ÖNSÖZ

Bu kitabı yazmaktaki amacımız, şimdiye kadar yayımlanmış onlarca integral ders notları ve kitapları arasına bir yenisini katmaktan ziyade , bu alandaki bir boşluğu doldurmaktır.

Ülkemizde integral hakkındaki mevcut yayınların belli bir seviyeden sonra anlaşılır olması, yayınlanan eserlerin pratikten ziyade teoriye ve karmaşık bir yapıya sahip olması, öğrencilerin doğal olarak lise mezunu kabul edilmesi gibi nedenlerden dolayı, bu eserlerin öğrenciler tarafından algılanmasında çeşitli sorunlara yol açmıştır. Gerek bu saydığımız nedenler ve gerekse okulumuzun öğrenci çoğunluğunun meslek lisesi mezunu olmaları, bizim çözümlü örnekleri fazla, anlaşılır ve uygulamaya yönelik böyle bir kitabı yazmamızda etkili olmuştur.

Bunun yanısıra, hocalarımın bana, lisans, yüksek lisans ve doktora seviyesinde karşılıksız verdiği emeğin boşa gitmediğini göstermek ve vefa borcumu bir nebze olsun ödeyebilmek için bu eseri onlar adına ülkemizin yarınları olan gençliğimize ve kendi adımıza ***oğullarımız Furkan TEKTAŞ ile Ahmet Burak TEKTAŞ'a ithaf ediyoruz…***

Dr. Mehmet TEKTAŞ

Dr. Necla TEKTAŞ

Ekim, 2003

İSTANBUL

İÇİNDEKİLER

İNTEGRAL

BÖLÜM 1. GİRİŞ

1.1. İntegralin Tanımı ve Tarihçesi

İntegral kavramı diferansiyel ve antitürev kavramlarını içerir. Burada, antitürev integral (veya bir fonksiyonun ilkeli) anlamındadır. Türevin birkaç yüzyıllık geçmişi olmasına rağmen integral kavramının geçmişinin insanoğlunun alan hesabına getirdiği açıklamalar kadar eski olduğu bilinmektedir.İntegral kavramını bir fonksiyonun integrali anlamında şu şekilde verebiliriz.**F(x) + c** fonksiyonunu göz önüne alalım. Burada, **c** keyfi bir sabittir. Bu fonksiyonun **x**'e göre türevi;

$$\frac{d}{dx}\left[F(x)+c\right]=F'(x)+0=F'(x)$$

ve buradan;

d[F(x)+c]=F'(x)dx olarak elde edilir. Buna göre;

F(x)+c fonksiyonunun diferansiyeli **F′(x).dx** iken

F′ (x).dx fonksiyonunun integrali **F(x)+c** demektir

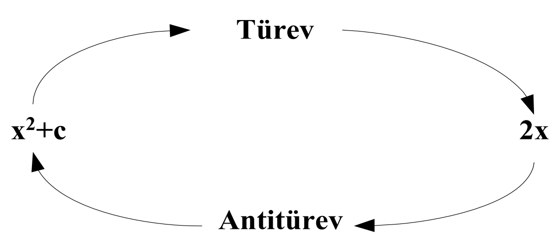
F′ (x) = f (x) alalım. Bu durumda, **y=f(x) fonksiyonunun belirsiz integrali;**

$$\int f(x)dx = F(x)+c$$

(c=sabit) şeklinde tanımlanır. Burada kullanılan $\int$ işareti integral işareti olup Sum(Toplam) kelimesinin baş harfi olan S harfinin uzatılmış halidir. **c** keyfi sabiti ise integrasyon sabiti olup fonksiyon hakkındaki bilgiler mevcut iken belirlenir. **dx diferansiyeli** integral içinde olmak zorundadır ve **x'e göre integral alınacağını ifade eder.**

$$\int f(x)dx = F(x)+c \quad \text{veya} \quad d\left[F(x)+c\right]=f(x)dx$$

ilişkisi her zaman geçerlidir. Bunu bir örnekle açıklayalım.



Burada antitürev belirsiz integral olarak da bilinir ve iki isimden birisi kullanılır. İntegral veya antitürev bulma işlemine **integrasyon**, integrali alınacak fonksiyona ise **integrand** denir.Bu açıklamaların ışığı altında bilinen fonksiyonların integralleri ile ileride ayrıca inceleyeceğimiz özel tipteki integraller aşağıda verilmiştir.

1) $\int dx = x + c$

2) $\int du = u + c \qquad (u = u(x))$

3) $\int \alpha . f(x)dx = \alpha \int f(x)dx = \alpha[F(x) + c] \qquad$ (α=sbt)

4) $\int [f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + ----+f_n(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + -----$

5) $\int x^n .dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$

6) $\int \frac{dx}{x} = Ln|x| + c \qquad (x \neq 0)$

7) $\int e^x dx = e^x + c$

8) $\int a^x dx = \frac{1}{Lna} .a^x + c \qquad (a \neq 0, a > 0)$

9) $\int \sin xdx = -\cos x + c$

10) $\int \cos xdx = +\sin x + c$

11) $\int \tan xdx = -Ln|\cos x| + c$

12) $\int \cot anxdx = Ln|\sin x| + c$

13) $\int \sec xdx = Ln|\sec x + \tan x| + c$

14) $\int \cos ecxdx = Ln|\cos ecx - \cot anx| + c$

15) $\int \sec^2 xdx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + \tan^2 x)dx = \tan x + c$

16) $\int \cos ec^2 xdx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int (1 + \cot an^2 x)dx = -\cot anx + c$

17) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = Arc\sin x + c$

18) $\int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = Arc\cos x + c$

19) $\int \frac{dx}{1+x^2} = Arc\tan x + c$

20) $\int \frac{-dx}{1+x^2} = Arc\cot anx + c$

21) $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} Ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c$

22) $\int \pm \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = Ln\left|x \pm \sqrt{x^2-1}\right| + c$

23) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = Ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + c$

24) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = Arc\sin\frac{x}{a} + c \qquad (a \neq 0)$

25) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}.Arc\tan\frac{x}{a} + c \qquad (a \neq 0)$

26) $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}.Ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$

27) $\int \pm \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = Ln\left|x \pm \sqrt{x^2-a^2}\right| + c$

28) $\int \pm \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = Ln\left|x \pm \sqrt{x^2-a^2}\right| + c$

u=u(x) olmak üzere;

29) $\int e^u du = e^u + c$

30) $\int a^u du = \frac{1}{Lna}.a^u + c \qquad (a \neq 0, a > 0)$

31) $\int u^n.du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \qquad (n \neq -1)$

32) $\int \frac{du}{u} = Ln|u| + c \qquad (u \neq 0)$

33) $\int \sin udu = -\cos u + c$

34) $\int \cos udu = -\sin u + c$

35) $\int \tan udu = -Ln|\cos u| + c$

36) $\int \cot anudu = Ln|\sin u| + c$

37) $\int \sec u.du = Ln|\sec u + \tan u| + c$

38) $\int \cos ecudu = Ln|\cos ecu - \cot anu| + c$

39) $\int \sec^2 udu = \int \frac{du}{\cos^2 u} = \int (1+\tan^2 u)du = \tan u + c$

40) $\int \cos ec^2 udu = \int \frac{du}{\sin^2 u} = \int (1+\cot an^2 u)du = -\cot anu + c$

41) $\int e^{\propto u}.\cos \beta udu = \frac{e^{\propto u}}{x^2+\beta^2}.(\alpha Cos\beta u + \beta.Sin\beta u) + c \qquad (\alpha,\beta \in IR)$

42) $\int \frac{du}{\alpha^2+\beta^2.u^2} = \frac{1}{\alpha\beta}.Arc\tan\frac{\beta u}{\alpha} + c \quad (\alpha,\beta \in IR)$

43) $\int \frac{du}{u.(u^2+\alpha^2)} = \frac{1}{2\alpha^2}.Ln\left|\frac{u^2}{\alpha^2+u^2}\right| + c \quad (\alpha \neq 0)$

44) $\int \frac{du}{u.(u^2+\alpha^2)} = \frac{1}{\alpha}.Ln\left|\frac{u}{\alpha+\sqrt{\alpha^2+u^2}}\right| + c \quad (\alpha \neq 0)$

Şimdi de; $\int f'(x)dx = f(x)+c$ eşitliğini gösterelim

$u = f(x)+c$ alınırsa;

$u' = \frac{du}{dx} = f'(x) \Rightarrow du = f'(x)dx$ olur.

Bu son ifadenin her iki tarafının integrali aşağıdaki gibi alınır;

$$\int du = \int f'(x)dx$$

ve (1) nolu formülden yararlanılırsa; $u = \int f'(x)dx = f(x)+c$

olur.Böylece; $\int f'(x)dx = f(x)+c$ elde edilir.

1.2. $I = \int (ax+b)^n dx \qquad (a \neq 0)\ (a,b \in IR)\ (n \in Q)$ şeklindeki İntegraller

Bu tip integrallerde integral teknikleri konusunda ele alınacak olan değişken dönüşümü tekniği kullanılarak integral kolayca görülebilen bir integral formuna indirgenir.

Buna göre; $ax+b = u \Rightarrow a.dx = du$ ve buradan $\quad dx = \frac{du}{a}$ olur.

Bu değerleri I integralinde yerine yazarsak;

$I = \int u^n.\frac{du}{a} = \frac{1}{a}\int u^n du = \frac{1}{a}.\frac{u^{n+1}}{n+1} + c(n \neq -1)$ olarak elde edilir.

Bu son ifadede u'nun değeri yerine konursa;

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a}.\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c(n \neq -1)$$

olur. n= -1 için yukarıdaki dönüşüm tekrar uygulanarak;

$I = \int (ax+b)^{-1} dx = \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}.\int \frac{du}{u} = \frac{1}{a}.Ln|u| + c$ ve u=ax+b değeri yerine konursa;

$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}.Ln|ax+b| + c$ olarak bulunur. Bu iki sonucu bir arada yazacak olursak;

$$\mathbf{I = \int (ax+b)^n dx = \begin{cases} \frac{1}{a}.\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c(n \neq -1) \\ \frac{1}{a}.Ln|ax+b| + c(n = -1) \end{cases}}$$ genel sonucunu elde ederiz.

Örnek.1.1: $\int \sqrt[3]{2x-5}dx = ?$

Çözüm.1.1:

$$\left.\begin{array}{l} 2x-5=u \\ 2dx = du \\ dx = \frac{du}{2} \end{array}\right\} \int \sqrt[3]{2x-5}dx = \int \sqrt[3]{u}.\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u^{1/3}.du = \frac{1}{2}.\frac{3}{4}.u^{4/3} + c = \frac{3}{8}(2x-5)^{4/3} + c$$

Örnek.1.2: $\int \frac{3dx}{4-2x} = ?$

Çözüm.1.2:

$$\left.\begin{array}{l} 4-2x=u \\ -2.dx = du \\ dx = -\frac{du}{2} \end{array}\right\} \int \frac{3dx}{4-2x} = 3\int \frac{dx}{4-2x} = 3\int \frac{\frac{-du}{2}}{u} = -\frac{3}{2}\int \frac{du}{u} = -\frac{3}{2}.Ln|u| + c = -\frac{3}{2}.Ln|4-2x| + c$$

1-3-Kuvvet Fonksiyonunun İntegrali :u=u(x) olsun.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right)=(n+1).\frac{u^{n}}{(n+1)}.\frac{du}{dx}=u^{n}.\frac{du}{dx} \quad \text{veya} \quad d\left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right)=u^{n}.du$$

olur. Bu son ifadenin her iki tarafının integrali alınırsa;

$$\int d\left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right)=\int u^{n}.du \quad \text{ve böylece;} \quad \int u^{n}.du=\frac{u^{n+1}}{n+1}+c(n\neq -1)$$

ifadesi kuvvet fonksiyonunun integrali için genel formülü verir. Benzer şekilde n=-1 için;

$$\int \frac{du}{u}=Ln|u|+c \quad \text{olduğu açıktır.}$$

1.4. $I=\int e^{(ax+b)}dx$ şeklindeki İntegraller: (a,b $\in$ IR)

ax+b=u diyelim. Buna göre; **a.dx=du** ve buradan **dx=du/a** olur. Bu değerler I integralinde yerine yazılacak olursa;

$$I=\int e^{u}.\frac{du}{a}=\frac{1}{a}\int e^{u}.du=\frac{1}{a}.e^{u}+c$$

ve böylece **u=ax+b** değeri tekrar yerine yazılarak I integrali

$$I=\int e^{(ax+b)}dx=\frac{1}{a}.e^{(ax+b)}+c \quad \text{olarak elde edilir.}$$

Örnek.1.3: $\int e^{\frac{3x}{2}}dx=?$

Çözüm.1.3:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{3x}{2}=u\\ \frac{3}{2}dx=du\\ dx=\frac{2du}{3}\end{array}\right\}\int e^{\frac{3x}{2}}dx=\int e^{u}.\frac{2}{3}du=\frac{2}{3}\int e^{u}du=\frac{2}{3}e^{u}+c=\frac{2}{3}e^{\frac{3x}{2}}+c$$

Örnek.1.4: $\int e^{5-4x}dx=?$

Çözüm.1.4:

$$\left.\begin{array}{l}5-4x=u\\ -4dx=du\\ dx=-\frac{du}{4}\end{array}\right\}\int e^{5-4x}=\int e^{u}.\frac{du}{-4}=-\frac{1}{4}\int e^{u}du=-\frac{1}{4}e^{u}+c=-\frac{1}{4}e^{5-4x}+c$$

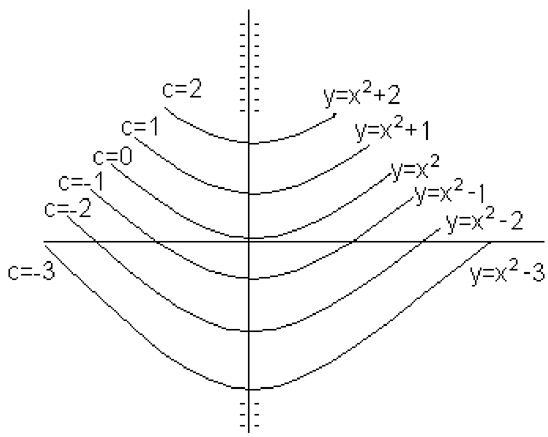
1.5. İntegrasyon Sabiti: (Eğri Aileleri)

c integrasyon sabiti keyfi bir sabit olup problemin tipine göre farklı anlamlar taşır. Bu nedenle **c** integral sabitinin geometrik, fiziksel, elektrik v.b. uygulamaları için ne anlama geldiğini örneklerle açıklayalım.

Örnek.1.5: Herhangi bir P(x,y) noktasındaki eğimi 2x olan eğri ailesinin denklemini bulunuz?

Çözüm.1.5: $y' = \frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow dy = 2x.dx$ olur.Her iki tarafın integrali alınırsa;

$\int dy = \int 2x dx = x^2 + c$ olur. Buna göre;$y=x^2+c$ istenilen eğri ailesinin(Parabol Demeti) denklemi olup c sabitinin her bir değeri için özel bir eğri verir. (Şekil-1)



(Şekil.1.1. $y=x^2+c$ eğri ailesi)

Elektrik devre uygulamaları ve fiziksel uygulamalara geçmeden önce türev bahsinde ele aldığımız temel fizik ve elektrik kanunlarının integral formlarını bulalım ve her bir temel formül için örnek verelim.

1.5.1: Elektrik Devre Uygulamaları

a) Yük: Türev bölümünde gördüğümüz gibi bir iletkenden geçen akım birim zamanda değişen yük miktarına eşittir. Yani, **I** amper cinsinden akımı, **t** saniye cinsinden zamanı ve **q** coulomb cinsinden yük miktarını göstermek üzere; $I = \frac{dq}{dt}$ idi. Şimdi, bu ifadeden **q** yük miktarını I akımına bağlı olarak bulalım. Bunun için **dq** değişkeni yük miktarını yalnız bırakıp elde edilen ifadenin her iki tarafının integrali alınırsa;

ve sonuç olarak da **I=I(t)** olmak üzere;

$$dq = I.dt \Rightarrow \int dq = \int I.dt \Rightarrow q = \int I(t).dt$$

ifadesi bir iletkenden herhangi bir zaman aralığında geçen yük miktarını veren formüldür.

Örnek.1.6: Bir kondansatörden geçen akım $I(t)=3t^2-2t$ ile veriliyor. Kondansatörde bulunan başlangıç yük miktarı 5 coulomb ise t=3 sn iken kondansatörde biriken yük miktarını bulunuz.

Çözüm.1.6: $q = \int I(t)dt$ idi. Buradan;

$q = \int (3t^2 - 2t)dt = t^3 - t^2 + c$ olarak bulunur.

t=0 için q=5 coulomb olduğuna göre c=5 coulomb olarak bulunur. Buna göre, herhangi bir anda kondansatördeki yük miktarını veren formül;
$q(t) = t^3-t^2+5$ olur. t=3 saniyede kondansatördeki yük miktarı ise $q=(3)^3-(3)^2+5=23$ coulomb olarak bulunur. İleride belirli integralle bu problemi; $\int_0^3 I(t)dt$ olarak bulabiliriz.Böylece;

$$q = \int_0^3 (3t^2 - 2t)dt \Rightarrow q = \left(t^3 - t^2\right|_0^3$$

ve $q = 3^3-3^2 = 18$ coulomb olarak bulunur. Burada, q_0=5 coulomb başlangıç yüküde ilave edilirse, t=3sn iken kondansatörde biriken yük q=18c+5c=23c olarak bulunur.

b) Bir Kondansatördeki Gerilim Miktarı:

Bir kondansatördeki akım **I=C.(dV/dt)** idi. Yani, birim zamanda değişen gerilim miktarı ile kondansatör sabitinin çarpımına eşittir. Burada, C farad cinsinden, t saniye cinsinden ve V volt cinsindendir. Buna göre, **I=C.(dV/dt)** formülünden bir kondansatördeki gerilim miktarı

$I = C.\dfrac{dV}{dt} \Rightarrow dV = \dfrac{1}{C}.I.dt$ olur. Her iki tarafın integrali alınırsa;

$$\int dV = \frac{1}{C}\int I(t)dt \Rightarrow V = \frac{1}{C}\int I(t)dt$$

ifadesi herhangi bir anda kondansatördeki akımı veren formüldür.

Örnek.1.7: 2F'lık bir kondansatör 20V başlangıç gerilimine ve zamana göre $I(t) = t^2 - 1$ akımına sahiptir. t=2 saniyede kondansatördeki gerilim miktarını bulunuz.

Çözüm.1.7:

I.Yol: $V = \frac{1}{C}\int I(t)dt = \frac{1}{2}\int (t^2 - 1)dt = \frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3} - t\right) + c$

olur. t=0 için V=20 olduğuna göre; $20 = \frac{1}{6}(0)^3 - \frac{1}{2}.(0) + c \Rightarrow c = 20$ olur.

Böylece, herhangi bir anda kondansatördeki gerilimi veren formül;

$V(t) = \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{2}t + 20$ bulunur. Sonuçta t=2 sn için;

$V = \frac{1}{6}(2)^3 - \frac{1}{2}2 + 20 = \frac{61}{3}\text{Volt}$ olarak bulunur.

II. Yol: Belirli integral yardımıyla;

$V = \frac{1}{2}\int_0^2 (t^2 - 1)dt = \frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3} - t\Big|_0^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3} - 2\right) = \frac{1}{3}\text{volt}$ olur ve V_0=20V başlangıç gerilimi ilave edilerek istenen gerilim ; V=20+1/3=61/3 bulunur.

c) Bir Bobindeki Akım: Bir bobindeki gerilim ; $V = L.\frac{dI}{dt}$ idi.Buna göre; **t** saniye cinsinden zamanı, **I** amper cinsinden akımı, **L** henry cinsinden bobin sayısını göstermek üzere; $dI = .\frac{1}{L}.V.dt$ olur. Burada, I akımını elde etmek için, bu son ifadenin her iki tarafının integrali alınırsa; $\int dI = \frac{1}{L}\int V.dt$ olur ve böylece; $I(t) = \frac{1}{L}.\int V(t).dt$

ifadesi herhangi bir t anındaki bobindeki akımı veren formüldür.

Örnek.1.8: 10 Henry'lik bir bobindeki gerilim $V = \sqrt{4t+1}$ volt olarak veriliyor. Buna göre başlangıç akımı 7,5 Amper olmak üzere t=2 saniyede bobindeki akımı bulunuz.

Çözüm.1.8:I.Yol: $I = \frac{1}{L}\int V(t)dt$ idi. Bu ifadede verilenler yerine yazılacak olursa;

$I = \frac{1}{10}\int \sqrt{4t+1}dt = \frac{1}{10}\int (4t+1)^{1/2}dt$ ve buradan;

$I = \frac{1}{10}.\frac{1}{4}.\frac{2}{3}.(4t+1)^{3/2} + c = \frac{1}{60}(4t+1)^{3/2} + c$ olur.t=0 için I_0=7,5 A olduğuna göre;

$$7,5 = \frac{1}{60}(4.0+1)^{3/2} + c \Rightarrow c = \frac{449}{60}$$

bulunur. Böylece, herhangi bir t anındaki bobindeki akım;

$I = \frac{1}{60}(4t+1)^{3/2} + \frac{449}{60}$ formülü ile bulunabilir. t=2 sn için bobindeki akım ise;

$I = \frac{1}{60}(4.2+1)^{3/2} + \frac{449}{60} = \frac{119}{15}$ Amper olarak bulunur.

II. Yol: Belirli integralle; $I = \frac{1}{10}\int_0^2 \sqrt{4t+1}dt = \frac{1}{60}(4t+1)^{3/2} \Big|_0^2 = \frac{13}{30}$ Amper bulunur.

I_0=7,5 A değeri ilave edilerek istenen akım; $I = \frac{13}{30} + 7,5 = \frac{119}{15}$ Amper olarak bulunur.

Sonuç olarak, bu temel kanunları bir tablo halinde özetleyelim. (Tablo-1)

(Tablo.1.1) Temel Elektrik Formülleri

Tanımı	Türev Formu	İntegral Formu
Yük(q)	$\mathbf{I = \frac{dq}{dt}}$	$\mathbf{q = \int I(t).dt}$
Gerilim (V)	$\mathbf{I = C.\frac{dV}{dt}}$	$\mathbf{V = \frac{1}{C}\int I(t).dt}$
Akım(I)	$\mathbf{V = L.\frac{dI}{dt}}$	$\mathbf{I = \frac{1}{L}\int V(t).dt}$

1.5.2: Fiziksel Uygulamalar :

a) Yol: s=f(t) fonksiyonunu göz önüne aldığımızda türev konusunda ele alınan kinematiğin temel konularında hatırlanacağı gibi bir nesnenin hızı; $V = \frac{ds}{dt}$ idi. Burada, **V**, nesnenin hızını, **s**, metre cinsinden yolu, **t** ise saniye cinsinden zamanı gösterir. Burada belirli bir zaman aralığında nesnenin aldığı yolu (s) bulmak istediğimizde ;**ds=V.dt** ve her iki tarafın integrali alınırsa; $\int ds = \int V(t)dt \Rightarrow s = \int V(t).dt$ olarak bulunur.

b) Hız:V=f(t) fonksiyonuna sahip olduğumuzda bir nesnenin herhangi bir andaki ivmesi kinematiğin temel diferansiyel kanunundan; $\partial = \frac{dV}{dt}$ idi. Burada,**V** nesnenin hızını, **t** saniye cinsinden zamanı göstermektedir. Buna göre, bu son ifadeden **dV** ifadesini çekersek; $dV = \partial\, dt$ olarak elde edilir.

Böylece; $\mathbf{V = \int a(t).dt}$ olarak elde edilir. $\mathbf{V = \int a(t).dt}$ ifadesi nesnenin herhangi bir andaki hızını veren formüldür.Kinematiğin bu temel kanunlarını bir tablo halinde türev ve integral formlarını aşağıdaki gibi verelim. (Tablo –2)

Tablo – 2 - Kinematiğin temel kanunları

	Tanımı	Türev Formu	İntegral Formu
1-	Yol (s)	$V = \dfrac{ds}{dt}$	$s = \int V(t).dt$
2-	Hız (V)	$a = \dfrac{dV}{dt}$	$V = \int a(t).dt$

Örnek.1.9 : Bir nesnenin hızıV(t)=2t+5 ile veriliyor. Buna göre, nesnenin 4 saniyede aldığı yolu bulunuz.

Çözüm.1.9:

I. Yol: $V = \dfrac{ds}{dt}$ idi. Buradan, $s = \int V(t)dt$ olur. Böylece;

$s = \int (2t+5)dt = t^2 + 5t + c$ olarak bulunur. t=0 için s=0 olacağından;

$0 = 0^2 + 5.(0) + c \Rightarrow c = 0$ elde edilir.Böylece, nesnenin herhangi bir zaman aralığında aldığı yol; $s = t^2 + 5t$ ile hesaplanır ve t=4 sn için s=4^2+5.4=36 m olarak bulunur.

II. Yol: Belirli integralle $s = \int_0^4 (2t+5)dt = \left(t^2 + 5t\right|_0^4 = 36m$ aynı sonuç bulunur.

Örnek.1.10: Bir nesnenin ivmesi ∂=3t^2-2t ile veriliyor. Nesnenin başlangıçtaki hızı 10 m/sn olduğuna göre t=5 sn esnasında nesnenin hızını bulunuz.

Çözüm.1.10:

I. Yol: $\partial = \dfrac{dV}{dt}$ ivmenin diferansiyel formu idi. Buradan hız kavramı ifadenin integrali alınarak; $V = \int \partial.dt$ şeklinde bulunmuştu. Buna göre; $V = \int (3t^2 - 2t)dt = t^3 - t^2 + c$ elde edilir. t=0 için V_0=10 m/sn olduğuna göre; $10 = (0)^3 - (0)^2 + c \Rightarrow c = 10$ olarak bulunur. Sonuç olarak, herhangi bir anda nesnenin hızını veren formül;V=t^3-t^2+10 olur.t=5 sn için nesnenin hızı; V=5^3-5^2+10=110 m/sn olarak bulunur.

II. Yol: Belirli integralle $V = \int_0^5 (3t^2 - 2t)dt = \left(t^3 - t^2\right|_0^5 = 100m/sn$

V_0=10 m/sn olduğuna göre istenen hız V+ V_0=110 m/sn olarak bulunur.

1.5.3. Kinematik ile ilgili örnekler

Örnek.1.11:. İlk hızı V_0 olan bir cisim aşağıdan yukarıya doğru atılıyor. Cismin atıldığı yere tekrar dönmesi için geçen süre cismin maksimum yüksekliğe erişmesi için geçen sürenin iki katı olduğunu gösteriniz. (Havanın direnç kuvveti ihmal edilecektir.)

Çözüm.1.11: Newton Kanununa göre;

$$m.a=-m.g \quad \text{veya} \quad \frac{dv}{dt}=-g \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2}=-g$$

$$\mathbf{V=\frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow a=\frac{dV}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}}$$

t=0 için $v=v_0$ ve x=0 olduğundan; $\frac{d^2x}{dt^2}=-g$

$$\mathbf{\frac{dV}{dt}=-g \Rightarrow dV=-g\cdot dt \Rightarrow \int dV=\int -g.dt \Rightarrow V=-gt+c_1}$$

t=0 için $v=v_0$ olduğundan $v_0= c_1$ bulunur. $V=-gt+c_1 =-gt+ V_0 \Rightarrow$ **$V=V_0- gt$** (*) olur.

$$\mathbf{\frac{dx}{dt}=y \Rightarrow dx=V\cdot dt \Rightarrow \int dx=\int V\cdot dt \Rightarrow x=\int (V_0-gt)dt \Rightarrow x=\int (V_0-g.t).dt}$$

$$\mathbf{\Rightarrow x=V_0t-\frac{1}{2}gt^2+c_2 \quad (**)}$$

t=0 için x=0 olduğundan $c_2 = 0$ bulunur. Cisim maksimum yüksekliğe eriştiği noktada (*) denklemindeki V=0 olacağından;

$$0= V_0- g.t \quad \Rightarrow \quad V_0 = g.t \quad \Rightarrow \quad \mathbf{t_{max}=\frac{V_0}{g} \quad (***)}$$

(**) ifadesinde x=0 yazılırsa $t_1=0$, $t_2=\frac{2V_0}{g}$ bulunur. $t_1=0$ cismin ilk atıldığı yer yani başlangıç noktasıdır. $t_2=\frac{2V_0}{g}$ cismin gidiş dönüş zamanıdır. Yani; $\mathbf{t_2=\frac{2V_0}{g}=2\cdot t_{max}}$

Örnek.1.12: Bir cismin düzgün bir yol üstünde sabit bir ivmesi ile hareket ediyor. İlk hızı V_0, t zaman sonra hız V ve kat ettiği yol s ile gösterilirse;

$$\left.\begin{array}{ll} \text{i)} & V = V_0+a.t \\ \text{ii)} & s = V_0.t+1/2.a.t^2 \\ \text{iii)} & V^2= V_0^2+2.a.s \end{array}\right\} \text{ olduğunu gösteriniz.}$$

Çözüm.1.12:

a) $a=\dfrac{dV}{dt} \Rightarrow dV = a.dt \Rightarrow \int dV = \int a.dt \Rightarrow V= a.t + c_1$

t=0 için $v=v_0$ olduğundan $c_1= v_0$ bulunur. Böylece hızın zamana bağlı denklemi:

$\mathbf{V = V_0+a.t}$ **(i)** elde edilir

b) $V=\dfrac{ds}{dt}$ idi. Buradan $ds=V.dt \Rightarrow \int ds=\int V.dt \Rightarrow s=\int V.dt$ olur.(i) ifadesindeki V değeri

yerine yazılarak;$s = \int(V_0+a.t).dt = v_0 \cdot t + \frac{1}{2}at + c_2$

t=0 için s=0 olduğundan $c_2=0$ bulunur.Buna göre yolun zamana bağlı denklemi; **s =**

$\mathbf{v_0 \cdot t + \frac{1}{2}at^2}$ **(ii)**

c) $V = V_0+a.t$ denklemindeki t değeri (ii) ifadesinde yerine yazılırsa;

$$\mathbf{s = V_0\left(\frac{V-V_0}{a}\right)+\frac{1}{2}a\left(\frac{V-V_0}{a}\right)^2 \Rightarrow s = \frac{V^2-{V_0}^2}{2a} \Rightarrow 2as = V^2 - {V_0}^2}$$

$\Rightarrow \mathbf{V^2= V_0^2+2.a.s}$ **(iii)** olduğu görülür.

Örnek.1.13: Doğrusal hareket eden bir cismin hızı orjinden olan uzaklığından üç birim fazladır. Eğer t=0 için V=6 ise hareket denklemini bulunuz.

Çözüm.1.13:

V=cismin hızı

x=orjinden olan uzaklık

$V=\dfrac{dx}{dt}=x+3$; t=0 için V=6 idi.

$\dfrac{dx}{dt}=x+2 \Rightarrow \dfrac{dx}{(x+3)} = dt \Rightarrow \int\dfrac{dx}{(x+2)} = \int dt \Rightarrow \ln|x+3|=t+\ln c$

$\Rightarrow \ln|\dfrac{x+3}{c}|=t \Rightarrow \dfrac{x+3}{c} = e^t \Rightarrow x+3=c.\,e^t \Rightarrow x=c.e^t-3$

$V=\dfrac{dx}{dt} = c.e^t$ olup t=0 için V=6 idi. $6=c.e^0 \Rightarrow c=6$

$x=6.e^t-2$ hareket denklemidir.

ALIŞTIRMALAR

1. $\int \frac{5.dx}{\sqrt[4]{(\frac{2}{5}-7x)^3}} = ?$

2. $\int \left(\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}\right)^{-1} dx = ?$

3. $\int \frac{dx}{e^{(5-2x)/4}} = ?$

4. $y'' = 3x^2 - x + 1$ olan ve $\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$ noktasındaki eğimi $m = \frac{2}{3}$ olan eğrinin denklemini bulunuz.

5. Herhangi bir P(x,y) noktasındaki eğimi $m = \frac{3x}{2}$ olan eğri ailesinin denklemini bulup, bu ailenin (1,-2) noktasından geçen üyesini belirtiniz.

6. Herhangi bir P(x,y) noktasındaki eğimi $m = \frac{2x}{y}$ olan eğri ailesinin denklemini bulunuz.

7. Bir kondansatördeki akım $I(t) = \sqrt[3]{t-1}$ ile veriliyor.Başlangıçtaki yük miktarı q_o=3 Coulomb ise t=2 saniyede kondansatörde biriken yük miktarını bulunuz.

8. 0,5 F'lik bir kondansatör 10V başlangıç gerilimine ve zamana bağlı $I(t) = e^{-\frac{3t}{2}}$ akımı ile veriliyor. Buna göre, t = 2 saniyede kondansatördeki gerilimi bulunuz.

9. Bir top 128 m/sn^2'lik bir ilk hız ile aşağıdan yukarı doğru atılıyor.

a) 2,4,6 saniye sonraki hızları bulunuz.

b) Ne zaman ilk atıldığı yere döner?

c) Maksimum yükseklik nedir?

BÖLÜM 2. BELİRLİ İNTEGRAL (Bir Eğrinin Altında Kalan Alan)

2-1. Riemann Darboux Alt ve Üst Toplamları ve Bir Fonksiyonun Belirli İntegrali

$f:[a,b] \rightarrow$ IR'ye sınırlı bir fonksiyon olsun. **[a,b]** aralığını;

$a= x_0<x_1<x_2 .... <x_{i-1}<x_i .... <x_{n-1}<x_n= b$ olmak üzere **(n+1)** nokta yardımıyla;

$[x_0,x_1], [x_1,x_2], [x_2,x_3], ... ,[x_{i-1},x_i], ..., [x_{n-1},x_n]$

şeklinde **n** tane alt aralığa ayıralım. İşte, bu aralıkların kümesine veya daha basit olarak **$\{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$** kümesine **[a,b]** aralığının herhangi bir **bölüntüsü** denir ve **P** ile gösterilir. **i=1,2,3,…..,n** olmak üzere; **$[x_{i-1}, x_i]$** aralığına **[a,b]** aralığının **i.**nci alt aralığı denir ve **I_i** ile gösterilir.**$x_i - x_{i-1}$** sayısına **i.**nci alt aralığın uzunluğu denir ve **Δx_i** ile gösterilir. Buna göre ; **$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$** olur. **$\Delta x_i$** sayılarının en büyüğüne **[a,b]** aralığının **P** bölüntüsünün **normu**

denir ve **$||P||=\max \Delta x_i$ (i=1,2,---,n)** ile gösterilir. **f** fonksiyonu **[a,b]** aralığında sınırlı olduğundan **$[x_{i-1}, x_i]$** alt aralığında da sınırlıdır. Bu nedenle, **f** fonksiyonunun her alt aralıkta üst sınır (**supremum)** ve alt sınırından (**infimum)** söz edilebilir. Böylece;

$$\mathbf{M = \sup_{x\in[a,b]} f(x) \quad \Rightarrow \quad M_i = \sup_{x\in I_i} f(x)}$$

$$\mathbf{m = \inf_{x\in[a,b]} f(x) \quad \Rightarrow \quad m_i = \inf_{x\in I_i} f(x)}$$

tanımlanırsa **$m_i \le m \le M_i \le M$** (i=1,2,3,………,n) her zaman geçerlidir.Bu tanımlamaların ışığı altında f fonksiyonunun P bölüntüsüne karşılık gelen **Riemann-Darboux alt ve üst toplamları** sırasıyla;

$$s(P,f) = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + ... + m_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

$$S(P,f) = \sum_{i=1}^{n} M_i.(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i.\Delta x_i$$

olarak tanımlanır.

---*Supremum = Üst sınırların en küçüğü * İnfimum = Alt sınırların en büyüğü

Alt ve üst toplamlar sırasıyla belirli integral konusunda bahsedeceğimiz küçük ve büyük dikdörtgenlerin alanları toplamına eşittir.**[a,b]** aralığının bütün bölüntülerinin kümesini ρ ile gösterelim. Buna göre, $\mathbf{Sup}\underset{P\in\rho}{\mathbf{S}}\mathbf{(P,f)}$ sayısına f fonksiyonunun [a,b] aralığı üzerindeki **alt integrali** denir ve $\underline{\int_{a}^{b}}\mathbf{f(x)dx}$ şeklinde gösterilir.

Benzer şekilde; $\mathbf{\dot{I}nf}\underset{P\in\rho}{\mathbf{s}}\mathbf{(P,f)}$ sayısına f fonksiyonunun [a,b] aralığındaki **üst integrali** denir ve; $\overline{\int_{a}^{b}}\mathbf{f(x)dx}$ ile gösterilir.

Teorem.2.1: f:[a,b]→ IR'ye sınırlı bir fonksiyon olsun. Bu durumda;

$$\underline{\int_{a}^{b}}f(x)dx \le \overline{\int_{a}^{b}}f(x)dx \qquad \text{olur.}$$

Tanım.2.1: f:[a,b]→ IR'ye sınırlı bir fonksiyon olsun. Eğer;

$\underline{\int_{a}^{b}}f(x)dx = \overline{\int_{a}^{b}}f(x)dx$ ise f fonksiyonuna [a,b] aralığında **Riemann-Darboux** anlamında **integre edilebilir** bir fonksiyondur denir ve;

$\int_{a}^{b}\mathbf{f(x)dx}$ şeklinde gösterilir. Burada, f(x) fonksiyonuna **integrand** yani integrali alınacak fonksiyon, **a** sayısına integralin alt sınırı, **b** sayısına da integralin üst sınırı ve **x** değişkenine de **integrasyon** değişkeni denir.

Teorem.2.2:f:[a,b]→ IR'ye sınırlı bir fonksiyonunun integre edilebilmesi için gerek ve yeter şart; $S(P,f)-s(P,f)<\varepsilon$ olacak şekilde bir P bölüntüsünün mevcut olmasıdır.

Teorem.2.3:f:[a,b]→ IR 'ye monoton ise integre edilebilir.

Teorem.2.4:f:[a,b]→ IR'ye sürekli ise integre edilebilir.

