$ ile $t = 14sn$ arasındaki ortalama hız nedir?

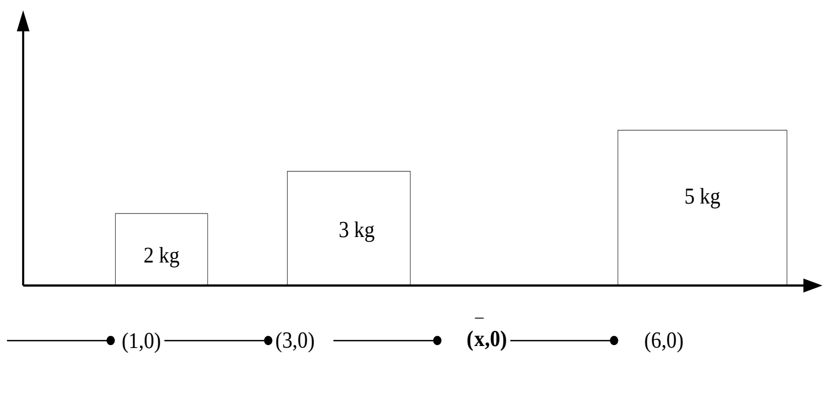
7. $y = \cos^2 x$ fonksiyonunun $x = 0$, $x = \pi$ arasındaki ortalama değeri nedir?

16.7. Ağirlik ve Kütle Merkezi

Düzlem alanların ağırlık merkezleri ve bir eksen etrafında döndürülen farklı şekillerin kütle merkezlerini ele almadan önce bir eksen boyunca yerleştirilen kütlelerin oluşturduğu sistemin kütle merkezini aşağıdaki örnek ile inceleyelim.

Örnek.16.33: x-ekseni boyunca 2 kg.,3kg., ve 5 kg' lık üç kütle sırasıyla (1,0), (3,0) ve (6,0) noktalarına yerleştiriliyor. Buna göre tahtanın kütlesini ihmal edilirse x-ekseni boyunca sistemin kütle merkezi ne olur?

Çözüm.16.33:



Kütlenin merkezinin momenti momentlerin toplamına eşitlenerek,

$$(2+3+5)\,\bar{x} = 10\,\bar{x}$$

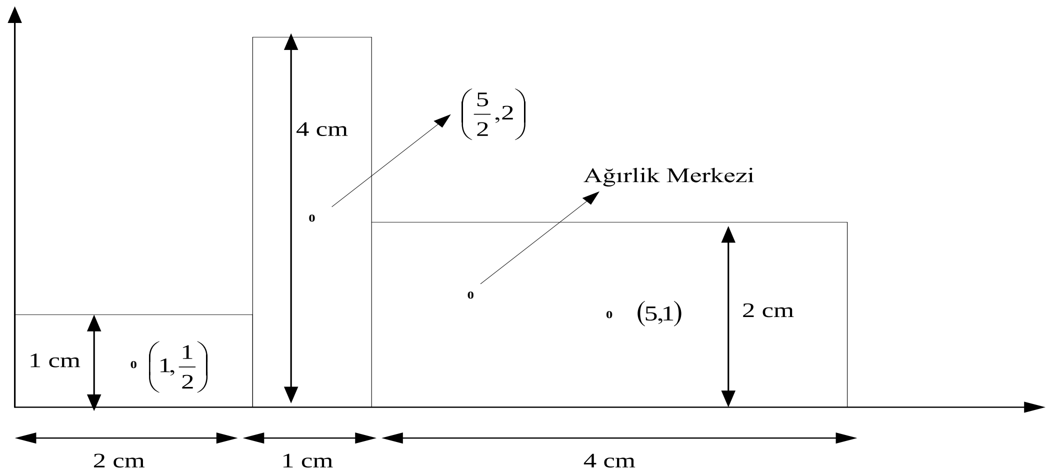
$$2.(1)+3.(3)+5.(6)=10\bar{x} \text{ ise } \bar{x}=\frac{41}{10}=4.1 \text{ olur.}$$

16.7.1.Ağırlık Merkezi

$\bar{x}$ bir alanın ağırlık merkezinin apsisi olup, y-eksenindeki momentlerin toplamının toplam alana bölünmesiyle elde edilir. Yani, $\bar{x}=\frac{M_y}{A}$

$\bar{y}$ aynı şekilde bir alanın ağırlık merkezinin ordinatı olup, x-eksenindeki momentlerin toplam alana bölünmesine eşittir. Yani, $\bar{y}=\frac{M_x}{A}$

Örnek16.34: Aşağıdaki şeklin ağırlık merkezini bulunuz.



Çözüm.16.34:

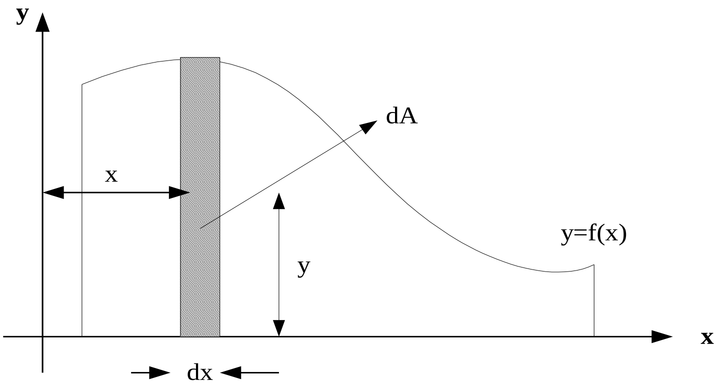
$$\bar{x}=\frac{M_y}{A}=\frac{2.(1).(1)+1.(4).(5/2)+4.(2).(5)}{2.(1)+1.(4)+4.(2)}=3.7$$

$$\bar{y}=\frac{M_x}{A}=\frac{2.(1).(\frac{1}{2})+1.(4).(2)+4.(2).(1)}{2.(1)+1.(4)+4.(2)}=\frac{17}{14}\cong 1.2$$

16.7.2.Düzlem Alanların Ağırlık Merkezi:y=f(x) eğrisi, x-ekseni x=a ve x=b doğruları ile sınırlı bölgenin alanına A diyelim.(Şekil.16.44)Bu alanın bir parçası olarak dA olarak isimlendirilen dikdörtgen şeklindeki alanı ele alalım.Moment, kuvvet ile kuvvet kolunun çarpımı olduğundan olarak ele alırsak,

x-eksenindeki moment:$M_x=(\frac{y}{2}).dA=(\frac{y}{2}).y.dx$

y-eksenindeki moment: $M_y=x.dA=x.y.dx$ olur.



Şekil.16.44

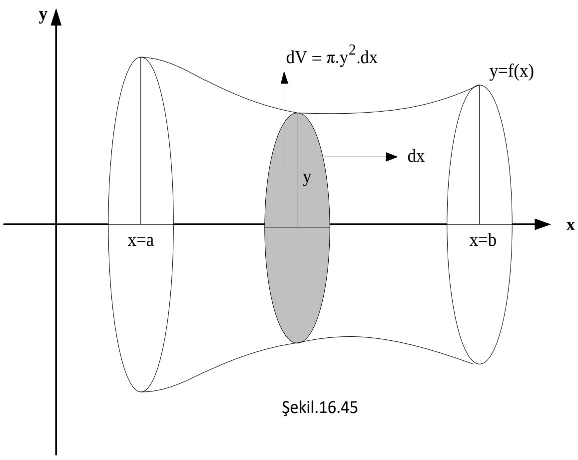
Buna göre; x-ekseni civarındaki dA'nın momenti, $(\frac{y}{2})$.dA=$(\frac{y}{2})$.(y.dx)

y-ekseni civarındaki dA'nın momenti; x.dA=x.(y.dx) olduğundan (16.7.1)ile verilen ağırlık merkezinin koordinatları ;

$$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{\int_a^b xydx}{\int_a^b ydx} \quad \text{ve} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{\int_a^b \frac{y^2}{2}dx}{\int_a^b ydx} \text{ elde edilir.}$$

16.7.3.Kütle Merkezi

Bir alanın bir eksen etrafında dönmesiyle oluşan cisme **dönel cisim** denir. Böyle bir katı cismin kütle merkezini bulmak için aşağıdaki şekli göz önüne alalım.(Şekil 16.45)



Şekil.16.45

y = f(x) eğrisi, x-ekseni ile x = a ve x = b doğruları ile sınırlı alanın **x-ekseni** etrafında döndürülmesiyle oluşan hacmi göz önüne alalım (Şekil 16.45). Buna göre, **V** hacim elamanını göstermek üzere,

dV= π.y²dx (*) dir. Ayrıca, , **x = a'dan x = b'ye kadar dV dairesel disklerinin toplamının limiti (*) ifadesinin her iki yanının integralinin alınmasıyla;**

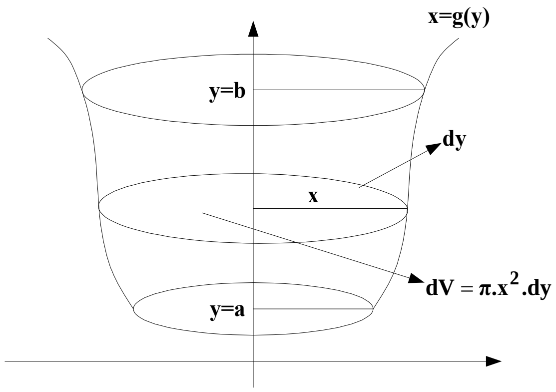
$$\mathbf{V = \pi\int_a^b y^2dx = \pi\int_a^b [f(x)]^2 dx} \text{ olarak elde edilir.}$$

y = f(x) eğrisi, x-ekseni ile x = a ve x = b doğruları ile sınırlı alanın **x-ekseni** etrafında döndürülmesiyle oluşan katı şeklin kütle merkezine $\bar{x}$ diyelim. Bu kütle merkezi y ekseni etrafındaki hacim elemanlarının momentleri toplamının toplam hacme bölünmesiyle elde edilir. Buna göre katı şeklin kütle merkezi koordinatları ($\bar{x}$, 0) olup aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\bar{x} = \frac{\pi}{V}\int_a^b xy^2\,dx = \frac{\int_a^b xy^2\,dx}{\int_a^b y^2\,dx}$$

Benzer şekilde; x=g(y) eğrisi, y-ekseni, y=a y=b doğruları ile sınırlı bölgenin y-ekseni etrafında dönmesiyle oluşan katı şekli göstermektedir.(Şekil.16.46) **V** hacim elemanı ise **dV** dairesel disklerinin hacimlerinin toplamının bir limiti olup (*) ifadesinin her iki yanının integrali alınıp y=a'dan y=b'ye kadar oluşan hacim elemanı;

$$\mathbf{V = \pi\int_a^b x^2dy = \pi\int_a^b [g(y)]^2 dy}$$



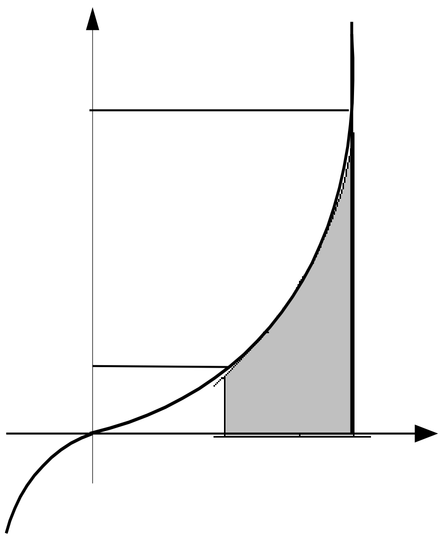
Şekil 16.46

x = g(y) eğrisi, y-ekseni ile y = a ve y = b doğruları ile sınırlı alanın **y-ekseni** etrafında döndürülmesiyle oluşan katı şeklin kütle merkezine $\bar{y}$ diyelim. Bu kütle merkezi x ekseni etrafındaki hacim elemanlarının momentleri toplamının toplam hacme bölünmesiyle elde edilir. Buna göre katı şeklin kütle merkezi koordinatları ($\bar{y}$, 0) olup aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\bar{y} = \frac{\pi}{V}\int_a^b yx^2\,dy = \frac{\int_a^b yx^2\,dy}{\int_a^b x^2\,dy}$$

Örnek.16.35: $y = x^3$ eğrisi $x = 1$, $x = 2$ ve $y = 0$ değerleri ile sınırlı bölgenin ağırlık merkezini bulunuz.

Çözüm.16.35:



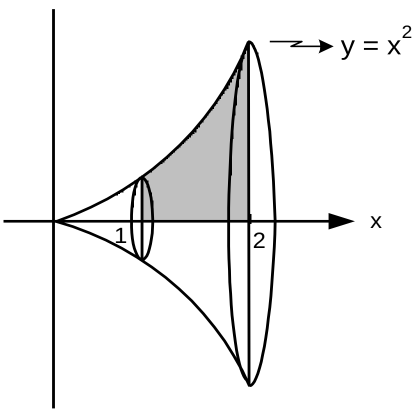
$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x.y.dx}{\int_a^b y.dx} = \frac{\int_1^2 x.x^3.dx}{\int_1^2 x^3.dx} = \frac{\left.\frac{x^5}{5}\right|_1^2}{\left.\frac{x^4}{4}\right|_1^2}$$

$$\bar{x} = \frac{\frac{32}{5} - \frac{1}{5}}{\frac{16}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{31}{5}.\frac{4}{15} \Rightarrow \bar{x} = \frac{124}{75}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_a^b \frac{y}{2}dx}{\int_a^b ydx} = \frac{\int_1^2 \frac{(x^3)^2}{2}dx}{\int_1^2 x^3dx} = \frac{\left.\frac{x^7}{14}\right|_1^2}{\left.x^4\right|_1^2} = \frac{\frac{128}{14} - \frac{1}{14}}{\frac{16}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{127}{14}.\frac{4}{15}$$

Örnek.16.36: $y = x^2$ eğrisi $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$ doğruları ile sınırlı bölgenin x – ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan katı cismin kütle merkezini bulunuz.