2.2. Belirli integralin Özelliklerine Dair Teoremler :

$f:[a.b] \to IR$ ve $g:[a.b] \to IR$ $\}$ iki fonksiyon olsun

Teorem.2.5: $f \pm g : [a,b] \to IR$ fonksiyonları integre edebilsin. Bu durumda;

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$

fonksiyonu da integre edilebilir ve;

$$\int_a^b (f \pm g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx \text{ şeklindedir.}$$

Teorem.2.6:f:[a,b]→ IR'ye fonksiyonu integre edilebilsin. Bu durumda; **–f:[a,b]→ IR** olmak üzere ;(-f)(x)=-f(x) fonksiyonu da integre edilebilir ve integrali;

$$\int_a^b (-f)(x)dx = -\int_a^b f(x)dx \text{ olur.}$$

Teorem.2.7: **f:[a,b]→ IR**'ye fonksiyonu integre edilebilsin ve **c** $\in$ **IR** olsun.Bu durumda;

c.f:[a,b]→ IR olmak üzere **(c.f)(x) = c.f(x)** integre edilebilir ve integrali;

$$\int_a^b (c.f)(x)dx = c\int_a^b f(x)dx \text{ olur.}$$

Teorem.2.8: **a<b<c a,b,c∈IR** olsun. **f:[a,b]→ IR** verilsin. Bu fonksiyonun **[a,b]** ve **[b,c]** aralıklarına kısıtlanmışına sırasıyla $\mathbf{f_1}$ ve $\mathbf{f_2}$ diyelim. Eğer f fonksiyonu integre edilebilirse f_1 ve f_2 fonksiyonları da integre edilebilir ve bu integral;

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_b^c f_2(x)dx \text{ olur.}$$

Teorem.2.9:f:[a,b]→ IR integre edilebilsin ve $\forall$**x∈[a,b] için f(x) ≥0** olsun. Bu durumda;

$$\int_a^b \mathbf{f(x)dx \geq 0} \text{'dır.}$$

Teorem.2.10:f:[a,b]→ IR integre edilebilsin ve $\forall$**x∈[a,b] için f(x) ≤ 0** olsun. Bu takdirde;

$$\int_a^b \mathbf{f(x)dx \leq 0} \text{'dır.}$$

Teorem.2.11:

$$\left.\begin{array}{l} f:[a,b]\to IR \\ g:[a,b]\to IR \end{array}\right\}$$ fonksiyonları integre edilebilsin ve $\forall$**x$\in$[a,b]** için **f(x) ≤ g(x)** olsun.

Bu takdirde; $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$'dir.

Teorem.2.12:f:[a,b]→ IR fonksiyonu integre edilebilsin. Bu takdirde;

|f|:[a,b]→ IR olmak üzere **|f| (x)=| f(x)|** fonksiyonu da integre edilebilir ve integrali;

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$ şeklindedir.

Teorem.2.13:

$$\left.\begin{array}{l} f:[a,b]\to IR \\ g:[a,b]\to IR \end{array}\right\}$$ fonksiyonları integre edilebilsin. Bu durumda; **(f.g)(x) = f(x).g(x)**

fonksiyonu da integre edilebilir ve integrali;

$$\int_a^b (f.g)(x)dx = \int_a^b f(x).g(x)dx$$ olur.

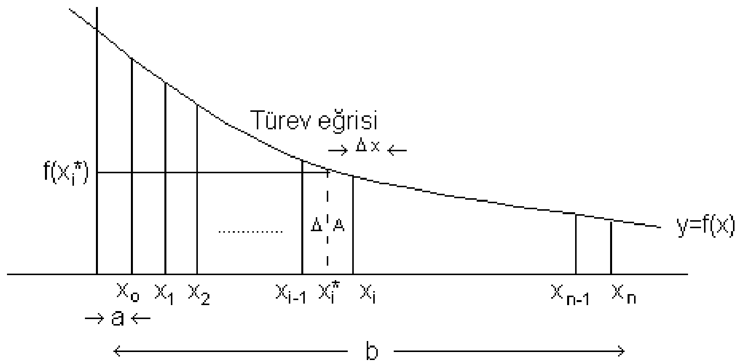
Özellik.2.1:f:[a,b]→ IR fonksiyonu integre edilebilsin. Bu durumda;

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$ özelliği geçerlidir.

Özellik.2.2: $\int_a^a f(x)dx = 0$

2.3. Bir Eğri Altındaki Yaklaşık Alan :

y=f(x) fonksiyonunun grafiğini göz önüne alalım. **y=f(x) eğrisi, x=a, x=b doğruları ve x-ekseni ile sınırlı bölgenin alanını** bulmak istiyoruz. Bunun için, ilk olarak bölgenin bu alanını **x_0, x_1, x_2, …..,x_n** noktalarında düşey doğrular çizerek ardışık noktalar arasındaki uzaklığın eşit ve **Δx** kadar olduğu dilimlere ayıralım. Bundan sonra, bu dilimlerin herhangi biri için yaklaşık alanı belirleyelim. (Şekil-2.1)



Şekil-2.1

Bunun için, $\mathbf{x_{i-1}}$ ve $\mathbf{x_i}$ noktaları arasındaki dilimi göz önüne alalım, $\mathbf{x_{i-1}}$ ve $\mathbf{x_i}$ noktaları arasındaki herhangi bir $\mathbf{x_i^*}$ noktasını seçelim.Eğrinin bu noktadaki değeri $\mathbf{f(x_i^*)}$ olsun. Buna göre, $\mathbf{\Delta A}$ yaklaşık olarak $\mathbf{f(x_i^*)}$ yüksekliği ve $\mathbf{\Delta x}$ genişliğinde bir dikdörtgen olarak alınırsa;

$$\Delta A \cong f(x_i^*).\Delta x$$

istenilen yaklaşık alanı verir.Bu yaklaşık alanın **ΔA (*)** esas alanından küçük veya büyük olması $\mathbf{x_i^*}$ noktasının seçimine ve $\mathbf{x_i - x_{i-1}}$ noktaları arasındaki uzaklığa bağlıdır.

Diğer dilimlerin alanları da buna benzer olarak;

1. Dilim için yaklaşık alan $\Rightarrow f(x_1^*).\Delta x$
2. Dilim için yaklaşık alan $\Rightarrow f(x_2^*).\Delta x$
3. Dilim için yaklaşık alan $\Rightarrow f(x_3^*).\Delta x$

n Dilim için yaklaşık alan $\Rightarrow f(x_n^*).\Delta x$ şeklindedir.

Buna göre, **y=f(x) eğrisi, x=a, x=b doğruları ve x-ekseni** ile sınırlı bölgenin alanına **A** diyecek olursak, bu alan n tane dilim için alınan yaklaşık alanların toplamının yaklaşık bir değeridir. Yani;

$$A \cong f(x_1^*).\Delta x + f(x_2^*).\Delta x + ... + f(x_n^*)\Delta x$$

veya diğer bir gösterimle;

$A \cong \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*).\Delta x$ olur.$\mathbf{x^*}$ noktalarının seçimine bağlı olarak bu yaklaşık alanın

nasıl bulunacağını aşağıdaki metot ile gösterelim.

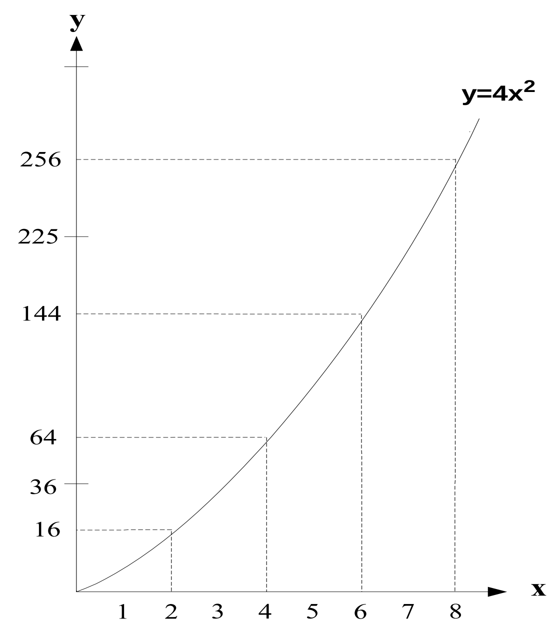
2.3.1.Orta Nokta Metodu:y=f(x) eğrisi, x=a, x=b doğruları ve x-ekseni ile sınırlı bölgenin yaklaşık alanını Δx genişliğinde ve x^* değerlerini ait oldukları dilimlerin orta noktası seçerek elde edilen dikdörtgen şeklindeki dilimlerin alanları toplamı olarak aldığımızda;

$A \cong \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*).\Delta x$ olur. Burada , $\mathbf{f(x_i^*)}$, **i.** dilimin orta noktasındaki **yüksekliği** ifade eder.

(*) ΔA=A alanının küçük bir parçasını, $\mathbf{\Delta x = x_i - x_{i-1}}$ farkını ifade eder.

Örnek.2.1: Orta nokta metodunu kullanarak $f(x)=4x^2$ eğrisi x=0, x=8 doğruları ve x-ekseni ile sınırlı bölgenin alanını dilim genişliğini 2 birim alarak yaklaşık olarak hesaplayınız.

Çözüm.2.1:



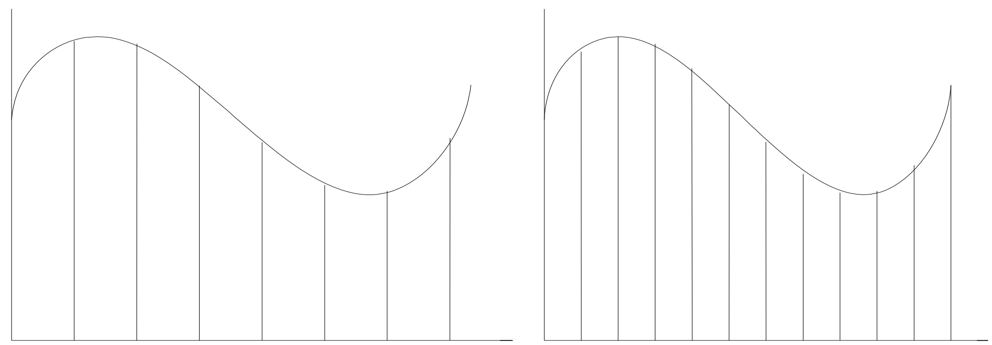
Şekil 2.2

İstenilen alan 4 dilimden oluşmaktadır ve bu dilimlerin orta noktaları sırasıyla 1, 3, 5 ve 7'dir. (Şekil-2.2) Bu orta noktalarda fonksiyon değerleri hesaplanırsa ve bu değerler aşağıdaki tabloya yazılacak olursa;

x*	1	3	5	7
f(x*)	4	36	100	196

olarak bulunur. Buna göre alan; $A \cong 4.(2) + 36.(2) + 100.(2) + 196(2) = 672$ elde edilir.

2.4. Bir Eğri Altındaki Kesin Alan

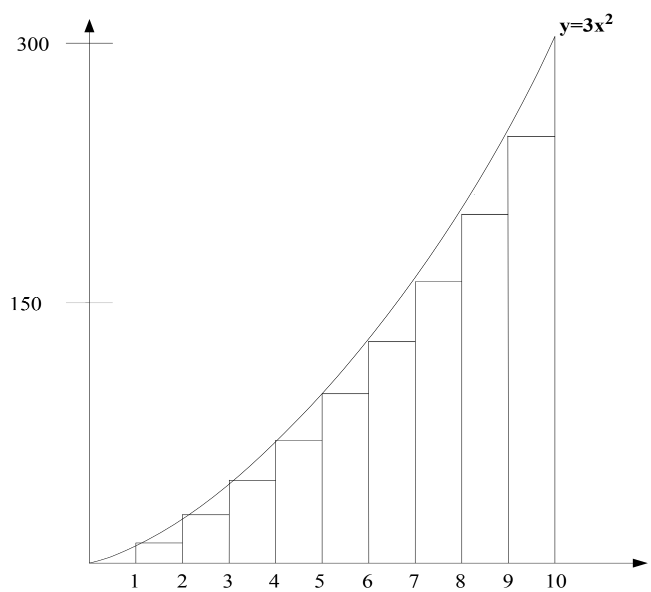


Şekil . 2.3 Şekil. 2.4

Eğri altında kalan alanın hesabı için Şekil-2.3, Şekil-2.4'e göre daha iyi bir yaklaşımdır. Yani, dilim genişliği olan **Δx** sıfıra yaklaştıkça (dilimlerin sayısı sonsuza yaklaştıkça) bu dilimlerin alanları toplamı eğri altında kalan A kesin alanına yaklaşır. Böylece; bu yaklaşım limit yardımıyla; $A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*).\Delta x$ olarak tanımlanır.

Örnek.2.2: $y=3x^2$ eğrisi x=0, x=10 doğruları ile x-ekseni tarafından sınırlı bölgenin alanını dilim genişliklerini 2, 1, ½, ¼,……….. alarak orta nokta metodunu kullanarak bulunuz.

Çözüm.2.2:



Şekil-2.5

Şekil-2.5'den de görüldüğü gibi $y=3x^2$ eğrisi x=0, x=10 doğruları ve x-ekseni ile sınırlı bölgenin alanı Δx=1 olacak şekilde gösterilmiştir. Δx=2 alarak istenilen alanı bulmak istediğimizde kullanacağımız değerler aşağıdaki tablo ile ifade edilebilir. Buna göre;

x*	1	3	5	7	9
f(x*)	3	27	75	147	243

$A \cong 3.(2)+27.(2)+75.(2)+147.(2)+243.(2)=990\text{br}^2$ olur. Δx=1 alınırsa;

x*	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{13}{2}$	$\frac{15}{2}$	$\frac{17}{2}$	$\frac{19}{2}$
f (x*)	$\frac{3}{4}$	$\frac{27}{4}$	$\frac{75}{4}$	$\frac{147}{4}$	$\frac{243}{4}$	$\frac{363}{4}$	$\frac{507}{4}$	$\frac{675}{4}$	$\frac{867}{4}$	$\frac{1083}{4}$

en son tablo kullanılarak istenilen alan;

$$A \cong \frac{3}{4}.(1)+\frac{27}{4}.(1)+\frac{75}{4}.(1)+\frac{147}{4}.(1)+\frac{243}{4}.(1)+\frac{363}{4}.(1)+\frac{507}{4}.(1)+\frac{675}{4}.(1)+\frac{867}{4}.(1)+\frac{1083}{4}.(1)$$

$A \cong 997{,}5 \;\; \text{br}^2$

olarak bulunur. Eğer dilim genişliğini benzer şekilde daraltırsak;

$$\Delta x=\frac{1}{2}\Rightarrow A=999{,}375 \;\; \text{br}^2$$

$$\Delta x=\frac{1}{4}\Rightarrow A=999{,}8438 \;\; \text{br}^2$$

$$\Delta x=\frac{1}{8}\Rightarrow A=999{,}9609 \;\; \text{br}^2$$

$$\Delta x=\frac{1}{16}\Rightarrow A=999{,}9902 \;\; \text{br}^2$$

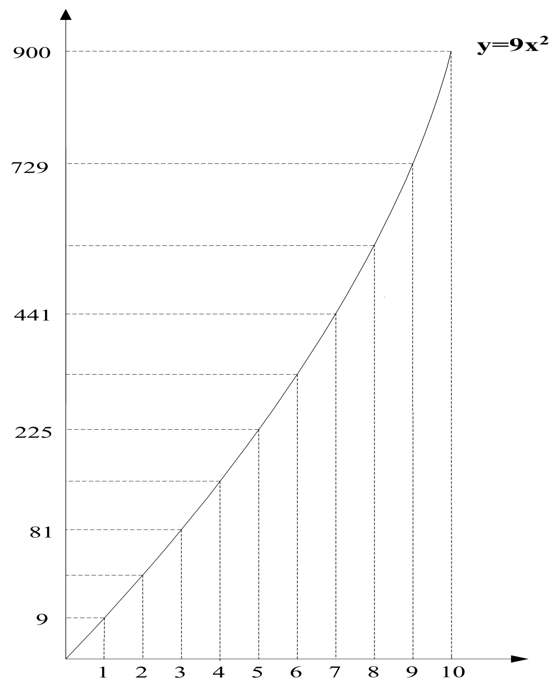
$$\Delta x=\frac{1}{32}\Rightarrow A=999{,}9968 \;\; \text{br}^2$$

$$\Delta x=\frac{1}{64}\Rightarrow A=999{,}9996 \;\; \text{br}^2$$

olarak bulunur. Bu hesaplamalardan da görüldüğü gibi Δx→0 iken A→1000 elde edilir.

Örnek.2.3: $f(x)=9x^2$ eğrisi x=0, x=10 doğruları ve x-ekseni ile sınırlı bölgenin alanını dilim genişliklerini 2, 1, ½, ¼, alarak orta nokta metoduyla bulunuz.

Çözüm.2.3:



Şekil.2.6

Yukarıdaki şekilden de görüldüğü gibi $y=9x^2$ eğrisi x=0, x=10 doğruları ve x-ekseni ile sınırlı bölgenin alanını $\Delta x=2$ alarak hesaplayalım. Buna göre;

x*	1	3	5	7	9
f (x*)	9	81	225	441	729

yukarıdaki tablodaki hesaplanan değerler kullanılarak istenilen alan yaklaşık olarak;

$A \cong 9.(2)+81.(2)+225.(2)+441.(2)+729.(2)=2970$ bulunur.

Δx dilim genişliğinin 1, ½, ¼ olması halinde benzer hesaplamalar;

Δx	2	1	0.5	0.25
Alan	2970	2992	2998	2999

şeklinde bir tabloda toplanacak olursa; $\Delta x \to 0$ olması halinde $A \to 3000$'e yaklaşır.

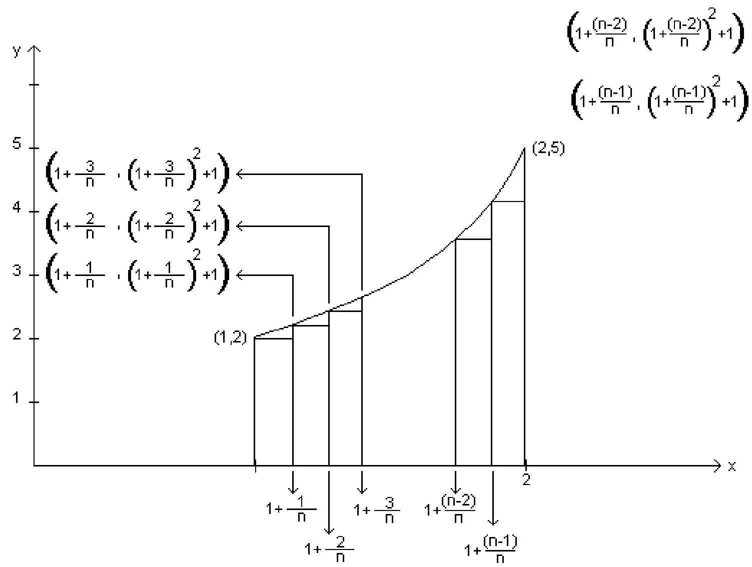
2.5. Bir Toplamın Limiti Olarak İntegral :

Şimdi de **y=f(x) eğrisi x=a, x=b doğruları ve x-ekseni** ile sınırlı bölgenin alanının Limit kuralı ile belirlenmesine ilişkin birkaç örnek çözelim. Bu örneklerde n dilim;

$\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ eşit genişliğine sahiptir.

Örnek.2.4:$f(x)=x^2+1$ eğrisi x=1, x=2 doğruları ve x-ekseni ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm.2.4: $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{2-1}{n} = \dfrac{1}{n}$ olarak alınırsa buna bağlı alana ait dilimler aşağıdaki şekildeki gibidir.(Şekil.2.7)



Şekil.2.7

Buna göre;

1. Dikdörtgenin Alanı $=\left(\dfrac{1}{n}\right).(2)$

2. Dikdörtgenin Alanı $=\left(\dfrac{1}{n}\right).\left[1+\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2\right]$

3. Dikdörtgenin Alanı $=\left(\dfrac{1}{n}\right).\left[1+\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^2\right]$

4.Dikdörtgenin Alanı $=\left(\frac{1}{n}\right).\left[1+\left(1+\frac{3}{n}\right)^2\right]$

………………………………….

(n-1).Dikdörtgenin Alanı = $\left(\frac{1}{n}\right).\left[1+\left(1+\frac{(n-2)}{n}\right)^2\right]$

n.Dikdörtgenin Alanı $=\left(\frac{1}{n}\right).\left[1+\left(1+\frac{(n-1)}{n}\right)^2\right]$

olarak bulunur ve bu n tane dikdörtgenin alanına A_n diyecek olursak;

$$A_n=\left(\frac{1}{n}\right).2+\left(\frac{1}{n}\right).\left[1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\right]+.........+\left(\frac{1}{n}\right).\left[\left(1+\left(\frac{n-2}{n}\right)\right)^2+1\right]+\left(\frac{1}{n}\right).\left[\left(1+\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)^2\right]$$

ve gerekli işlemler yapılarak;

$$A_n=\frac{1}{n}\left[2n+2.\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}\right)^2+2.\left(1+\frac{2}{n}\right)+\left(\frac{2}{n}\right)^2+............+2\left(1+2.\frac{(n-1)}{n}\right)+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right]$$

olarak elde edilir. Bu son parantezler açılarak;

$$A_n=\frac{1}{n}\left[2n+2.\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)+............+\left(1+\frac{n-1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+........+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right)\right]$$

ve gerekli işlemler yapılırsa;

$$A_n=\frac{1}{n}\left[2n+\frac{2}{n}\left(1+2+......+(n-1)\right)+\frac{1}{n^2}\left(1^2+2^2+.......+(n-1)^2\right)\right]$$

son halini alır. Burada kullanacağımız formüller

$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ve $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$ şeklindedir.

Bu son formülleri gerekli yerlerde kullanırsak;

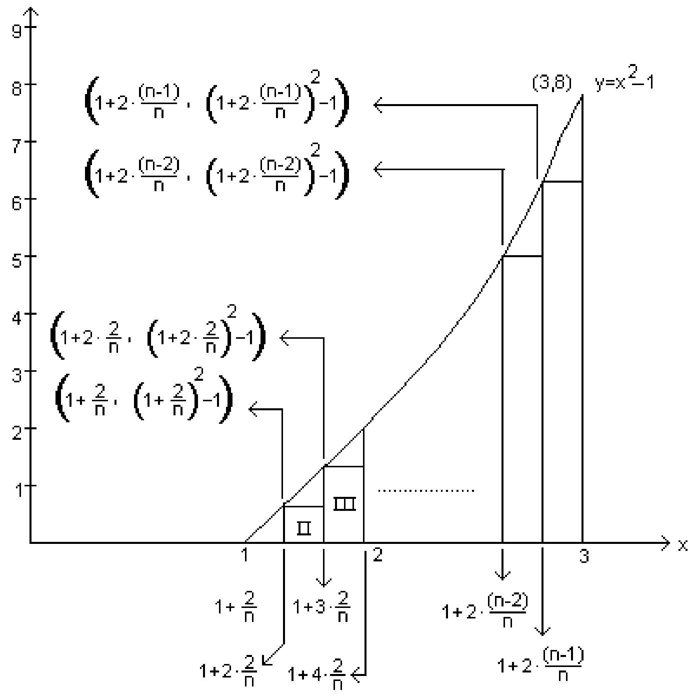
$$A_n=\frac{1}{n}.\left[2n+\frac{2}{n}.\frac{n(n-1)}{2}+\frac{1}{n^2}.\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right]=2+\frac{n-1}{n}+\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$$

denklem son halini alır.Buna göre, n tane dilimden oluşan A alanı bir toplamın Limiti olarak aşağıdaki gibi bulunabilir. Şöyle ki;

$A=\lim_{n\to\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{n-1}{n}+\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}\right)=2+1+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$ br^2 bulunur.

Örnek.2.5:$f(x)=x^2-1$ eğrisi x=1, x=3 doğruları ve x-ekseni ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm.2.5:İlk önce bu probleme ait şekli ve buna ait bazı hesaplamalar yapalım. (Şekil-2.8)



Şekil-2.8

$\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{3-1}{n} = \dfrac{2}{n}$ dilim genişliği olarak alındığında sırasıyla dikdörtgenlerin alanları aşağıdaki gibidir.

1. Dikdörtgenin Alanı $=\left(\dfrac{2}{n}\right).0$

2. Dikdörtgenin Alanı $=\left(\dfrac{2}{n}\right).\left[\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^2-1\right]$

3. Dikdörtgenin Alanı $=\left(\dfrac{2}{n}\right).\left[\left(1+2.\dfrac{2}{n}\right)^2-1\right]$

(n-1). Dikdörtgenin Alanı $=\left(\dfrac{2}{n}\right).\left[\left(1+(n-2).\dfrac{2}{n}\right)^2-1\right]$

n. Dikdörtgenin Alanı $=\left(\dfrac{2}{n}\right).\left[\left(1+(n-1).\dfrac{2}{n}\right)^2-1\right]$

n tane dikdörtgenin alanları toplamına A_n dersek;

$$A_n=\left(\frac{2}{n}\right).\left[\left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^2-1\right)+\left(\left(1+2.\frac{2}{n}\right)^2-1\right)+.........+\left(\left(1+(n-2).\frac{2}{n}\right)^2-1\right)+\left(\left(1+(n-1).\frac{2}{n}\right)^2-1\right)\right]$$

olarak elde edilir. Gerekli işlemler yapılacak olursa;

$$A_n=\frac{2}{n}\left[\frac{2}{n}.2(1+2+3+....+(n-1))+\left(\frac{2}{n}\right)^2.\left(1^2+2^2+..........+(n-1)^2\right)\right]$$

ve daha önceki problemdeki formüller ilgili yerlerde kullanılırsa;

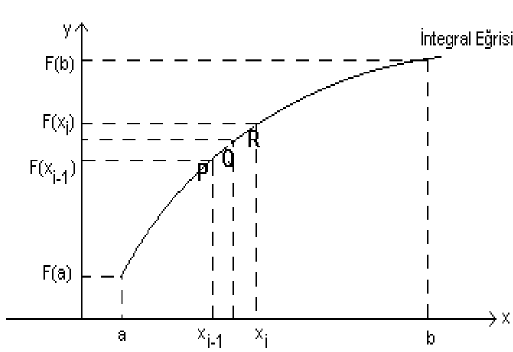
$A_n=\frac{2}{n}\left[\frac{4}{n}.\frac{n(n-1)}{2}+\left(\frac{2}{n}\right)^2.\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right]$ şekline gelir. Buna göre, istenilen A alanı n tane dikdörtgenin alanları toplamının bir limiti olarak;

$$A=\lim_{n\to\infty}An=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{4(n-1)}{n}+\left(\frac{2}{n}\right)^3.\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right]=\frac{20}{3}\ \text{br}^2\ \text{olur.}$$

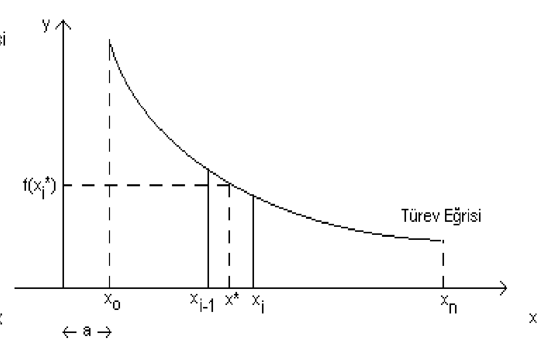
Belirli integral yardımı ile aynı değer; $A=\int_1^3(x^2-1)dx=\left(\frac{x^3}{3}-x\right]_1^3=\frac{20}{3}$ br^2 bulunur.

2.6. Analiz Hesabının Temel Teoremi :

Yukarıdaki örneklerden de görüldüğü gibi bir eğri altında kalan alanı bulmak için yüzlerce dikdörtgensel dilimlerin alanlarını bulup toplamak çok külfetli bir işlem olup bunun bir işlem ile olup olamayacağı sorusu akla gelebilir. İşte bu sorunun cevabını biz analiz hesabın temel teoremine götürecek bir çerçevede verebiliriz.Aşağıda Şekil-2.9 ve Şekil-2.10 ile verilen eğrileri göz önüne alalım. Bunlardan şekil-2.10 ile y=f(x) fonksiyonunun **türev** eğrisini temsil ederken, şekil-2.9 ile de tersine F(x) fonksiyonunun **integral** eğrisi ele alınmıştır.



Şekil-2.9



Şekil-2.10

Buna göre, şekil-2.10 ile verilen y=f(x) eğrisi şekil-2.9 ile verilen F(x) eğrisinin türevi iken,.F(x) eğrisi şekil-2.10 ile verilen f(x) eğrisinin integralidir.

Şekil-2.10 ile gösterilen türev eğrisinde orta nokta metodu için herhangi bir dilimin orta noktasında bir x_i^* seçelim. x_i^* noktasını da integral eğrisinin Q noktasının eğimi olacak şekilde seçelim ki bu PR doğrusunun eğimine eşit olsun.Q noktasındaki eğim $f(x_i^*)$ olup PR doğrusunun eğimi; $f\left(x_i^*\right) = \dfrac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{\Delta x}$ ve buradan;

$f\left(x_i^*\right)\Delta x = F(x_i) - F(x_{i-1})$ elde edilir. Her bir dilim için bu formülü yazacak olursak;

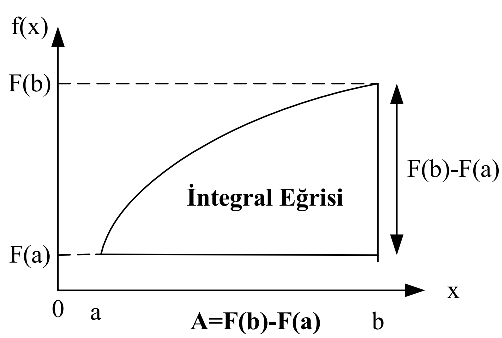
$$f(x_1^*).\Delta x = F(x_1) - F(a)$$
$$f(x_2^*).\Delta x = F(x_2) - F(x_1)$$
$$f(x_3^*).\Delta x = F(x_3) - F(x_2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f(x_n^*).\Delta x = F(b) - F(x_{n-1})$$

olur.Bu ifadeleri toplayacak olursak;

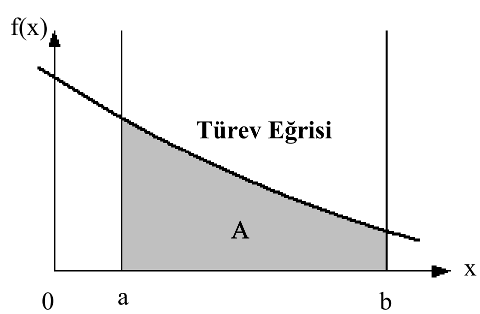
$f\left(x_1^*\right)\Delta x + f\left(x_2^*\right)\Delta x + f\left(x_3^*\right)\Delta x + \ldots\ldots\ldots\ldots + f\left(x_n^*\right)\Delta x = F(b) - F(a)$ ve toplam sembolüyle;

$\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\Delta x = F(b) - F(a)$ elde edilir. Buradan $\Delta x \rightarrow 0$ için;

$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\Delta x = F(b) - F(a)$ ifadesinin **sol tarafı eğri altında kalan A kesin alanını** verirken **sağ tarafı da a'dan b'ye kadar y=f(x) fonksiyonunun belirli integralini** verir. Bunu daha basit bir örnekle şekil olarak ifade edecek olursak, aşağıdaki şekil 2.11-a-b ile verilebilir.



Şekil-2.11-a



Şekil-2.11.-b

Şekilden de görüldüğü gibi türev eğrisi altındaki A alanı integral eğrisi altındaki F(b)-F(a) ordinatlar farkına eşittir.Böylece;

$$\int_a^b \mathbf{f(x)dx = F(b) - F(a)}$$ olarak elde edilir.

ALIŞTIRMALAR

1. $f(x) = x^2 + 2$ eğrisi x=0 , x=1 doğruları ve x-ekseni ile sınırlı bölgenin alanını limit yardımıyla bulunuz.

2. $f(x) = 3x^2$ eğrisi x=0 , x=6 doğruları x ekseni ile sınırlı bölgenin alanını dillim genişliğini ½, 1, 2 birim alarak orta nokta metodu ile yaklaşık hesaplayınız.

3. $f(x)=x^2-2$ eğrisi x=2 ,x=4 doğruları ve x-ekseni ile sınırlı bölgenin alanını limit yardımıyla bulunuz.

4. $f(x)=x^2-2x$ eğrisi x=0 , x=2 doğruları x ekseni ile sınırlı bölgenin alanını dillim genişliğini ½, 1, 2 birim alarak orta nokta metodu ile yaklaşık hesaplayınız.

5. $f(x)=x^2+2x$ eğrisi x=0 , x=2 doğruları x ekseni ile sınırlı bölgenin alanını dillim genişliğini ½, 1, 2 birim alarak orta nokta metodu ile yaklaşık hesaplayınız.

6. $f(x)=e^x$ eğrisi x=0 , x=3 doğruları x ekseni ile sınırlı bölgenin alanını dillim genişliğini ½, 1, 2 birim alarak orta nokta metodu ile yaklaşık hesaplayınız.

7. f(x)=Cosx eğrisi x=0 , x=Π/2 doğruları x ekseni ile sınırlı bölgenin alanını dillim genişliğini ½, 1, 2 birim alarak orta nokta metodu ile yaklaşık hesaplayınız.

8. f(x)=Sinx eğrisi x=0 , x=Π doğruları x ekseni ile sınırlı bölgenin alanını dillim genişliğini ½, 1, 2 birim alarak orta nokta metodu ile yaklaşık hesaplayınız.

BÖLÜM 3. İNTEGRAL TEKNİKLERİ

İntegral konusunun başında integral ile türev arasındaki ilişkiden bahsetmiş ve bundan hareketle bazı fonksiyonların integrallerini formüller ile sunmuştuk. Bundan başka, integre edilebilen fonksiyonların integralini almada daha önce verdiğimiz formüller yeterli olmayabilir. Bu durumlar için integre edilebilen fonksiyonların integralini almada bize yardımcı olacak temel teknikler ve başlıca fonksiyon çeşitlerine ait integraller bu bölümde incelenecektir.

3.1. Değişken Dönüşümü

Eğer bir fonksiyon ile o fonksiyonun türevini içeren bir integrale sahip olduğumuzda yani;

$\int_a^b \varphi(u).\varphi'(u)du$ şeklinde ise; $x=\varphi(u)$ değişken dönüşümü yapılarak;

$\int_a^b f(x)dx$ integrali elde edilir. Böylece, integralimiz daha önce kurallarını verdiğimiz integral formüllerine indirgenmiş olur. Bu tekniği bir kaç örnekle açıklayalım.

Örnek.3.1: $I=\int_0^2 3x^2\sqrt{x^3+1}.dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm.3.1: $x^3+1=u$ dersek $3x^2dx=du$ olur.Böylece I integralinde;
$x=0\Rightarrow u=1$ ve $x=2\Rightarrow u=9$ *u*' ya bağlı yeni integralin sınırları olmak üzere;

$$I=\int_1^9\sqrt{u}.du=\int_1^9 u^{1/2}.du=\left(\frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_1^9\right)=\frac{2}{3}\left(9^{3/2}-1^{3/2}\right)=\frac{52}{3}$$

olarak bulunur. Bu sonuç, integralin sınır değerleri değiştirilmeden yine *x*' e bağlı sınırlarda da bulunabilirdi. Yani, *x*' in sınırlarını *u* cinsinden ifade etmenin zor olduğu problemler için bu dönüşüm yapılmadan belirsiz integral gibi *u* cinsinden hesaplanır. Buna göre;

$$I=\int_1^9\sqrt{u}.du=\int u^{1/2}.du=\frac{2}{3}u^{3/2}=\frac{2}{3}\left[\left(x^3+1\right)^{3/2}\right]_0^2=\frac{52}{3}$$ aynı sonuç elde edilir.

Örnek 3.2: $I=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x dx}{\sin x+3}$ İntegralini hesaplayınız.

Çözüm 3.2:3+Sinx=u dersek Cosx.dx=du olur ve buna göre u'nun sınırları;

$x=0\Rightarrow u=3$ ve $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow u=4$ olur.

Böylece; $I = \int_3^4 \frac{du}{u} = \left(\ln|u|\right]_3^4 = \ln 4 - \ln 3 = \ln \frac{4}{3}$ veya;

$I = \int \frac{du}{u} = \ln|u| = \left(\ln|3 + \sin x|\right]_0^{\pi/2} = \left(\ln\left|3 + \sin \pi/2\right| - \ln|3 + \sin 0|\right) = \ln \frac{4}{3}$ olarak elde edilir.

Örnek 3.3: $I = \int e^{\sin x} \cos x dx$ İntegralini hesaplayınız.

Çözüm 3.3: Sinx=u dersek Cosx.dx=du olur ve buna göre;

$$I = \int e^u du = e^u + c = e^{\sin x} + c \text{ bulunur.}$$

Örnek 3.4: $I = \int \frac{\ln x}{x} dx$ İntegralini hesaplayınız.

Çözüm 3.4: $\ln x = u \Rightarrow \frac{dx}{x} = du$ olur. Bu değerleri I integralinde yerine yazılırsa;

$$I = \int u du = \frac{u^2}{2} + c = \frac{\ln^2 x}{2} + c \text{ olarak bulunur.}$$

ALIŞTIRMALAR

1) $\int 3x^2 e^{x^3-1} dx = ?$ $\qquad \left(e^{x^3-1} + c\right)$

2) $\int_0^{\pi} \sin x . e^{\cos x} dx = ?$ $\qquad \left(\frac{e^2 - 1}{e}\right)$

3) $\int \frac{2x^3 dx}{\sqrt[5]{x^4 + 2}} = ?$ $\qquad \left(\frac{5}{8}\sqrt[5]{\left(x^4 + 2\right)^4} + c\right)$

4) $\int \frac{\cos t dt}{e^{\sin t}} = ?$ $\qquad \left(-e^{-\sin t} + c\right)$

5) $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}} dt = ?$ $\qquad (e - 1)$

6) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{Arc}\tan x}{1 + x^2} dx = ?$ $\qquad \left(-\frac{5\pi^2}{36}\right)$

7) $\int \frac{Ln(Lnx)}{xLnx} dx = ?$ $\qquad \left(\frac{Ln^2(Lnx)}{2} + c\right)$

3.2.Kısmi İntegrasyon :*f* ve *g* [a,b] aralığında sürekli türevlere sahip iki fonksiyon olsun.

$d(f.g) = f.dg + g.df$ idi. Buradan;

$f.dg = d(f.g) - g.df$

ve bu son ifadenin her iki yanının integrali alınırsa;

$$\int f.dg = \int d(f.g) - \int g.df$$

olur. Bunun sonucu olarak;

$$\int f.dg = f.g - \int g.df$$

ifadesi bize kısmi integral formülünü verir. **a** ve **b** integralin alt ve üst sınırları olmak üzere belirli integral olarak aynı ifade;

$$\int f.dg = (f.g]_a^b - \int g.df$$

şeklini alır. Böylece iki fonksiyonun çarpımını içeren integraller için geliştirilen kısmi integral formülü;

$$\int_a^b f(x).g'(x)dx = (f(x).g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x).g(x)dx$$

olarak elde edilir.

Örnek 3.5: $I = \int \ln x dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm 3.5:

$$\left.\begin{aligned} u &= \ln x \\ dv &= dx \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} du &= \frac{dx}{x} \\ v &= x \end{aligned}$$ olarak bulunur. Böylece;

$\int u.dv = uv - \int v.du$ kısmi integral formülünde yukarıdaki değerler yerine yazılacak olursa;

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x.\frac{dx}{x}$$

ve gerekli işlemler yapılırsa;

$\int \ln x dx = x \ln x - x + c$ olur.