Çözüm.16.36:



$\bar{y} = 0$ olur.

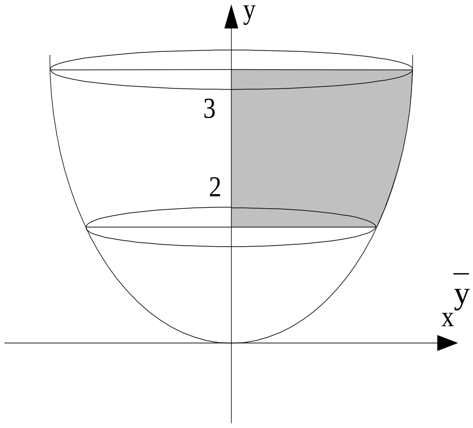
$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x.y.dx}{\int_a^b y^2.dx} = \frac{\int_1^2 x.(x^2)^2.dx}{\int_1^2 (x^2)^2.dx}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_1^2 x^5.dx}{\int_1^2 x^4.dx} = \frac{\left.\frac{x^6}{6}\right|_1^2}{\left.\frac{x^5}{5}\right|_1^2} = \frac{\frac{64}{6} - \frac{1}{6}}{\frac{32}{5} - \frac{1}{5}} = \frac{63}{6}.\frac{5}{31}$$

$\bar{x} = \frac{315}{186} \cong 1{,}7$ ise ağırlık merkezi $(1{,}7\ ,\ 0)$ olur.

Örnek.16.37: $y = x^2$ eğrisi $x = 0$, $y = 0$, $y = 3$ doğruları ile sınırlı bölgenin y ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan katı şeklin kütle merkezini bulunuz.

Çözüm.16.37:



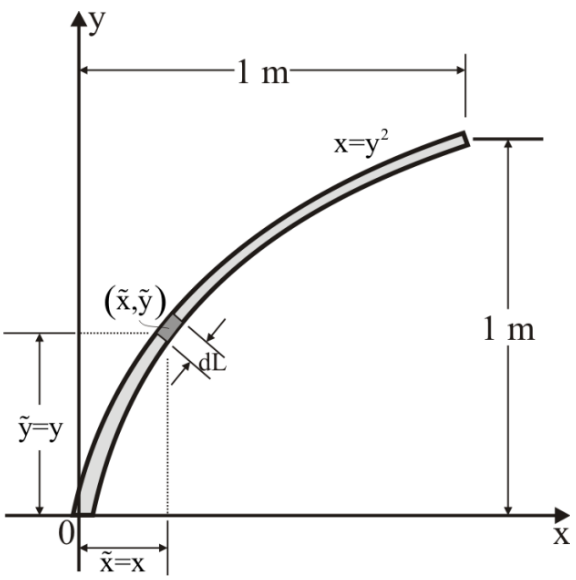
$$\bar{x} = 0.$$

$$\bar{y} = \frac{\int_a^b y.x.dy}{\int_a^b x.dy} = \frac{\int_0^3 y.y.dy}{\int_0^3 y.dy}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_0^3 y^2 dy}{\int_0^3 y.dy} = \frac{\left.\frac{y^3}{3}\right|_0^3}{\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^3} = \frac{\frac{27}{3} - 0}{\frac{9}{2} - 0} = 9.\frac{2}{9} = 2 \Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) = (0,2)$$

Örnek.16.38: Şekildeki homojen çubuğun kütle merkezini bulunuz.

Çözüm.16.38:



$$x = y^2 \Rightarrow \frac{dx}{dy} = 2y.$$

$\tilde{x} = x, \tilde{y} = y$ alalım.

$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + (dy)^2}$$

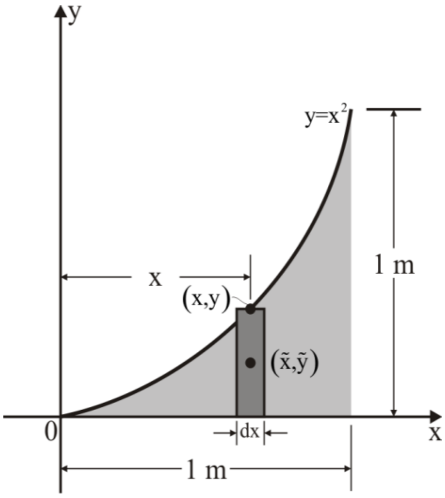
$$dL = \sqrt{(2y)^2 + 1}.dy = \sqrt{4y^2 + 1}.dy$$

$$\tilde{x} = \frac{\int_L \tilde{x}.dL}{\int_L dL} = \frac{\int_0^1 x\sqrt{4y^2+1}.dy}{\int_0^1 \sqrt{4y^2+1}.dy}$$

$$= \frac{\int_0^1 y^2\sqrt{4y^2+1}.dy}{\int_0^1 \sqrt{4y^2+1}.dy} = \frac{0,746}{1,479} = 0,504\text{m}$$

Örnek. 16.39: Şeklin ağırlık merkezini bulunuz.

Çözüm.16.39:



$$dA = ydx \Rightarrow \tilde{x} = x, \tilde{y} = \frac{y}{2}.$$

$$\tilde{x} = \frac{\int_A \tilde{x}.dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^1 x.y.dx}{\int_0^1 ydx} = \frac{\int_0^1 x^3 dx}{\int_0^1 x^2 dx} = \frac{0,250}{0,333} = 0,75m$$

$$\tilde{y} = \frac{\int_A \tilde{y}.dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^1 \left(\frac{y}{2}\right) ydx}{\int_0^1 ydx} = \frac{\int_0^1 \left(\frac{x^2}{2}\right) x^2}{\int_0^1 x^2 dx} = \frac{0,100}{0,333} = 0,3m$$

16.7.4. Atalet Momenti Örnekleri

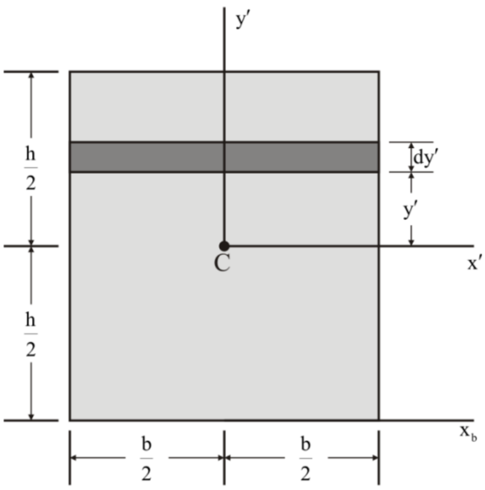
Örnek.16.40: Şekildeki dikdörtgenin atalet momentini

a-) x eksenine göre,

b-) x_b eksenine göre bulunuz.

c-) C noktasına gore (ağırlık merkezi) Polar atalet momentini bulunuz

Çözüm.16.40:



$$(a)\, dA = b.dy'$$

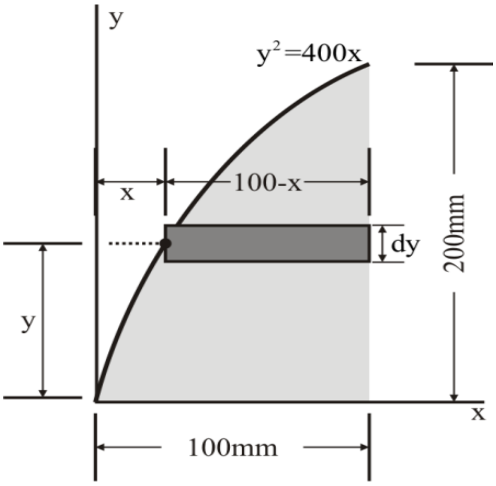
$$I_{x'} = \int_A y' \cdot dA = \int_{-h/2}^{h/2} y'^2 (b \cdot dy') = b\int_{-h/2}^{h/2} y'^2 \cdot dy' = \frac{1}{12} bh^3$$

$$(b)\, I_{x_b} = Ix' + A \cdot d_y^2 = \frac{1}{12} bh^3 + bh\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} bh^3$$

$$c) I_{y'} = \frac{1}{12} hb^3 \Rightarrow I_{x'} + I_{y'} = \frac{1}{12} bh(h^2 + b^2)$$

Örnek 16.41. Şekildeki parçanın atelet momentini bulunuz.

Çözüm.16.41:



$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_A y^2 (100 - x)\, dy$$

$$I_x = \int_0^{200} y^2 \left(100 - \frac{y^2}{400}\right) dy$$

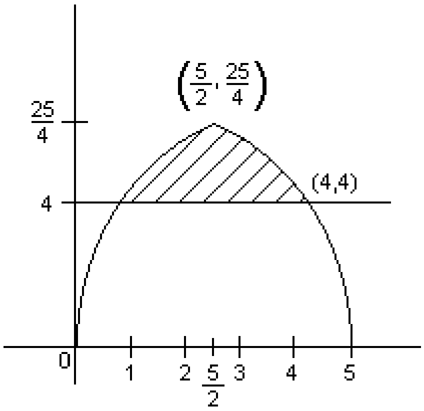
$$I_x = 100 \int_0^{200} y^2 dy - \frac{1}{400} \int_0^{200} y^4 dy$$

$$I_x = \left(\frac{y^5}{5}\right]_0^{200} = \left(\frac{200^5}{5}\right) mm^4$$

16.8. Belirli İntegralle İlgili Çözümlü Problemler

1) $y=5x-x^2$ eğrisi ile $y=4$ doğrusu arasında kalan sınırlı bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:



$$5x - x^2 = 4$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$x = 1, \quad x = 4$$

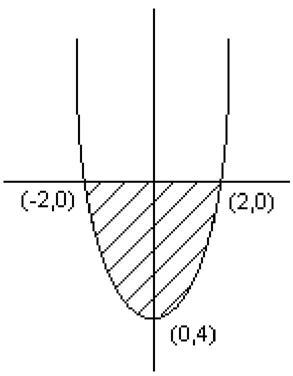
$$A = \int_1^4 (y_2 - y_1) dx$$

$$A = \int_1^4 \left[(5x - x^2) - 4\right] dx$$

$$A = \left(\frac{5}{2}x^2 - \frac{x^3}{3} - 4x \right|_1^4 = \frac{9}{2} \quad br^2$$

2) $y=x^2-4$ eğrisi ve x-ekseni ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:



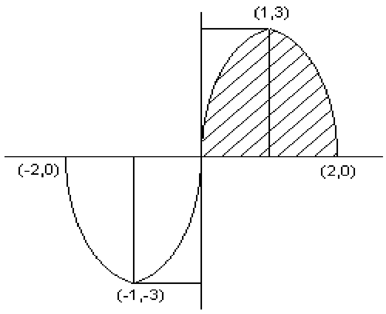
$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2, \quad x_2 = 2$$

$$A = \int_{-2}^{2} (y_2 - y_1) dx = \int_{-2}^{2} \left[0 - (x^2 - 4)\right] dx$$

$$A = \int_{-2}^{2} (4 - x^2) dx = \left(4x - \frac{x^3}{3} \right|_{-2}^{2} = \frac{32}{3} \quad br^2$$

3) Birinci bölgede $f(x)=4x-x^3$ eğrisi ve x-ekseni ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:



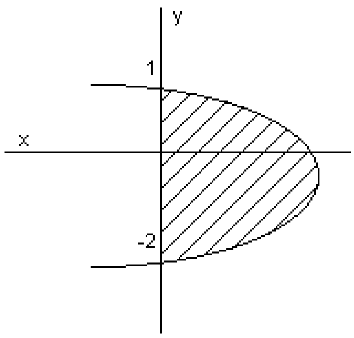
$$A=\int_0^2 (4x-x^3)dx$$

$$A=\int_0^2 4xdx-\int_0^2 x^3dx$$

$$A=4\frac{x^2}{2}\Big|_0^2-\frac{x^4}{4}\Big|_0^2=4br^2$$

4) $x=2-y-y^2$ eğrisi ve y-ekseni ile sınırlı bölgenin alanı nedir?

Çözüm:

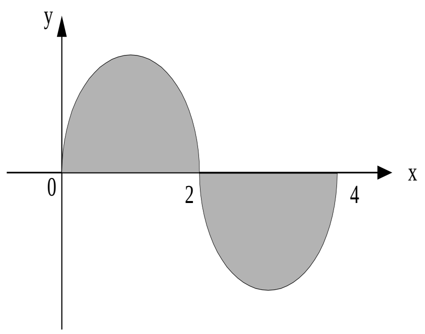


$$A=\int_{-2}^{1}(x_2-x_1)dy=\int_{-2}^{1}(2-y-y^2-0)dy$$

$$A=\left(2y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right|_{-2}^{1}=\frac{9}{2}\ \ br^2$$

5) $y=x^3-6x^2+8x$ eğrisi ile x-ekseni arasında kalan alanı bulunuz.