Örnek 3.6: $I = \int x^2.e^{3x}.dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm 3.6:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 = u \\ e^{3x}dx = dv \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 2x.dx = du \\ \frac{1}{3}e^{3x} = v \end{array}$$

buna göre bu dönüşümler; $\int u.dv = uv - \int v.du$

formülünde yerine yazılırsa;

$$I = \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{3}\int \underbrace{xe^{3x}.dx}_{I_1} \quad \text{olur.}$$

Şimdide; $I_1 = \int xe^{3x}dx$ integraline kısmi integrasyon uygulayalım.

$$\left.\begin{array}{l} x = u_1 \\ e^{3x}dx = dv_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} dx = du_1 \\ v_1 = \frac{1}{3}e^{3x} \end{array} \quad \text{dönüşümleri yapılsın. Böylece;}$$

$$I_1 = \int xe^{3x}dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + c \quad \text{olur.}$$

Hesaplanan değeri *I* integralinde yerine yazılırsa;

$$I = \int x^2e^{3x}dx = \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + c \quad \text{olarak elde edilir.}$$

Genel Kural: $\int x^n.e^{\alpha x}.dx$ şeklindeki integrallerde

$x^n = u$ ve $e^{\alpha x}.dx = dv$. dönüşümü yapılır.

Örnek 3.7: $I = \int e^{-2x}\cos 3x.dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm 3.7:

$$\left.\begin{array}{l} u = \cos 3x \\ dv = e^{-2x}dx \end{array}\right\} \begin{array}{l} du = \quad 3\sin 3x.dx \\ v = - -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{array}$$

olur. Buna göre; $I = \int e^{-2x}\cos 3x.dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}.\cos 3x + \frac{3}{2}\int e^{-2x}.\sin 3x.dx$

şekline gelir. Şimdide I_1 integralinde kısmi integral için tekrar dönüşüm uygulayalım.

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = \sin 3x \\ dv_1 = e^{-2x}dx \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} du_1 = 3\cos 3x.dx \\ v_1 = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{array}$$

olur.

Böylece; $I_1 = \int e^{-2x}\sin 3x dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}\sin 3x + \frac{3}{2}\int e^{-2x}\cos 3x.dx$

olarak hesaplanır ve bu I_1 değeri I integralinde yerine yazılırsa;

$$I = \int e^{-2x}\cos 3x dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}\cos 3x - -\frac{3}{4}e^{-2x}\sin 3x + \frac{9}{4}\int e^{-2x}\cos 3x dx$$

olarak bulunur.

Böylece I integrali;

$$I = --\frac{1}{2}e^{-2x}\cos 3x - -\frac{3}{4}e^{-2x}\sin 3x + \frac{9}{4}I$$

şeklini alır. Sonuç olarak;

$$\frac{-5}{4}I = --\frac{1}{2}e^{-2x}\cos 3x - \frac{3}{4}e^{-2x}\sin 3x + c$$

veya;

$$I = \int e^{-2x}\cos 3x dx = \frac{2}{5}e^{-2x}\cos 3x + \frac{3}{5}e^{-2x}\sin 3x + c$$ olarak bulunur.

Genel Kural:

$\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx$ şeklindeki integrallerde;

$\cos\beta x = u$ dönüşümü yapılır.

$\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx$ şeklindeki integrallerde;

$\sin\beta x = u$ dönüşümü yapılır.

Örnek 3.8: $I = \int x^2 \ln x.dx = ?$

Çözüm 3.8: $\int \ln x.f(x).dx$

tipi integrallerde $lnx=u$ dönüşümü yapılır. Buna göre;

$$\left.\begin{array}{r}\ln x = u\\ x^2dx = dv\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\frac{dx}{x} = du\\ \frac{1}{3}x^3 = v\end{array}$$ olur

Bu değerleri kısmi integral formülünde yerine yazarsak;

$$I = \int x^2 \ln x.dx = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{3}\int x^3.\frac{dx}{x}$$

olarak bulunur. Sonuç olarak;

$$I = \int x^2 \ln x.dx = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 + c$$ bulunur.

Örnek 3.9: $I = \int x^n \ln^m x.dx = ?$

Çözüm 3.9:

$$\left.\begin{array}{l} u = (\ln x)^m \\ dv = x^n.dx \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} du = m(\ln x)^{m-1}\dfrac{1}{x}.dx \\ v = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} \end{array}$$

Bu değerler *I* integralinde kısmi integral formülüne göre yazılırsa;

$$I = \int x^n \ln^m x.dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln^m x - \int \frac{m}{n+1}x^n(\ln x)^{m-1}.dx$$

olur. Kısmi integrasyon tekniği (n) defa uygulanarak istenen çözüme ulaşılır.

Örnek 3.10: $I = \int 2xArc\tan x.dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm 3.10:

$$\left.\begin{array}{l} u = Arc\tan x \\ dv = 2x.dx \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ v = x^2 \end{array}$$

Buna göre;

$$I = \int 2xArc\tan x.dx = x^2 Arc\tan x - \int \frac{x^2 dx}{1+x^2} \quad \text{olur.}$$

Şimdi de; $I^* = \int \frac{x^2 dx}{1+x^2}$ İntegralini hesaplayalım;

$$I^{\bullet} = \int \frac{x^2.dx}{1+x^2} = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}.dx = \int \frac{1+x^2}{1+x^2}.dx - \int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$I^* = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = x - Arctan x + c$$

I^* integralini *I* integraline yazacak olursak;

$$I = \int 2xArctan x.dx = x^2 Arctan x - x + Arctan x + c \quad \text{olarak bulunur.}$$

Örnek 3.11: $I = \int \sec^3 x.dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm 3.11: $I = \int \sec^3 x.dx = \int \sec^2 x \sec x.dx$

şeklinde yazalım. Buradan kısmi integral formülü uygulayalım;

$$\left.\begin{array}{l} u = \sec x \\ dv = \sec^2 x.dx \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} du = \sec x \tan x.dx \\ v = \tan x \end{array}$$

Böylece integral ;

$$I = \int \sec^3 x.dx = \sec x.\tan x - \int \sec x.\tan x.dx$$ şeklini alır.

$1+\tan^2 x = \sec^2 x \Rightarrow \tan^2 x = \sec^2 x - 1$ özdeşliği en son ifade de yerine yazılırsa;

$$I = \int \sec^3 x.dx = \sec x.\tan x - \int \sec x(\sec^2 x - 1).dx$$

$$I = \int \sec^3 x.dx = \sec x.\tan x - \int \sec^3 x.dx + \int \sec x.dx$$

$I = \sec x.\tan x - I + \int \sec x.dx$ ve buradan;

$2I = \sec x.\tan x + \int \sec x.dx$ olur.

Böylece;

$I_2 = \int \sec x.dx$ olarak elde edilir.Şimdide;

$2\int \sec^3 x.dx = \sec x.\tan x + \int \sec x.dx$ integraline kısmi integral uygulayalım.

$u = \sec x + \tan x$ alalım.Buna göre;

$du = (\sec x.\tan x + \sec^2 x).dx$ olarak bulunur . Böylece

$$I_2 = \int \sec x.dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln|\sec x + \tan x| + c$$

olur. Bu son integral *I* integralinde yerine yazılırsa;

$I = \int \sec^3 x.dx = \frac{1}{2}(\sec x.\tan x + \ln|\sec x + \tan x|) + c$ sonucuna ulaşılır.

Kısmi İntegrasyon İle İlgili Problemler :

1. $\int x \sin x.dx = \sin x - x\cos x + c$

2. $\int x\sqrt{1-x}.dx = -\frac{2}{15}(2+3x)(1-x)^{3/2} + c$

3. $\int x\sec^2 x.dx = x\tan x + \ln|\cos x| + c$

4. $\int_0^2 x.\sin\frac{x}{2}.dx = 1,20$

5. $\int x\cos x.dx = x\sin x + \cos x + c$

6. $\int x^2 \ln x.dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + c$

7. $\int x\sin^2 3x.dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{12}\sin 6x - \frac{1}{72}\cos 6x + c$

8. $\int \cos^3 x.dx = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + c$

9. $\int_1^3 \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}.dx = 1,24$

10. $\int \frac{x^3.dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}\left(2-5x^2\right) + c$

11. $\int \frac{\ln(x+1)}{(x+1)}.dx = -\frac{1}{x+1}\left(\ln|x+1| + 1\right) + c$

12. $\int x^3 \ln .dx = \frac{x^4}{4}\left(\ln x - \frac{1}{4}\right) + c$

13. $\int_0^4 xe^{2x}.dx = 5217$

14. $\int x\tan^2 x.dx = x\tan x - \frac{x^2}{2} + \ln|\cos x| + c$

15. $\int x^3\sqrt{1-x^2}.dx = -\frac{x^2}{3}\left(1-x^2\right)^{3/2} - \frac{2}{15}\left(1-x^2\right)^{5/2} + c$

16. $\int \frac{x^2.dx}{\left(1-x^2\right)^2} = \frac{1}{2}Arc\tan x - \frac{x}{2\left(1+x^2\right)} + c$

17. $\int \frac{x^2.dx}{\left(1-x^2\right)^{3/2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - Arc\tan x + c$

18. $\int_{-2}^{2} \frac{xe^x}{(1+x)^2} = 2{,}60$

19. $\int x^2 e^{-x}.dx = -x^2 e^x - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + c$

20. $\int x^2 e^{2x}.dx = \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + c$

21. $\int x^2 e^{-x}.dx = -x^2 e^x - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + c$

22. $\int x^2 e^x.dx = e^x\left(x^2 - 2x + 2\right) + c$

23. $\int e^x \sin x.dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + c$

24. $\int x^2 \cos x.dx = 2x\cos x + \left(x^2 - 2\right)\sin x + c$

25. $\int_{1}^{3} e^{-x} \sin 4x.dx = -0{,}081$

26. $\int e^x \cos x.dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + c$

27. $\int e^{-x} \cos \pi x.dx = \frac{e^{-x}}{\pi^2 + 1}(\pi \sin \pi x + \cos \pi x) + c$

3.3. Rasyonel Fonksiyonların İntegrali :

$P: IR \to IR$ ve $Q: IR \to IR$ iki polinom fonksiyon ayrıca;

$d(P(x)) = m$ ve $d(Q(x)) = n$ olsun. Bu durumda;

$R: IR - \{Q(x) = 0\} \to IR$ şeklinde tanımlanan bir polinom iken;

$R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ rasyonel fonksiyonun integralini göz önüne alalım. Eğer **m≥n** ise pay paydaya polinom bölmesiyle bölünerek;

$R = \dfrac{P}{Q} = K + \dfrac{P_1}{Q}$ olarak elde edilir. Burada, **K**, **(n-m).** dereceden polinom fonksiyon iken **P_1** ise **m.** dereceden küçük bir polinom fonksiyondur. Bu nedenle;

$\dfrac{P_1}{Q}$ kesrine **Has Kesir** denir.Buna göre;

$$\int R(x).dx = \int \frac{P(x)}{Q(x)}.dx = \int \left[K(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}.dx \right] = \int K(x).dx + \int \frac{P_1(x)}{Q(x)}.dx$$

şekline gelir. Böylece, **R** rasyonel fonksiyonunun integrali **K** polinom fonksiyonunun integrali ile **R_1** has kesrinin integrali toplamına indirgenmiş olur.

Örnek 3.12: $I = \int \dfrac{x^2.dx}{x^3 - 2}$ İntegralini hesaplayalım.

Çözüm 3.12: $\dfrac{x^2}{x^3 - 2}$ kesri bir has kesirdir.

Çünkü payın derecesi paydadan küçüktür. Şimdi bu integrali çözelim.

$x^3 - 2 = u \Rightarrow 3x^2.dx = du$ olur. Buna göre;

$I = \int \dfrac{x^2.dx}{x^3 - 2} = \dfrac{1}{3} \int \dfrac{du}{u} = \dfrac{1}{3} \ln |u| + c = \dfrac{1}{3} \ln \left| x^3 - 2 \right| + c$ olarak bulunur.

Örnek 3.13: $I = \int \dfrac{3x^3 - 5}{x^2 - 1}.dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm 3.13: $\dfrac{3x^3 - 5}{x^2 - 1}$ kesrinde payın derecesi paydadan büyüktür. O halde, pay paydaya polinom bölmesiyle bölünerek aşağıdaki şekle indirgenmiş olur.

$$\frac{3x^3 - 5}{x^2 - 1} = 3x + \frac{3x - 5}{x^2 - 1}$$

Bu son ifadenin integralini alırsak;

$$I = \int \frac{3x^3 - 5}{x^2 - 1}.dx = \int 3x.dx + \int \frac{3x - 5}{x^2 - 1}.dx$$

$$I = \int 3x.dx + \int \frac{3x.dx}{x^2 - 1}.dx - 5\int \frac{dx}{x^2 - 1}$$

$$I = \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}\ln\left|x^2 - 1\right| - \frac{5}{2}\ln\left|x - 1\right| + \frac{5}{2}\ln\left|x + 1\right| + c \text{ olarak elde edilir.}$$

3.3.1. I.Tip Basit Kesirler :

$A_1, A_2 \in IR \quad x \neq \alpha$ olmak üzere;

$$\frac{A_1}{(x - \alpha)} \quad \text{ve} \quad \frac{A_2}{(x-\alpha)^n} \qquad (n \geq 2, n \in IN)$$

şeklindeki kesirlere **1. Tip basit kesirler** denir. Buna göre;

$$I_1 = \int \frac{A_1}{x - \alpha}.dx = A_1 \int \frac{dx}{x - \alpha}$$

$$\left.\begin{array}{l} x - \alpha = u \\ dx = du \end{array}\right\} I = A_1 \int \frac{du}{u} = A_1 \ln|u| + c = A_1 \ln|x - \alpha| + c$$

olarak bulunur. Şimdi de;

$$I_2 = \int \frac{A_2}{(x - \alpha)^n}.dx$$

integralini hesaplayalım.

$x - \alpha = u$ dersek $dx = du$ olur.

$$I_2 = \int \frac{A_2}{(x-\alpha)^n}.dx = A_2 \int \frac{du}{u^n} = A_2 \int u^{-n}.du = A_2 \frac{u^{-n+1}}{-n+1} + c$$

$$I_2 = A_2 \frac{(x-\alpha)^{-n+1}}{-n+1} + c = \left(\frac{A_2}{1-n}\right)\left(\frac{1}{(x-\alpha)^{n-1}}\right) + c \text{ elde edilir.}$$

Örnek 3.14: $I = \int \frac{2.dx}{(x-3)^3}$ integralini hesaplayalım.

Çözüm 3.14: $x - 3 = u$ dersek $dx = du$ olur.Buna göre;

$$I = 2\int \frac{du}{u^3} = 2\int u^{-3}.du = 2\frac{u^{-2}}{-2} + c = -\frac{1}{u^2} + c = -\frac{1}{(x-3)^2} + c \quad \text{olarak bulunur.}$$

3.3.2.II. Tip Basit Kesirler: $A_1, A_2, B_1, B_2 \in IR$ ve $p^2 - 4q < 0$ olmak üzere;

$$\frac{A_1 x + B_1}{x^2 + px + q} \text{ ve } \frac{A_2 x + B_2}{\left(x^2 + px + q\right)^n} \ (n \geq 2, n \in IN)$$

şeklindeki kesirlere **2. Tip Basit Kesirler** denir.

$$I_3 = \int \frac{dx}{x^2 + px + q}$$

integralini göz önüne alalım. Kareye tamamlama metodu kullanılarak;

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q - p^2}{4}$$

şeklinde yazılırsa I_3 integrali;

$$I_3 = \int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q - p^2}{4}}$$

şekline gelir. Buradan;

$x + \frac{p}{2} = u$ ve $\frac{\sqrt{4q - p^2}}{2} = a$ diyecek olursak;

$I_3 = \int \frac{du}{u^2 + a^2}$ olur ve $I_3 = \frac{1}{a} \operatorname{Arc}\tan \frac{u}{a} + c$ elde edilir. Böylece;

$I_3 = \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{Arc}\tan \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + c$ olarak bulunur.

NOT: Eğer integralimiz b^2**-4ac<0** ve **a≠0** olmak üzere;

$I = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$ şeklinde ise kareye tamamlama metodu yardımıyla;

$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$ ifadesinde $\frac{b}{a} = p$ ve $\frac{c}{a} = q$ alınarak

$p^2 - 4q = \frac{b^2}{a^2} - 4\frac{c}{a} = \frac{1}{a^2}\left(b^2 - 4ac\right) < 0$ olur ve buradan;

$I = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$ integrali I_3 integraline dönüşmüş olur.

Örnek 3.15:

$$I = \int \frac{dx}{x^2 + 6x + 14} = ?$$

Çözüm 3.15: *p=6, q=14* olduğuna göre p^2*-4q=-20<0* olup kareye tamamlama metodundan;

$$x^2 + 6x + 14 = (x+3)^2 + 5$$

olur. Böylece u=x+3, du=dx olarak alınırsa;

$$I = \int \frac{dx}{(x+3)^2 + 5} = \int \frac{du}{u^2+5} = \frac{1}{\sqrt{5}} \mathrm{Arc}\tan \frac{u}{\sqrt{5}} + c$$

elde edilir ve bu son ifade de **u** değeri yerine yazılırsa;

$I = \frac{1}{\sqrt{5}} \mathrm{Arc}\tan \frac{x+3}{\sqrt{5}} + c$ olarak bulunur. Şimdi de ;

$$I_4 = \int \frac{A_1 x + B_1}{x^2 + px + q} dx \quad (p^2 - 4q < 0) \quad (A_1 \neq 0)$$

integralini hesap edelim. **I**4 integralinde pay kısmını paydanın türevini içerecek şekilde oluşturalım. Buna göre;

$$I_4 = \int \frac{A_1 x + B_1}{x^2 + px + q} dx = \int \frac{\frac{A_1}{2}(2.x + p) + \left(B_1 - \frac{A_1 p}{2}\right)}{x^2 + px + q} dx$$

şeklinde yazarsak **I**4 integrali;

$I_4 = \frac{A_1}{2} \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + \left(B_1 - \frac{A_1 p}{2}\right) \int \frac{dx}{x^2+px+q}$ şeklinde iki integralin toplamı haline gelir. Şimdide bu integralleri ayrı ayrı hesaplayalım.u=x^2+px+q dersek (2x+p)dx=du olur ve böylece;

$\int \frac{2x+p}{x^2+px+q} .dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln|x^2+px+q| + c$ bulunur. Ayrıca;

$\int \frac{dx}{x^2+px+q}$ integralini daha önce hesaplamıştık. Bu değerler **I**4 integralinde yerine yazılırsa;

$$I_4 = \frac{A_1}{2} \ln|x^2 + px + q| + \left(B_1 - \frac{A_1 p}{2}\right).I_3 \text{ veya;}$$

$$I_4 = \frac{A_1}{2} \ln|x^2 + px + q| + \left(B_1 - \frac{A_1 p}{2}\right).\left[\left(\frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \mathrm{Arctan} \frac{2x + p}{\sqrt{4a - p^2}}\right) + c\right]$$

olarak elde edilir.

Örnek 3.16: $I = \int \frac{3x+2}{x^2+4x+5}.dx$ İntegralini hesaplayalım.

Çözüm 3.16: $x^2+4x+5=(x+2)^2+1$ alalım. Buna göre;

$$I = \int \frac{3x+2}{x^2+4x+5}.dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5} - 4\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$$

olur. Şimdi bu son iki integrali ayrı ayrı hesaplayalım.

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1}$$ olarak yazılır ve;

$x+2=u \Rightarrow dx = du$ dönüşümü yapılırsa;

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{du}{u^2+1} = \mathrm{Arctan}u + c = \mathrm{Arctan}(x+2)+c$$

olarak bulunur. Ayrıca, $x^2+4x+5=u$ dersek; $(2x+4)dx=du$ olur.

Bu değerler ; $\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}dx$ integralinde yerine yazılacak olursa;

$$\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln\left|x^2+4x+5\right| + c$$

elde edilir. Böylece istenilen integral hesaplanan iki integralin yerine yazılmasıyla;

$$I = \int \frac{3x+2}{x^2+4x+5}dx = \frac{3}{2}\ln\left|x^2+4x+5\right| - 4\mathrm{Arc\,tan}(x+2)+c$$

olarak bulunur. Bundan başka; $p^2-4q<0 \Rightarrow n \geq 2$ ve $n \in IN$ olmak üzere;

$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$ integralini hesaplayalım.(n≥1) olmak üzere;

$I = \int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q-p^2}{4}\right]^n}$ olur. Burada;

$x+\frac{p}{2} = u \Rightarrow dx = du$ dönüşümü yapılır ve; $\frac{\sqrt{4q-p^2}}{4} = a$ denilirse;

$I_n = \int \frac{du}{(u^2+a^2)^n}$ $(a>0)$ şeklini alır. Şimdi bu son integralin yerine;

$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ integralini ele alalım.

Bu integrali hesaplamak için kısmi integral uygulayalım. Bunun için;

$$u = \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^n} \Rightarrow du = -\frac{2nx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}dx$$

ve dv=dx diyelim. Buradan, v=x elde edilir. Buna göre;

$$I_n = \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n} + 2n\int \frac{x^2}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}dx \text{ olur.}$$

Böylece;

$$I_n = \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n} + 2n\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n} - 2na^2\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}$$

elde edilir. Buradan;

$$I_n = \int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n} \quad \text{ve} \quad I_{n+1} = \int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}$$

diyecek olursak;

$$I_n = \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n} + 2n.I_n - 2na^2.I_{n+1} \qquad (n \geq 1)$$

bulunur. Bu son ifadede gerekli düzeltmeler yapılıp I_{n+1} yalnız bırakılırsa;

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}.\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}I_n \qquad (n \geq 1)$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak;

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)a^2}.\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2}I_{n-1} \qquad (n \geq 2)$$

şeklinde yazılarak boştaki integralimizi indirgeme yöntemiyle çözüme ulaştıran **Rekürans (İndirgeme)** formülü elde edilmiş olur.

Örnek 3.17: $I = \int \frac{dx}{\left(x^2+2x+5\right)^3} = ?$

Çözüm 3.17: p^2-4q=-16<0 ve $x^2+2x+5=(x+1)^2+4$ olarak alınırsa;

$$I = \int \frac{dx}{\left(x^2+2x+5\right)^3} = \int \frac{dx}{\left[(x+1)^2+4\right]^3} \text{ olur.}$$

Burada; x+1=u dersek du=dx elde edilir ve bu yukarıda yerine yazılırsa;

$$I = \int \frac{dx}{\left(x^2+2x+5\right)^3} = \int \frac{du}{\left[u^2+4\right]^3}$$

ve buna indirgeme formülü uygulanırsa; n=3, a=2 olmak üzere;

$$I=\frac{1}{2.2.4}\times\frac{u}{\left(u^2+4\right)^2}+\frac{3}{2.2.4}\times I_1 \text{ veya;}$$

$$I=\frac{u}{16(u^2+4)^2}+\frac{3}{16}\int\frac{u}{16(u^2+4)^2}$$

bulunur. I_1 integraline tekrar indirgeme formülü uygulanırsa;

$$I=\frac{u}{16(u^2+4)^2}+\frac{3}{16}\left(\frac{1}{2.1.4}\times\frac{u}{\left(u^2+4\right)}+\frac{1}{2.1.4}I_2\right)$$

$$I=\frac{u}{16(u^2+4)^2}+\frac{3u}{128\left(u^2+4\right)}+\frac{3}{128}\int\frac{du}{u^2+4}$$

$$I=\frac{u}{16(u^2+4)^2}+\frac{3u}{128\left(u^2+4\right)}+\frac{3}{128}\times\frac{1}{2}\text{Arctan}\frac{u}{2}+c$$

ve son olarak *u=x+1* değeri yerine yazılırsa;

$$I=\int\frac{dx}{\left(x^2+2x+5\right)^3}=\frac{x+1}{16(x^2+2x+5)^2}+\frac{3(x+1)}{128\left(x^2+2x+5\right)}+\frac{3}{256}\text{Arctan}\frac{(x+1)}{2}+c$$

olarak elde edilir.

Rasyonel Kesirlere Ait Cevaplı Alıştırmalar

1. $\int\frac{\left(4x-2\right).dx}{x^3-x^2-2x}$ $\left(\ln\left|\frac{x\left(x-2\right)}{\left(x+1\right)^2}\right|+c\right)$

2. $\int_2^3\frac{\left(3x-1\right).dx}{x^3-x}$ $\left(0{,}5232\right)$

3. $\int_1^3\frac{\left(2-x^2\right)dx}{x^3+3x^2+2x}$ $\left(-0{,}1054\right)$

4. $\int\frac{x^2.dx}{x^2-4x+5}$ $\left(x+2\ln\left|x^2-4x\right|+3Arc\tan\left(x-2\right)+c\right)$

5. $\int\frac{x+1}{x^3+4x^2-3x}.dx$ $\left(\ln\left|\frac{\left(x-2\right)^{1/2}}{x^{1/3}\left(x+3\right)^{1/6}}\right|+c\right)$

6. $\int_2^4\frac{\left(x^3-2\right).dx}{x^3-x^2}$ $\left(2{,}788\right)$

7. $\int_{0}^{1}\frac{(x-5).dx}{(x-3)^2}$ $(-0{,}739)$

8. $\int_{2}^{3}\frac{x^2.dx}{(x-1)^3}$ $(2{,}068)$

9. $\int\frac{(2x-5)}{(x-2)^3}.dx$ $\left(\frac{9-4x}{2(x-2)^2}+c\right)$

10. $\int\frac{dx}{x^3+x^2}$ $\left(-\frac{1}{x}+\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|+c\right)$

11. $\int_{0}^{2}\frac{x-2}{(x+1)^3}.dx$ $\left(-\frac{2}{3}\right)$

12. $\int_{1}^{2}\frac{dx}{x^4+x^2}$ $(0{,}1784)$

13. $\int_{0}^{1}\frac{(x^2-3)dx}{(x+2)(x^2+1)}$ $(-0{,}8982)$

14. $\int_{1}^{2}\frac{(x^2+6)dx}{x^3+3x}$ $(1{,}946)$

15. $\int_{1}^{4}\frac{(5x^2+4)dx}{x^3+4x}$ $(4{,}159)$

16. $\int\frac{x^2dx}{1-x^4}$ $\left(\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-\frac{1}{2}\mathrm{Arctan}x+c\right)$

17. $\int_{1}^{2}\frac{(x-3)dx}{x^3+x^2}$ $(-0{,}349)$

18. $\int_{0}^{1}\frac{5x.dx}{(x+2)(x^2+1)}$ $(0{,}667)$

19. $\int_{3}^{4}\frac{(5x^2-4x).dx}{x^2+16}$ $(0{,}3635)$

20. $\int\frac{x^5.dx}{(x^2+4)^2}$ $\left(\frac{x^2}{2}-4\ln\left|x^{2+4}\right|-\frac{8}{x^2+4}+c\right)$

Rasyonel Kesirlere Ait Cevapsız Alıştırmalar

1. $\int \frac{x^2}{x^3-2}dx$

2. $\int \frac{3x^3-5}{x^2-1}dx$

3. $\int \frac{dx}{(x-5)^3}$

4. $\int \frac{dx}{x^2+6x+14}$

5. $\int \frac{dx}{3(x^2+2x+5)}$

6. $\int \frac{3x^2+2x+2}{x^3(x-1)^2}dx$

7. $\int \frac{x^2-2x+2}{(x^2+4)^2}dx$

8. $\int \frac{4dx}{x^2+3x-14}$

9 $\int \frac{2x+7}{x^2+3x-1}dx$

10. $\int_3^6 \frac{dx}{(x^2-6x+5)^{3/2}}$

11. $\int \frac{dx}{x^3-1}$

12. $\int \frac{2x-2}{(2x^2+4x+9)^{3/2}}dx$

13. $\int \frac{x.dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$

3.4. TRİGONOMETRİK İNTEGRALLER

Bu başlık altında trigonometrik fonksiyonları içeren değişik tipteki fonksiyonların integrali ile trigonometrik dönüşümler yardımıyla integre edilebilen fonksiyonların integralleri tiplerine göre ayrı ayrı incelenecektir.

3.4.1. $I_1=\int R(\sin x).\cos x.dx$ şeklindeki integraller

Bu tip integallerde **u=sinx** dönüşümü yapılırsa **du=cosx.dx** olur ve böylece integralimiz;

$$I_1=\int R(u).du$$

şeklinde **u** değişkenine bağlı bir rasyonel integrale dönüşür. Bu integral yazılarak ve **u=sinx** değeri integralde tekrar yerine konarak çözüme gidilir. Bunu basit bir örnekle açıklayalım.

Örnek 3.18: $I=\int \frac{5\cos 2x dx}{3+\sin 2x}$ integralini hesaplayalım.

Çözüm 3.18: 3+sin2x=u dersek **2cos2xdx=du** olur.Bu değerleri yerine yazarsak;

$$I=\int \frac{5\cos 2x dx}{3+\sin 2x}=\frac{5}{2}\int \frac{du}{u}=\frac{5}{2}Ln|u|+c=\frac{5}{2}Ln|3+\sin 2x|+c$$ olarak bulunur.

3.4.2. $I_2=\int R(\cos x).\sin x.dx$ şeklindeki integraller

Bu tip integrallerde ise **cosx=u** dönüşümü yapılır. Buna göre; **–sinx.dx=du** olur ve bu değerler I_2 integralinde yerine yazılarak ;

$$I_2=-\int R(u).du$$

şeklinde **u** değişkenine bağlı bir rasyonel integrale dönüştürülür. Sonuçta; **u=cosx** değeri yerine yazılarak istenen çözüme ulaşılır.

Örnek 3.19: $I=\int \frac{3\sin 2x dx}{1-\sin^2 x}$ integralini hesaplayalım.

Çözüm 3.19 : sin2x=2sinx.cosx ve **cosx=u** dönüşümü yapılırsa; **–sinxdx=du** olur.

Buna göre;

$$I = \int \frac{3\sin 2x dx}{1-\sin^2 x} = \int \frac{6\sin x \cos x}{1-\sin^2 x} dx \ ;$$

şeklini alır. Burada **$1-\sin^2 x=\cos^2 x=u^2$** olup integralimiz;

$I = -\int \frac{6udu}{u^2} = -6\int \frac{du}{u} = -6\ln|u| + c = -6\ln|\cos x| + c$ olarak hesaplanır.

3.4.3. $I_3 = \int R(\tan x).dx$ şeklindeki integraller

Bu tip integrallerde **u=tanx** dönüşümü yapılır. **x=Arctanu** ve **$dx=du/(1+u^2)$** olur.

Buna göre, I_3 integrali;

$$I_3=\int R(u)du/(1+u^2)$$

şekline gelir. Bunu bir örnekle açıklayalım.

Örnek 3.20: $I=\int \tan^3 x \, dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm 3.20: tanx=u dersek **$dx = du/(1+u^2)$** olur. Bu değerler yukarıdaki integralde yerine yazılırsa;

$$I = \int \frac{u^3 du}{1+u^2} = \int \left(u - \frac{u}{1+u^2} \right) du = \int u du - \int \frac{u du}{1+u^2}$$

şeklinde iki fonksiyonun integraline dönüşür. Şimdi; **$\int(udu/(1+u^2))$** integralini ayrıca hesap edelim. Burada; **$1+u^2 = t$** dersek **2u.du = dt** ve **udu = (1/2).dt = dt/2** olur. Buna göre;

$\int \frac{udu}{1+u^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + c = \frac{1}{2}\ln|1+u^2| + c$ bulunur.Böylece I integralimiz;

$$I = \int u du - \int \frac{u du}{1+u^2} = \frac{u^2}{2} - \frac{1}{2}\ln|1+u^2| + c$$

şekline gelir. Bu son ifadede, **u = tanx** değeri yerine yazılarak;

$I=\int \tan^3 x dx = (1/2)\tan^2 x - (1/2)\,\mathrm{Ln}|1+\tan^2 x| + c$ olarak bulunur.

3.4.4. $I_4 = \int \text{Sinax. Sinbx. dx}$ (a,b $\in$ IR) şeklindeki integraller

Bu tip integrallerde **a** ve **b** sayılarının durumuna göre iki tip integral söz konusudur.

i) a=b olması hali:

$$\mathbf{I_4=\int \sin^2 ax\, dx = \int (1/2)(1-\cos 2ax)dx}$$

$$\mathbf{= (1/2)\int dx - (1/2)\int \cos 2axdx =(1/2)x - (1/4a)\sin 2ax + c}$$

ii) a≠b olması hali: Bu durumda aşağıdaki trigonometrik özdeşlikten yararlanırız.

sinax.sinbx=(1/2)[cos(a-b)x – cos(a+b)x] idi . Buna göre;

$$I_4 = \int \sin ax.\sin bxdx = \frac{1}{2}\int [\cos(a-b)x - \cos(a+b)x]dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \cos(a-b)xdx - \frac{1}{2}\int \cos(a+b)xdx$$
$$= \frac{1}{2(a-b)}\sin(a-b)x - \frac{1}{2(a+b)}\sin(a+b)x + c$$

olarak bulunur. Şimdi bu iki hal için birer örnek yapalım.

Örnek 3.21: $I = \int \sin^2 5xdx$ integralini bulalım.

Çözüm 3.21: $\sin^2 5x=(1/2)(1-\cos 10x)$ olduğuna göre ;

$$I=\int \sin^2 5xdx=\int (1/2)(1-\cos 10x)\, dx = (1/2)\int dx - (1/2)\int \cos 10xdx$$

$$=(1/2)x - (1/20)\sin 10x + c$$ olarak elde edilir.

Örnek 3.22: $I=\int \sin 5x.\sin 4x\, dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm 3.22: $\sin 5x.\sin 4x=(1/2)[\cos(5-4)x-\cos(5+4)x]$ ifadesi I integralinde yerine yazılırsa;

$$I=\int \sin 5x.\sin 4xdx=\int (1/2)[\cos(5-4)x - \cos(5+4)x]dx$$

$$=(1/2)\int \cos x - (1/2)\int \cos 9xdx=(1/2)\sin x - (1/18)\sin 9x + c$$ olur.

3.4.5. $I_5=\int Cosax.Cosbx.dx$ $(a,b \in IR)$ şeklindeki integraller

i) a=b olması hali:

$$I=\int \cos^2 axdx = \int (1/2)(1+\cos 2ax)dx=(1/2)\int dx + (1/2)\int \cos 2axdx$$

$$=(1/2)x + (1/4a)\sin 2ax + c$$

ii) a≠b olması hali:

Bu durumda; **Cosax.Cosbx=(1/2)[Cos(a-b)x + Cos(a+b)x]**

özdeşliği kullanılır.Bu özdeşlik I_5 integralinde yerine yazılırsa;

$$I_5 = \int \cos ax.\cos bxdx = \frac{1}{2}\int [\cos(a-b)x + \cos(a+b)x]dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \cos(a-b)xdx + \frac{1}{2}\int \cos(a+b)xdx$$
$$= \frac{1}{2(a-b)}\sin(a-b)x + \frac{1}{2(a+b)}\sin(a+b)x + c$$

olarak elde edilir. Şimdi I_5 tipindeki integraller için birer örnek yapalım.

Örnek 3.23: $I=\int \cos^2 3xdx$ integralini bulalım.

Çözüm 3.23: $\cos^2 3x=(1/2)(1+\cos 6x)$ olduğuna göre, I integrali;

$$I=\int \cos^2 3xdx=\int (1/2)(1+\cos 6x)dx=(1/2)\int dx + (1/2)\int \cos 6xdx$$

$$=x/2 + (1/12)\sin 6x + c$$ olarak elde edilir.

Örnek 3.24: $I=\int \cos 4x.\cos 3xdx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm 3.24: $\cos 4x.\cos 3x=(1/2)[\cos(4-3)x + \cos(4+3)x]$ idi. Bu I integralinde yerine yazılırsa;

$$I = \int \cos 4x.\cos 3xdx=\int (1/2)[\cos(4-3)x+\cos(4+3)x]dx =(1/2)\int \cos xdx + (1/2)\int \cos 7xdx$$

olur. Bu son ifadedeki integralin alınmasıyla I integrali;

$$I=\int \cos 4x.\cos 3xdx=(1/2)\sin x + (1/4)\sin 7x + c$$ olarak bulunur.

3.4.6. $I_6=\int \text{Sinax. Cosbx. dx}$ $(a,b \in IR)$ şeklindeki integraller

Daha önceki dört tip integralde olduğu gibi buradada **a** ve **b** ‘ nin durumuna göre iki çeşit integralle karşılaşırız.

i) a=b olması hali:

sinax.cosax=(1/2)sin2ax olduğuna göre;

I=∫sinax.cosaxdx= ∫(1/2)sin2axdx = (1/2)∫sin2axdx = (-1/4a)cos2ax + c olur.

ii) a≠b olması hali: Bu durumda aşağıdaki özdeşlik kullanılır. Buna göre;

sinax.cosbx=(1/2)[sin(a-b)x+ sin(a+b)x] özdeşliğinden yararlanılırsa I integrali;

$$I=\int \sin ax.\cos bxdx = \frac{1}{2}\int [\sin(a-b)x+\sin(a+b)x]dx$$
$$=\frac{1}{2}\int \sin(a-b)xdx+\frac{1}{2}\int \sin(a+b)xdx$$
$$=\frac{-1}{2(a-b)}\cos(a-b)x-\frac{1}{2(a+b)}\cos(a+b)x+c$$

olur. Şimdi bu iki durum için birer örnek yapalım.

Örnek 3.25: I=∫ sin3x.cos3x dx integralini bulalım.

Çözüm 3.25: Sin3x.Cos3x= (1/2) sin6x olduğuna göre;

I=∫sin3x.cos3xdx = ∫(1/2)sin6xdx = (1/2)∫sin6xdx = - (1/2) cos6x + c

Örnek 3.26: ∫ sin5x.cos4xdx integralini hesaplayalım.

Çözüm 3.26: sin5x.cos4x=(1/2)[sin(5-4)x+sin(5+4)x] Özdeşliğinden I integrali;

I=∫sin5x.cos4xdx=∫(1/2)[sin(5-4)x+sin(5+4)x]dx

şeklini alır ve bu son ifadenin integrali;

∫sin5x.cos4x dx= (1/2) ∫ sinxdx + (1/2) ∫sin 9x dx = - (1/2)cosx – (1/18)cos9x + c
olacak şekilde bulunur.

3.4.7. $I_7=\int Sin^m xdx=\int (Sinx)^m dx$ şeklindeki integraller

m sayısının tek veya çift olmasına göre bu tip integraller iki durumda incelenir.

i) m=2k+1 tek sayı olması hali:

$sin^m x=sin^{(2k+1)}x=sin^{(2k)}x.sinx=(sinx)^{2k}.sinx=(sin^2x)^k.sinx$ olacak şekilde alalım.

$$I_7=\int sin^m xdx=\int (sin^2x)^k.sinxdx \text{ olur.}$$

Burada, cosx=u dersek $-sinxdx=du$ ve $sin^2x=1-cos^2x=1-u^2$ değerleri bu son integralde yerine yazılırsa I_7 integralimiz;

$$I_7=\int sin^m xdx=\int (1-cos^2x)^k.sinxdx=-\int (1-u^2)^k.du$$

şekline getirilip bu açılım yapılarak integral alınır.

ii) m=2k çift sayı olması hali:

$sin^m x=(sinx)^m=sin^{2k}x=(sin^2x)^k$ ve $sin2x=(1/2)(1-cos2x)$ olduğuna göre I_7 inegralimiz;

$$I_7=\int sin^m xdx=\int (sin^2x)^k dx=-\int [(1/2)(1-cos2x)]^k dx=(1/2^k)\int (1-cos2x)^k dx$$

haline gelir. Bu açılım ilgili probleme bağlı olarak yapılır ve integral alınır. Bu iki durum için birer örnek yapalım.