Çözüm:



$$x=0 \quad \text{için} \quad y=0$$

$$y=0 \quad \text{için} \quad x^3-6x^2+8x=0$$

$$x(x^2-6x+8)=0 \Rightarrow x_1=0, \quad x_2=2, \quad x_3=4$$

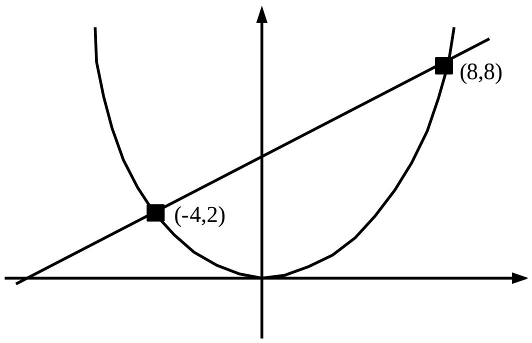
$$A=\int_0^2 (x^3-6x^2+8x)dx-\int_2^4 (x^3-6x^2+8x)dx$$

$$A=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{6x^3}{3}+\frac{8x^2}{2}\right]_0^2-\left(\frac{x^4}{4}-\frac{6x^3}{3}+\frac{8x^2}{2}\right]_2^4$$

$$A=8br^2$$

6) x^2=8y eğrisi ve x-2y+8=0 doğrusuyla sınırlı bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:



$$x^2 = 8y \Rightarrow y = \frac{x^2}{8} \Rightarrow x = 2y - 8 \Rightarrow y = \frac{x+8}{2}$$

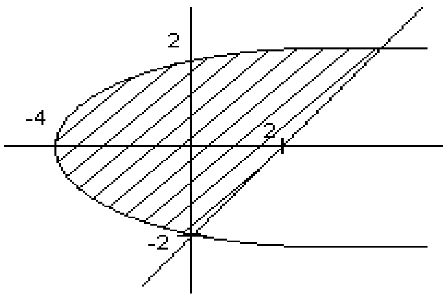
$$y = y \quad \Rightarrow \frac{x+8}{2} = \frac{x^2}{8} \Rightarrow 2x^2 - -8x - 64 = 0$$

$$x_1 = -4 \Rightarrow x_2 = 8$$

$$A = \int_{-4}^{8}\left(\frac{x+8}{2} - \frac{x^2}{8}\right)dx = \left(\frac{x^2}{4} + 4x - \frac{x^3}{24}\right|_{-4}^{8} = 36br^2$$

7) y^2=x+4 eğrisi ile y-x+2=0 doğrusu arasındaki alanı bulun.

Çözüm:



$$\mathbf{A = \int_a^b (x_2 - x_1)dy}$$

$$\mathbf{y^2 = x + 4 \Rightarrow x = y^2 - 4}$$

$$\mathbf{y - x + 2 = 0 \Rightarrow x = y + 2}$$

$$\mathbf{y^2 - 4 = y + 2 \Rightarrow y^2 - y - 6 = 0 \Rightarrow y_1 = 3 \text{ ve } y_2 = -2}$$

$$\mathbf{A = \int_{-2}^{3}\left[(y+2) - (y^2 - 4)\right]dy}$$

$$\mathbf{A = \int_{-2}^{3}(y + 6 - y^2)dy = \frac{y^2}{2} + 6y - \frac{y^3}{3}\Big|_{-2}^{3} = \frac{125}{6} \ br^2}$$

8) $\frac{y^2}{4} = x^3$ eğrisinin x=1'den x=4'e kadar olan kısmının uzunluğunu bulunuz.

Çözüm:

$$\mathbf{1 + 9x = u \Rightarrow dx = \frac{du}{9} \ \text{olur.}}$$

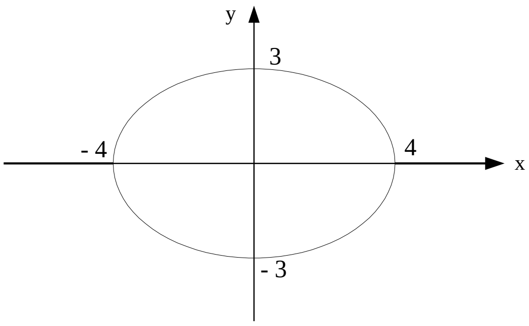
$$\mathbf{y^2 = 4x^3 \Rightarrow y = 2x^{3/2} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = 2.\frac{3}{2}x^{1/2} = 3\sqrt{x}}$$

$$\mathbf{s = \int_1^4 \sqrt{1 + (3\sqrt{x})^2}dx = \int_1^4 \sqrt{1 + 9x}dx = \frac{1}{9}\int u^{1/2}du = \frac{1}{9}.\frac{2}{3}u^{3/2}}$$

$$\mathbf{= \frac{2}{27}\left[(1 + 9x)^{3/2} \ \Big|_1^4 = \frac{2}{27}\left(37^{3/2} - 10^{3/2}\right)\right.}$$

9) $9x^2+16y^2=144$ eğrisinin a) x-ekseni etrafında b) y-ekseni etrafında dönmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.

Çözüm:



$$9x^2+16y^2=144$$

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$$

$$x^2=16\left(1-\frac{y^2}{9}\right)$$

$$x=0 \quad \text{için} \quad y=\pm 3$$

$$y^2=9\left(1-\frac{x^2}{16}\right)$$

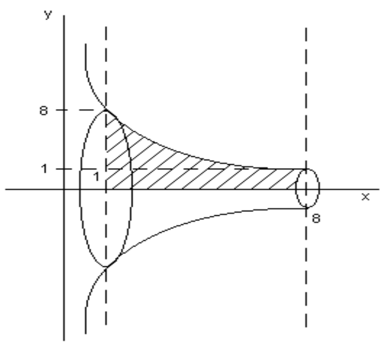
$$y=0 \quad \text{için} \quad x=\pm 4$$

$$V_x=\pi\int_a^b y^2dx=2\pi\int_0^4 9\left(1-\frac{x^2}{16}\right)dx=18\pi\left(x-\frac{x^3}{48}\right)\Bigg|_0^4=48\pi$$

$$V_y=\pi\int_a^b x^2dy=2\pi\int_0^3 16\left(1-\frac{y^2}{9}\right)dy=32\pi\left(y-\left(\frac{y^3}{27}\right)\right)\Bigg|_0^3=64\pi$$

10) $y=\dfrac{8}{x}$ eğrisi x=1, x=8 doğruları ile sınırlı bölgenin x-ekseni etrafında dönmesiyle oluşan hacmini bulunuz.

Çözüm:



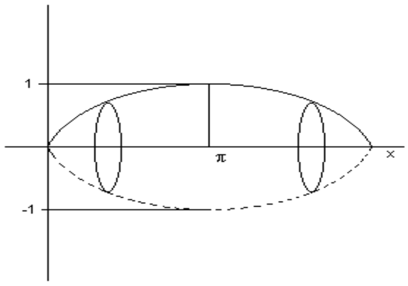
$$V_x=\pi\int_1^8 y^2dx$$

$$V_x=\pi\int_1^8 \frac{64}{x^2}dx=64\pi\left(-\frac{1}{x}\right]_1^8$$

$$V_x=56\pi$$

11) y=sinx eğrisi **x=0, x=π** doğruları ile sınırlı bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.

Çözüm:

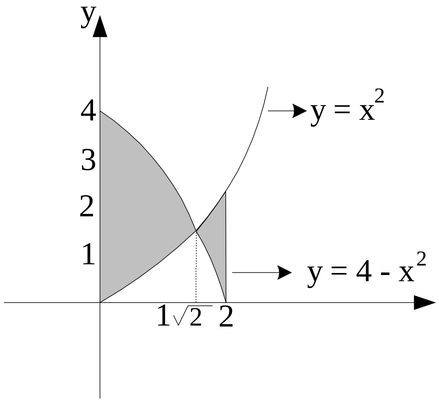


$$V_x=\pi\int_0^\pi y^2dx=\pi\int_o^\pi \sin^2 xdx=\frac{n}{2}\int_0^\pi(1-\cos 2x)dx$$

$$V_x=\frac{n}{2}\left(x\ \Big|_0^n-\frac{1}{2}\text{Sin}\,2x\ \Big|_0^n=\frac{n}{2}(\pi-0)=\frac{\pi^2}{2}\text{br}^3\right.$$

12) $y = 4 - x^2$, $y = x^2$ eğrileri $x = 0$; $x = 2$ doğruları ile sınırlı alanı bulunuz.

Çözüm:



$y = 4 - x^2$ ve $y = x^2$ ise $y = y$

$y = 0 \Rightarrow x = \mp 2 \Rightarrow 4 - x^2 = x^2$

$x = 0 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow 4 = 2x^2 \Rightarrow x^2 = 2 \quad x = \mp\sqrt{2}$

$$A_1 = \int_0^{\sqrt{2}} (y_1 - y_2)dx$$

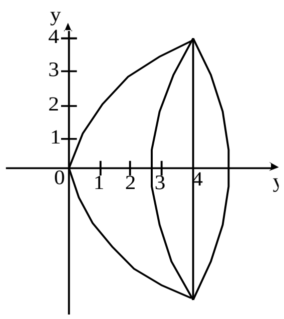
$$A_1 = \int_0^{\sqrt{2}} \left(4 - x^2 - x^2\right)dx \Rightarrow A_1 = \int_0^{\sqrt{2}} \left(4 - 2x^2\right)dx = \left(4x - \frac{2}{3}x^3\right|_0^{\sqrt{2}} \Rightarrow A_1 = 4\sqrt{2} - \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$A_2 = \int_{\sqrt{2}}^{2} \left[x^2 - \left(4 - x^2\right)\right]dx \Rightarrow A_2 = \int_{\sqrt{2}}^{2} \left(2x^2 - 4\right)dx = \left(\frac{2}{3}x^3 - 4x\right|_{\sqrt{2}}^{2} = \left(\frac{16}{3} - 8\right) - \left(\frac{4\sqrt{2}}{3} - 4\sqrt{2}\right)$$

$$A = A_1 + A_2 = \left(4\sqrt{2} - \frac{4\sqrt{2}}{3}\right) + \left(\frac{16}{3} - 8 - \frac{4\sqrt{2}}{3} + 4\sqrt{2}\right)$$

13) $y^2 = 4x$ eğrisi y=0 , x=0 , x=4 doğruları ile sınırlı bölgenin x-ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanını bulunuz.

Çözüm:



$y = 2\sqrt{x}$ ise $y' = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \left(y'\right)^2 = \frac{1}{x}$ olur.

$x = 4 \Rightarrow y = \mp 4 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0$

$$S = 2\pi\int_a^b y \cdot \sqrt{1 + \left(y'\right)^2} \Rightarrow S = 2\pi\int_0^4 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}}dx$$

$$S = 4\pi\int_0^4 \sqrt{x + 1}dx = \frac{8\pi}{3}\left(\left(x + 1\right)^{3/2}\right|_0^4 = \frac{8\pi}{3}\left(5\sqrt{5} - 1\right)$$

14) $y = \sqrt{x}$ eğrisi y=0, x=1, x=4 doğruları ile sınırlı bölgenin

a) A=? b) V_x=? c) V_y=? d) Ağırlık merkezi ?. e) Kütle merkezi?

Çözüm:

a)

$$A = \int_1^4 (y_2 - y_1)\,dx$$

$$A = \int_1^4 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3} x^{3/2} = \frac{2}{3}\left(4\sqrt{4} - 1\right)$$

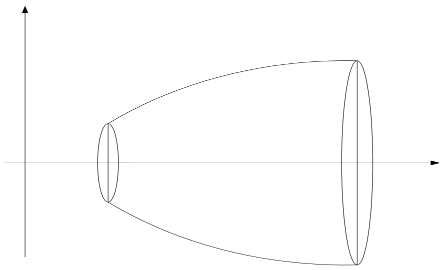
$$A_1 = \frac{14}{3}\,br^2$$

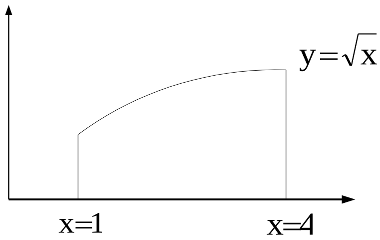
b)

$$V_x = \pi \int_1^4 \left(y_2{}^2 - y_1{}^2\right) dx$$

$$V_x = \pi \int_1^4 y^2\,dx = \pi \int_1^4 x\,dx$$

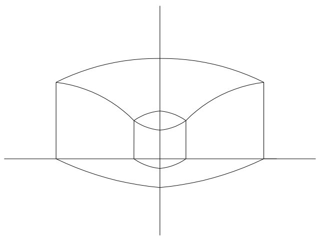
$$V_x = \pi\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{15\pi}{2}$$





c)

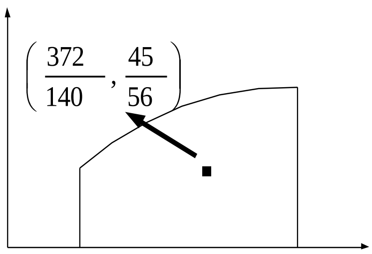
$$V_y = 2\pi \int_a^b (x.y)\,dx = 2\pi \int_1^4 x.y.\,dx = 2\pi \int_1^4 x.\sqrt{x}.\,dx = \frac{4}{5}\pi\left(x^{5/2}\right) = \frac{124\pi}{5}\,br^3$$



d)

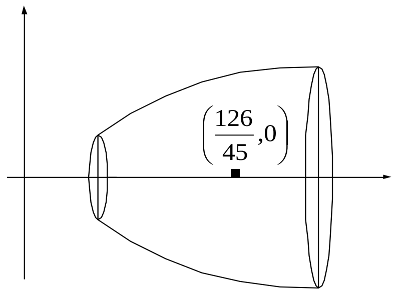
$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x.y.dx}{\int_a^b y\,dx} = \frac{\frac{124}{10}}{\frac{14}{3}} = \frac{124}{10} \cdot \frac{3}{14} = \frac{372}{140}\quad (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{372}{140}, \frac{45}{56}\right)$$

$$\bar{y} = \frac{\int_a^b \frac{y^2}{2}.dx}{\int_a^b y\,dx} = \frac{\int_1^4 \frac{x}{2}.dx}{\frac{14}{3}} = \frac{\frac{x^2}{4}}{\frac{14}{3}} = \frac{\cancel{15}/4}{\cancel{14}/3} = \frac{45}{56}$$



e)