Örnek 3.27: $I=\int sin^5 xdx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm 3.27: $sin^5x=sin^4x.sinx=(sin^2x)^2.sinx$ ve ayrıca

$sin^2x=1-cos^2x$ değerlerini I integralinde yerine yazacak olursak ;

$I=\int sin^5xdx=\int (sin^2x)^2.sinxdx=\int (1-cos^2x)^2 sinxdx$

elde edilir. Burada u=cosx dersek $-sinxdx=du$ olur. Buna göre;

$I=\int sin^5xdx=-\int (1-u^2)^2 du=-\int (1-2u^2+u^4)du=-\int du+2\int u^2du-\int u^4=-u+(2/3)u^3-(1/5)u^5+c$

bulunur. Bu son ifadede u=cosx değeri yerine yazılırsa ;

$I=\int sin^5xdx=-cosx+(2/3)cos^3x-(1/5)cos^5x+c$ olarak elde edilir.

Örnek 3.28: $I=\int \sin^4 x dx$ integralini bulalım.

Çözüm 3.28: $I=\int \sin^4 x dx=\int (\sin^2 x)^2 dx=\int [(1/2)(1-\cos 2x)^2]dx$

$$=(1/4)\int (1-2\cos 2x+\cos^2 2x)dx=(1/4)\int dx-(1/2)\int \cos 2x dx+(1/4)\int \cos^2 2x dx$$

Burada, $\cos^2 2x=(1/2)(1+\cos 4x)$ değeri yerine yazılırsa;

$$I=\int \sin^4 x dx=(1/4)\int dx-(1/2)\int \cos 2x dx+(1/8)\int dx+(1/8)\int \cos 4x dx$$

$$=(1/4)x-(1/4)\sin 2x+(1/8)x+(1/32)\sin 4x+c$$ olarak bulunur.

3.4.8. $I_8=\int (\mathrm{Cos})^m dx=\int \mathrm{Cos}^m x.dx$ şeklindeki İntegraller

Bu tip integrallerde yine bir önceki tipe benzer olarak m sayısının tek veya çift olmasına bağlı olarak iki durum söz konusudur.

i) m=2k+1 tek sayı olması hali:

$$I_8=\int (\cos x)^m dx=\int \cos^m x dx=\int \cos^{(2k+1)} x dx=\int \cos^{2k} x.\cos x dx=\int (\cos^2 x)^k.\cos x dx$$

Burada, sinx=u dersek cosxdx=du olur. Ayrıca ;

$\cos^2 x=1-\sin^2 x=1-u^2$ olduğu göz önüne alınırsa I_8 integrali;

$$I_8=\int \cos^{(2k+1)} x dx=\int (1-u^2)^k du$$

şekline getirilip parantezler açılarak ayrı ayrı integral alınır.

ii) m=2k çift sayı olması hali:

$$I_8=\int (\cos x)^m dx=\int (\cos^m x)dx=\int \cos^{2k} x dx=\int (\cos^2 x)^k dx$$

$\cos^2 x=(1/2)(1+\cos 2x)$ özdeşliği bu son ifade yerine yazılacak olursa I_8 integrali;

$$I_8=\int \cos^m x dx=\int [(1/2)(1+\cos 2x)]^k dx=(1/2^k).\int (1+\cos 2x)^k dx$$

şekline gelir. Burada parantez açılımı yapılarak ayrı ayrı integral alınır. Bu iki durum için yine birer örnek yapalım.

Örnek.3.29: I=$\int \cos^5 x dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm.3.29: I=$\int \cos^5 x dx = \int \cos^4 x . \cos x dx$ şeklinde yazalım ve burada sinx=u dönüşümü yapalım. Buna göre, cosxdx=du olur. Ayrıca, $\cos^2 x = 1-\sin^2 x = 1-u^2$ dönüşümü gözönüne alınırsa I integralimiz;

$$I=\int \cos^5 x dx=\int (\cos^2 x)^2 \cos x dx=\int (1-\sin^2 x)^2 . \cos x dx=\int (1-u^2)^2 du$$

$$=\int du - 2\int u^2 du + \int u^4 du = u - (2/3)u^3 + (1/5)u^5 + c$$

olur. Buradan u=sinx değeri sonuç ifadede yerine yazılırsa;

$$I=\int \cos^5 x dx = \sin x - (2/3)^3 \sin x + (1/5) \sin^5 x + c$$

olarak elde edilir.

Örnek.3.30: I=$\int \cos^4 x dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm.3.30: I=$\int \cos^4 x dx=\int (\cos^2 x)^2 dx=\int [(1/2)(1+\cos 2x)^2] dx$

$$=(1/4)\int dx + (1/2)\int \cos 2x dx + (1/4)\int \cos^2 2x dx$$

Burada, $\cos^2 2x=(1/2)(1+\cos 4x)$ değeri yukarıda yerine yazılıp integrali alınacak olursa I integralimiz ;

$$I=\int \cos^4 x dx=(1/4)\int dx + (1/2)\int \cos 2x dx + (1/8)\int dx + (1/8)\int \cos 4x dx$$

$=\int \cos 4x dx=(1/4)x + (1/4)\sin 2x + (1/8)x + (1/32)\sin 4x + c$ olarak elde edilir.

3.4.9. $I_9=\int \mathrm{Tan}\alpha x.dx$, $\alpha \in IR$ şeklindeki integraller

$I_9=\int \tan\alpha x dx=\int (\sin\alpha x/\cos\alpha x)dx$ alalım. Burada **$u=\cos\alpha x$** dersek **$-\alpha.\sin\alpha x dx=du$** olur. Bu değerler yerine yazılırsa;

$I_9=\int$**$\tan\alpha x dx$**$= - (1/\alpha)\int (1/u)du;\quad (\alpha \neq 0)$

$= - (1/\alpha) \mathrm{Ln}|u| + c$

$= - (1/\alpha) \mathrm{Ln}|\cos\alpha x| + c$ sonucu elde edilir.Bunu bir örnek ile açıklayalım.

Örnek 3.31: I=∫tan7xdx integralini hesaplayalım.

Çözüm 3.31: tan7x = sin7x / cos7x alınır ve u = cos7x iken –7sin7xdx=du dönüşümü yapılırsa I integrali;

$$I = \int \tan 7x dx = \int \frac{\sin 7x}{\cos 7x} dx = -\frac{1}{7}\int \frac{du}{u} = -\frac{1}{7}\ln|u| + c = -\frac{1}{7}\ln|\cos 7x| + c$$

olarak bulunur.

3.4.10. I_{10}=∫Sin^{n}x.Cos^{m}xdx şeklindeki integraller

Bu tip integrallerde **n** ve **m** sayılarının tek veya çift olmalarına bağlı üç durum söz konusudur.

n veya m' den en az biri tek sayı ve **n ≠ m** olsun.

n=2k+1 diyelim . Bu durumda I_{10} integralimiz;

I_{10}=∫sin^{n}x.cos^{m}xdx=∫sin$^{(2k+1)}$x.cos^{m}xdx olur. Burada, **cosx=u** dersek **–sinxdx=du** ve

$\sin^2x=1-\cos^2x=1-u^2$ olur. Buna göre;

$I_{10}= - \int(1-u^2)^k.u^m.du$ şekline getirilerek gerekli işlemler yapılır ve integral alınır.

n ile m'nin ikiside tek sayı ise küçük olan birisini dx' in yanına çarpan olarak ayırılır bu çarpan du olacak şekilde dönüşüm yapılır. Bunu örnekle açıklayacağız.n ile m'nin ikiside çift sayı olsun ve c=2k , m=2L diyelim. Böylece, I_{10} integralimiz;

$I_{10}=\int\sin^nx.\cos^mxdx=\int(\sin^2x)^k.(\cos^2x)^Ldx$ şeklini alır. Burada;

$\sin^2x=(1/2)(1-\cos2x)$ve $\cos^2x=(1/2)(1+\cos2x)$ dönüşümleri yerine yazılırsa I_{10} integralimiz;

$$I_{10}=\int\sin^nx.\cos^mxdx=\int \frac{1}{2^k}(1-\cos 2x)^k.\frac{1}{2L}(1+\cos 2x)^L dx \text{ olur. Böylece;}$$

$$I_{10} = \int \sin^n x.\cos^m x dx = \frac{1}{2^{k+L}}.\int (1-\cos 2x)^k.(1+\cos x)^L dx$$

olup parantezler açılırsa cos2x' in kuvvetlerine bağlı bir integral bulunur. Şimdi, bu üç durum için birer örnek yapalım.

Örnek 3.32: $I=\int \sin^3 x.\cos^4 xdx$ integralini bulalım.

Çözüm 3.32: $Sin^3xCos^4xdx = Sin^2x.Cos^4x.Sinxdx$ şeklinde yazalım. Burada u=cosx dersek du=-sinxdx ve $sin^2x=1-cos^2x=1-u^2$ olur. Bu değerler I integralinde yerine yazılırsa;

$$I=\int sin^3x.cos^4xdx= - \int(1-u^2).u^4du= - \int u^4du + \int u^6du$$

$$=-\frac{u^5}{5}+\frac{u^7}{7}+c$$

$$=-\frac{\cos^5 x}{5}+\frac{\cos^7 x}{7}+c \text{ olur.}$$

Örnek 3.33: $I=\int \sin^5 x.\cos^7 x.dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm 3.33: Bu tip integrallerde iki çeşit çözüm vardır.

1.Yol: *sinx = u* diyelim. Buna göre $cos^2x = 1-sin^2x = 1-u^2$ ve *cosx.dx=du* olur. Böylece;

$$I=\int \sin^5 x.\cos^7 ..dx=\int \sin^5 x.\cos^6 x.\cos x.dx$$

$$=\int u^5\left(1-u^2\right)^3.du$$
$$=\int u^5\left(1-3u^2+3u^4-u^6\right)du$$
$$=\int u^5du-3\int u^7.du+3\int u^9.du-\int u^{11}.du$$
$$=\frac{u^6}{6}-\frac{3}{8}u^8+\frac{3}{10}u^{10}-\frac{u^{12}}{12}+c$$

ve son olarak *u = sinx* değeri yerine yazılırsa sonuç integral;

$$I=\int \sin^5 x.\cos^7 d.dx=\frac{\sin^6 x}{6}-\frac{3}{8}\sin^8 x+\frac{3}{10}\sin^{10} x-\frac{\sin^{12} x}{12}+c$$

olarak bulunur .

2.Yol: $I=\int \sin^5 x.\cos^7 ..dx=\int \sin^4 x.\cos^6 x.\sin x.dx$

şeklinde ayırıp *u=cosx* dersek *du=-sinx.dx* ve $sin^2x=1-cos^2x=1-u^2$ olur.

Buna göre;

$$I=\int \sin^5 x.\cos^7 ..dx=-\int\left(1-u^2\right)^2 u^7.du=-\int u^7 du+2\int u^9.du-u^{11}.du$$

$$=-\frac{u^8}{8}+\frac{u^{10}}{5}-\frac{u^{12}}{12}+c=-\frac{\cos^8 x}{8}+\frac{\cos^{10} x}{5}-\frac{\cos^{12} x}{12}+c \text{ olarak bulunur.}$$

Örnek 3.34: $I=\int \sin^2 x.\cos^4 x.dx$ integralini bulalım.

Çözüm 3.34: $\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ ve $\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

değerleri *I* integralinde yerine yazalım.

$$I=\int \sin^2 x.\cos^4 x.dx=\int \frac{1}{2}(1-\cos 2x).\frac{1}{4}.(1+\cos 2x)^2.dx$$
$$=\frac{1}{8}\int (1-\cos 2x)\left(1+\cos 2x+\cos^2 2x\right)dx$$

$$=\frac{1}{8}\int dx+\frac{1}{8}\int \cos 2xdx-\frac{1}{8}\int \cos^2 2xdx-\frac{1}{8}\int \cos^3 2xdx$$

olur. Buna göre daha önceki örneklerimizde gördüğümüz gibi sonuç integrali;

$$I=\int \sin^2 x.\cos^4 xdx=\frac{1}{8}x+\frac{1}{16}\sin 2x-\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x-\frac{1}{16}\sin 2x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+c$$

veya

$$I=\int \sin^2 x.\cos^4 xdx=\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^2 2x+c \quad \text{olarak elde edilir.}$$

3.4.11. $\mathbf{I_{11}=\int f(sinx,cosx).dx}$ şeklindeki integraller

sinx ve/veya cosx içeren rasyonel integrallerde aşağıdaki durumlar söz konusu olabilir. ∫f(sinx,cosx).dx integralinde sinx yerine -sinx yazıldığında ilk integralin negatifi elde ediliyorsa yani;

i) $\int f(-\sin x,\cos x)dx=-\int f(\sin x,\cos x)dx$ oluyorsa verilen integral;

$I=\int (\cos x).\sin xdx$ şeklini alır. Buna göre, cosx=u dersek, -sinxdx=du ve $\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-u^2$ olur. Bu dönüşümler yardımıyla; $\int f(\sin x,\cos x)dx=-\int R(u)du$ şeklinde bir rasyonel integrale dönüşür.

ii) $\int f(\sin x, \cos x)dx$ integralinde cosx yerine –cosx yazıldığında ilk integralin negatifi elde ediliyorsa yani;

$$\int f(\sin x, -\cos x)dx = -\int f(\sin x, \cos x)dx$$ oluyorsa verilen integral;

$$I = \int f(\sin x)\cos x dx$$

şeklini alır. Böylece, bu son integralde u=sinx dersek;du=cosxdx ve $\cos^2 x = 1-\sin^2 x = 1-u^2$ olur. Bu değerler en son integralde yerine yazılacak olursa;

$$I = \int f(\sin x)\cos x dx = \int R(u)du$$

şeklinde bir rasyonel integrale dönüşür. Şimdi 3-4-11'deki integraller için üçüncü duruma geçmeden önce ilk iki duruma ait bir örnek verelim.

Örnek 3.35: $\int \frac{\sin^3 x.\cos^2 xdx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$ integralini bulalım.

Çözüm 3.35: $\int \frac{\sin^3 x.\cos^2 xdx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x.\cos^2 .\sin xdx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$

olsun. Burada cosx=u dersek –sinxdx=du ve $\sin^2 x = 1-\cos^2 x = 1-u^2$ olur. Böylece I integralimiz;

$$I = \int \frac{\sin^3 x.\cos^2 x}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}dx = -\int \frac{(1-u^2).u^2 du}{1-u^2+2u^2} = -\int \frac{u^2.(u^2-1)}{1+u^2}du$$

$$I = \int \frac{u^4-u^2}{1+u^2}.du = \int \left(u^2 - 2 + \frac{2}{1+u^2}\right).du = \int u^2 du - 2\int du + 2\int \frac{du}{1+u^2}$$

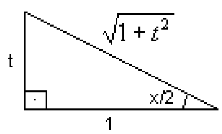
$$I = \frac{u^3}{3} - 2u + 2\arctan u + c = \frac{1}{3}\cos^3 x - 2\cos x + 2\arctan(\cos x) + c$$

olarak bulunur.

iii) $\mathbf{I = \int f(sinx, cosx)dx}$ **şeklindeki integraller**

Eğer, sinx ve cosx'in rasyonel fonksiyonunu içeren integrallerde yukarıdaki iki durumda yapılan dönüşümler uygulanamıyorsa bu tip fonksiyonları içeren integrallerde;

$t = \tan\frac{x}{2}$ dönüşümü yapılır. Buna göre; $t = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow x = 2\arctan t$ ve $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ olur



Şimdi; $t = \tan\frac{x}{2}$ dönüşümüne bağlı olarak sinx ve cosx değerlerini bulalım.

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}$$
$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$$
özdeşliklerinden yararlanılarak;

$$\sin x = 2.\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{2}{1+t^2}$$

ve

$$\cos x = \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

olarak bulunur. Bu değerler I integralinde yerine yazılırsa;

$$I = \int f(\sin x, \cos x)dx = \int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right).\frac{2dt}{1+t^2} = \int R(t)dt$$

şekline dönüşür. Şimdi bu çeşit integraller için birkaç örnek çözelim.

Örnek 3.36: $I = \int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx$ integralini çözelim

Çözüm 3.36: $\tan\frac{x}{2} = t$ dersek $x = 2\arctan t$ ve $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ olur.

Ayrıca; $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ ve $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ idi. Buna göre;

$$I = \frac{\sin x dx}{1+\sin x} = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2} \cdot \frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{4tdt}{(1+t^2).(1+t)^2} \quad \text{olur.}$$

$$\frac{4t}{(1+t^2).(1+t)^2} = \frac{At+B}{1+t^2} + \frac{C}{1+t} + \frac{D}{(1+t)^2}$$

olacak şekilde kısmi kesirlerin toplamı olarak yazarsak;

$$4t \equiv (At+B).(1+t)^2 + C(1+t).(1+t^2) + D.(1+t^2)$$

$$4t \equiv (A+C)t^3 + (2A+B+C+D)t^2 + (A+2B+C)t + (B+C+D) \quad \text{olur.}$$

Buna göre bu son eşitlikten;

$$\left.\begin{array}{l} A+C=0 \\ 2A+B+C+D=0 \\ A+2B+C4 \\ B+C+D=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} A=0 \\ B=2 \\ C=0 \\ D=-2 \end{array}$$

olarak belirlenir ve bu değerler integralimizde yerine konursa;

$$\int \frac{4tdt}{(1+t^2).(1+t)^2} = \int \frac{2dt}{1+t^2} \quad \int \frac{2dt}{(1+t)^2}$$

$$= 2\arctan t + \frac{2}{1+t} + c \quad \text{ve} \quad t = \tan\frac{x}{2}$$

$$\int \frac{\sin x dx}{1+\sin x} = 2\arctan \quad \tan\frac{x}{2} \quad + \frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}} + c$$

$$\int \frac{\sin x dx}{1+\sin x} = x + \frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}} + c \quad \text{elde edilir.}$$

Örnek 3.37: $I = \displaystyle\int \frac{\sin x dx}{1+\cos x + \cos 2x}$ integralini bulalım.

Çözüm 3.37: $\cos x = u$ dersek $-\sin x dx = du$ ve $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ olur.

Böylece;

$$I = \int \frac{\sin x dx}{1+\cos x+\cos 2x} = -\int \frac{du}{1+u+2u^2-1} = -\int \frac{du}{2u^2+u} = -\int \frac{du}{u(2u+1)}$$

şekline gelir. Buna göre son integralimizi kısmi kesirlerin toplamı olarak yazacak olursak;

$-\frac{1}{u(2u+1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{2u+1}$ şekline gelir ve buradan;

-1=A(2u+1)+B.u elde edilir. Böylece;

$\left.\begin{array}{l} 2A+B=0 \\ A=-1 \end{array}\right\} B=+2$ bulunur. Sonuç olarak I integrali;

$$I = \int \frac{\sin x dx}{1+\cos x+\cos 2x} = -\int \frac{du}{u(2u+1)} = -\int \frac{du}{u} + 2\int \frac{du}{2u+1}$$

$$I = -Ln|u| + 2Ln|2u+1| + c$$

$I = -Ln|\cos x| + 2Ln|2\cos x+1| + c$ olur.

Örnek 3.38: $I = \int \frac{dx}{5-3\cos x}$ integralini çözelim.

Çözüm 3.38:

$\tan\frac{x}{2} = t$ dersek $x = 2\arctan t$ ve $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ olur.

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ ve $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ idi. Buna göre;

$I = \int \frac{dx}{5-3\cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5-3.\frac{(1-t^2)}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1+4t^2}$ olur. Burada;

u=2t dersek du=2.dt ve $u^2=4t^2$ olur. Böylece son integralimiz;

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2}\arctan u + c$$

$$I = \frac{1}{2}\arctan 2t + c = \frac{1}{2}\arctan(2\tan\frac{x}{2}) + c$$

olarak bulunur.

Örnek 3.39: $I=\int \frac{1-\tan x}{1+\tan x}dx$ integralini bulalım.

Çözüm 3.39: Bu tip integrallerde 3.4.3'de olduğu gibi u=tanx dönüşümü yapılır ve

$$x=\arctan u \Rightarrow dx=\frac{du}{1+u^2}$$

elde edilir. Böylece I integralimiz;

$$I=\int \frac{1-\tan x}{1+\tan x}dx=\int \frac{1-u}{1+u}.\frac{du}{1+u^2}$$

şekline gelir. Şimdi bu son integralimizin hesabı için;

$\frac{1-u}{(1+u)(1+u^2)}=\frac{A}{1+u}+\frac{Bu+C}{1+u^2}$ şeklinde basit kesirlere ayırıp gerekli işlemleri yapalım.

Böylece;

$$\begin{aligned}1-u &= A(1+u^2)+(Bu+C)(1+u)\\ &=(A+B)u^2+(B+C)u+(A+C)\end{aligned}$$

ve buradan;

$$\left.\begin{aligned}A+B&=0\\ B+C&=-1\\ A+C&=1\end{aligned}\right\}A=1;\,B=-1;\;C=0\ .$$

olarak bulunur. Bu değerler son ifadede yerine yazılırsa;

$$I=\int \frac{(1-u)}{(1+u)(1+u^2)}.du=\int \frac{du}{1+u}-\int \frac{u.du}{1+u^2}=\ln|1+u|-\frac{1}{2}\ln\left|1+u^2\right|+c$$

olarak elde edilir. Böylece bu sonuçta *u=tanx* değeri yerine yazılacak olursa;

$$I=\int \frac{1-\tan x}{1+\tan x}.dx=\ln\left|\frac{1+\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}\right|+c \quad \text{bulunur.}$$

Örnek 3.40: $I=\int \sec x \tan^3 x.dx$ integralini hesaplayın.

Çözüm 3.40: $I=\int \sec x.\tan^3 x.dx=\int \sec x.\tan x.\tan^2 x.dx$

$$=\int \sec x.\tan x\left(\sec^2 x-1\right).dx$$
$$=\int \sec^2 x\left(\sec x.\tan x\right).dx-\int \sec x.\tan x.dx$$

şeklinde yazalım. *u=secx* dersek *du=secx.tanx.dx* olur. Böylece; bu son iki integrali ayrı ayrı hesaplayacak olursak;

$$\int \sec x.\tan x.dx=\int du=u+c=\sec x+c$$

$$\int \sec^2 x\left(\sec x.\tan x\right).dx=\int u^2.du=\frac{u^3}{3}+c=\frac{\sec^3 x}{3}+c$$

olarak bulunur.Buna göre hesaplanan bu iki integral *I* integralinde yerine yazılacak olursa;

$I=\int \sec x.\tan^3 x.dx=\dfrac{\sec^3 x}{3}+\sec x+c$ şeklinde bulunur.

Örnek 3.41: $I=\int \dfrac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$ integralini hesaplayalım.

Çözüm 3.41:İntegralimiz *sinx* ve *cosx*' i içeren bir rasyonel integral olduğundan;

$\tan\dfrac{x}{2}=t$ dönüşümü uygulayamayız. Buna göre;

$x=2\operatorname{Arc}\tan t$ ve $dx=\dfrac{2.dt}{1+t^2}$

$\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$ ve $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ idi.

Bu değerler *I* integralinde yerine yazılırsa;

$$I=\int\frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}=\int\frac{\frac{2.dt}{1+t^2}}{8-4\frac{2t}{1+t^2}+7\frac{(1-t^2)}{1+t^2}}=2\int\frac{dt}{t^2-8t+15}=2\int\frac{dt}{(t-3).(t-5)}$$

şekline gelir. Bu son integrali bulabilmek için;

$$\frac{1}{(t-3)(t-5)}=\frac{A}{t-3}+\frac{B}{t-5}$$

şeklinde basit kesirlere ayıracak olursak;

$$1=A(t-5)+B(t-3)$$
$$1=t(A+B)+(-5A-3B)$$

ve buradan;

$$\left.\begin{array}{r}A+B=0\\-5A-3B=1\end{array}\right\}\Rightarrow A=\frac{-1}{2}\ \text{ ve }\ B=\frac{1}{2}\ \text{ olarak bulunur.}$$

Bu değerler yerine yazılırsa;

$$I=2\int\frac{dt}{(t-3)(t-5)}=2\left(-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t-3}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t-5}\right)$$

$$=\int\frac{dt}{t-5}-\int\frac{dt}{t-3}=\ln|t-5|-\ln|t-3|+c=\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}\quad 5}{\tan\frac{x}{2}\quad 3}\right|+c\quad \text{sonucu bulunur.}$$

Trigonometrik İntegrallere Ait Alıştırmalar

1. $\int \frac{3\cos x}{\sin x + 2}dx$

2. $\int \frac{\sin 2xdx}{1-\sin^2}dx$

3. $\int \tan^3 xdx$

4. $\int \sin^2 4xdx$

5. $\int \sin\ 5x.\sin\ 4xdx$

6. $\int \cos^2 2xdx$

7. $\int \cos 5x.\cos 3xdx$

8. $\int \sin 3x.\cos 3xdx$

9. $\int \sin 3x.\cos 2xdx$

10. $\int \sin^3 xdx$

11. $\int \sin^7 xdx$

12. $\int \sin^2 xdx$

13. $\int \sin^4 xdx$

14. $\int (\cos x)^5 dx$

15. $\int \cos^4 xdx$

16. $\int \tan 3xdx$

17. $\int \sin^3 x.\cos^4 xdx$

18. $\int \sin^5 x.\cos^7 xdx$

19. $\int \sin^2 x.\cos^4 xdx$

20. $\int \frac{\sin^3 x.\cos^2 x}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}dx$

21. $\int \operatorname{cosec} xdx$

22. $\int \cot^3 xdx$

23. $\int \frac{\sin xdx}{1+\sin x}$

24. $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$

25. $\int \frac{\sin xdx}{1+\cos x+\cos 2x}$

26. $\int \frac{1-\tan x}{1+\tan x}dx$

27. $\int \sin^4 x.\cos^4 xdx$

28. $\int 2\tan 3xdx$

29. $\int \frac{4\cos 2t-2}{\sin 2t}dt$

30. $\int_0^{7/4} \tan^4 xdx$

3.5. Trigonometrik Yerine Koyma Metodu :

$$(a^2 - x^2)^p, \quad (x^2 - a^2)^p \text{ ve } (x^2 + a^2)^p, \ p \in Q$$

şeklindeki ifadeleri içeren integrallerde aşağıda ayrı ayrı ele alacağımız trigonometrik dönüşümler uygulanır. Şimdi sırasıyla bunları inceleyelim.

3.5.1. $I = \int f(x,(a^2 - x^2)^p)dx, (p \in Q)$ şeklindeki integraller :

Bu tip integrallerde;***x=asinθ*** dönüşümü uygulanırsa ***dx=a.cosθ.dθ*** olur.Buna göre;

$$I = \int f(a\sin\theta, (a^2 - a^2\sin^2\theta)^p).a\cos\theta.d\theta$$

integrali θ'ya bağlı bir integrale dönüşüp sonuçta tekrar x'e dönülerek istenen çözüm elde edilir.

Örnek 3.42:

$I = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ integralini bulalım.

Çözüm.3.42:

x=asinθ dersek dx=acosθdθ olur. Bu değerleri yukarıdaki integralde yerine yazarsak;

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{a.\cos\theta.d\theta}{\sqrt{a^2 - a^2.\sin^2\theta}} = \int \frac{a\cos\theta\, d\theta.}{\sqrt{a^2(1 - \sin^2\theta)}}$$

$$I = \int \frac{a\cos\theta.d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta}} = \int \frac{a\cos\theta\, d\theta}{a\cos\theta} = \int d\theta = \theta + c$$

olur. Şimdi ilk dönüşümden θ'yı x'e bağlı çözelim.

$$x = a\sin\theta \quad \Rightarrow \frac{x}{a} = \sin\theta \qquad \text{ve} \qquad \theta = \arcsin\frac{x}{a}$$

bulunur. Böylece sonuç integralimiz;

$I = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c$ olacak şekilde bulunur.

3.5.2. $I = \int f(x,(a^2 + x^2)^p)dx \ (p \in Q)$ şeklindeki integraller

Bu tip integrallerde;

x=*a*tanθ veya **x=sinhθ**dönüşümü uygulanır. Buna göre;**dx=*a*sec$^2\theta$dθ** veya **dx=*a*coshθ** olur. Böylece;

$I = \int (a\tan\theta, (a^2 + a^2\tan^2\theta)^p).a\sec^2\theta.d\theta$ şeklinde θ'ya bağlı bir integrale dönüşür.

Örnek.3.43: $I = \int \frac{dx}{x^2 + a^2}$ integralini bulalım.

Çözüm.3.43:

x=*a*tanθ dersek dx=*a*sec²θdθ olur. Buna göre;

$$I = \int \frac{a\sec^2\theta.d\theta}{a^2\tan^2\theta + a^2} = \int \frac{a\sec^2\theta.d\theta}{a^2(\tan^2\theta + 1)}$$

$$I = \int \frac{a\sec^2\theta.d\theta}{a^2\sec^2\theta} = \frac{1}{a}\int d\theta \quad = \frac{1}{a}.\theta \quad + c$$ olarak bulunur θ'yı x cinsinden yazacak olursak

$$x = a\,.\tan\theta \quad \Rightarrow \frac{x}{a} = \tan\theta \qquad \text{ve} \qquad \theta = \arctan\frac{x}{a}$$ elde edilir

Sonuç olarak integralimizi;

$$I = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}.\arctan\frac{x}{a} + c$$ buluruz

3.5.3. $I = \int f(x,\ (x^2 - a^2)^p)dx, (p \in Q\ )$ şeklindeki integraller

Bu tip integrallerde ise;

x=*a*secθ veya **x=*a*coshθ** dönüşümü yapılır.Buna göre;

dx=*a*secθ.tanθ.dθ veya **dx=*a*sinhθ.dθ** olur. Böylece;

$$I = \int f(a\sec\theta\ \ ,(a^2\sec^2\theta - a^2)^p).a\sec\theta.\tan\theta.d\theta$$

şeklinde **θ** 'ya bağlı bir integrale dönüşür. Bu integralin sonucunda **θ**, **x**'e dönüştürülerek istenilen çözüme ulaşılır.

Örnek.3.44: $I = \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ integralini hesaplayalım.

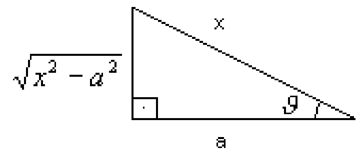
Çözüm.3.44:x=*a*secθ dersek **dx=*a*secθ.tanθ.dθ** olur. Buna göre;

$$I = \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{a\sec\theta.a\sec\theta.\tan\theta.d\theta}{\sqrt{a^2.\sec^2\theta \quad - a^2}} = \int \frac{a^2.\sec^2\theta.\tan\theta.d\theta}{\sqrt{a^2(\sec^2\theta \quad - 1)}}$$

$$I = \int \frac{a^2\sec^2\theta.\tan\theta.d\theta}{\sqrt{a^2\tan^2\theta}} = a\int \sec^2\theta.d\theta = a.\tan\theta + c$$ olur.

Şimdi **tanθ**'yı **x** cinsinden belirleyelim. Buna göre; $\tan\theta = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}$

olarak bulunur. Böylece;



$$I=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=a.\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}+c=\sqrt{x^2-a^2}+c$$

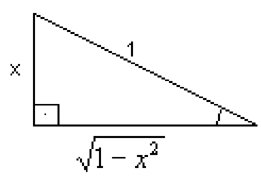
elde edilir.Şimdi konunun daha iyi anlaşılması için trigonometrik yerine koyma metoduna ait birkaç örnek daha çözelim.

Örnek.3.45: $I=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$ integralini hesaplayalım.

Çözüm.3.45:x=sinθ dersek **dx=cosθ.dθ** olur. Buna göre;

$$I=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{\cos\theta.d\theta}{\sin^2\theta\ .\sqrt{1-\sin^2\theta}}=\int\frac{\cos\theta.d\theta}{\sin^2\theta.\cos\theta}=\int\frac{d\theta}{\sin^2\theta}=-\cot\theta\ \ +c$$

olur. Buna göre cotθ değerini hesaplayalım.



$$\sin\theta=x\Rightarrow\cot\theta=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\ \text{olur.Buna göre;}$$

$$I=\int\frac{dx}{x^2.\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+c\ \ \text{elde edilir.}$$

Örnek.3.46: $I=\int\frac{dx}{\left(9+x^2\right)^{3/2}}$ integralini hesaplayalım.

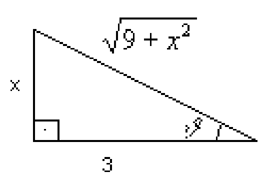
Çözüm.3.46:

$$I=\int\frac{dx}{(9+x^2)^{3/2}}=\int\frac{3\sec^2\theta.d\theta}{(9+9\tan^2\theta)^{3/2}}=\int\frac{3\sec^2\theta.d\theta}{27\sec^3\theta}=\frac{1}{9}\int\frac{d\theta}{\sec\theta}$$

$$I=\frac{1}{9}\int\cos\theta.d\theta=\frac{1}{9}\sin\theta+c$$

olarak bulunur. Şimdi de sinθ'yı x cinsinden bulalım.

$$\tan\theta=\frac{x}{3}\Rightarrow\sin\theta=\frac{x}{\sqrt{9+x^2}}\ \text{olur. Böylece sonuç integralimiz;}$$



$$I=\int\frac{dx}{(9+x^2)^{3/2}}=\frac{1}{9}.\frac{x}{\sqrt{9+x^2}}+c\ \ \text{olarak bulunur.}$$

Örnek.3.47: $I=\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x+5}}$ integralini hesaplayalım.

Çözüm.3.47:$-x^2+4x+5=-(x-2)^2+9=9-(x-2)^2$ şeklinde yazalım. Burada, u=x-2 dönüşümü yapılırsa du=dx olur. Böylece;

$$I=\int \frac{du}{\sqrt{9-u^2}}$$

şekline dönüşür. Şimdi bu integrali ayrıca çözelim.

u=3sinθ dersek **du=3cosθ. dθ** olur. Buna göre;

$$I=\int \frac{du}{\sqrt{9-u^2}}=\int \frac{3\cos\theta.d\theta}{\sqrt{9-9\sin^2\theta}}=\int \frac{3\cos\theta.d\theta}{\sqrt{9(1-\sin^2\theta\ )}}=\int \frac{3\cos\theta.d\theta}{3\cos\theta}=\int d\theta=\theta+c$$

olur ve θ, u cinsinden tekrar hesaplanacak olursa;

$u=3\sin\theta \quad \Rightarrow \frac{u}{3}=\sin\theta \quad \Rightarrow \theta=\arcsin\frac{u}{3}$ ve u=x-2 yerine yazılırsa sonuç integral;

$I=\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x+5}}=\arcsin\frac{x-2}{3}+c$ şeklinde bulunur.

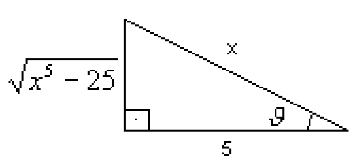
Örnek.3.48: $I=\int x^3\sqrt{x^2-25}dx$ integralini hesaplayalım .

Çözüm.3.48 : $x=5\sec\theta$ dersek $dx=5\sec\theta.\tan\theta.d\theta$ olur.

Böylece integralimiz .

$$I=\int x^3\sqrt{x^2-25}dx=\int 125.\sec^3\theta\ .\sqrt{25\sec^2\theta-25}.5\sec\theta.\tan\theta.d\theta$$
$$I=3125\int \sec^4\theta.\tan^2\theta.d\theta=3125\int (\tan^2\theta+1).\sec^2\theta.\tan^2\theta.d\theta$$

şekline dönüşür. Burada **u=tanθ** dersek **du=sec²θ.dθ** olur. Sonuç olarak, bu dönüşüme göre integralimiz;



$$I=3125\int (1+u^2).u^2du=3125\int (u^2+u^4)du=3125\left(\frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5}\right)+c$$

$$I=3125\int\left(\frac{\tan^3\theta}{3}+\frac{\tan^5\theta}{5}\right)+c$$

şekline dönüşür. Tekrar θ değişkeninden x değişkenine dönecek olursak;

$$x = 5\sec\theta \quad \Rightarrow \frac{x}{5} = \sec\theta \qquad \text{ve buna göre; } \tan\theta = \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}$$

olarak bulunur. Bu değer sonuç ifadede yerine yazılırsa baştaki integralimiz;

$$I = \int x^3\sqrt{x^2-25}\,dx = \frac{25}{3}(x^2-25)^{3/2} + \frac{1}{5}(x^2-25)^{5/2} + c \text{ olarak elde edilir.}$$

Örnek.3.49: $\displaystyle\int_3^6 \frac{dx}{\left(x^2-6x+5\right)^{3/2}} = ?$

Çözüm.3.49 : Kareye tamamlama metodu ile $x^2-6x+5 = x^2-6x+9-9+5 = (x-3)^2-4$ olur.

$$\int_3^6 \frac{dx}{\left(x^2-6x+5\right)^{3/2}} = \int_3^6 \frac{dx}{\left((x-3)^2-4\right)^{3/2}} = \int_3^6 \frac{du}{\left(u^2-4\right)^{3/2}}$$

$x - 3 = u \Rightarrow dx = du \qquad u = a.\mathrm{Sec}\theta \Rightarrow x-3 = 2\mathrm{Sec}\theta$

$a^2 = 4 \qquad du = a.\mathrm{Sec}\theta.\mathrm{Tan}\theta.d\theta \Rightarrow dx = 2\mathrm{Sec}\theta.\mathrm{Tan}\theta.d\theta$

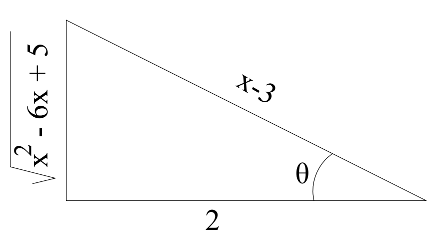
$$\int_3^6 \frac{dx}{\left((x-3)^2-4\right)^{3/2}} = \int_3^6 \frac{2\mathrm{Sec}\,\theta\mathrm{Tan}\,\theta d\theta}{\left(4\mathrm{Sec}^2\theta-4\right)^{3/2}} = \int_3^6 \frac{2\mathrm{Sec}\,\theta.\mathrm{Tan}\,\theta d\theta}{\left(4\left(\mathrm{Sec}^2\theta-1\right)\right)^{3/2}}$$

$$\int \frac{2\mathrm{Sec}\theta\mathrm{Tan}\theta d\theta}{\left(4\mathrm{Tan}^2\theta\right)^{3/2}} = \frac{1}{4}\int \frac{2\mathrm{Sec}\theta\mathrm{Tan}\theta d\theta}{\mathrm{Tan}^3\theta} = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{Sec}\theta d\theta}{\mathrm{Tan}^2\theta} =$$

$$\frac{1}{4}\int \frac{1}{\mathrm{Cos}\theta}\cdot\frac{\mathrm{Cos}^2\theta}{\mathrm{Sin}^2\theta}\cdot d\theta = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{Cos}\theta d\theta}{\mathrm{Sin}^2\theta} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{4}\int t^{-2}dt = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{t} + c = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\mathrm{Sin}\,\theta} + c$$

$$= -\frac{1}{4}\cdot\frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+5}} + c$$

$\mathrm{Sin}\theta = t \quad \Rightarrow \mathrm{Cos}\theta d\theta = dt \qquad \dfrac{x-3}{2} = \mathrm{Sec}\theta$ ise $\mathrm{Sin}\theta = \dfrac{\sqrt{x^2-6x+5}}{x-3}$ ve sonuç integral;



$$\int_3^6 \frac{dx}{\left((x-3)^2-4\right)^{3/2}} = \left(-\frac{1}{4}\cdot\frac{(x-3)}{\sqrt{x^2-6x+5}}\right|_3^6 = -\frac{3}{4\sqrt{5}} \text{ olur.}$$

Alıştırmalar

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

2. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

3. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9+x^2}}$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

5. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}.dx$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$

7. $\int \sqrt{16-x^2}.dx$

8. $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{2x^2}.dx$

9. $\int 5x^3\sqrt{x^2+4}.dx$

10. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}}$

11. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}$

12. $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}.dx$

13. $\int \frac{3dt}{\sqrt{9t^2-1}}$

14. $\int \frac{2dt}{2t\sqrt{1-4t^2}}$

15. $\int \frac{x^3.dx}{\sqrt{x^2-2}}$

16. $\int \frac{2dx}{4x^2\sqrt{9+4x^2}}$

3.6 Cebirsel Fonksiyonların İntegrali

Cebirsel fonksiyonların integrallerinde şimdiye kadar kısmi integrasyon ve değişken değiştirme yöntemleri ile çözülebilen cebirsel fonksiyonlarla ilgilenmiştik. Bu yöntemlerle bulunamayan cebirsel fonksiyonların integralleri uygun bir değişken dönüşümü ile bir rasyonel fonksiyonun integraline dönüşürler. Bu tip dönüşümler üç alt başlık halinde incelenebilir.

i) $I = \int f\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right).dx \quad (a \neq 0) \quad (n \in IN) \ (a,b \in R)$ **şeklindeki integraller:**

Bu tip integrallerde; $u = \sqrt[n]{ax+b}$ dönüşümü yapılır. Buna göre;

$$u^n = ax + b \Rightarrow x = \frac{1}{a}\left(u^n - b\right) \quad \text{ve} \quad dx = \frac{1}{a}.n.u^{n-1}.du$$

olur. Buradan;

$$I = \int f\left(\frac{1}{a}\left(u^n - b\right), u\right).\frac{1}{a}.n.u^{n-1}.du = \int f(u).du$$

şeklinde rasyonel bir integrale dönüşür.

Örnek 3.49: $I = \int \left(x\sqrt[3]{3x-5}\right).dx$ integralini bulalım.

Çözüm.3.49: $u = \sqrt[3]{3x-5} \Rightarrow u^3 = 3x - 5 \quad \text{ve} \quad x = \frac{1}{3}\left(u^3 + 5\right)$

olur. Buna göre **dx=u²du** elde edilir. Bu değerler I integralinde yerine yazılacak olursa;

$$I = \int \frac{1}{3}\left(u^3 + 5\right)uu^2.du = \frac{1}{3}\int u^6.du + \frac{5}{3}\int u^3 du$$

$$I = \frac{1}{21}u^7 + \frac{5}{12}u^4 + c = \frac{1}{21}\left(3x-5\right)^{7/3} + \frac{5}{12}\left(3x-5\right)^{4/3} + c$$ şeklinde bulunur.

ii) $I = \int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right).dx \ (a \neq 0, c \neq 0) \ (a,b,c,d \varepsilon IR) \ (ad - bc \neq 0)$ **şeklindeki integraller:**

Bu tip integrallerde;

$$u = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \text{ dönüşümü yapılırsa ; } u^n = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow x = \frac{-d.u^n + b}{c.u^n - a}$$

olur ve buradan;

$$dx = \frac{(ad - bc)}{\left(cu^n - a\right)^2}.n.u^{n-1}.du \text{ bulunur.}$$

Buna göre;

$$I=\int f\left(\frac{-du^n+b}{cu^{n-a}},u\right)\frac{(ad-bc)}{(cu^n-a)^2}n.u^{n-1}.du=\int f^*(u).du$$

şeklinde ***u'*** ya bağlı rasyonel bir integrale dönüşür.

Örnek.3.50: $I=\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}}dx$ integralini bulalım.

Çözüm.3.50: $u=\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}}$ dersek;

$$u^2=\frac{2x-1}{x+1}\Rightarrow x=\frac{-1-u^2}{u^2-2} \qquad \text{ve} \qquad dx=\frac{6u.du}{(u^2-2)^2}\text{ olur.}$$

Bu değerler integralimizde yerine yazılırsa;

$$I=\int\frac{u^2-2}{-u^2-1}u\frac{6u}{(u^2-2)^2}.du=-6\int\frac{u^2}{(u^2+1)(u^2-2)}du$$

şekline gelir. Şimdi bu integrali bulalım. Buna göre;

$$\frac{u^2}{(u^2+1)(u^2-2)}=\frac{Au+B}{u^2+1}+\frac{C}{u-\sqrt{2}}+\frac{D}{u+\sqrt{2}}$$

şeklinde yazılırsa;

$$u^2=(Au+B)(u-\sqrt{2})(u+\sqrt{2})+C(u+\sqrt{2})(u^2+1)+D(u^2+1)(u-E)$$

olarak elde edilir. Buradan;

$$u=\sqrt{2} \quad \text{iççi} \quad 2=6\sqrt{2}C\Rightarrow C=\frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$u=-2 \quad \text{iççi} \quad 2=-6\sqrt{2}D\Rightarrow D=-\frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$u=0 \quad \text{iççi} \quad 0=-2B+\sqrt{2}C-\sqrt{2}D\Rightarrow B=\frac{1}{3}$$

$$u=1 \quad \text{iççi} \quad 1=-A-B+2(1+\sqrt{2})C+2(1-\sqrt{2})D\Rightarrow A=0$$

bulunur. Bu değerler tekrar yerine yazılarak;

$$I=-6\int\left(\frac{1}{3}\frac{1}{u^2+1}+\frac{\sqrt{2}}{6}\frac{1}{u-\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{6}\frac{1}{u+\sqrt{2}}\right).du$$

$$I=-2\int\frac{du}{u^2+1}-\sqrt{2}\int\frac{du}{u-\sqrt{2}}+\sqrt{2}\int\frac{du}{u+\sqrt{2}}$$

$$= -2\arctan u - \sqrt{2}\ln\left|u-\sqrt{2}\right| + \sqrt{2}\ln\left|u+\sqrt{2}\right| + c \quad \text{veya;}$$

$$= -2\arctan u + \sqrt{2}\ln\left|\frac{u+\sqrt{2}}{u-\sqrt{2}}\right| + c \text{ olur.}$$

Bu sonuçta **u** değeri yerine yazılırsa integralimiz;

$$I = \int \frac{1}{x}.\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}}.dx = -2\arctan\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}} + \sqrt{2}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}}+\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}}+\sqrt{2}}\right| + c \text{ şeklinde bulunur.}$$

iii) $(ax+b)^n$ şeklinde integraller: a≠0 olmak üzere (**ax+b)**'nin rasyonel kuvvetlerini içeren rasyonel bir fonksiyonun integralini ele alalım. Bu integrali bulmak için ***ax+b***' nin rasyonel kuvvetlerinin paydalarının en küçük ortak katı ***n*** olmak üzere;

$$u = \sqrt[n]{ax+b}$$

dönüşümü yapılır. Böylece ***u***' nun rasyonel bir fonksiyonunun integrali elde edilir.

Örnek.3.51: $I = \int \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}.dx$ İntegralini hesaplayalım.

Çözüm.3.51: $u=\sqrt{x}$ dersek $u^2=x$ ve $2u.du=dx$ olur

Buna göre;

$$I = \int \frac{(u+2).2u.du}{u-1} = \int \frac{2u^2+4u}{u-1}du = 2\int\left(u+3+\frac{3}{u-1}\right).du$$

$$= 2\int u.du + 6\int du + 6\int\frac{du}{u-1} = u^2 + 6u + 6\ln|u-1| + c$$

$$= x + 6\sqrt{x} + 6\ln\left|\sqrt{x}-1\right| + c$$

olarak bulunur. Şimdi cebirsel fonksiyonların integrallerine ait birkaç örnek problem çözelim.

Örnek.3.52: $I = \int \frac{\sqrt{x}.dx}{1+\sqrt[4]{x^3}}$ integralini hesaplayalım.

Çözüm.3.52: $I = \int \frac{x^{1/2}dx}{1+x^{3/4}}$ şeklinde yazalım.

Burada **x**'in kuvvetlerinin e.k.o.k'u 1/4 olduğundan;

$u = x^{1/4}$ dersek $x = u^4$ ve $dx = 4u^3 du$ elde edilir. Buradan;

$$I = \int \frac{u^2 4u^3}{1+u^3}.du = 4\int \frac{u^5}{1+u^3}.du$$

olur. Pay paydadan büyük olduğundan, pay paydaya bölünerek I integrali;

$$I = 4\int \frac{u^5}{1+3}du = 4\int \left(u^2 - \frac{u^2}{1+u^3} \right).du = 4\int u^2.du - 4\int \frac{u^2 du}{1+u^3}$$

şekline dönüşür. Burada ikinci integrali ayrıca hesap edersek ;

$$\int \frac{u^2}{1+u^3}.du = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\ln t = \frac{1}{3}\ln\left|1+u^3\right| + c$$

$$1 + u^3 = t \Rightarrow 3u^2 du = dt \text{ ve } u^2 du = \frac{dt}{3}$$

olarak elde edilir ve u değeri yerine yazılacak olursa;

$I = \frac{4}{3}u^3 - \frac{4}{3}\ln\left|1+u^3\right| + c = \frac{3}{4}x^{3/4} - \frac{4}{3}\ln\left|1+x^{3/4}\right| + c$ sonucunu buluruz.

Örnek.3.53: $I = \int \frac{(x+5)}{(x+4)\sqrt{x+2}}.dx$

Çözüm.3.53: $u = \sqrt{x+2}$ dersek $u^2 = x+2 \Rightarrow x = u^2 - 2$ ve $dx = 2udu$

olur. Bu değerler integralde yerine yazılırsa;

$$I = \int \frac{(u^2 - 2 + 5)}{(u^2 - 2 + 4)u}.2u.du = 2\int \frac{u^2+3}{u^2+2}.du$$

şekline dönüşür. Buradan;

$$I = 2\int \frac{u^2+3}{u^2+2}.du = 2\int \frac{u^2+2}{u^2+2}du + 2\int \frac{du}{u^2+2}$$

olarak elde edilir. Burada;

$$2\int \frac{du}{u^2+2}$$

integrali daha önce incelediğimiz trigonometrik yerine koyma metodundaki gibi;

$$u = \sqrt{2}\tan\theta$$

dönüşümü uygulanarak çözülür.

Örnek.3.54: $I = \int \dfrac{x^{1/6}+1}{x^{7/6}+x^{5/4}}.dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm.3.54: ***x'*** in kuvvetlerinin e.k.o.k'u **12** olup ***u=x***$^{1/2}$ dönüşümünü yaparsak ***x=u***^{12} ve ***dx=12u***^{11}***du*** olur. Böylece I integrali;

$$I = \int \frac{x^{1/6}+1}{x^{7/6}+x^{5/4}}.dx = \int \frac{(u^2+1)12u^{11}}{(u^{14}+u^{15})}du = 12\int \frac{(u^2+1)}{u^3(u+1)}du$$

şekline dönüşür .Şimdi bu son integrali bulalım. Buradan;

$$\frac{(u^2+1)}{u^3(u+1)} = \frac{A}{u}+\frac{B}{u^2}+\frac{C}{u^3}+\frac{D}{u+1} \text{ ve buradan } u^2+1 = (A+D)u^3+(A+B)u^2+(B+C)u+c$$

olur. Böylece;

$$\left.\begin{array}{r} A+D=0 \\ A+B=1 \\ B+C=0 \\ C=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} B=-1 \\ A=2 \\ D=-2 \end{array}$$

olarak elde edilip bu değerler yerine yazılırsa;

$$I = \int \frac{(u^2+1)du}{u^3(1+u)} = 12\left[2\int\frac{du}{u} - \int\frac{du}{u^2} + \int\frac{du}{u^3} - 2\int\frac{du}{1+u}\right]$$

$$=12\left[\ln\left(\frac{u}{1+u}\right)^2 + \frac{u-1}{2u^2}\right]+c = 12\left[\ln\left(\frac{\sqrt[12]{x}}{1+\sqrt[12]{x}}\right)^2 + \frac{\sqrt[12]{x}-1}{(2\sqrt[12]{x})^2}\right]+c \text{ sonucu bulunur .}$$

Örnek.3.55 : $I = \int \dfrac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{(x+1)^2}} = ?$

Çözüm.3.55 : $\sqrt{x+1} = (x+1)^{1/2}$

$\sqrt[3]{(x+1)^2} = (x+1)^{2/3}$

$t = (x+1)^{1/6} \Rightarrow t^6 = x+1 \Rightarrow x = t^6 - 1 \Rightarrow dx = 6t^5dt$

$$I = \int \frac{6t^5dt}{t^3+t^4} = 6\int\frac{t^5.dt}{t^3(1+t)} = 6\int\frac{t^2.dt}{(1+t)}$$

$$I = 6\int\left((t-1)+\frac{1}{(1+t)}\right).dt = 3t^2 - 6t + 6\ln|1+t| + c$$

Örnek.3.56 : $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x+1}} = ?$

Çözüm.3.56 : $x+1 = t^4 \Rightarrow \sqrt[4]{x+1} = t$

$\sqrt{x+1} = t^2 \Rightarrow x+1 = t^4 \Rightarrow dx = 4t^3 dt$

$$I = \int \frac{4t^3 dt}{t^2+t} = 4\int \frac{t^2.dt}{t+1} = 4\int\left(\left(t-1\right)+\left(\frac{1}{t+1}\right)\right).dt = 2t^2 - 4t + 4\ln\left|t+1\right| + c$$

$$I = 2\left(\sqrt{x+1}\right) - 4\left(\sqrt[4]{x+1}\right) + 4\ln\left|\sqrt[4]{x+1}+1\right| + c$$

Örnek.3.57 : $I = \int \frac{x^{1/2}}{1+x^{1/3}} \cdot dx = ?$

Çözüm.3.57 : $t = x^{1/6} \Rightarrow t^6 = x \Rightarrow x^{1/2} = t^3 \Rightarrow x^{1/3} = t^2 \Rightarrow x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5.dt$

$$I = \int \frac{t^3 6t^5}{1+t^2}.dt = 6\int \frac{t^8}{1+t^2}.dt = 6\int\left(\left(t^6 - t^4 + t^2 - 1\right)+\left(\frac{1}{1+t^2}\right)\right).dt$$

$$I = \frac{6}{7}t^7 - \frac{6}{5}t^5 + \frac{6}{3}t^3 - 6t + 6\mathrm{arctg}t + c = \frac{6}{7}x^{7/6} - \frac{6}{5}x^{5/6} + 2x^{1/2} - 6x^{1/6} + 6\mathrm{arctg}t + c$$

ALIŞTIRMALAR

1. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ $\qquad (2\sqrt{x} - 2\ln\left|1+\sqrt{x}\right| + c)$

2. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$ $\qquad (2\ln\left|\sqrt{x}-1\right| + c)$

3. $\int \frac{dx}{x-\sqrt[3]{x}}$ $\qquad (\frac{3}{2}\ln\left|x^{2/3}-1\right| + c)$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x^3}}$ $\qquad (4\sqrt[4]{x} - \ln x + c)$

5. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{1+x}}$ $\qquad \frac{3}{5}\sqrt[3]{(1+x)^5} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{(1+x)^2} + c$

6. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$ $\qquad (\frac{2}{3}\sqrt{x-1}\left(x+2\right) + c)$

7. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}.dx$ $\qquad (\sqrt{x^2-1} - Arc\tan\sqrt{x^2-1} + c)$

8. $\int \frac{xdx}{\sqrt{2-7x}}$ $\qquad (-\frac{2}{147}\sqrt{2-7x}\left(7x+4\right) + c)$

9. $\int \frac{x^2 dx}{(4x+1)^{5/2}}$ $\qquad$ $\left(\frac{6x^2+6x+1}{12(4x+1)^{3/2}}+c\right)$

10. $\int \frac{dx}{x^{5/8}+x^{3/4}}$ $\qquad$ $\left(4x^{1/4}-8x^{1/8}+\ln\left(x^{1/8}+1\right)+c\right)$

11. $\int \frac{xdx}{(1+x)^{3/2}}$ $\qquad$ $\left(2\left(\frac{2+x}{\sqrt{1+x}}\right)+c\right)$

12. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad$ $\left(\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+c\right)$

13. $\int \frac{(x+5)dx}{(x+4)\sqrt{x+2}}$ $\qquad$ $\left(2\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{x+2}{2}}+c\right)$.

14. $\int \frac{\left(x^{3/2}-x^{1/3}\right)dx}{6x^{1/4}}$ $\qquad$ $\left(\frac{2}{27}x^{9/4}-\frac{12}{3}x^{13/12}+c\right)$

15. $\int x\sqrt[3]{1+x}.dx$ $\qquad$ $\left(\frac{3}{28}(1+x)^{4/3}\times(4x-3)+c\right)$

16. $\int_0^3 \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+1}}$ $\qquad$ (0,6435)

17. $\int_0^1 \frac{x^{3/2}dx}{x+1}$ $\qquad$ (0,2375)

18. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ $\qquad$ (1,803)

19. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{2x}\left(9+\sqrt[3]{2x}\right)}$ $\qquad$ (0,1042)

20. $\int_1^4 \frac{x.dx}{\sqrt{4x+2}}$ $\qquad$ 2.121

21. $\int x\sqrt[3]{2x+3}.dx$

22. $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}}.dx$

23. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$

24. $\int \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}.dx$

25. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-4}}$

26. $\int \frac{dx}{(9+x^2)^{3/2}}$

27. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5x+6}}$

28. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$

29. $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x+5}}$

30. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+5}}.dx$

31. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{4x^2+8x+9}}.dx$

32. $\int \frac{\cos 2x}{3+4\sin 2x}.dx$

33. $\int x\sqrt{3+2x}.dx$

34. $\int \frac{\sqrt{x^{1/2}}}{1+\sqrt[4]{x^{3/4}}}.dx$

35. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x-1}}$

36. $\int \sqrt{9-4x^2}\,dx$

37. $\int \frac{(x+5)dx}{(x+4)\sqrt{x+2}}$

38. $\int \frac{x^{1/6}+1}{x^{4/6}+x^{5/4}}.dx$

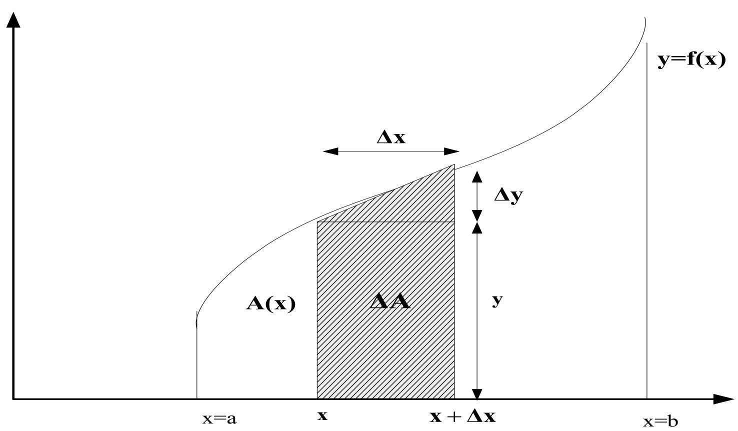
BÖLÜM 4. BELİRLİ İNTEGRALİN UYGULAMALARI

Bu bölümde, belirli integralin uygulamaları başlığı altında bir eğri altında kalan alan hesabı, iki eğri arasında kalan alan, dönel cisimlerin hacmi, dönel yüzeylerin yanal alanı, yay uzunluğu, ağırlık ve kütle merkezi, ortalama ve etkin değer ve dönel yüzeylerin yanal alanları gibi konular ele alınacak ve bu konulara ait örnekler çözülecektir.

4.1. Bir Eğri Altında Kalan Alan Hesabı

4.1.1. y = f(x) eğrisi, x – ekseni, x = a ve x = b doğruları ile sınırlı bölgenin alanı

y = f(x) eğrisi, x – ekseni, x = a ve x = b doğruları ile sınırlı bölgenin alanı aşağıdaki gibi olsun. (Şekil.4.1)



Şekil –4.1

f(x), [a,b] aralığında pozitif olsun (Şekil 4.1). .**A = A(x)** fonksiyonu **x=a'dan x=b'ye** kadar alanı temsil ederken **ΔA** ise **x** ile **x+Δx** arasındaki alanı ifade eder. Buna göre;

$$\mathbf{y.\Delta x \leq \Delta A \leq (y+\Delta y).\Delta x}$$

olduğu açıktır . Bu son ifadeyi Δx ile bölersek;

$$\mathbf{y \leq \frac{\Delta A}{\Delta x} \leq y + \Delta y}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik, **A** alanının x'e göre değişim oranının **y** ile **y+Δy** arasında olduğunu gösterir. $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$ için;

$\mathbf{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta x} = \frac{dA}{dx}}$ ve burada eşitsizlik; $y \leq \frac{dA}{dx} \leq y$ olur.

Böylece $y = \dfrac{dA}{dx}$ ve buradan her iki tarafın integrali alınarak;

$\int$ **dA=** $\int$**ydx** $\Rightarrow$ **A=** $\int$ **y.dx** veya **A=** $\int$ **f(x)dx** olarak elde edilir.

A = $\int$ **f(x) dx** iken **A=F(x)+c** olur.

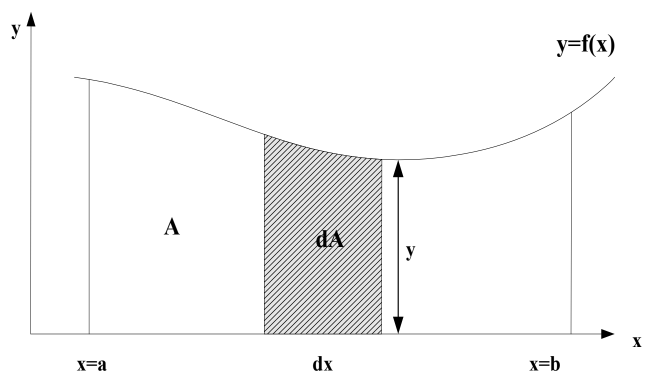
Burada ; **f (x) = F'(x)** olup **x = a, A = 0** iken **c= - F(a)** bulunur. Bu değer, **A=F(x)+c** ifadesinde yerine yazılırsa;

A = F (x) - F (a)

alan fonksiyonu elde edilir. Bu son ifadede, x = b alınırsa y = f(x) eğrisi x = a, x = b doğruları ve x-ekseni arasında kalan alan;

A = F(b) – F(a) olarak bulunur.

Böylece, **y = f(x) eğrisi, x = a, x= b doğruları ve x- ekseni ile sınırlı bölgenin alanı** Şekil.4.2'dende görüldüğü gibi dikdörtgen şeklindeki dA elamanlarının toplamının bir Limiti olarak belirli integralle aşağıdaki gibi ifade edilir.



Şekil 4.2

Şekilde, **dA** alan elamanı **y-** yüksekliğine ve **dx-** genişliğine sahip olan bir dikdörtgendir.

Buna göre;**dA = y.dx = f (x).dx**

olarak bulunur. Buradan, bu son ifadenin her iki tarafının integrali alınarak **dA** alan elamanlarının toplamının limiti olan **A** alanı **x = a**'dan **x = b**'ye kadar belirli integral yardımıyla;

$\mathbf{A = \int_a^b y dx = \int_a^b f(x) dx}$ olarak elde edilir. Bunu basit bir örnek ile açıklayalım.

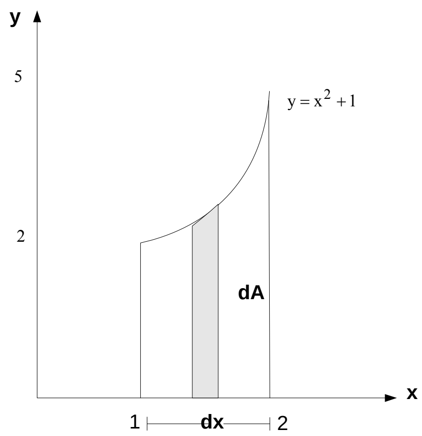
Örnek.4.1: $y=x^2+1$ eğrisi x=1, x=2 doğruları ve x-ekseni ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm.4.1: Şekil-4.3'deki taralı bölge $y=x^2+1$ eğrisi, x-ekseni, x=1, x=2 doğruları ile sınırlı bölgenin alanını göstermektedir. Bu sınırlı alan dA alan elemanlarının toplamına eşit olacağından bu toplamı; $A = \int dA = \int (x^2+1)dx$ ile bulabiliriz. Böylece x-ekseni doğrultusundaki elemanların x =1'den x =2'ye kadar olan toplamı;

olarak elde edilir.

$$A = \int_1^2 (x^2+1).dx = \left(\frac{x^3}{3}+x\right|_1^2$$

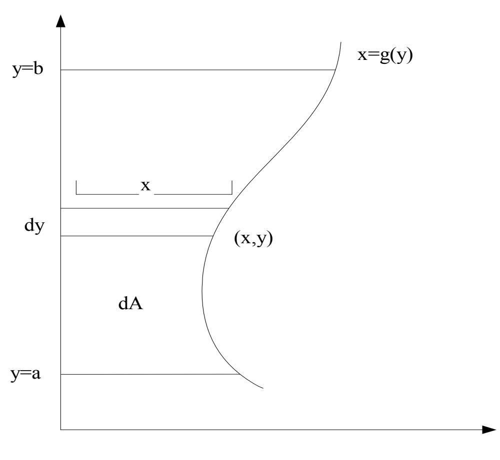
$$= \left(\frac{2^3}{3}+2\right)-\left(\frac{1^3}{3}+1\right) = \frac{10}{3}\text{br}^2$$



Şekil 4.3

4.1.2. x = g(y) eğrisi, y-ekseni y = a, y = b doğruları ile sınırlı bölgenin alan hesabı

Yandaki şekil x = g(y) eğrisi, y-ekseni, y = a ve y = b doğruları ile sınırlı bölgenin alanını göstermektedir (Şekil 4.4). x = g(y) eğrisi üzerindeki (x,y) noktasından x yüksekliği ve dy genişliğine sahip yatay alan elemanını bir dikdörtgen olarak alalım. Bu dikdörtgen elemanın alanına dA diyelim. Böylece toplam alan, dA elemanlarının toplamının Limiti olarak integral yardımıyla;



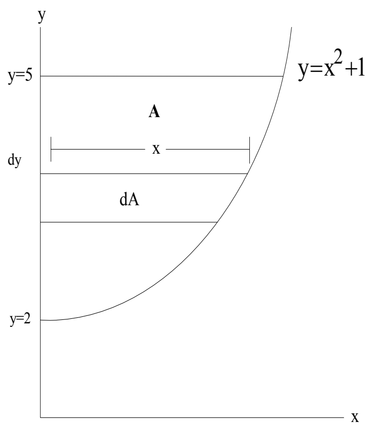
Şekil 4.4

$A= \int dA = \int xdy$ olarak elde edilir. Böylece x =g(y) eğrisi y = a, y = b doğruları ve y-ekseni ile sınırlı bölgenin alanı;

$$\mathbf{A = \int_a^b x dy = \int_a^b g(y)dy} \quad \text{olur.}$$

Örnek.4.2: $y = x^2+1$ eğrisi y-ekseni, $y = 2$, $y = 5$ doğruları ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm.4.2: Aşağıdaki şekil, $y = x^2+1$ eğrisi y-ekseni $y = 2$, $y = 5$ doğruları ile sınırlı bölgeyi göstermek üzere bu alan dA yatay alan elemanlarının toplamının bir limiti olarak;



$$dA = xdy \Rightarrow A = \int_a^b xdy \text{ elde edilir. Buna göre;}$$

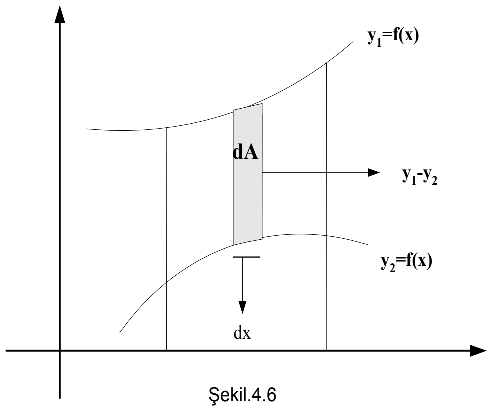
$$A = \int_2^5 xdy = \int_2^5 \sqrt{y-1}\,dy = \frac{2}{3}(y-1)^{\frac{3}{2}}\Big|_2^5$$

$$= \frac{2}{3}\left[(5-12)^{\frac{3}{2}} - (2-1)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{3}{2}[8-1] = \frac{14}{3}\text{ br}^2 \text{ olur.}$$

4.2. İki Eğri Arasinda Kalan Alan Hesabi

4.2.1. $y_1=f(x)$, $y_2=g(x)$ eğrileri ile x=a, x=b doğruları arasında kalan alan



Şekil.4.6

Yandaki şekil $\mathbf{y_1=f(x)}$, $\mathbf{y_2=g(x)}$ eğrileri x=a, x=b doğruları ile sınırlı alanı göstersin. (Şekil 4.6) Burada, bu sınırlı alanı **(A)** bulmak için küçük bir alan elamanını dikdörtgen olarak alalım ve bu elemana **dA** diyelim . Buna göre, **dA**, yüksekliği $\mathbf{y_1-y_2}$ ve genişliği **dx** olan bir dikdörtgen olup bu dikdörtgen elemanın dA alanı ;

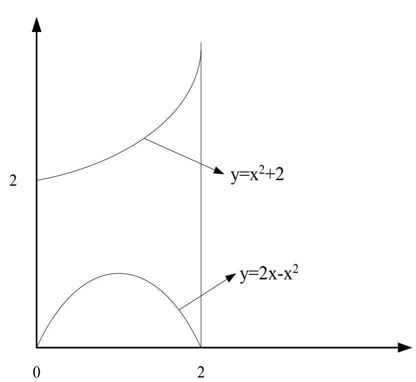
$$\mathbf{dA=(y_1 - y_2)dx = [f(x) - g(x)]dx \;\ldots\ldots\ldots\ldots(*)}$$

olur. Burada, **A**, bir bölgenin alanı olduğundan pozitif olmak zorundadır. Negatif çıkması ise **f(x) - g (x)** yerine **g (x) –f (x)** olması ile ortaya çıkar. Böylece (*) ifadesinin her iki yanının integrali alınırsa x=a , x=b sınırları için;

$$\mathbf{A = \int_a^b (y_1 - y_2).dx = \int_a^b (f(x) - g(x)).dx} \text{ olur.}$$

Örnek.4.3: $y=x^2+2$ ile $y=2x- x^2$ eğrileri ve x=0, x=2 doğruları tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm.4.3:



Şekil 4.7

$$A = \int_a^b (y_1 - y_2)dx$$

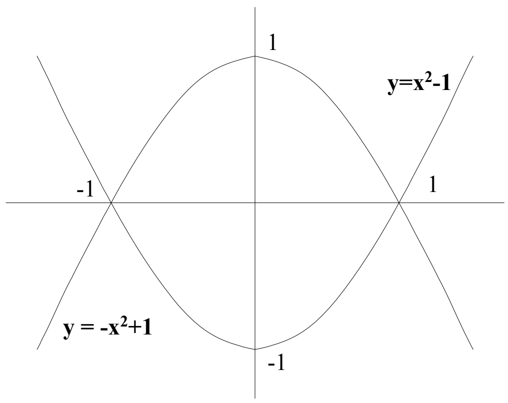
$$= \int_0^2 ([x^2 + 2] - [2x - x^2])dx$$

$$= \int_0^2 (2x^2 - 2x + 2)dx$$

$$= \left(\frac{2}{3}x^3 - x^2 + 2x\right]_0^2 = \frac{16}{3}br^2$$

Örnek.4.4: $y=x^2-1$ ile $y=-x^2+1$ eğrileri arasında kalan alanı bulunuz.

Çözüm.4.4: Bu örnekte sınırlar verilmediği için integral sınırlarının hangi x'ler için olduğunu bulmamız gerekir. Şimdi bu eğrilerin grafiğini çizelim.



Şekil 4.8

$y=x^2-1$, $y=-x^2+1$

$y=y$

$x^2-1=-x^2+1$

$2x^2-2=0$ ise $x^2-1=0$ ve $x=\pm 1$ olur.

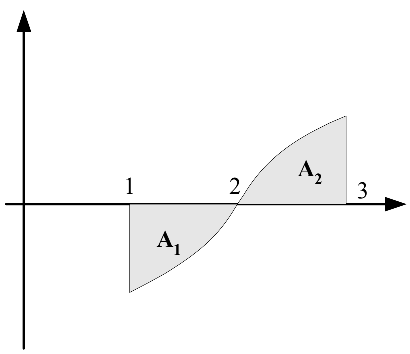
Böylece x= -1 'den x=+1 'e kadar olan alan;

$$A=\int_{-1}^{1}(y_1-y_2)dx=\int_{-1}^{1}\left[(-x^2+1)-(x^2-1)\right]dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(-2x^2+2)dx=\left(\left(-\frac{2}{3}x^3+2x\right]_{-1}^{1}=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}\,br^2 \text{ olarak bulunur.}$$

Örnek.4.5: $y=x^2-4$ eğrisi x=1, x=3 doğruları ve x-ekseni ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm.4.5: Şekilde görüldüğü gibi istenilen alan A_1 ve A_2 olmak üzere iki alanın toplamından ibarettir. (Şekil 4.9) Bu alanların toplamı belirli integralin özelliklerinden ;



Şekil.4.9

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad \left(c\in[a,b]\right)$$

yardımıyla bulunur. Buradan fonksiyonun x-eksenini kestiği nokta; $x^2-4=0 \Rightarrow x=2$ olur. Böylece istenilen alan;

$$A = A_1 + A_2 = \int_1^2 (y_1-y_2)dx + \int_2^3 (y_1-y_2)dx$$

yardımıyla;

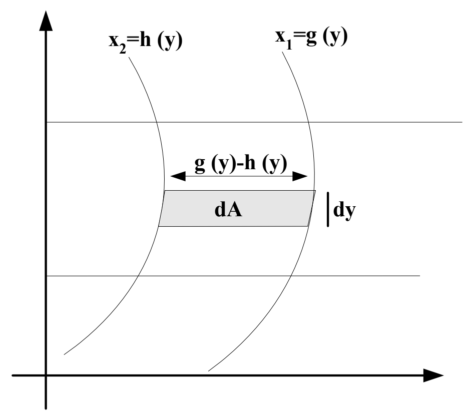
$$A=\int_1^2\left(0-\left(x^2-4\right)\right)dx+\int_2^3\left(\left(x^2-4\right)-0\right)dx$$

$$A=-\int_1^2\left(x^2-4\right)dx+\int_2^3\left(x^2-4\right)dx$$

$$=\left(-\frac{x^3}{3}+4x\right]_1^2+\left(\frac{x^3}{3}-4x\right]_2^3=\frac{12}{3}=4br^2 \text{ elde edilir.}$$

x_1=g(y), x_2 = h(y) eğrileri ile y=a, y=b doğruları arasında kalan bölgenin alanı

x_1=g(y), **x_2 = h(y)** eğrileri **y=a**, **y=b** doğruları ile sınırlı bölgenin alanını göz önüne alalım. (Şekil. 4.10) Şekilde iki eğri arasında kalan alana **A** diyelim. Buna göre, genişliği **dy** ve yüksekliği **g (y) – h (y)** olan **dA** küçük alan elamanını göz önüne alalım.



Şekil.4.10

Buradan;**dA = [g(y)-h(y)]dy** bulunur.Her iki tarafın integrali alınırsa y = a, y = b sınırları itibarıyla dA alan elamanlarının toplamının limiti olarak istenilen sınırlı bölgenin alanı ;

$$\mathbf{A} = \int_a^b (x_1 - x_2).dy = \int_a^b [g(y) - h(y)].dy$$

olarak elde edilir.

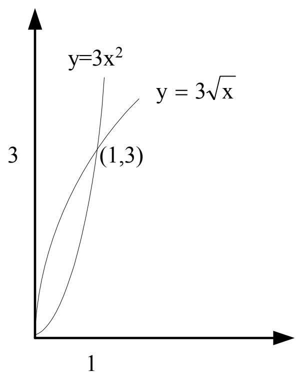
Örnek.4.6: $y = 3\sqrt{x}$ ile $y = 3x^2$ eğrileri arasında kalan sınırlı bölgenin alanını bulalım.

Çözüm.4.6: Öncelikle bu eğrilerin grafiği çizilir ve x ile y'nin sınırları belirlenir. Buna göre;

$$y = y \Rightarrow 3\sqrt{x} = 3x^2 \qquad x_1 = 0 \text{ için } y_1 = 0$$
$$9x - 9x^4 = 0 \qquad x_2 = 1 \text{ için } y_2 = 3$$
$$x_1 = 0, x_2 = 1 \ .$$

Yandaki şekilde görüldüğü gibi istenilen alan hem x'in sınırlarına göre hemde y'nin sınırlarına göre çözülebilir. Böylece;

$$A = \int_0^1 (y_1 - y_2)dx = \int_0^1 (3\sqrt{x} - 3x^2)dx$$
$$\left(2x^{\frac{3}{2}} - x^3\right]_0^1 = 1br^2$$



Şekil 4.11

veya

$$\frac{y^2}{9} = x_2, \sqrt{\frac{y}{3}} = x_1 \text{ dersek ;}$$

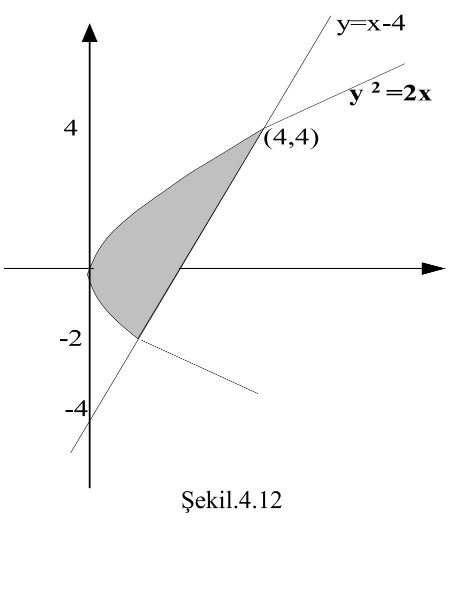
$$A = \int_0^3 (x_1 - x_2)dy = \int_0^3 \left(\sqrt{\frac{y}{3}} - \frac{y^2}{9}\right)dy = \left[3\frac{2}{3}\left(\frac{y}{3}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{y^3}{27}\right]_0^3 = 1br^2$$

olarak bulunur.