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x.y^2.dx}{\int_a^b y^2\,dx} = \frac{\int_1^4 x.x.dx}{\frac{15}{2}} = \frac{\frac{x^3}{4}}{\frac{14}{3}}\Big|_1^4 = \frac{63}{3}\cdot\frac{2}{15} = \frac{126}{15}$$

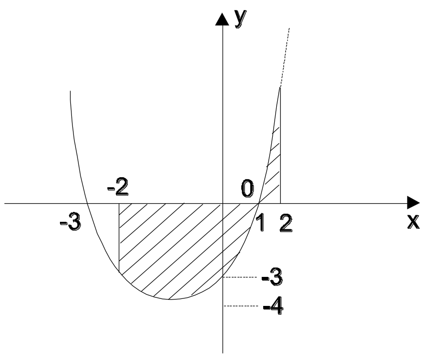


$$(\bar{x},\bar{y}) = \left(\frac{126}{45},0\right)$$

15)

$f:[-2,2]\to R$
$f(x) = x^2 + 2x - 3$ fonksiyonu ile x-ekseni arasında kalan alanı bulalım.

Çözüm:



$$A = \int_{-2}^{2} |f(x)|dx = \int_{-2}^{1} -f(x)dx + \int_{1}^{2} f(x)dx$$

$$= \int_{-2}^{1} -(x^2+2x-3)dx + \int_{1}^{2}(x^2+2x-3)dx$$

$$= -\left(\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x\right)\Bigg|_{-2}^{1} + \left(\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x\right)\Bigg|_{1}^{2}$$

$$= 9 + \frac{7}{3} = \frac{34}{3}$$

16) $y = x^2 - 4x + 3$ ile $y = -x^2 + 4x - 3$ eğrileri arasındaki alanı bulunuz.

Çözüm:

$y = -x^2 - 4x - 3$ için $x = 0 \Rightarrow y = 3 \quad y = 0 \Rightarrow x = 1 \quad x = 3$

$y = -x^2 + 4x - 3$ için $x = 0 \Rightarrow y = -3 \quad y = 0 \Rightarrow x = 1 \quad x = 3$

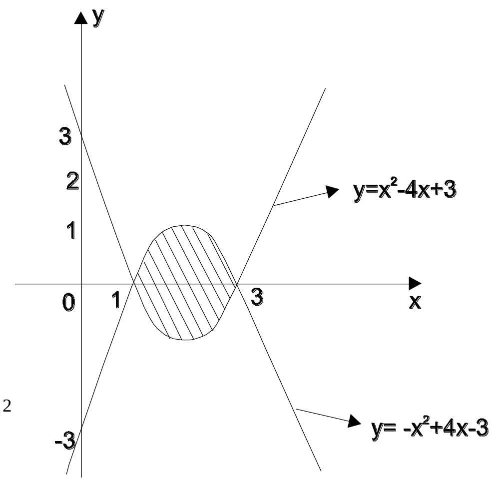
$$A = \int_a^b (y_2 - y_1)dx$$

$$A = \int_1^3 \left[(-x^2+4x-3) - (x^2-4x+3)\right]dx$$

$$A = \int_1^3 \left[(-x^2+4x-3-x^2+4x-3)\right]dx$$

$$A = \int_1^3 (-2x^2+8x-6)dx = \left(-\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 6x\right)\Big|_1^3$$

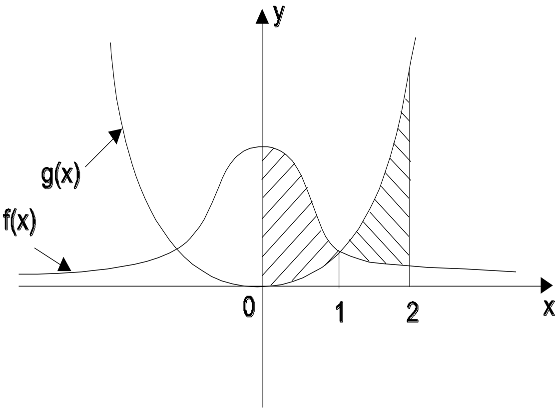
$$A = \left(-\frac{2}{3}.3^3 + 4.3^2 - 6.3\right) - \left(-\frac{2}{3}.1^3 + 4.1^2 - 6.1\right) = \frac{8}{3}\text{br}^2$$



17) $f: IR \to IR$; $g: IR \to IR$; $f(x)=\dfrac{2}{x^2+1}$; $g(x)=x^2$ fonksiyonları veriliyor. f ve g fonksiyonlarının gösterdiği eğriler, $x=0$ ve $x=2$ doğruları arasında kalan alanı hesaplayın,

Çözüm :

$$A=\int_0^2 |f(x)-g(x)|dx$$
$$=\int_0^1 |f(x)-g(x)|dx+\int_1^2 -|f(x)-g(x)|dx$$
$$=\int_0^1\left(\frac{2}{x^2+1}-x^2\right)dx-\int_1^2\left(\frac{2}{x^2+1}-x^2\right)dx$$
$$=(2\mathrm{Arc}\tan x-\frac{1}{3}x^3)-(2\mathrm{Arc}\tan x-\frac{1}{3}x^3)$$
$$=2.\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}-2\mathrm{Arc}\tan 2+\frac{8}{3}+2.\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}$$
$$=\pi-\frac{2}{3}-2\mathrm{Arc}\tan 2$$



18)

$f:[1,e]\to R$, $f(x)=\ln x$ fonksiyonunun temsil ettiği eğri parçasının x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin hacmini bulalım.

Çözüm :

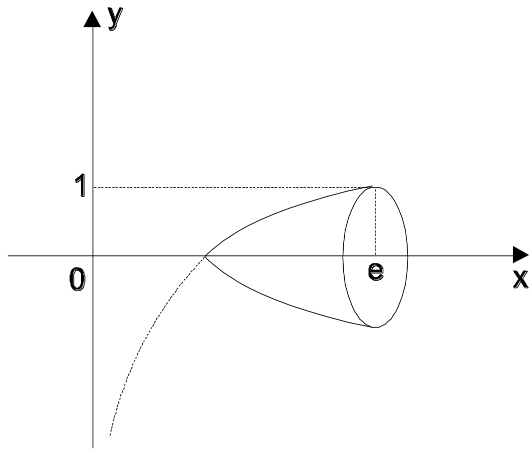
$V=\pi\int_1^e f^2(x)dx=\pi\int_1^e \mathrm{Ln}^2(x)dx$ olur.