Not: Eğer problemimiz hem x'in sınırlarına göre hemde y'nin sınırlarına göre ifade edilebiliyorsa bunlardan birisi kullanılarak yukarıdaki çözüme gidilir. x'in sınırları söz konusu olduğunda eğriden aşağıdaki eğri çıkarılarak integral alınırken y'nin sınırları söz konusu olduğunda sağdaki eğriden soldaki eğri çıkarılarak integral alınıp istenen alan aynı olarak bulunur.

Örnek.4.7: $y^2 = 2x$ eğrisi ile y=x-4 doğrusu arasında kalan sınırlı bölgenin alanını bulalım.

Çözüm.4.7: Bu fonksiyonların grafiklerini çizip istenilen alanı ve buna bağlı olarak x veya y'ye bağlı sınırlarımızı bulalım . $A = \int_a^b (x_1 - x_2)dy$ idi. Böylece;



Şekil.4.12

$\frac{y^2}{2} = x$ ve $y+4 = x$ ise $x = x$ eşitliğinden

$\frac{y^2}{2} = y+4$ buradan, $y^2 - 2y - 8 = 0$

$\Rightarrow y_1 = 2, y_2 = 4$ olarak elde edilir.

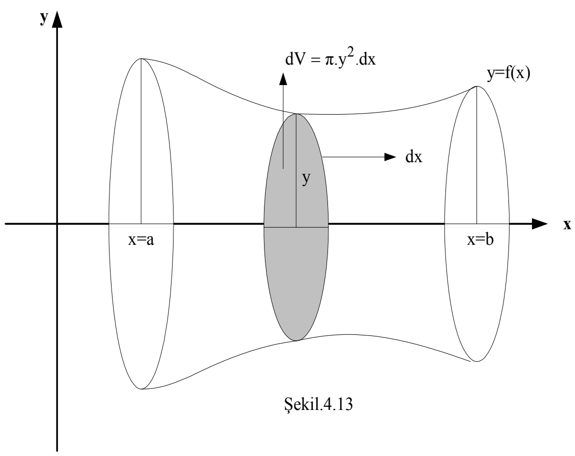
$$A = \int_{-2}^{4}\left[(y+4) - \frac{y^2}{2}\right]dy = \left(\frac{y^2}{2} + 4y - \frac{y^3}{6}\right]_{-2}^{4} = 18br^2;$$

bulunur.

4.3. Dönel Cisimlerin Hacminin Bulunması

Belirli integralin uygulamaları sadece bir eğri altında kalan alan veya iki eğri arasında kalan alanı bulmaktan ibaret değildir. Bu nedenle bu ve takip eden bölümlerde bir eğrinin bir doğru veya bir eksen etrafında dönmesiyle oluşan dönel cismin hacmi, dönel yüzeylerin alanı, yay uzunluğu ve bunun yanısıra bir fonksiyonun efektif (etkin) değerini ve ortalama değerini ele alacağız.Sınırlı bir bölgenin bir eksen veya bir doğru etrafında dönmesiyle oluşan cisme **dönel cisim** denir. Sınırlı bir bölgenin alanı söz konusu iken bir dönel cismin hacmi söz konusu olur. Bu hacim hesaplanırken iki metod uygulanır.

4.3.1. Disk Metodu: **$y = f(x)$ eğrisi, x-ekseni ile $x = a$ ve $x = b$** doğruları ile sınırlı alanın **x-ekseni** etrafında döndürülmesiyle oluşan hacmi göz önüne alalım (Şekil 4.13). Buna göre, **V** hacim elamanını göstermek üzere bu elemanı bulmaya çalışalım.Şekilde görüldüğü gibi **dV** hacim elemanı bir disktir ve genişliği **dx** ‘ dir. Disk bir dairesel silindir olup **y** yarıçapı ve **dx** yüksekliğine sahiptir. Buna göre;



Şekil.4.13

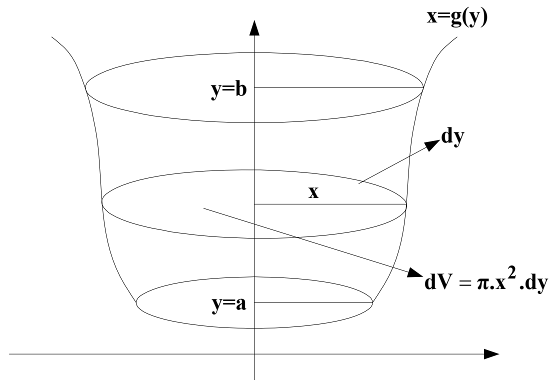
$$\mathbf{dV = \pi . y^2 dx \ \ldots\ldots \quad \ldots. (*)}$$

olarak bulunur. Böylece, **V** hacmi **dV** dairesel disklerinin hacimleri toplamının limitidir. Yani, **x = a’dan x = b’ye kadar dV dairesel disklerinin toplamının limiti (*) ifadesinin her iki yanının integralinin alınmasıyla;**

$$\mathbf{V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx}$$

olarak elde edilir.

Benzer şekilde, **$x = g(y)$** eğrisi , **y-ekseni**, **$y = a$** ve **$y = b$** doğruları ile sınırlı bölgenin **y-ekseni** etrafında dönmesiyle oluşan dönel cismin hacmi şu şekilde bulunur.



Şekil-4.14

Yandaki şekil x=g(y) eğrisi, y-ekseni, y=a y=b doğruları ile sınırlı bölgeyi göstermektedir. (Şekil-4.14) Bu alanın y-ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel cismin hacmine **V** diyelim.Bu cismi oluşturan **dV** hacim elamanlarının herbiri dairesel disktir ve bu diskin genişliği y'nin diferansiyeli **dy**'dir. Buradaki diskler dairesel silindir olup yarıçapları **x**, yükseklikleri **dy** olup **dV** hacim elemanı;

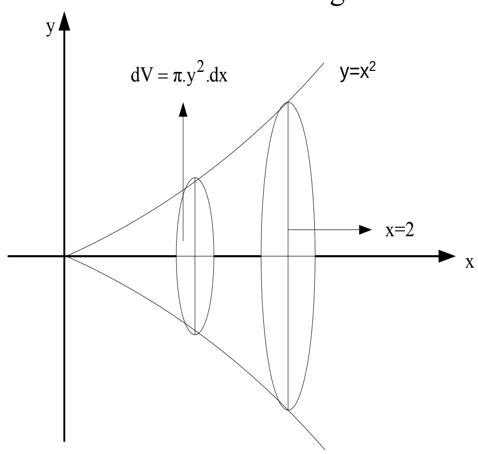
$$dV=\pi x^2 dy \ldots\ldots(*) \text{ olur.}$$

V hacim elemanı ise **dV** dairesel disklerinin hacimlerinin toplamının bir limiti olup (*) ifadesinin her iki yanının integrali alınıp y=a'dan y=b'ye kadar oluşan hacim elemanı;

$$V = \pi \int_a^b x^2\, dy = \pi \int_a^b [g(y)]^2\, dy \quad \text{olarak bulunur.}$$

Örnek.4.8: $y = x^2$ eğrisi $y = 0$, $x = 2$ doğruları ile sınırlı bölgenin alanının x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan hacim nedir?

Çözüm.4.8: İlk önce sınırlı bölgemizin x- ekseni etrafında dönmesiyle oluşan hacmi göz önüne alalım. (Şekil 4.15) Bir sınırlı bölgenin x-ekseni etrafında dönmesiyle oluşan hacmi V_x ile gösterirsek;



Şekil-4.15

$$Vx = \pi\int_0^2 y^2 dx = \pi\int_0^2 x^4 dx$$

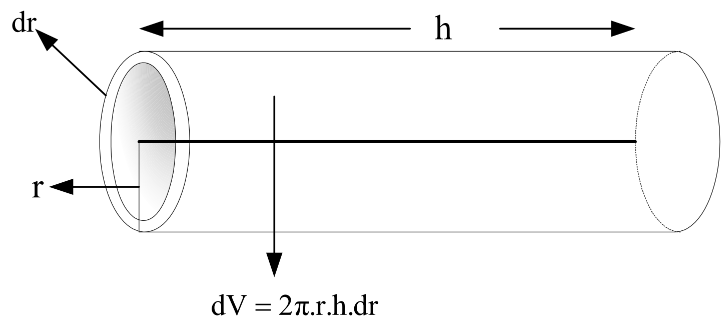
$$= \pi\left(\frac{x^5}{5}\right]_0^2$$

$$= \frac{32\pi}{5}\text{br}^3$$

olur.

4.3.2. Shell (Kabuk)(Tabaka) Metodu

Disk metodunda yukarıda gördüğümüz gibi sınırlı bir alanın bir eksen etrafında dönmesiyle oluşan cismin hacmini bulmak için bazen disk yerine ince zarlı bir kabuk (shell) kullanmak daha kolaydır.(Şekil.4.16)



Şekil-4.16

Burada, **dV** hacim elemanı yarıçapı **r**, yüksekliği **h** ve kalınlığı **dr** olan ince zarlı bir silindirik kabuktur. Böylece, **dV** hacim elemanlarının toplamının limiti r=a , r=b sınırları itibarı ile;

$$\mathbf{V = 2\pi \int_a^b rhdr}$$

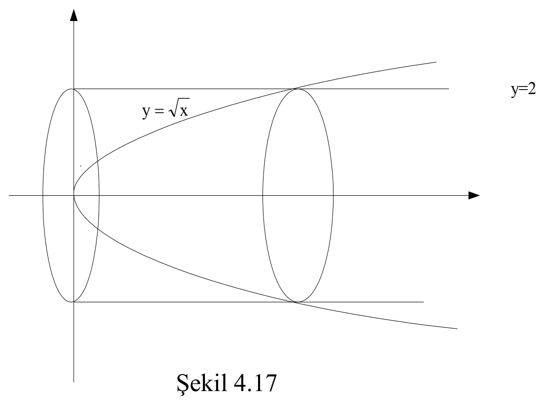
olur. Bu hacim yukarıdaki şekilden de görüldüğü gibi yükseklik boyunca dairesel dik silindirdir. (Şekil 4.16) Bu tabakanın uzunluğu kabuğun çevresine eşittir. Burada, **r,** kabuğun yarıçapıdır. Tabakanın **h** yüksekliği eğriye bağlıdır ve sınırlı alan döndüğünde buna bağlı olarak **dr** veya **dy** seçilir. Buna göre, **dV** hacim hacim elemanı;

$$\mathbf{dV=2\pi.r.h.dr}$$

şeklindedir. **h yüksekliği, r yarıçapı ve dr kalınlığı dönme ekseni ve döndürülmüş alana bağlıdır. Yani h,r ve dr değerleri her bir problem için belirlenmek zorundadır.**

Örnek.4.9 : $y = \sqrt{x}\ , y = 2\ , x = 0$ eğrileri ile sınırlı bölgenin hacmi nedir.

Çözüm.4.9: Şeklimizdende görüldüğü gibi burada;



Şekil 4.17

r = y

h = x

dr = dy

olur.Buna göre, **dV** hacim elemanı;

dV=2πrhdr=2π(y).(x).dy=2πy.y^{2}dy=2πy^{3}dy

ve buradan;

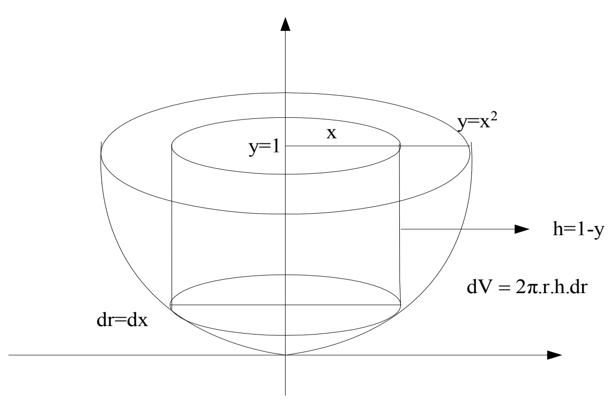
$$V = \int_0^2 dV = 2\pi \int_0^2 y^3 dy = 2\pi \left(\frac{y^4}{4} \right]_0^2 = 8\pi \quad br^3 \text{ olarak bulunur.}$$

Örnek.4.10: $y=x^2$ eğrisi x=0, y=1 doğruları ve y-ekseni ile sınırlı bölgenin y – ekseni etrafında dönmesi ile oluşan hacmi;

a) Shell Metodu

b) Disk Metodu yardımıyla bulunuz.

Çözüm.4.10: i) Problemimizi shell metodu ile çözelim. Öncelikle bunun için şeklimizi çizelim.(Şekil 4.18) Shell metodunda;



Şekil.4.18

h = 1-y

r = x

dr = dx değerleri dV hacim elemanında yerine yazılırsa;

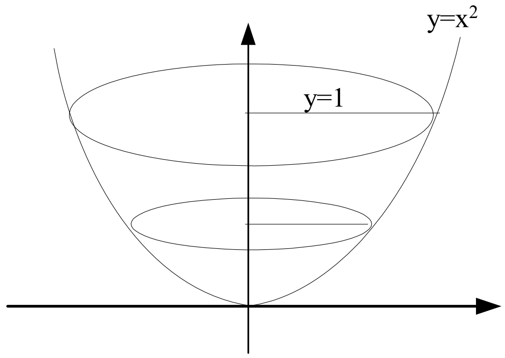
$dV=2\pi rhdr=2\pi.x.(1-y)dx = 2\pi(x).(1-x^2)dx$

olur. Buna göre V hacmi;

$$V = \pi\int_a^b x^2 dy = \pi\int_0^1 y dy$$

$$= \pi\left(\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2} br^3$$

ii) Disk yöntemi: Aynı problemin şeklini disk yöntemi için çizelim. (Şekil-4.19)



$$V_y = \pi\int_a^b x^2 dy = \pi\int_a^b y.dy$$

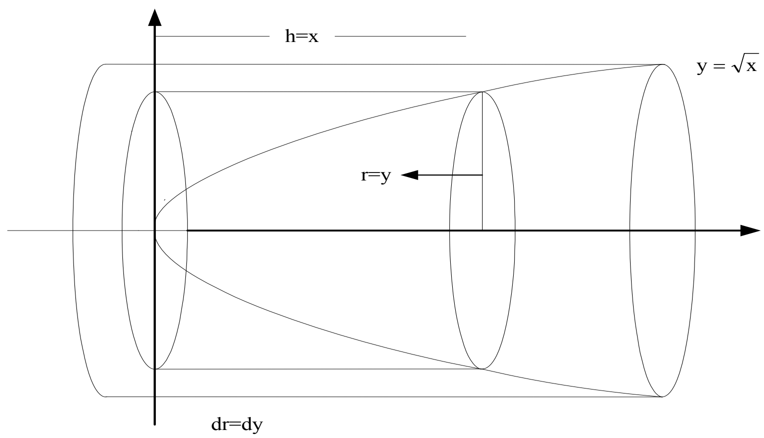
$$= \pi\left(\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2} br^3$$

Şekil-4.19

Örnek.4.11:

$y = \sqrt{x}$, $y = 2$ ve $x = 0$ ile sınırlı bölgenin x - ekseni etrafında dönmesiyle oluşan hacmi shell metodunu kullanarak bulunuz.

Çözüm.4.11:



Şekil-4.20

Yukarıdaki şekilde görüldüğü gibi $y = \sqrt{x}$, y=2 ve x=0 ile sınırlanan bölgenin x-ekseni etrafında dönmesiyle elde edilen cisme r=y ile yarıçapı, h=x ile yüksekliği ve dr=dy alalım . Hacim elemanını bulmak için yukarıdaki değerler yerine yazılırsa;

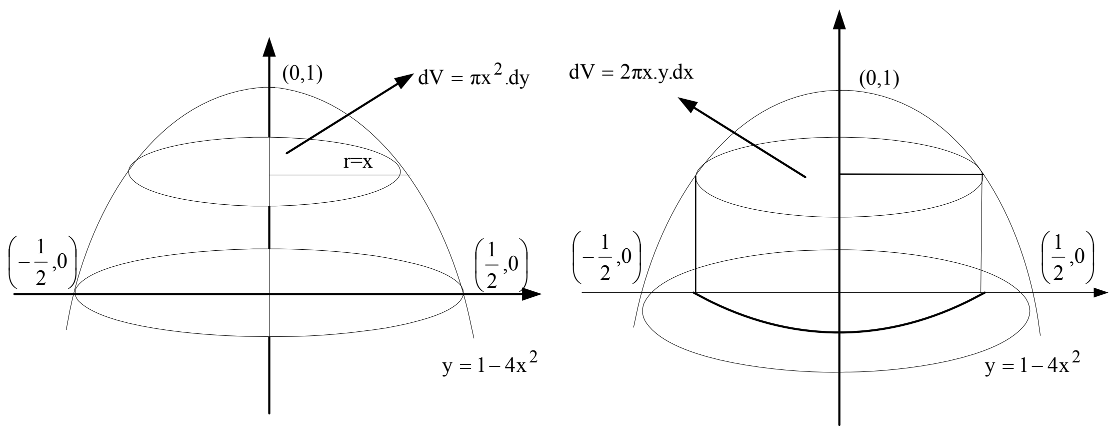
$$dV=2\pi rhdr=2\pi(y)(x)dy=2\pi(y)(y^2)dy=2\pi y^3dy$$

olur. Buradan istenen V hacmi;

$$V = \int_0^2 dv = 2\pi\int_0^2 y^2 dy = 2\pi\left(\frac{y^4}{4}\right]_0^2 = 8\pi$$ olarak elde edilir.

Örnek.4.12: $y = 1-4x^2$, $x = 0$ ve $y = 0$ parabolü ile sınırlı bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cisim hacmini bulunuz.

Çözüm.4.12:



(Şekil – 4.21 – a – b)

(Şekil 4.21-a)'da verilen cisim hacmini disk metodu kullanarak çözelim. Burada x^2 yerine (1-y) / 4 konularak;

$$V = \pi\int_0^1 x^2 dy = \pi\int_0^1 \frac{1-y}{4} dy = \frac{\pi}{4}\left(y - \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{8}$$

olarak bulunur. (Şekil 4.21-b)' deki cismi şimdide shell metodunu kullanarak çözelim. Şeklin yarıçapı r=x , yüksekliği h=y ve dr=dx alarak hacim elemanını bulalım.

$$dV=2\pi xydx=2\pi x(1-4x^2)dx=2\pi(x-4x^3)dx$$

y=0 'a göre x'in pozitif değerinin alınmasıyla integralin üst sınırı bulunmuş olur.

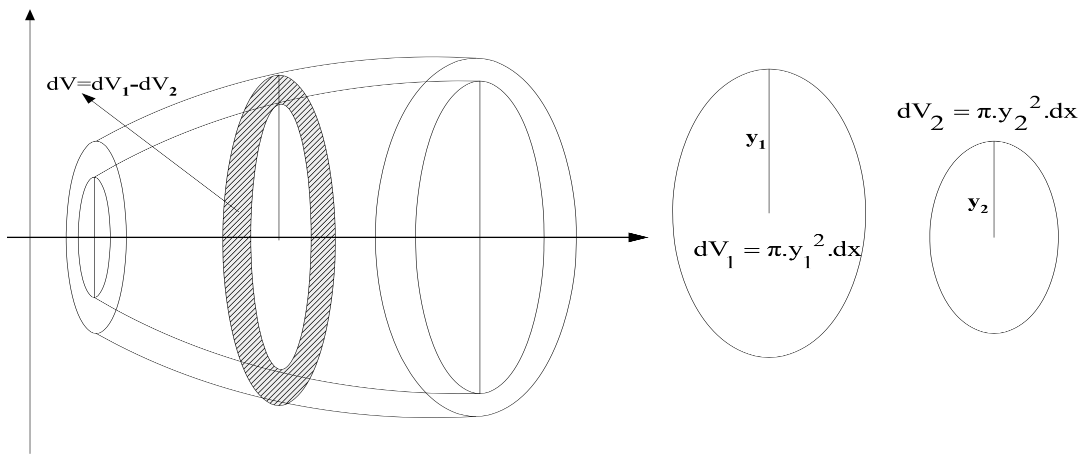
$1 - 4x^2=0 \Rightarrow x^2=1/4$ ve $x=\pm 1/2$ bulunur.Buna göreV hacmi;

$$V = 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x - 4x^3\right)dx = 2\pi\left(\frac{x^2}{2} - x^4 \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{8} \text{ bulunur} \quad .$$

Böylece, aynı değer shell ve disk metoduyla bulunmuş oldu.

4.3.3. İki Eğri Arasında Kalan Sınırlı Bölgenin Alanının Bir Eksen Etrafında Döndürülmesiyle Oluşan Dönel Cismin Hacmi:

4.3.3.1. $y_1 = f(x)$, $y_2 = g(x)$ eğrileri ile $x = a$, $x = b$ doğruları arasında kalan sınırlı bölgenin alanının x-ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel cismin hacmi:



Şekil 4.22

(Şekil 4.22)'de de görüldüğü gibi bu iki eğri arasında kalan sınırlı bölgenin x-ekseni etrafında dönmesiyle oluşan hacim, eğrilerin hacimleri farkına eşittir. Bu hacmi bulmak için hacim elemanı olarak alınan dairesel disklerin hacimlerini göz önüne alalım.

$y_1 = f(x)$ eğrisine ait dairesel diskin hacmi $\rightarrow$ $\mathbf{dV_1 = \pi y_1^2 dx}$

$y_2 = g(x)$ eğrisine ait dairesel diskin hacmi $\rightarrow$ $\mathbf{dV_2 = \pi y_2^2 dx}$

Buna göre bu iki hacim elemanı arasındaki fark bize taralı olarak gösterilen dairesel diskin hacmini verir. Yani;

$$\mathbf{dV = dV_1 - dV_2 = \pi(y_1^2 - y_2^2)dx} \qquad \text{olur.}$$

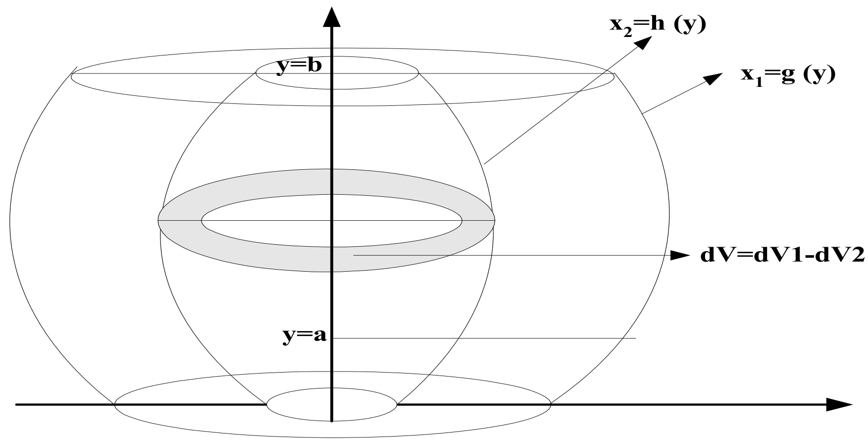
Böylece dV hacim elemanlarının toplamının limiti yani integrali;

$\mathbf{\int dv = \int \pi(y_1^2 - y_2^2)dx}$ **ve böylece x=a ' da x=b ' ye kadar istenilen hacim;**

$$\mathbf{V_x = \pi \int_a^b \left(y_1^2 - y_2^2\right)dx \quad yada \quad V_x = \pi \int_a^b \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2\right)dx}$$

olarak bulunur.

4.3.3.2 : $x_1 = g(y)$, $x_2 = h(y)$ eğrileri ile $y = a$, $y = b$ doğruları arasında kalan sınırlı alanın y-ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel cisim hacmi :



Şekil-4.23

4.3.3.1'dekine benzer olarak istenilen hacim formulünü bulmak için ele alınan hacim elemanı (taralı olarak gösterilen dairesel disklerin arasındaki hacim) dairesel disklerin hacimleri farkına eşittir.

$\mathbf{dV_1 = \pi x_1^2 dy}$ → Büyük dairesel diskin hacmi.

$\mathbf{dV_2 = \pi x_2^2 dy}$ → Küçük dairesel diskin hacmi.olmak üzere;

$\mathbf{dV = dV_1 - dV_2 = \pi(x_1^2 - x_2^2)dy}$**…………..(*)**olarak bulunur. Böylece dV hacim elemanlarının toplamının limiti yani (*) ifadesinin integrali istenilen V hacmi;

$\mathbf{\int dv = \int \pi(x_1^2 - x_2^2)dy}$

ve x = a , x = b sınırları itibarıyla

$$\mathbf{V_y = \pi \int_a^b \left(x_1^2 - x_2^2\right).dy}$$

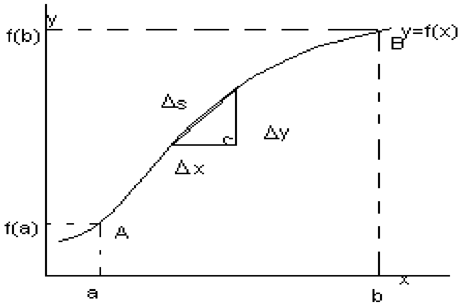
veya

$$\mathbf{V_y = \pi \int_a^b \left([g(y)]^2 - [h(y)]^2\right).dy}$$ olarak bulunur.

(*) V_y : y-ekseni etrafında dönen cismin hacmini verir.

(**) V_x = x- ekseni etrafında dönen cismin hacmini ifade eder.

4.4. YAY UZUNLUĞU



Şekil.4.24

f:[a,b] $\rightarrow$ IR sürekli türeve sahip pozitif bir fonksiyon olsun. (Şekil.4.24) Bu eğrinin A ve B noktaları arasındaki uzaklığı bulmaya çalışalım. **Δs** ile göstereceğimiz eğrinin küçük bir parçasının uzunluğunu gözönüne alalım. Pisagor teoremine göre ;

$(\Delta s)^2 \cong (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ alınabilir. Bu son ifadenin her iki yanı $(\Delta x)^2$ ile bölünerek;

$$\frac{(\Delta s)^2}{(\Delta x)^2} \cong 1 + \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}$$

bulunur. Buradan son ifadenin her iki tarafının karekökü alınarak;

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

elde edilir. Ayrıca ; $\Delta x \rightarrow 0$ için;

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{ds}{dx}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

ve böylece;

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

olarak bulunur. Böylece, A ve B noktaları arasındaki eğri uzunluğu yukarıda bulunan **ds** eğri parçası uzunluklarının toplamının limiti olarak integral yardımıyla ;

$$\mathbf{s} = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)^2}\,dx$$ bulunur.

Buna göre, **y = f(x)** eğrisinin **x = a**'dan **x = b**'ye kadar olan parçasının uzunluğu;

$$\mathbf{s} = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\,dx$$ olur.

Eğer, **x = g(y)** eğrisinin **y = c**'den **y = d**'ye kadar olan kısmının uzunluğu bulunmak istenirse yukarıdaki mantığa benzer olarak;

$$s = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

veya elde edilir.

$$s = \int_c^d \sqrt{1 + (x')^2}\, dy$$

Örnek.4.13: x = 0'dan x = 4 'e kadar $y^2 = x^3$ eğrisinin I.bölgedeki uzunluğunu bulunuz.

Çözüm.4.13: $y^2 = x^3 \Rightarrow y = x^{3/2} \Rightarrow dy/dx = 3/2x^{1/2} \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{9x}{4}$

Böylece, s yay uzunluğu; $s = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$

formülünden; $s = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9x}{4}}\, dx$ olur.

Eğer $1 + \frac{9x}{4} = u$ dersek $\frac{9}{4}dx = du$ elde edilir ve bu değerler s integralinde u'nun sınırları itibariyle yerine yazılırsa; $x = 0$ için $u = 1$ ve $x = 4$ için $u = 10$

$$s = \int_1^{10} \frac{4}{9}\sqrt{u}\, du = \frac{4}{9}\frac{2}{3}(u^{3/2}\Big|_1^{10}$$

$$= \frac{8}{27}(10^{3/2} - 1^{3/2})$$

$$= \frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1)$$ olarak bulunur.

Örnek 4.14: $x^2+y^2 = r^2$ merkezil çemberinin çevresini bulunuz.

Çözüm 4.14:

$y = \sqrt{r^2 - x^2}\ (r > 0)$

$y' = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$

$(y')^2 = \frac{x^2}{r^2 - x^2}$

$\begin{pmatrix} x = r\sin Q \\ dx = \cos Q.dQ \end{pmatrix}$

$$\frac{1}{4}s = r\int_0^r \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\,dx = \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}dx$$

$$\frac{1}{4}s = r\int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = r\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r\cos Q dQ}{\sqrt{r^2 - r^2\sin^2 Q}} = r\int_0^{\frac{\pi}{2}} dQ$$

$$\frac{1}{4}s = r\left(Q \Big|_0^{\frac{\Pi}{2}}\right) = r\left(\frac{\Pi}{2} - 0\right) \Rightarrow s = 2.\Pi.r$$ olur

$x = 0 \Rightarrow Q = 0$

$x = r \Rightarrow Q = \frac{\pi}{2}$

Örnek.4.15: $f:[1,e]\to IR$, $f(x) = \left(\frac{1}{8}\right)x^2 - \ln x$ fonksiyonunun gösterdiği eğrinin uzunluğunu bulunuz.

Çözüm.4.15:

$$y' = \frac{1}{4}x - \frac{1}{x}$$

$$(y')^2 = \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{x^2}$$

$$s = \int_1^e \sqrt{1+(y^1)^2}\,dx = \int_1^e \sqrt{1+\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{x^2}}\,dx$$

$$= \int_1^e \sqrt{\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{x}\right)^2}\,dx$$

$$= \int_1^e \left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{x}\right)dx$$

$$= \left(\frac{1}{8}e^2 + \ln e\ \Big|_1^e\right.$$

$$= \left(\frac{1}{8}e^2+\ln e\right) - \left(\frac{1}{8}(1)^2+\ln 1\right) = \frac{1}{8}\left(e^2 - 7\right)br^2$$

ALIŞTIRMALAR

1. $y = x^{3/2}$ eğrisinin $x = 0$'dan $x = \frac{7}{3}$'e kadar olan uzunluğu bulunuz.

2. $y = \log\cos x$ eğrisinin $x = 0$'dan $x = \frac{\pi}{3}$'e kadar olan uzunluğunu bulunuz.

3. $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{\frac{x}{a}})$ eğrisinin $x = 0$'dan $x = x_1$'e kadar olan uzunluğu nedir?

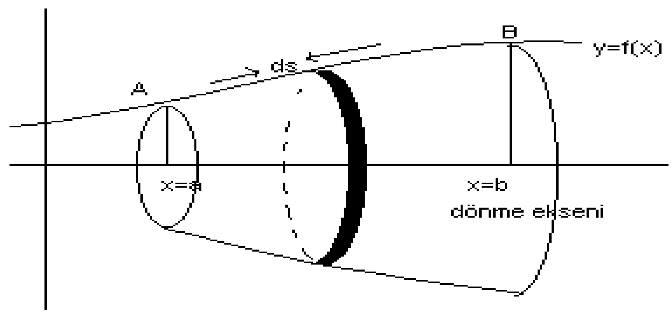
4. $y = 2\sqrt{x}$ eğrisinin $x = 0$'dan $x = 3$'e kadar uzunluğu nedir?

5. $y = 2e^{\sqrt{x}}$ eğrisinin $x = 0$'dan $x = 1$'e kadar uzunluğu nedir?

6. $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}$ eğrisinin $x = 1$'den $x = 3$'e kadar uzunluğu nedir?

4.5 DÖNEL YÜZEYİN YANAL ALANI

Bir alanın bir eksen etrafında dönmesiyle oluşan cisme **dönel cisim** denir. Böyle bir cismin yüzey alanına ise **dönel yüzeyin yanal alanı** denir. Bir dönel yüzeyin yanal alanını gösteren aşağıdaki şekli gözönüne alalım.(Şekil 4.25)



Şekil 4.25

y = f(x) eğrisi x = a, x = b doğruları ve x-ekseni ile ile sınırlı bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanı (Şekil. 4.25) danda görüldüğü gibi koyu renkli olan dairesel kesitlerin alanları toplamına eşittir. Bu toplamı bulmadan önce bu dairesel kesitlerden birinin alanını **dS** ve **ds** olarak kesitin kalınlığını ifade eden yay uzunluğunu alırsak;

dS = 2πyds ………… (1) olur.

Burada; $ds = \sqrt{1+\left(\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)^2}dx$ değeri (1)de yerine yazılırsa ;

$dS = 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$ olarak bulunur. Böylece a'dan b'ye kadar böyle elemanların alanları toplamı integral yardımıyla;

$$S = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$$ şeklinde bulunur.

Özet olarak :

i) $f:[a,b]\to IR$ sürekli türeve sahip pozitif bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyon gösterdiği eğri parçasının x-eksenini etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin yanal alanı;

$$\mathbf{S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx}$$ olarak bulunur.

Benzer şekilde;

ii) g:[a,b]→IR sürekli türeve sahip olan pozitif bir fonksiyon olsun . Bu fonksiyonun gösterdiği eğrinin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin yanal alanı;

$$\mathbf{S = 2\pi\int_a^b g(y)\sqrt{1+[g'(y)]^2}\,dy}$$

veya

$$\mathbf{S = 2\pi\int_a^b x\sqrt{1+(x')^2}\,dy}$$

olarak elde edilir.

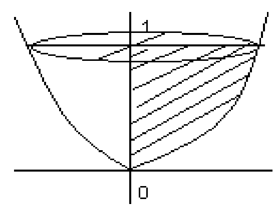
Örnek.4.16: $f(y) = x^2$ eğrisi y =1 , x = 0 doğruları ile sınırlı bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin yanal alanını bulunuz .

Çözüm.4.16:

$$y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$$

$$x' = \frac{1}{2\sqrt{y}} \qquad \Rightarrow \quad s = 2\pi\int_0^1 x\sqrt{1+(x')^2}\,dy = 2\pi\int_0^1 \sqrt{y}\sqrt{1+\frac{1}{4y}}\,dy$$

$$(x')^2 = \frac{1}{4y}$$



Şekil 4.26

$$s == 2\pi\int_0^1 \sqrt{y}\,\frac{\sqrt{4y+1}}{2\sqrt{y}}\,dy = \pi\int_0^1 \sqrt{4y+1}\,dy = \pi\frac{1}{4}\frac{2}{3}(4y+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{\Pi}{6}(5\sqrt{5}-1)\ \text{br}^2$$

olarak bulunur.

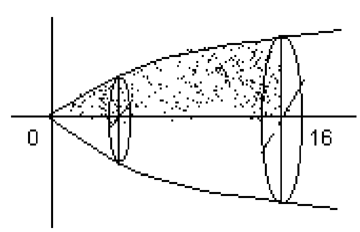
Örnek.4.17: x = 0 ‘ dan x = 16 ya kadar olan $y^2 = 16x$ parabolünün x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin yanal alanını bulunuz.

Çözüm.4.17:

$$y^2 = 16x \Rightarrow y = 4\sqrt{x}$$

$$y^1 = \frac{4}{2\sqrt{x}}$$

$$(y^1)^2 = \frac{4}{x}$$



Şekil 4.27

$$s = 2\pi\int_0^{16} y\sqrt{1+(y')^2}\,dx = 2\pi\int_0^{16} 4\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{4}{x}}\,dx$$

$$= 8\pi\int_0^{16}\sqrt{x+4}\,dx = 8\pi\,\frac{2}{3}((x+4)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{16}$$

$$=\frac{16}{3}\pi\left(20\sqrt{20}-8\right)\cong 1365\text{br}^2$$ bulunur.

ALIŞTIRMALAR

1) $y = \frac{x^2}{9}$ eğrisi x=0, x=3 doğruları ile sınırlı bölgenin (x) ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin yanal alanı nedir?

2) $y^2 = 24 - 4x$ eğrisi x=3, x=6 doğruları ile sınırlı bölgenin (x) ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin yanal alanı nedir?

3) $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$ eğrisi, x=1, x=3 doğruları ile sınırlı bölgenin (x) ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin yanal alanı nedir?

4) $y = e^{-x}$ eğrisi, x=0, x=5 doğruları ile sınırlı bölgenin (x) ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin yanal alanı nedir?

5) $y = 3x^2$ eğrisi, x=0, x=5 doğruları ile sınırlı bölgenin (y) ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin yanal alanı nedir?

6) $y = 4 - x^2$ eğrisi, x=0, x=2 doğruları ile sınırlı bölgenin (y) ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin yanal alanı nedir?

7) $y = 24 - x^2$ eğrisi, x=0, x=2 doğruları ile sınırlı bölgenin (y) ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin yanal alanı nedir?

8) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ eğrisinin I. bölge ile sınırlı kısmının x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin yanal alanı nedir?

9) $y^2 = 4x$ eğrisi, x=0, x=3 doğruları ile sınırlı bölgenin (x) ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin yanal alanı nedir?

10) $y^2 = x + 3, y^2 = 4x$ eğrileri arasındaki sınırlı bölgenin (x) ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin yanal alanı nedir?

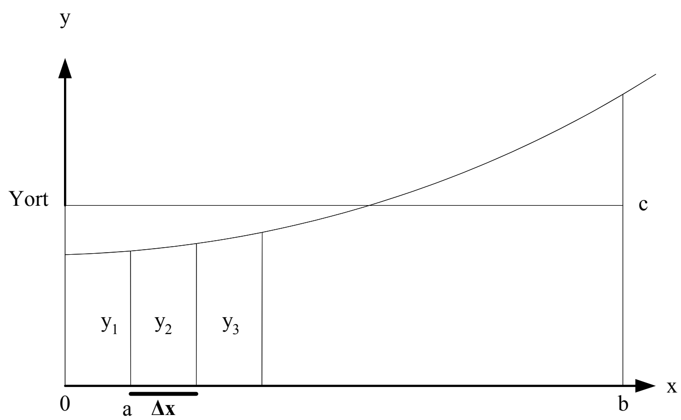
4.6 Bir Fonksiyonun Ortalama ve Etkin (Efektif) Değerleri

4.6.1. Bir Fonksiyonun Ortalama Değeri

Hatırlanacağı gibi y = f(x) eğrisi x = a , x = b doğruları ve x-ekseni ile sınırlı bölgenin alanı;

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

olarak elde edilmişti. Aşağıdaki şekilde taralı bölge bu alanı göstermektedir.(Şekil 4.28)



Şekil 4.28

Aynı aralık içersinde bu fonksiyon ortalama ordinatı olan y_{ort} değeri eğri altında kalan alan ile aynı değere sahip olan **abcd** dikdörtgeninin alanıdır. Yani;

$$(b-a).y_{ort} = A = \int_a^b f(x)dx$$

ve buradan;

$$y_{ort} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \text{ olarak bulunur.}$$

Örnek.4.18: V=vsinQ sinüsodial gerilimin yarı dairesinin ortalama ordinatını bulunuz.

Çözüm.4.18: a = 0, b = π olduğuna göre ;

$$V_{ort} = \frac{v}{\pi-0}\int_0^\pi \sin Q dQ = \frac{v}{\pi}\left(-\cos Q\right]_0^\pi$$

$$= \frac{v}{\pi}\left(-\cos\pi + \cos Q\right) = \frac{2}{\pi}v = 0{,}637v$$

olarak bulunur.