Bu integrali kısmi integral yöntemiyle çözelim.

$u=\ln^2 x, dv=dx\ \ diyelim.$

$du=2.\frac{1}{x}\ln x.dx\quad v=x\quad olur.$

$$V=\Pi\left[x\ln^2 x\right]_1^e-2\int_1^e \ln x dx$$
$$=\Pi\left[e-2(x\ln x-x)\right]$$
$$=\Pi(e-2)$$



19) $f:\left[0,\frac{7\pi}{4}\right]\rightarrow IR \quad f(x)=\frac{3}{2}+\sin x$

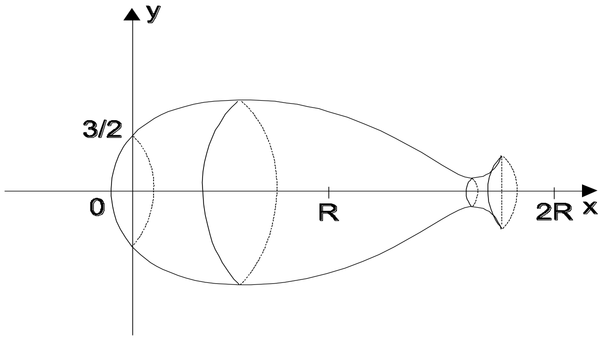
fonksiyonunun gösterdiği eğrinin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin sınırladığı hacmi bulalım.

Çözüm:

$$V=\Pi\int_0^{7\pi/4} f^2(x)dx \Rightarrow \Pi\int_0^{7\pi/4}\left(\frac{3}{2}+\sin x\right)^2 dx \Rightarrow \Pi\int_0^{7R/4}\left(\frac{9}{4}+3\sin x+\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx$$

$$=\Pi\left(\frac{9}{4}.\frac{7\pi}{4}-3.\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}.\frac{7\pi}{2}+\frac{1}{4}+3\right)$$

$$=\Pi\left(\frac{77}{16}\pi-3\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{13}{4}\right)$$



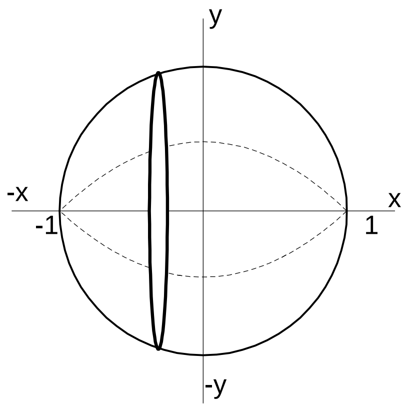
20) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ fonksiyonunun $[-1,1]$ aralığındaki parçasının x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin yüzey alanını hesaplayınız.

Çözüm: $y=\sqrt{1-x^2} \quad y^2=1-x^2 \quad x^2+y^2=1$

$$y_1=\sqrt{1-x^2} \quad y_2=-\sqrt{1-x^2}$$

$$y_1'=\left(\sqrt{1-x^2}\right)'=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$s=2\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1+\left(\left(\sqrt{1-x^2}\right)'\right)^2}.dx$$



$$s=2\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}.dx=2\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\ .\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}.dx$$

$$s=2\pi\int_{-1}^{1}dx=\left(2\pi x\right|_{-1}^{1}=\left[\left(2\pi(1)\right)-\left(2\pi(-1)\right)\right]=4\pi$$

BELİRLİ İNTEGRALE AİT ÇEŞİTLİ ALIŞTIRMALAR

1. **$y = 3x$, $y = 15 - 3x$** doğruları ile **x** – ekseni arasında kalan alan nedir? **C:** (18.75)
2. **$y^2 = x^3$** eğrisi ile **$x = 4$** doğrusu arasında kalan alan nedir? **C:** (25.6)
3. **$y^2 = 4x$** ile **$x^2 = 4y$** eğrileri arasında kalan alan nedir? **C:** (16/3)
4. **$10y = x^2 - 80$** eğrisi ile **$y = 0$, $x = 1$ ve $x = 6$** doğruları arasındaki alan nedir? **C:** (32.83)
5. **$y = x^2 + 2$** eğrisi ile **$y = 3$, $y = 5$, $x = 0$** doğruları arasındaki alan nedir? **C:** (2.797)
6. **$y^2 = 16 - x$** eğrisi **$y = 0$, $x = 0$** doğruları ile sınırlı bölgenin alanı nedir? **C:** (126/3)
7. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ eğrisi ile **$y = 0$, $x = 0$** doğruları arasındaki alan nedir? **C:** (1/6)
8. **$4y^2 = x^3$** eğrisi ile **$x = 8$** doğrusu arasında kalan alan nedir? **C:** (72.4)
9. Birinci bölgede **$y^2 = x^3 - 3x^2 + 3x$** eğrisi ile **$x = 1$** doğrusu tarafından sınırlanan bölgenin x–ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel cismin hacmi nedir? **C:** (0.785)
10. $y = \frac{1}{2}(e^{-x} + e^{x})$ eğrisi $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$ doğruları ile sınırlı bölgenin x – ekseni etrafında dönmesiyle oluşan hacim nedir? **C:** (4.42)
11. **$y = x^3$** eğrisi , **$x = 0$, $y = 8$** doğruları ile sınırlı bölgenin y – ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel cismin hacmi nedir? **C:** (60.3)
12. **$9x^2+16y^2 = 144$** elipsoidinin y – ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel cismin hacmi nedir? **C:** (329)
13. $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^{2/3} = 1$ eğrisinin y-ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel cismin hacmi nedir?
14. **$y = e^x$** eğrisi , **$x = 1$, $y = 0$, $x = 0$** doğruları ile sınırlı bölgenin **$x = 1$** doğrusu etrafında dönmesiyle oluşan dönel cismin hacmi nedir? **C:** (4.51)
15. **$y = 4x - x^2$** eğrisi , $y = 3$, $x = 0$ doğruları ile sınırlı bölgenin **$y = 3$** doğrusu etrafında dönmesiyle oluşan dönel cismin hacmi nedir? **C:** (3.35)
16. **$y^2 = 24 - 4x$** eğrisi $y=0$, $x = 3$, $x = 6$ doğruları ile sınırlı bölgenin **x- ekseni** etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin yanal alanı nedir? **C:** (58.6)
17. **$x^{2/3} + y^{2/3} = 1$** eğrisinin 1.bölgedeki kısmının x-ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin yanal alanı nedir?
18. **$y = 4 - x^2$** eğrisi **$x = 0$, $x = 2$, $y = 0$** doğruları ile sınırlı bölgenin y-ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin yanal alanı nedir? **C:** (36.2)
19. $y = 5x^2$ eğrisi **$x = 2$, $x = 4$, $y = 0$** doğruları ile sınırlı bölgenin **y-ekseni** etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin yanal alanı nedir? **C:** (1408)