4.6.2 Bir Fonksiyonun Etkin Değeri

Bir fonksiyonun etkin değeri **(rms-root-mean-square)** ordinatların karesinin ortalamasının kareköküdür. Eğer, Şekil.4.28'de Δx eşit uzunluğunda bölünmüş n tane y değerini göz önüne alırsak;

$$\text{rms} \cong \sqrt{\frac{y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2}{n}} \quad \text{veya} \quad \text{rms} \cong \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} yi^2}{n}}$$

olur.Bu ifadede pay ve payda Δx ile çarpılırsa ;

$$\text{rms} \cong \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} yi^2 \Delta x}{n\Delta x}}$$

elde edilir. Burada **n.Δx, (b-a)** aralık genişliğini verir.n sonsuza yaklaşırken ;

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} yi^2 \Delta x = \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

elde edilir. Buna göre;

$\text{rms} = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x)]^2 dx}$ ifadesi bir fonksiyonun etkin değerini veren formüldür.

Örnek.4.19: Önceki örneğin sinüsodial voltajı için rms değerini bulunuz.

Çözüm.4.19: a=0, b=π değerleri rms formülünde yerine yazılarak ;

$$\text{rms} = \sqrt{\frac{1}{\pi - 0} \int_0^\pi v^2 \text{Sin}^2 Q dQ} = \sqrt{\frac{v^2}{\pi} \int_0^\pi \text{Sin}^2 Q dQ}$$

$$\int_0^\pi \text{Sin}^2 Q dQ = \left(\frac{Q}{2} - \frac{\text{Sin} 2Q}{4} \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2} - \frac{\text{Sin} 2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

olur. Bu sonucu **rms** ' de yerine yazacak olursak;

$$\text{rms} = \sqrt{\frac{V^2}{\pi} \frac{\pi}{2}} = \frac{V}{\sqrt{2}} = 0{,}707\text{V} \text{ elde edilir.}$$

ALIŞTIRMALAR

1. $y = 4\sin x$ fonksiyonu'nun $x = 0$'dan $x = \pi$ arasındaki ortalama değeri nedir?

2. $y = 2\sin^3 \dfrac{x}{2}$ fonksiyonu'nun $x = 0$ ile $x = 2\pi$ arasındaki ortalama değeri nedir?

3. $Q = (2 + \sqrt{t})^2$ fonksiyonu'nun $t = 0$ ile $t = 1$ arasındaki ortalama değeri nedir?

4. $Q = \dfrac{1}{3} t^3 \sqrt{9 - t^2}$ fonksiyonu'nun $t = 0$ ile $t = 3$ arasındaki ortalama değeri nedir?

5. $V = \dfrac{16}{3} t - \dfrac{1}{2} t^2$ bir parçacığın hızına bağlı denklemdir. Buna göre, $t = 0$ ile $t = 16$sn arasındaki ortalama hızı nedir?

6. $V = \dfrac{4t}{\sqrt{t + 2}}$ hız denklemi veriliyor. Buna göre, $t = 2$ ile $t = 14$sn arasındaki ortalama hız nedir?

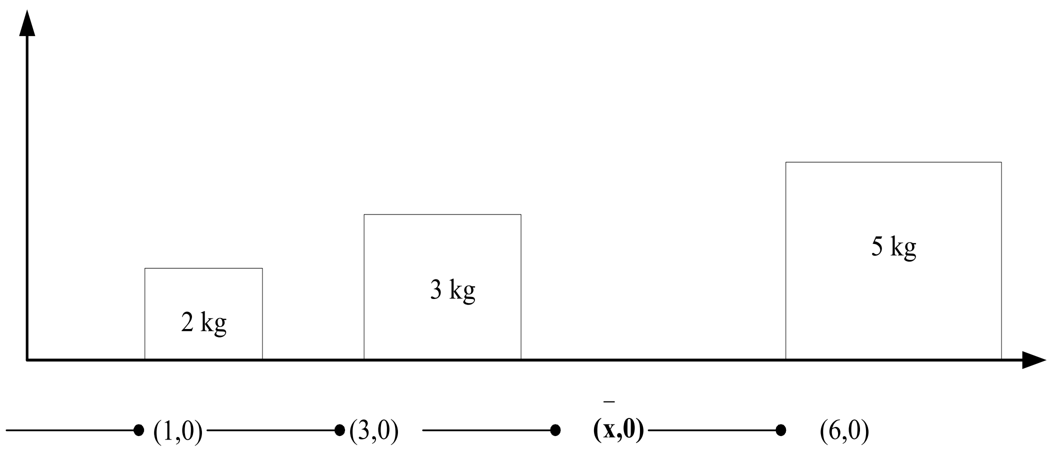
7. $y = \cos^2 x$ fonksiyonunun $x = 0$, $x = \pi$ arasındaki ortalama değeri nedir?

4.7. Ağırlık ve Kütle Merkezi

Düzlem alanların ağırlık merkezleri ve bir eksen etrafında döndürülen farklı şekillerin kütle merkezlerini ele almadan önce bir eksen boyunca yerleştirilen kütlelerin oluşturduğu sistemin kütle merkezini aşağıdaki örnek ile inceleyelim.

Örnek.4.20: x-ekseni boyunca 2 kg.,3kg., ve 5 kg. lık üç kütle sırasıyla (1,0), (3,0) ve (6,0) noktalarına yerleştiriliyor. Buna göre tahtanın kütlesini ihmal edilirse x-ekseni boyunca sistemin kütle merkezi ne olur.

Çözüm.4.20: Verilenlere göre şeklimizi çizelim.(Şekil.4.29)



Şekil.4.29

Kütlenin merkezinin momenti momentlerin toplamına eşitlenerek,

$$(2+3+5)\ \bar{x} = 10\bar{x}$$

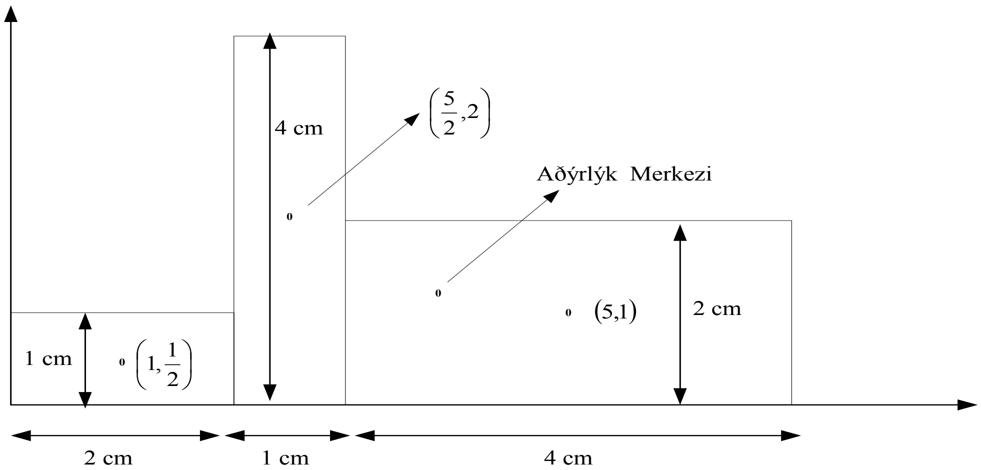
$$2.(1)+3.(3)+5.(6)=10\bar{x} \text{ ise } \bar{x} = \frac{41}{10} = 4.1 \text{ olur.}$$

4.7.1.Ağırlık Merkezi

$\bar{x}$ bir alanın ağırlık merkezinin apsisi olup, y-eksenindeki momentlerin toplamının toplam alana bölünmesiyle elde edilir. Yani, $\bar{x} = \dfrac{M_y}{A}$

$\bar{y}$ aynı şekilde bir alanın ağırlık merkezinin ordinatı olup, x-eksenindeki momentlerin toplam alana bölünmesine eşittir. Yani, $\bar{y} = \dfrac{M_x}{A}$

Örnek4.21:Aşağıdaki şeklin ağırlık merkezini bulunuz (Şekil.4.30).



Şekil.4.30

Çözüm.4.21:

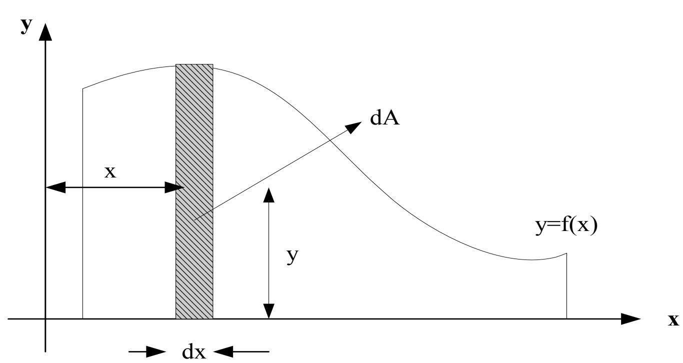
$$\bar{x}=\frac{M_y}{A}=\frac{2.(1).(1)+1.(4).(5/2)+4.(2).(5)}{2.(1)+1.(4)+4.(2)}=3.7$$

$$\bar{y}=\frac{M_x}{A}=\frac{2.(1).(\frac{1}{2})+1.(4).(2)+4.(2).(1)}{2.(1)+1.(4)+4.(2)}=\frac{17}{14}\cong 1.2$$

4.7.2.Düzlem Alanların Ağırlık Merkezi:y=f(x) eğrisi, x-ekseni x=a ve x=b doğruları ile sınırlı bölgenin alanına A diyelim.(Şekil.4.31)Bu alanın bir parçası olarak dA olarak isimlendirilen dikdörtgen şeklindeki alanı ele alalım.Moment, kuvvet ile kuvvet kolunun çarpımı olduğundan olarak ele alırsak,

x-eksenindeki moment:$M_x=(\frac{y}{2}).dA=(\frac{y}{2}).y.dx$

y-eksenindeki moment: M_y=x.dA=x.y.dx olur.



Şekil.4.31

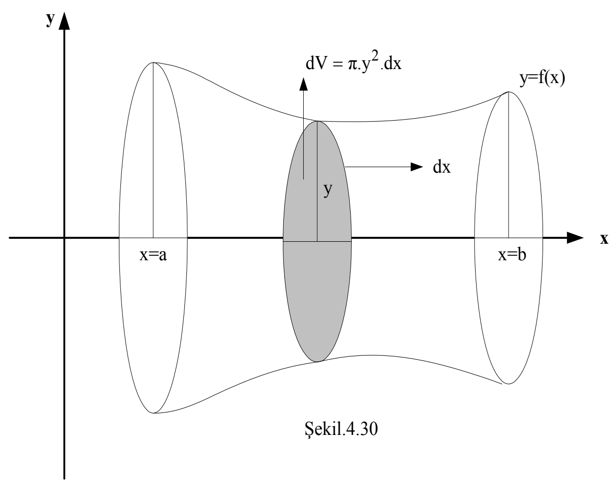
Buna göre; x-ekseni civarındaki dA'nın momenti, $(\frac{y}{2}).dA=(\frac{y}{2}).(y.dx)$

y-ekseni civarındaki dA'nın momenti; x.dA=x.(y.dx) olduğundan (4.7.1)ile verilen ağırlık merkezinin koordinatları ;

$$\bar{x}=\frac{M_y}{A}=\frac{\int_a^b xydx}{\int_a^b ydx} \quad \text{ve} \quad \bar{y}=\frac{M_x}{A}=\frac{\int_a^b \frac{y^2}{2}dx}{\int_a^b ydx} \text{ elde edilir.}$$

4.7.2.Kütle Merkezi

Bir alanın bir eksen etrafında dönmesiyle oluşan cisme **dönel cisim** denir. Böyle bir katı cismin kütle merkezini bulmak için aşağıdaki şekli göz önüne alalım.(Şekil 4.32)



Şekil 4.32

y = f(x) eğrisi, x-ekseni ile x = a ve x = b doğruları ile sınırlı alanın **x-ekseni** etrafında döndürülmesiyle oluşan hacmi göz önüne alalım (Şekil 4.32). Buna göre, **V** hacim elamanını göstermek üzere,

$dV=\pi.y^2dx$ (*) dir. Ayrıca, , **x = a'dan x = b'ye kadar dV dairesel disklerinin toplamının limiti (*) ifadesinin her iki yanının integralinin alınmasıyla;**

$$V_x=\pi\int_a^b y^2\,dx=\pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx \text{ olarak elde edilir.}$$

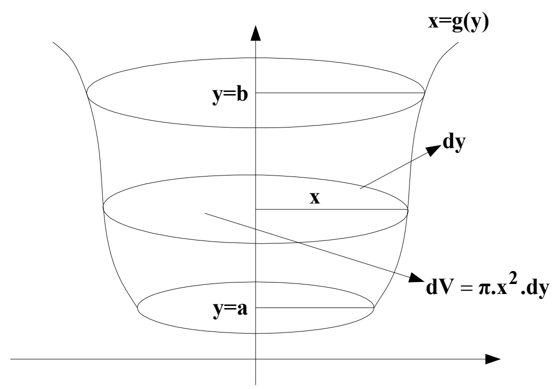
y = f(x) eğrisi, x-ekseni ile x = a ve x = b doğruları ile sınırlı alanın **x-ekseni** etrafında döndürülmesiyle oluşan katı şeklin kütle merkezine $\bar{x}$ diyelim.

Bu kütle merkezi y ekseni etrafındaki hacim elemanlarının momentleri toplamının toplam hacme bölünmesiyle elde edilir. Buna göre katı şeklin kütle merkezi koordinatları ($\bar{x}$, 0) olup aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\bar{x} = \frac{\pi}{V}\int_a^b xy^2\,dx = \frac{\int_a^b xy^2\,dx}{\int_a^b y^2\,dx}$$

Benzer şekilde; x=g(y) eğrisi, y-ekseni, y=a y=b doğruları ile sınırlı bölgenin y-ekseni etrafında dönmesiyle oluşan katı şekli göstermektedir.(Şekil.4.33) **V** hacim elemanı ise **dV** dairesel disklerinin hacimlerinin toplamının bir limiti olup (*) ifadesinin her iki yanının integrali alınıp y=a'dan y=b'ye kadar oluşan hacim;

$$V_y = \pi\int_a^b x^2\,dy = \pi\int_a^b [g(y)]^2\,dy \text{ olarak bulunur.}$$



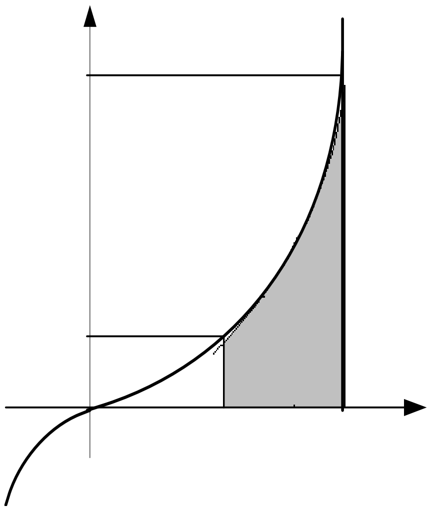
Şekil 4.33

x = g(y) eğrisi, y-ekseni ile y = a ve y = b doğruları ile sınırlı alanın **y-ekseni** etrafında döndürülmesiyle oluşan katı şeklin kütle merkezine $\bar{y}$ diyelim. Bu kütle merkezi x ekseni etrafındaki hacim elemanlarının momentleri toplamının toplam hacme bölünmesiyle elde edilir. Buna göre katı şeklin kütle merkezi koordinatları ($\bar{y}$, 0) olup aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\bar{y} = \frac{\pi}{V}\int_a^b yx^2\,dy = \frac{\int_a^b yx^2\,dy}{\int_a^b x^2\,dy}$$

Örnek.4.22: $y = x^3$ eğrisi $x = 1$, $x = 2$ ve $y = 0$ değerleri ile sınırlı bölgenin merkezini bulunuz.

Çözüm.4.22:



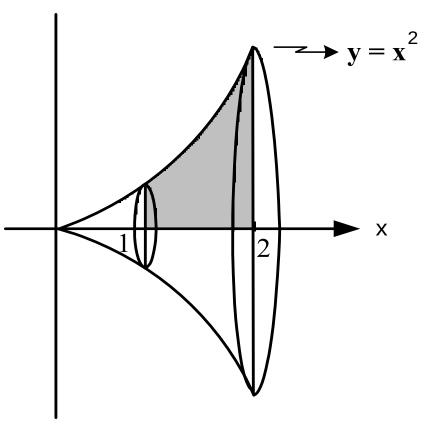
$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x.y.dx}{\int_a^b y.dx} = \frac{\int_1^2 x.x^3.dx}{\int_1^2 x^3.dx} = \frac{\left.\frac{x^5}{5}\right|_1^2}{\left.\frac{x^4}{4}\right|_1^2}$$

$$\bar{x} = \frac{\frac{32}{5} - \frac{1}{5}}{\frac{16}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{31}{5} \cdot \frac{4}{15} \Rightarrow \bar{x} = \frac{124}{75}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_a^b \frac{y}{2} dx}{\int_a^b y dx} = \frac{\int_1^2 \frac{(x^3)^2}{2} dx}{\int_1^2 x^3 dx} = \frac{\left. x^7 \right|_1^2}{\left. x^4 \right|_1^2} = \frac{\frac{128}{14} - \frac{1}{14}}{\frac{16}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{127}{14} \cdot \frac{4}{15}$$

Örnek.4.23: $y = x^2$ eğrisi $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$ doğruları ile sınırlı bölgenin x – ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan katı cismin kütle merkezini bulunuz.

Çözüm.4.23:



$\bar{y} = 0$ olur.

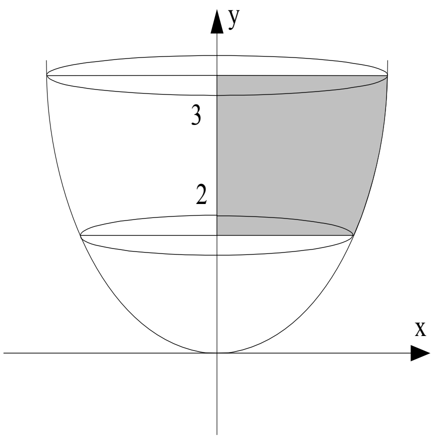
$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x.y.dx}{\int_a^b y^2.dx} = \frac{\int_1^2 x.(x^2)^2.dx}{\int_1^2 (x^2)^2.dx}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_1^2 x^5.dx}{\int_1^2 x^4.dx} = \frac{\left.\frac{x^6}{6}\right|_1^2}{\left.\frac{x^5}{5}\right|_1^2} = \frac{\frac{64}{6} - \frac{1}{6}}{\frac{32}{5} - \frac{1}{5}} = \frac{63}{6} \cdot \frac{5}{31}$$

$\bar{x} = \frac{315}{186} \cong 1{,}7$ ise ağırlık merkezi $(1{,}7\ ,\ 0)$ olur.

Örnek.4.24: $y = x^2$ eğrisi $x = 0$, $y = 0$, $y = 3$ doğruları ile sınırlı bölgenin y ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan katı şeklin kütle merkezini bulunuz.

Çözüm.4.24:



$$\bar{x} = 0.$$

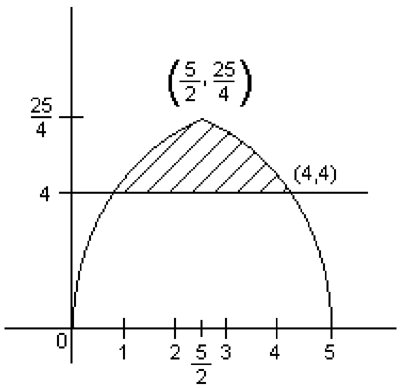
$$\bar{y} = \frac{\int_a^b y.x.dy}{\int_a^b x.dy} = \frac{\int_0^3 y.y.dy}{\int_0^3 y.dy}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_0^3 y^2 dy}{\int_0^3 y.dy} = \frac{\left.\frac{y^3}{3}\right|_0^3}{\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^3} = \frac{\frac{27}{3} - 0}{\frac{9}{2} - 0} = 9.\frac{2}{9} = 2 \Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) = (0,2)$$

4. Bölümle İlgili Çözümlü Problemler

1) $y=5x-x^2$ eğrisi ile $y=4$ doğrusu arasında kalan sınırlı bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:



$$5x - x^2 = 4$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$x = 1, \quad x = 4$$

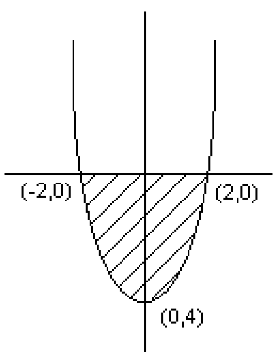
$$A = \int_1^4 (y_2 - y_1)dx$$

$$A = \int_1^4 \left[(5x - x^2) - 4\right]dx$$

$$A = \left(\frac{5}{2}x^2 - \frac{x^3}{3} - 4x \right|_1^4 = \frac{9}{2} \quad br^2$$

2) $y=x^2-4$ eğrisi ve x-ekseni ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:



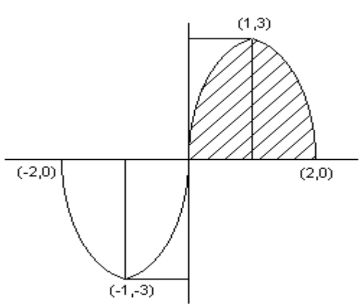
$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2, \quad x_2 = 2$$

$$A = \int_{-2}^{2} (y_2 - y_1)dx = \int_{-2}^{2} \left[0 - (x^2 - 4)\right]dx$$

$$A = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)dx = \left(4x - \frac{x^3}{3} \right|_{-2}^{2} = \frac{32}{3} \quad br^2$$

3) Birinci bölgede $f(x)=4x-x^3$ eğrisi ve x-ekseni ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:



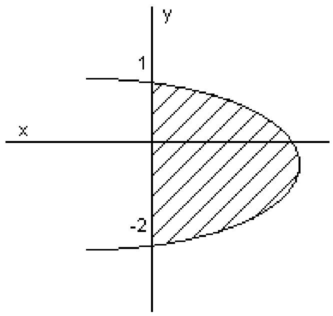
$$A = \int_0^2 (4x - x^3)dx$$

$$A = \int_0^2 4x dx - \int_0^2 x^3 dx$$

$$A = 4\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 - \frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = 4\,br^2$$

4) $x=2-y-y^2$ eğrisi ve y-ekseni ile sınırlı bölgenin alanı nedir?

Çözüm:

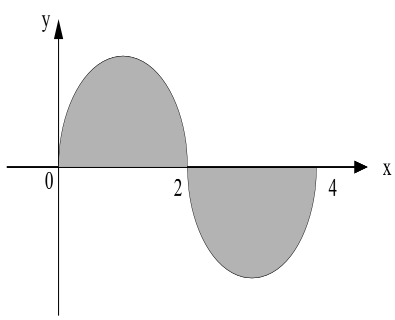


$$A=\int_{-2}^{1}(x_2-x_1)dy=\int_{-2}^{1}(2-y-y^2-0)dy$$

$$A=\left(2y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right|_{-2}^{1}=\frac{9}{2}\ \text{br}^2$$

5) $y=x^3-6x^2+8x$ eğrisi ile x-ekseni arasında kalan alanı bulunuz.

Çözüm:



$$x=0 \quad \text{için} \quad y=0$$

$$y=0 \quad \text{için} \quad x^3-6x^2+8x=0$$

$$x(x^2-6x+8)=0 \Rightarrow x_1=0,\quad x_2=2,\quad x_3=4$$

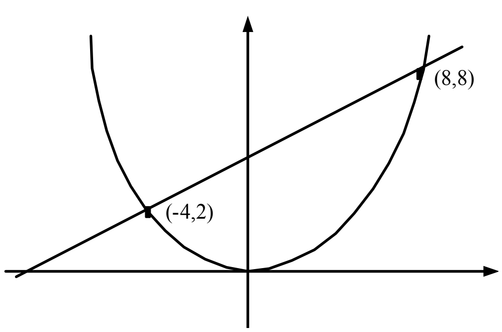
$$A=\int_0^2(x^3-6x^2+8x)dx-\int_2^4(x^3-6x^2+8x)dx$$

$$A=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{6x^3}{3}+\frac{8x^2}{2}\right]_0^2-\left(\frac{x^4}{4}-\frac{6x^3}{3}+\frac{8x^2}{2}\right]_2^4$$

$$A=8\text{br}^2$$

6) $x^2=8y$ eğrisi ve $x-2y+8=0$ doğrusuyla sınırlı bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:



$$x^2=8y\Rightarrow y=\frac{x^2}{8}\Rightarrow x=2y-8\Rightarrow y=\frac{x+8}{2}$$

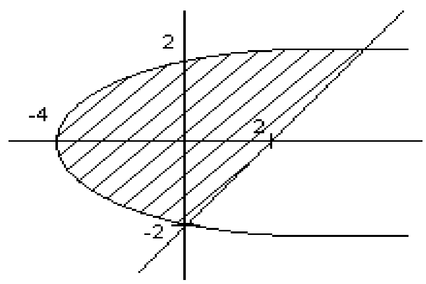
$$y=y\ \Rightarrow\frac{x+8}{2}=\frac{x^2}{8}\Rightarrow 2x^2--8x-64=0$$

$$x_1=-4\Rightarrow x_2=8$$

$$A=\int_{-4}^{8}\left(\frac{x+8}{2}-\frac{x^2}{8}\right)dx=\frac{x^2}{4}+4x-\frac{x^3}{24}\Big|_{-4}^{8}=36\text{br}^2$$

7) y^2=x+4 eğrisi ile y-x+2=0 doğrusu arasındaki alanı bulun.

Çözüm:



$$A=\int_a^b (x_2-x_1)dy$$
$$y^2=x+4 \Rightarrow x=y^2-4$$
$$y-x+2=0 \Rightarrow x=y+2$$
$$y^2-4=y+2 \Rightarrow y^2-y-6=0 \Rightarrow y_1=-3 \text{ ve } y_2=\mp 2$$
$$A=\int_{-2}^{3}\left[(y+2)-(y^2-4)\right]dy$$
$$A=\int_{-2}^{3}(y+6-y^2)dy=\frac{y^2}{2}+6y-\frac{y^3}{3}\Big|_{-2}^{3}=\frac{125}{6} \quad br^2$$

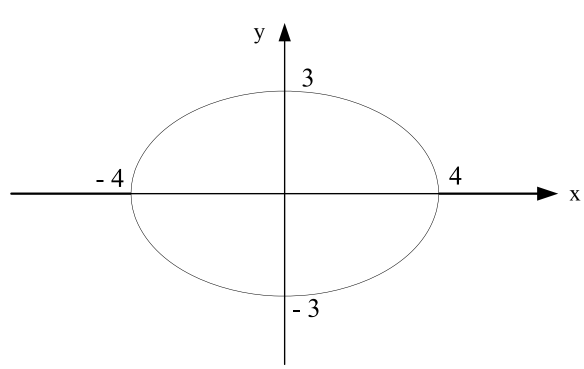
8) $\dfrac{y^2}{4}=x^3$ eğrisinin x=1'den x=4'e kadar olan kısmının uzunluğunu bulunuz.

Çözüm:

$$1+9x=u \Rightarrow dx=\frac{du}{9} \text{ olur.}$$
$$y^2=4x^3 \Rightarrow y=2x^{3/2} \Rightarrow y'=\frac{dy}{dx}=2.\frac{3}{2}x^{1/2}=3\sqrt{x}$$
$$s=\int_0^4\sqrt{1+(3\sqrt{x})^2}dx=\int_0^4\sqrt{1+9x}\,dx=\frac{1}{9}\int u^{1/2}du=\frac{1}{9}.\frac{2}{3}u^{3/2}$$
$$=\frac{2}{27}\left[(1+9x)^{3/2}\Big|_0^4\right.=\frac{2}{27}\left(37^{3/2}-1\right)$$

9) $9x^2+16y^2=144$ eğrisinin a)x-ekseni etrafında b)y-ekseni etrafında dönmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.

Çözüm:



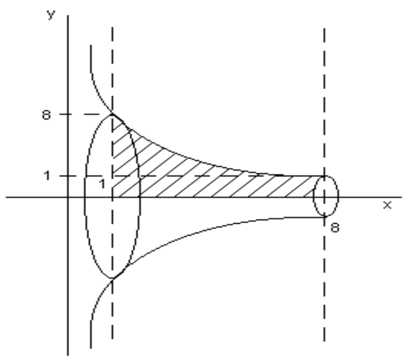
$$9x^2+16y^2=144$$
$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$$
$$x^2=16\left(1-\frac{y^2}{9}\right)$$
$$x=0 \quad \text{için} \quad y=\pm 3$$
$$y^2=9\left(1-\frac{x^2}{16}\right)$$
$$y=0 \quad \text{için} \quad x=\pm 4$$

$$V_x = \pi\int_a^b y^2 dx = 2\pi\int_0^4 9\left(1-\frac{x^2}{16}\right)dx = 18\pi\left(x-\frac{x^3}{48}\right|_0^4 = 48\pi$$

$$V_y = \pi\int_a^b x^2 dy = 2\pi\int_0^3 16\left(1-\frac{y^2}{9}\right)dy = 32\pi\left(y-\left(\frac{y^3}{27}\right)\right|_0^3 = 64\pi$$

10) $y = \dfrac{8}{x}$ eğrisi x=1, x=8 doğruları ile sınırlı bölgenin x-ekseni etrafında dönmesiyle oluşan hacmini bulunuz.

Çözüm:



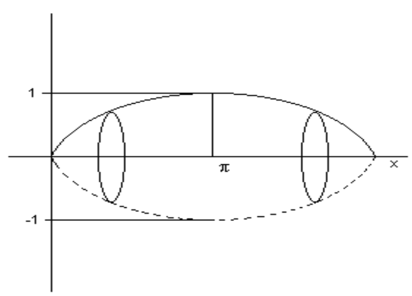
$$V_x = \pi\int_1^8 y^2 dx$$

$$V_x = \pi\int_1^8 \frac{64}{x^2}dx = 64\pi\left(-\frac{1}{x}\right]_1^8$$

$$V_x = 56\pi$$

11) **y=sinx** eğrisi **x=0, x=π** doğruları ile sınırlı bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.

Çözüm:

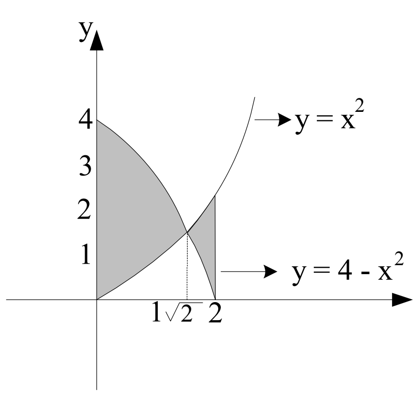


$$= \pi\int_0^\pi y^2 dx = \pi\int_o^\pi \sin^2 x dx = \frac{n}{2}\int_0^\pi (1-\cos 2x)dx$$

$$= \frac{n}{2}\left(x \,\Big|_0^n - \frac{1}{2}\mathrm{Sin}\,2x \,\Big|_0^n = \frac{n}{2}(\pi - 0) = \frac{\pi^2}{2}\mathrm{br}^3\right.$$

12) $y = 4 - x^2$, $y = x^2$ eğrileri $x = 0$; $x = 2$ doğruları ile sınırlı alanı bulunuz?

Çözüm:



$y = 4 - x^2$ ve $y = x^2$ ise $y = y$

$y = 0 \Rightarrow x = \mp 2 \Rightarrow 4 - x^2 = x^2$

$x = 0 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow 4 = 2x^2 \Rightarrow x^2 = 2 \quad x = \mp\sqrt{2}$

$$A_1 = \int_0^{\sqrt{2}} (y_1 - y_2)dx$$

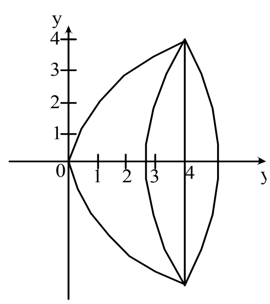
$$A_1=\int_0^{\sqrt{2}}\left(4-x^2-x^2\right)dx \Rightarrow A_1=\int_0^{\sqrt{2}}\left(4-2x^2\right)dx=\left(4x-\frac{2}{3}x^3\right|_0^{\sqrt{2}} \Rightarrow A_1=4\sqrt{2}-\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$A_2=\int_{\sqrt{2}}^{2}\left[x^2-\left(4-x^2\right)\right]dx \Rightarrow A_2=\int_{\sqrt{2}}^{2}\left(2x^2-4\right)dx=\left(\frac{2}{3}x^3-4x\right|_{\sqrt{2}}^{2}=\left(\frac{16}{3}-8\right)-\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}-4\sqrt{2}\right)$$

$$A=A_1+A_2=\left(4\sqrt{2}-\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)+\left(\frac{16}{3}-8-\frac{4\sqrt{2}}{3}+4\sqrt{2}\right)$$

13) $y^2=4x$ eğrisi $y=0$, $x=0$, $x=4$ doğruları ile sınırlı bölgenin x-ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanını bulunuz?

Çözüm:



$$y=2\sqrt{x} \quad \text{ise } y'=\frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \left(y'\right)^2=\frac{1}{x} \text{ olur.}$$

$$x=4 \Rightarrow y=\mp 4 \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=0$$

$$S=2\pi\int_a^b y\cdot\sqrt{1+\left(y'\right)^2} \Rightarrow S=2\pi\int_0^4 2\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}dx$$

$$S=4\pi\int_0^4\sqrt{x+1}dx=\frac{8\pi}{3}\left(\left(x+1\right)^{3/2}\right|_0^4=\frac{8\pi}{3}\left(5\sqrt{5}-1\right)$$

14) $y=\sqrt{x}$ eğrisi y=0, x=1, x=4 doğruları ile sınırlı bölgenin

a) A=? b) V_x=? c) V_y=? d) Ağırlık merkezi ?. e) Kütle merkezi?

Çözüm:

a) $A=\int_1^4\left(y_2-y_1\right)dx$

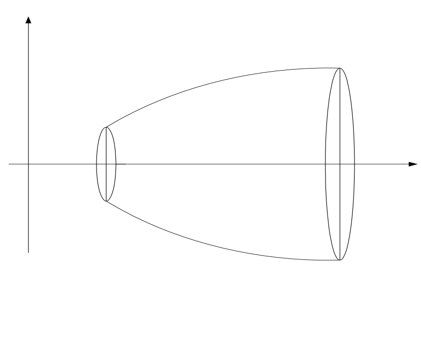
$A=\int_1^4\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}x^{3/2}=\frac{2}{3}\left(4\sqrt{4}-1\right)$

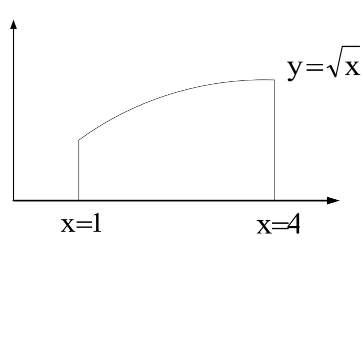
$A_1=\frac{14}{3}br^2$

b) $V_x=\pi\int_1^4\left({y_2}^2-{y_1}^2\right)dx$

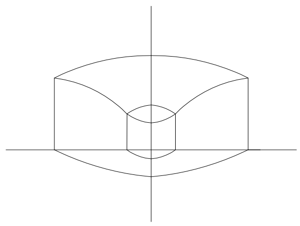
$V_x=\pi\int_1^4 y^2\,dx=\pi\int_1^4 x\,dx$

$V_x=\pi\left(\frac{x^2}{2}\right)=\frac{15\pi}{2}$





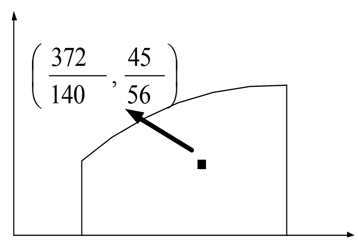
c) $$V_y = 2\pi\int_a^b (x.y)\,dx = 2\pi\int_1^4 x.y.\,dx = 2\pi\int_1^4 x.\sqrt{x}.\,dx = \frac{4}{5}\pi\left(x^{5/2}\right) = \frac{124\pi}{5}\,br^3$$



d)

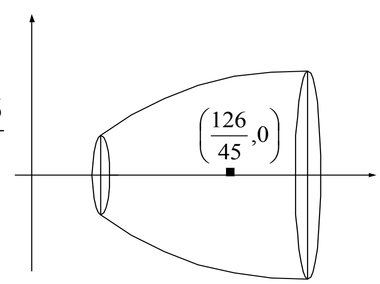
$$\overline{x} = \frac{\int_a^b x.y.dx}{\int_a^b y\,dx} = \frac{\frac{124}{10}}{\frac{14}{3}} = \frac{124}{10}\cdot\frac{3}{14} = \frac{372}{140}\quad(\overline{x},\overline{y}) = \left(\frac{372}{140},\frac{45}{56}\right)$$

$$\overline{y} = \frac{\int_a^b \frac{y^2}{2}.dx}{\int_a^b y\,dx} = \frac{\int_1^4 \frac{x}{2}.dx}{\frac{14}{3}} = \frac{\frac{x^2}{4}}{\frac{14}{3}} = \frac{15/4}{14/3} = \frac{45}{56}$$



e)

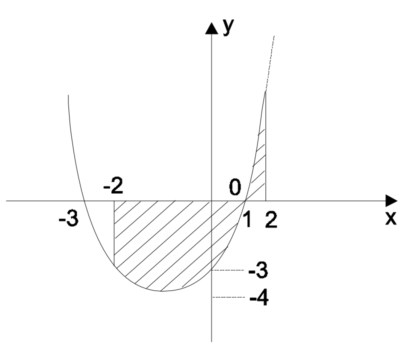
$$\overline{x} = \frac{\int_a^b x.y^2.dx}{\int_a^b y^2\,dx} = \frac{\int_1^4 x.x.dx}{\frac{15}{2}} = \frac{\frac{x^3}{4}}{\frac{14}{3}}\Big|_1^4 = \frac{63}{3}\cdot\frac{2}{15} = \frac{126}{15}$$



$$(\overline{x},\overline{y}) = \left(\frac{126}{45},0\right)$$

15) $f : [-2,2] \to R$, $f(x) = x^2 + 2x - 3$ fonksiyonu ile x-ekseni arasında kalan alanı bulalım.

Çözüm:



$$A = \int_{-2}^{2}|f(x)|dx = \int_{-2}^{1} -f(x)dx + \int_{1}^{2} f(x)dx$$
$$= \int_{-2}^{1} -(x^2+2x-3)dx + \int_{1}^{2}(x^2+2x-3)dx$$
$$= -\left(\frac{x^3}{3}+x^2-3x\right) + \left(\frac{x^3}{3}+x^2-3x\right)$$
$$= 9 + \frac{7}{3} = \frac{34}{3}$$

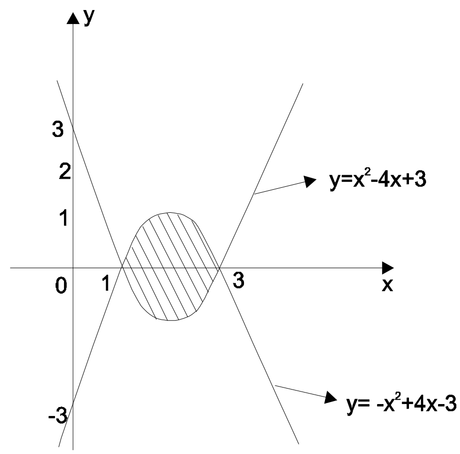
16) $y = x^2 - 4x + 3$ ile $y = -x^2 + 4x - 3$ eğrileri arasındaki alanı bulunuz?

Çözüm:

$y = -x^2 - 4x - 3$ iççi $x = 0 \Rightarrow y = 3 \quad y = 0 \Rightarrow x = 1 \quad x = 3$

$y = -x^2 + 4x - 3$ iççi $x = 0 \Rightarrow y = -3 \quad y = 0 \Rightarrow x = 1 \quad x = 3$

$$A = \int_a^b (y_2 - y_1)dx$$



$$A = \int_1^3 \left[(-x^2 + 4x - 3) - (x^2 - 4x + 3)\right]dx$$

$$A = \int_1^3 \left[(-x^2 + 4x - 3 - x^2 + 4x - 3)\right]dx$$

$$A = \int_1^3 (-2x^2 + 8x - 6)dx$$

$$A = -\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 6x$$

$$A = (-\frac{2}{3}.3^3 + 4.3^2 - 6.3) - (-\frac{2}{3}.1^3 + 4.1^2 - 6.1)$$

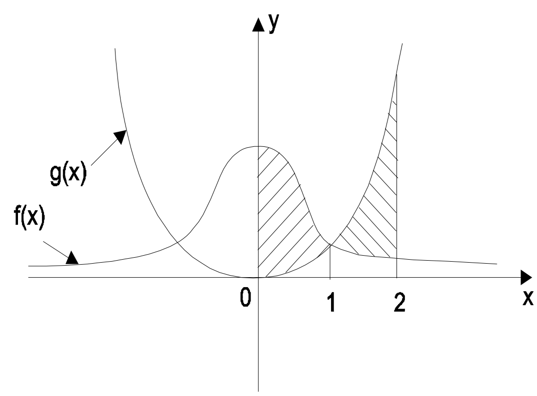
$$A = \frac{8}{3}br^2$$

17) $f : IR \rightarrow IR$; $g : IR \rightarrow IR$; $f(x) = \dfrac{2}{x^2 + 1}$; $g(x) = x^2$ fonksiyonları veriliyor f ve g fonksiyonlarının gösterdiği eğriler, $x = 0$ ve $x = 2$ doğruları arasında kalan alanı hesaplayın?

Çözüm :

$$A = \int_0^2 |f(x) - g(x)|dx$$

$$= \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx + \int_1^2 -|f(x) - g(x)|dx$$



$$= \int_0^1 \left(\frac{2}{x^2 + 1} - x^2\right)dx - \int_1^2 \left(\frac{2}{x^2 + 1} - x^2\right)dx$$

$$= (2\mathrm{Arc}\tan x - \frac{1}{3}x^3) - (2\mathrm{Arc}\tan x - \frac{1}{3}x^3)$$

$$= 2.\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} - 2\mathrm{Arc}\tan 2 + \frac{8}{3} + 2.\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}$$

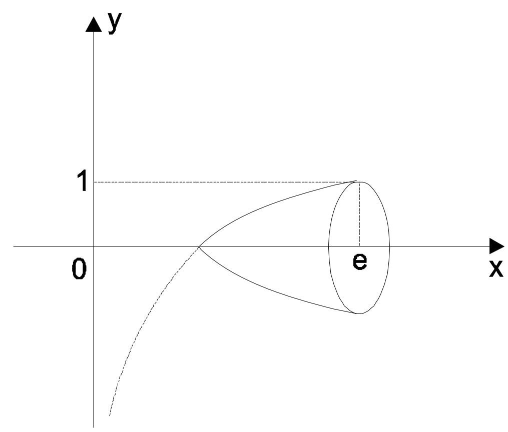
$$= \pi - \frac{2}{3} - 2\mathrm{Arc}\tan 2$$

18) $\begin{array}{l} f:[1,e]\rightarrow R \\ f(x)=\ln x \end{array}$ fonksiyonunun temsil ettiği eğri parçasının x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin hacmini bulalım.

Çözüm :

$V=\pi\int_1^e f^2(x)dx=\pi\int_1^e Ln^2(x)dx$ olur.

Bu integrali kısmi integral yöntemiyle çözelim.



$u=\ln^2 x, dv=dx$ diyelim.

$du=2.\frac{1}{x}\ln x.dx \quad v=x \quad$ olur.

$V=\Pi\left[x\ln^2 x\right]_1-2\int_1^e \ln xdx$

$=\Pi\left[e-2(x\ln x-x)\right]$

$=\Pi(e-2)$

19) $f:\left[0,\frac{7\pi}{4}\right]\rightarrow IR \quad f(x)=\frac{3}{2}+\sin x$

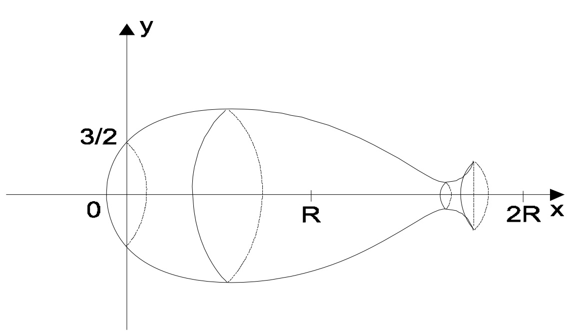
fonksiyonunun gösterdiği eğrinin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin sınırladığı hacmi bulalım.

Çözüm:

$V=\Pi\int_0^{7\pi/4} f^2(x)dx\Rightarrow\Pi\int_0^{7\pi/4}\left(\frac{3}{2}+\sin x\right)^2dx\Rightarrow\Pi\int_0^{7R/4}\left(\frac{9}{4}+3\sin x+\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx$

$=\Pi\left(\frac{9}{4}.\frac{7\pi}{4}-3.\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}.\frac{7\pi}{2}+\frac{1}{4}+3\right)$

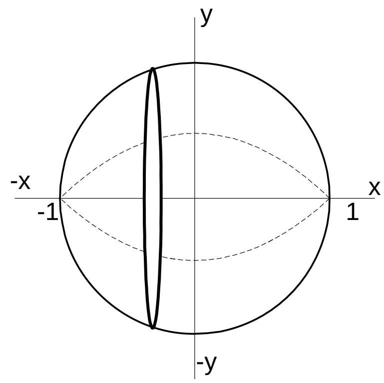
$=\Pi\left(\frac{77}{16}\pi-3\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{13}{4}\right)$



20) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ fonksiyonunun $[-1,1]$ aralığındaki parçasının x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin yüzey alanını hesaplayınız.

Çözüm: $y=\sqrt{1-x^2}$ $\quad y^2=1-x^2$ $\quad x^2+y^2=1$

$$y_1=\sqrt{1-x^2} \qquad y_2=-\sqrt{1-x^2}$$



$$y_1^{'}=\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{'}=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$s=2\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,.\sqrt{1+\left(\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{'}\right)^2}.dx$$

$$s=2\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,.\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}.dx=2\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,.\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}.dx$$

$$s=2\pi\int_{-1}^{1}dx=\left(2\pi x\right|_{-1}^{1}=\left[\left(2\pi(1)\right)-\left(2\pi(-1)\right)\right]=4\pi$$

ALIŞTIRMALAR

1. **$y = 3x$, $y = 15 - 3x$** doğruları ile **x – ekseni** arasında kalan alan nedir ?... (18.75)

2. **$y^2 = x^3$** eğrisi ile **$x = 4$** doğrusu arasında kalan alan nedir ?... (25.6)

3. **$y^2 = 4x$** ile **$x^2 = 4y$** eğrileri arasında kalan alan nedir ?... (16/3)

4. **$10y = x^2 - 80$** eğrisi ile **$y = 0$, $x = 1$ ve $x = 6$** doğruları arasındaki alan nedir ?... (32.83)

5. **$y = x^2 + 2$** eğrisi ile **$y = 3$, $y = 5$, $x = 0$** doğruları arasındaki alan nedir ?... (2.797)

6. **$y^2 = 16 - x$** eğrisi **$y = 0$, $x = 0$** doğruları ile sınırlı bölgenin alanı nedir ?... (126/3)

7. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ eğrisi ile **$y = 0$, $x = 0$** doğruları arasındaki alan nedir ?... (1/6)

8. **$4y^2 = x^3$** eğrisi ile **$x = 8$** doğrusu arasında kalan alan nedir ?... (72.4)

9. Birinci bölgede **$y^2 = x^3 - 3x^2 + 3x$** eğrisi ile **$x = 1$** doğrusu tarafından sınırlanan bölgenin x – ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel cismin hacmi nedir ?... (0.785)

10. $y = \frac{1}{2}(e^{-x} + e^{x})$ eğrisi x = 0 , y = 0 , x = 1 doğruları ile sınırlı bölgenin x – ekseni etrafında dönmesiyle oluşan hacim nedir ?... (4.42)

11. **$y = x^3$** eğrisi , **x = 0 , y = 8** doğruları ile sınırlı bölgenin y – ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel cismin hacmi nedir? ... (60.3)

12. **$9x^2+16y^2 = 144$** elipsoidinin **y – ekseni** etrafında dönmesiyle oluşan dönel cismin hacmi nedir? ... (329)

13. $\left(\frac{x}{2}\right)^{2} + \left(\frac{y}{3}\right)^{2/3} = 1$ eğrisinin y-ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel cismin hacmi nedir?

14. **$y = e^x$** eğrisi , **x = 1 , y = 0 , x = 0** doğruları ile sınırlı bölgenin **x = 1** doğrusu etrafında dönmesiyle oluşan dönel cismin hacmi nedir? ... (4.51)

15. **$y = 4x - x^2$** eğrisi , y = 3 , x = 0 doğruları ile sınırlı bölgenin **y = 3** doğrusu etrafında dönmesiyle oluşan dönel cismin hacmi nedir? ... (3.35)

16. **$y^2 = 24 - 4x$** eğrisi y=0 , x = 3 , x = 6 doğruları ile sınırlı bölgenin **x- ekseni** etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin yanal alanı nedir? ... (58.6)

17. $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ eğrisinin 1.bölgedeki kısmının x-ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin yanal alanı nedir?

18. **$y = 4 - x^2$** eğrisi **x = 0 , x = 2 , y = 0** doğruları ile sınırlı bölgenin y-ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin yanal alanı nedir? ... (36.2)

19. **$y = 5x^2$** eğrisi **x = 2 , x = 4 , y = 0** doğruları ile sınırlı bölgenin **y-ekseni** etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin yanal alanı nedir? ... (1408)

5.BÖLÜM

5. HAS OLMAYAN İNTEGRALLER

Şimdiye kadar integrali alınacak **y=f(x)** fonksiyonu **$a \le x \le b$** aralığındaki her x için sürekli ve $\int_a^b f(x)dx$ belirli integralinde limitler sınırlı idi. Eğer, bu şartlardan biri veya her ikisi ile karşılaşılmazsa yani integralin sınırlarından biri veya her ikisi sonlu değilse, sonlu iken bu noktada sürekli değilse,

$$\int_a^b f(x)\, dx \quad ....\ ...(1)$$

integraline has olmayan integral denir. Böylece limitlerden biri veya her ikisi sonsuz veya **$a \le x \le b$** aralığında bazı **x** noktalarında integrand süreksiz ise bu integral has olmayan integral kategorisine girer. Has olmayan integrallere birkaç örnek verelim:

$\int_1^\infty x^2 dx$ integrali has olmayan integraldir. Çünkü, limitlerden biri sınırsızdır.

$\int_0^2 \frac{x^2}{x-2}dx$ integrali has olmayan integraldir. Çünkü;

$f(x) = \frac{x^2}{x-2}$ fonksiyonu x=2 noktasında süreksizdir.

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ integrali has olmayan integraldir. Çünkü limitlerin her ikiside sonlu değildir.

5.1 Sonsuz Limitler İçin Has Olmayan İntegraller:Eğer limitlerden birisi veya her ikisi birden sonlu değilse has olmayan integrallerin nasıl olacağı aşağıdaki gibidir.

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx ....(2)$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx ....(3)$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{\substack{b\to\infty \\ a\to-\infty}}\int_a^b f(x)dx ....(4)$$

Eğer (2) eşitliğinin sağ tarafındaki limit varsa ; $\int_a^{\infty} f(x)dx$ integraline yakınsak, aksi halde ıraksaktır denir.

Örnek.5.1: $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ integrali yakınsakmıdır.

Çözüm.5.1: $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \left[\ln x\right|_1^b = \ln b - \ln 1 = \infty$

integral mevcut değil. O halde, $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ integrali ıraksaktır.

Örnek.5.2: $\int_0^{\infty} e^{-x}dx$ integrali yakınsakmıdır.

Çözüm.5.2: $\int_0^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty} \left(-e^{-x} \,\Big|_0^b\right) = \lim_{b\to\infty} \left(-e^{-b} + e^{0}\right) = \lim_{b\to\infty} \left(-e^{-b} + 1\right) = 1$

integral mevcut. O halde, $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$ integrali yakınsaktır.

5.2. Süreksiz İntegrand: İntegrand, f(x), yani integrali alınacak f(x) fonksiyonu limitlerin birinde süreksiz ise integralin nasıl alınacağını görelim.Eğer; $\int_a^b f(x)dx$ integrali b noktası hariç $a \le x \le b$ aralığındaki her noktada sürekli ise $\int_a^b f(x)dx$ integrali;

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(x)dx \text{............(5)}$$ şeklinde tanımlanır.*

Benzer şekilde integranda noktasında süreksiz ise (1) integrali

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to a^+} \int_x^b f(x)dx$$ şeklinde tanımlanır.

Eğer; $\int_a^b f(x)dx$ integrali $\mathbf{a \le x \le b}$ aralığındaki bir **c** noktasında süreksiz ise;

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ integralinin toplamı olarak incelenir.

* $x \rightarrow a+$ ifadesi x'in a noktasına a'dan daha büyük değerlerle yaklaşması anlamındadır.

$x \rightarrow b-$ ifadesi x'in b noktasına b'den daha küçük değerlerle yaklaşması anlamındadır.

Örnek.5.3: $\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ integrali yakınsakmıdır?

Çözüm.5.3: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ fonksiyonu x=0 noktasında süreksizdir. Buna göre;

$$\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0^+} \int_x^9 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0^+} \int_x^9 x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{x \to 0^+} \left(2\sqrt{x}\ \right|_x^9$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \left(2\sqrt{9} - 2\sqrt{x}\right) = \lim_{x \to 0^+} \left(6 - 2\sqrt{x}\right) = 6 - \lim_{x \to 0^+} 2\sqrt{x}$$

$$= 6 - 0 = 6$$

olur. Bu nedenle; $\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ integrali yakınsaktır.

Örnek.5.4: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ integrali yakınsakmıdır?

Çözüm.5.4: Görüldüğü gibi integralimizin hem alt hemde üst limiti sonlu değildir.
Bu nedenle;

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to \infty}} \int_a^b \frac{dx}{1+x^2}$$ şeklinde olur. Buradan;

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to \infty}} \left(\arctan x\ \right|_a^b = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to \infty}} (\arctan b - \arctan a) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

bulunur. O halde; $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ integrali yakınsaktır.

Has olmayan integrallerin diğer detaylarına burada girmiyoruz.

Örnek.5.5: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ integrali yakınsakmıdır?

Çözüm.5.5: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ fonksiyonu x=0 noktasında süreksizdir. Bu nedenle has olmayan

integralimiz; $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{x \to 1^-} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{x \to 1^-} 2\left(\sqrt{1-x}\ \right|_0^x = \lim_{x \to 1^-} -2\sqrt{1-x} + 2 = 2$

Buna göre, integralimiz limit mevcut olduğundan yakınsaktır.

Örnek.5.6: $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ integrali yakınsakmıdır?

Çözüm.5.6: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ fonksiyonu -1 ve 1 noktalarının her ikisinde süreksizdir.Buna göre;

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\substack{a \to -1^- \\ b \to +1^-}} \int_{a}^{b} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\substack{a \to -1^- \\ b \to +1^-}} \left(\arcsin x \,\Big|_a^b\right.$$

$$= \lim_{\substack{a \to -1^- \\ b \to +1^-}} (\arcsin b - \arcsin a) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

bulunur. O halde; $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ integrali yakınsaktır.

ALIŞTIRMALAR

A) Aşağıdaki İntegrallerin Yakınsak Olup Olmadığını İnceleyiniz :

1. $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2} \, . \, dx$ integrali yakınsakmıdır.

2. $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} \, . \, dx$ integrali yakınsakmıdır.

3. $\int_{0}^{\infty} \frac{\arctan x}{x^2+1} \, . \, dx$ integrali yakınsakmıdır.

4. $\int_{0}^{3} \frac{1}{(x-1)^2} \, . \, dx$ integrali yakınsakmıdır.

5. $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x.\ln^2 x} \, . \, dx$ integrali yakınsakmıdır.

B) Aşağıdaki Has Olmayan İntegrallerin Çözümünü Bulunuz :

1. $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^3}$ **C = 0,5**

2. $\int_{3}^{\infty} \frac{dx}{(x-2)^3}$ **C = 0,5**

3. $\int_{-\infty}^{1} e^x \, . dx$ **C = e**

4. $\int_{5}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ **C =**

5. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ **C =** π

6. $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^{\frac{1}{2}}}$ **C =** π

7. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ **C = 2**

8. $1\int_{0} \frac{dx}{x^3}$ **C =**

9. $\int_{0}^{\pi/2} \tan x \, . dx$ **C =**

6.BÖLÜM

6. SAYISAL İNTEGRAL

Şimdiye kadar incelediğimiz fonksiyonların integrali alınmakta ve bu integral bilinen tekniklerden biri yardımıyla belirlenmekteydi. Bazen integrali alınacak fonksiyon denklem formunda değil de basit bir grafik yardımıyla veya nokta çiftleri ile verilebilir. İşte böyle durumlarda yaklaşık integral için bir yöntemi ihtiyacımız vardır.

Bütün bu yöntemler temelde y=f(x) fonksiyonun eğrisi x- ekseni ile verilen limitleri ile sınırlı bir bölgenin alanı olarak yorumlanabilir. Bu nedenle bir eğri altında kalan alanı bulmak için ortalama ordinat yöntemi, yamuk yöntemi, Simpson yöntemi ve parabolik alan yöntemi olmak üzere belli başlı dört yöntem mevcuttur. Şimdi sırasıyla bu yöntemleri inceleyelim.

6.1. Ortalama Ordinat Yöntemi

Bu yöntem daha önce gördüğümüz bir fonksiyonun ortalama değerinden yararlanılarak ortaya çıkmıştır**.[a,b]**'de tanımlı **y=f(x)** fonksiyonun ortalama değeri;

$$Y_{ort} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.................(1)$$

şeklinde idi. $\int_a^b f(x)dx$ integrali **y=f(x) eğrisi, x- ekseni x=a, x=b doğruları** ile sınırlı bölgenin alanını ifade ettiğine göre;

$$A \cong Y_{ort}(b-a)............(2)$$

formülü ortalama ordinat yöntemini veren formüldür.

Örnek.6.1: (1, 3.51) , (2, 4.23) , (4, 6.29) , (5, 7.81) , (7, 7.96) , (7.5, 8.91) , (9, 9.25) noktalarından geçen eğrinin altındaki alanı bulunuz.

Çözüm.6.1:

x	1	2	4	5	7	7.5	9
y	3.51	4.23	6.29	7.81	7.96	8.91	9.25

yedi ordinatın ortalaması;

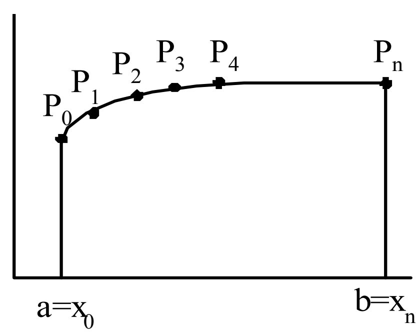
$$\text{Yort} = \frac{3.51+4.23+6.25+7.81+7.96+8.91+9.25}{7} = 6.85$$

olur. Buna göre, verilen noktalardan geçen eğri ile sınırlı alan yaklaşık olarak;

$A = 6.85(9-1) = 54.8 \quad br^2$ bulunur.

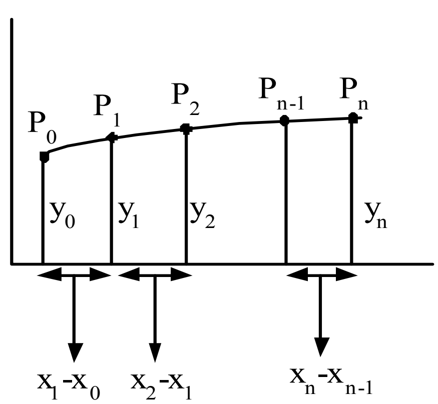
6.2. Yamuk Yöntemi

(x_0,y_0) , (x_1,y_1),..........,(x_n,y_n) nokta çiftlerini aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi birleştirelim ve bu nokta çiftlerine sırasıyla $P_0,P_1,.....,P_n$ diyelim. (Şekil.6.1)



Şekil.6.1

$P_0,P_1,.....,P_n$ noktalarını birleştirdiğimizde elde ettiğimiz grafik **y=f(x)** fonksiyonu temsil etsin. **$P_0,P_1,.....,P_n$** noktalarında düşey doğrular çizerek **y=f(x)** fonksiyonu **x- ekseni; x=a, x=b doğruları** ile sınırlı bölgeyi **n** tane dilime ayıralım. (Şekil.6.2)



Şekil.6.2

Şekilde görüldüğü gibi bu dilimlere yaklaşık olarak birer yamuk gözü ile bakılabilir.

Buna göre; 1.amuğun alanı $=\frac{1}{2}(x_1 - x_0)(y_1 + y_0)$

2. yamuğun alanı $=\frac{1}{2}.(x_2 - x_1).(y_2 + y_1)$

……………………………………………………….

n. yamuğunun alanı $=\frac{1}{2}(x_n - x_{n-1})(y_n + y_{n-1})$

olarak bulunur. Bu yamukların alanları toplamı yaklaşık olarak y=f(x) eğrisi x=a,x=b doğruları ve x- ekseni ile sınırlı bölgenin alanını verir. Böylece;

$$A = \int_a^b f(x)dx \cong \frac{1}{2}[(x_1 - x_0)(y_1 + y_0) + (x_2 - x_1)(y_2 + y_1) + ... + (x_n - x_{n-1})(y_n + y_{n-1})]$$

formülü ardışık x_i noktaları arasındaki uzaklık farklı iken yamuk kuralı için formülü verir. Ardışık $\mathbf{x_i}$ noktaları arasındaki uzaklık eşit olsun ve bunu $\mathbf{\Delta x}$ ile gösterelim.

$\Delta x = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = ... = x_n - x_{n-1}$ olsun. Buna göre istenilen alan yamuk kuralı yardımıyla şu şekilde bulunur. Sırasıyla her bir yamuğun alanı;

1. yamuğun alanı $\frac{1}{2}\Delta x(y_1 + y_0)$

2. yamuğun alanı $\frac{1}{2}\Delta x(y_2 + y_1)$

3. yamuğun alanı $\frac{1}{2}\Delta x(y_3 + y_2)$

………………………………………….

n. yamuğun alanı $\frac{1}{2}\Delta x(y_n + y_{n-1})$ iken bu alanlar toplamı;

$$A = \int_a^b f(x)dx \cong \Delta x\left[\frac{1}{2}(y_0 + y_n) + y_1 + y_2 + y_3 + ... + y_{n-1}\right]$$

olarak bulunur. Böylece eşit aralıklı nokta çiftleri için yamuk kuralı;

$$A = \int_a^b f(x)dx \cong \Delta x\left[\frac{1}{2}(y_0 + y_n) + y_1 + y_2 + y_3 + ... + y_{n-1}\right]$$ olarak elde edilir.

Örnek.6.2: Aşağıda verilen nokta çiftlerinden oluşan fonksiyonun grafiği altındaki alanı bulunuz.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	4	3	4	7	12	19	28	39	52	67	84

Çözüm.6.2:

$$A = \int_a^b f(x)dx \cong \Delta x\left[\frac{1}{2}\left(y_0 + y_9\right) + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8\right]$$

$$\cong \Delta x\left[\frac{1}{2}\left(4+84\right) + 3+4+7+12+19+28+39+52+67\right] = 275 \text{ br}^2$$

$\Delta x = x_1 - x_0 = 1 - 0 = 1$ olur.

Örnek.6.3: $\int_0^{10}\left(\frac{x^2}{10}+2\right)dx$ integralini $\Delta x = 1$ alarak yamuk kuralı ile yaklaşık olarak belirleyiniz.

Çözüm.6.3: $y = \frac{x^2}{10} + 2$ olduğuna göre (x,y) değerlerini belirleyelim.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	2	2.1	2.4	2.9	3.6	4.5	5.6	6.9	8.4	11.1	12

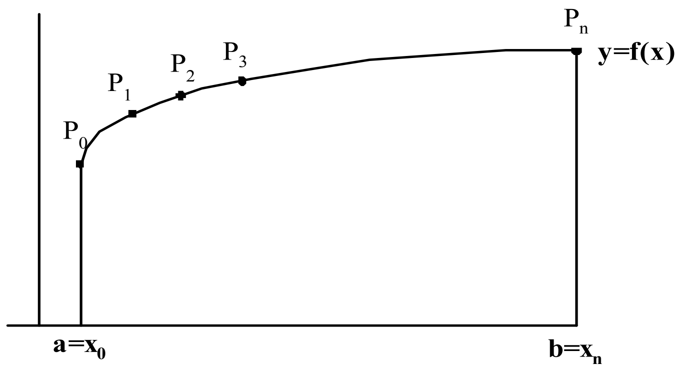
Toplamı=47.5

$$\int_0^{10}\left(\frac{x^2}{10}+2\right)dx \cong 1.\left[\frac{1}{2}(2+12) + 47.5\right] \cong 54.5 \text{ iken}$$

$$\int_0^{10}\left(\frac{x^2}{10}+2\right)dx = \left(\frac{x^3}{30} + 2x\right.\Big|_0^{10} = \frac{1000}{3} + 20 = \frac{160}{3} \text{ bulunur.}$$

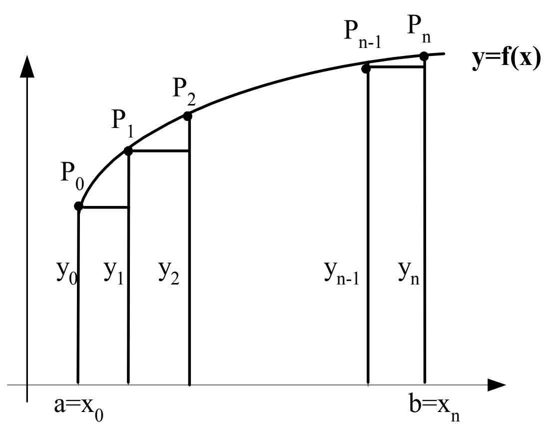
6.3. Dikdörtgen Yöntemi

(x_0,y_0), (x_1,y_1),..........................,(x_n,y_n) nokta çiftlerini birleştiren grafik **y=f(x)** fonksiyonun grafiği olsun. Bu noktalara yine sırasıyla **$P_0,P_1,P_2,...,P_n$** diyelim. (Şekil.6.3)



Şekil.6.3

$P_0,P_1,P_2,...,P_n$ noktalarında yine düşey doğrular çizelim ve bu doğrular x- eksenini sırasıyla **$x_0,x_1,x_2,.....,x_n$** noktalarında kessin. Yamuk yönteminde olduğu gibi şeklimiz n tane dilimden oluşur. (Şekil.6.4)



Şekil.6.4

Bu dilimlerden her biri birer dikdörtgen olarak göz önüne alınırsa bu dikdörtgensel dilimlerin alanları toplamı yaklaşık olarak y=f(x) eğrisi x=a,x=b doğruları ve x- ekseni ile sınırlı bölgenin alanına eşit olacaktır.

Buna göre;

1. dikdörtgenin alanı **= $(x_1\text{-}x_0).y_0$**

2. dikdörtgenin alanı **= $(x_2\text{-}x_1).y_1$**

3. dikdörtgenin alanı **= $(x_3\text{-}x_2).y_2$**

n-1. dikdörtgenin alanı **= $(x_{n-1}\text{-}x_{n-2}).y_{n-2}$**

n. dikdörtgenin alanı **= $(x_n\text{-}x_{n-1}).y_{n-1}$**

olarak elde edilir. Böylece toplam alan dikdörtgen yöntemi yardımıyla yaklaşık olarak;

$$A=\int_a^b f(x)dx \cong (x_1-x_0)y_0+(x_2-x_1)y_1+.................+(x_n-x_{n-1})y_{n-1}$$

şeklinde bulunur. Ardışık x_i noktaları arasındaki uzaklık;

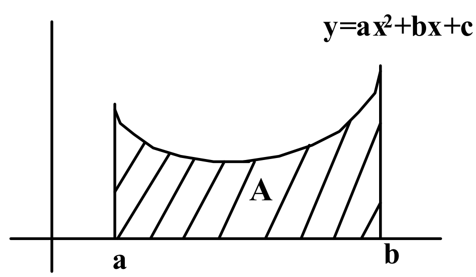
$$\Delta x = x_1-x_0 = x_2-x_1 = ... = x_n-x_{n-1}$$

olacak şekilde eşit ise istenilen alan;

$$A=\int_a^b f(x)dx \cong \Delta x\left[y_0+y_1+......+y_{n-1}\right]$$ olarak bulunur.

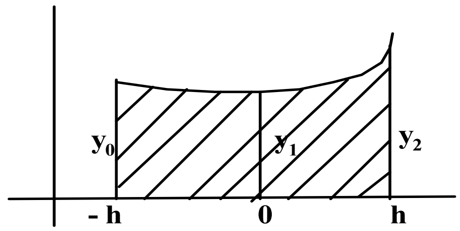
6.4. Parabolik Alan Formülü

Parabolik alan formülü parabolik bir eğri altında kalan alanı bulmamızı sağlar. Bunun için ***y=ax²+bx+c*** fonksiyonu, **x- ekseni x=a,x=b doğruları** ile sınırlı bölgenin alanını bulmaya çalışalım. (Şekil.6.5)



Şekil.6.5

Bu alanı aşağıdaki gibi y- eksenine eşit uzaklıkta olacak şekilde seçelim ve alanımızı h genişliğinde iki dilime ayıralım. (Şekil.6.6)



Şekil.6.6

Bu dilimlerin **-h,0,h** noktalarındaki yükseklikleri sırasıyla **y_0,y_1 ve y_2** olsun. Daha önceden bildiğimiz gibi alan;

$$A = \int_{-h}^{h} y dx = \int_{-h}^{h} \left(ax^2 + bx + c\right) dx = \left(a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx \right. \Big|_{-h}^{h}$$

$= \frac{2}{3}ah^3 + 2ch = \frac{h}{3}\left(2ah^2 + 6c\right)$....................(*) olarak bulunur.**$y=ax^2+bx+c$** fonksiyonunda

sırasıyla **-h, 0 ve h** değerlerini yani **y_0,y_1 ve y_2** yüksekliklerini bulalım. Buradan;

$$y_0 = y(-h) = ah^2 - bh + c$$
$$y_1 = y(0) = c$$
$$y_2 = y(h) = ah^2 + bh + c$$

olarak bulunur. y_0 ve y_2 değerlerini toplarsak;

$y_0 + y_2 = 2ah^2 + 2c = 2ah^2 + 2y_1$ olur. Buradan a değerini çekersek;

$a = \dfrac{y_0 + y_2 - 2y_1}{2h^2}$ ve yine aynı eşitlikten **$c=y_1$** değeri bulunur. a ve c'nin bu değerlerini (*) ifadesinde yerine yazarsak;

$$A = \frac{h}{3}(2ah^2 + 6c) = \frac{h}{3}\left(2h^2 \frac{(y_0 + y_2 - 2y_1)}{2h^2} + 6y_1\right)$$

$$A = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

olur. Böylece **Simpson** yöntemini elde etmemizi sağlayacak Parabolik alan formülü elde edilir.

Örnek.6.4: (1 , 2.05) , (3 , 5.83) ve (5 ,17.9) noktalarından geçen eğri parabol şeklinde ise bu eğri ile x- ekseni, x=1 ve x=5 doğruları arasında kalan sınırlı bölgenin alanını bulunuz?

Çözüm.6.4: $h = \Delta x = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = 3 - 1 = 5 - 3 = 2$ olur.

$y_0 = 2.05, y_1 = 5.83, y_2 = 17.9$ olduğuna göre;

$$A \cong \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right)$$

$$A \cong \frac{2}{3}\left(2.05 + 4.(5.83) + 17.9\right)$$

$$A \cong 28.8br^2$$

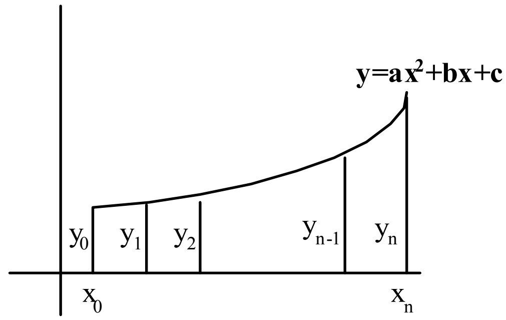
6.5. Simpson Yöntemi

Bir eğri altında kalan yaklaşık alanın hesabı için aldığımız fonksiyonun eğrisi bir parabol olsun. (Şekil.6.7) Parabolik alan formülü eğri üzerindeki üç nokta çifti belli iken yaklaşık alanı veriyordu. Eğer nokta çifti sayısı n ise yaklaşık alan hesabı yine benzer mantıkla geliştirilebilir. Bunun için farklı her üç nokta çiftine Parabolik alan formülü uygulanarak ardışık her iki dilimin alanı bulunabilir. Şöyle ki;

Dilim numarası	Alanı
1. ve 2. dilim	$\frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right)$
3. ve 4. dilim	$\frac{h}{3}\left(y_2 + 4y_3 + y_4\right)$
5. ve 6. dilim	$\frac{h}{3}\left(y_4 + 4y_5 + y_6\right)$
n-1. ve n. dilim	$\frac{h}{3}\left(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right)$

olarak belirlenip alt alta toplanırsa; $A \cong \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + ... + 4y_{n-1} + y_n\right)$

şeklinde Simpson yöntemini oluşturan formül elde edilir.



Şekil.6.7

Şimdiye kadar ele alınan tüm yöntemler için nokta çiftlerine sahip olduğumuz söyledik. Bunun yerine bir denkleme sahip olduğumuzda verilen Δx değerine göre x_k'ler belirlenip f (x_k)'lar buna göre hesaplanarak $(x_k, f(x_k))$ (k=1,2,.....,n) nokta çiftleri bir tablo şeklinde oluşturulup hangi yöntemle çözülecekse tablo ona göre kullanılır.

Örnek.6.5: Verilen tablodaki değerlerden geçen eğrinin altındaki alanı Simpson Kuralını kullanarak yaklaşık olarak bulunuz.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	4.02	5.23	5.66	6.05	5.81	5.62	5.53	5.71	6.32	7.55	8.91

Çözüm.6.5: **$h=x_i-x_{i-1}=1$** olduğuna göre;

$$A \cong \frac{h}{3}\left[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + 2y_6 + 4y_7 + 2y_8 + y_9\right]$$

$$A \cong \frac{h}{3}\begin{bmatrix} 4.02 + 4(5.23) + 2(5.66) + 4(6.05) + 2(5.81) + 4(5.62) \\ + 2(5.53) + 4(5.71) + 2(6.32) + 4(7.55) + 8.91 \end{bmatrix}$$

$$A \cong 60{,}1 br^2$$

---

* Simpson yöntemi İngiliz matematikçi **Thomas Simpson** (1710-1761)tarafından geliştirilmiştir.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki problemleri istediğiniz herhangi bir yöntemi kullanarak çözünüz.

1) $\int_{1}^{3} \frac{1+2x}{x+x^2}\,dx$ 3) $\int_{1}^{8} \left(4x^{\frac{1}{3}}+3\right)dx$

2) $\int_{1}^{10} \frac{dx}{x}$ 4) $\int_{0}^{\pi} \sin x\,dx$

5)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	24	25.2	25.6	26	25.8	25.6	25.5	25.7	26.3	27.5	28.9

6)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	3.02	4.63	4.76	5.08	6.31	6.60	6.23	6.48	7.27	8.93	9.11

KAYNAKLAR

1. Paul Calter, Technical Mathematics with Calculus, 2nd. ed, Prentice - Hall, inc., Englewood Clifss, New Jersey, 1990.

2. Arthur D.Kramer, Fundamentals of Technical Mathematics with Calculus, 2nd ed., McGraw – Hill, Inc., USA, 1989.

3. M.Üreyen, Ş.Koçak, C.Tayfur, M.Göğüş, Matematik – II (İntegral Hesap), Eskişehir, 1985.

4. Uğur Er , Çözümlü İntegral Teknikleri, Eskişehir, 1988.

5. Richard S. Paul, M.Leoanard Shaevel, Essentials of Tecnichal Mathematics, Prentice – Hall, İnc., Englewood Cliffs, NT, 3. rd ed., 1989.

6. Ross R.Middlemiss, Differantial and İntegral calculus, Mc Graw – Hill, İnc., New York, London, 1946.

7. İbrahim Doğan, Genel Matematik, İstanbul, 1996.

8. F.Akbulut, Ali Çalışkan, Matematik Analiz Alıştırma ve Problemler Derlemesi (çeviri), İzmir, 1987.

9. John H.Mathews, Numerical Methods, Prentice – Hall, İnc., Englewood Cliffs, NJ, 1987.

10. Hamdi Arıkan, Matematik – II , İ.T.Ü , Sakarya , 1990.

11. Lütfi Biran, Erol Yarız, Genel Matematik, İstanbul, 1982.

12. Ahmet Karedeniz, Yüksek Matematik, Cilt – 1, Diferansiyel ve İntegral Hesap.1980

13. Ernest F. Haeussler, Jr., Richard s. Paul, Introductory Mathematical Analysis, Sixth Editon, Prentice-Hall, Inc., NJ,1990.

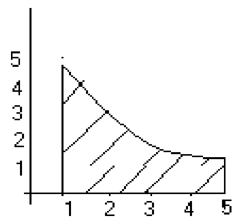
14. Bernard Kolman, Charles G.Denlinger, Applied Calculus, HBJ, Inc., LA,1989.

Ek.1. Çözümlü Örnekler

1) $y=\dfrac{5}{x}$ eğrisi y = 0 , x = 1, x = 5 doğruları ile sınırlı bölgenin; **a)** A = ? **b)** V_x = ? **c)** V_y = ?

Çözüm :

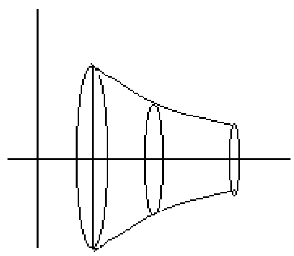
a)



$$A=\int_a^b (y_1-y_2)dx=\int_1^5\left(\frac{5}{x}-0\right)dx=\int_1^5\frac{5}{x}dx$$

$$=5\int_1^5\frac{1}{x}dx \;=5(\ln x\Big|_1^5 =5\mathrm{Ln}5$$

b)

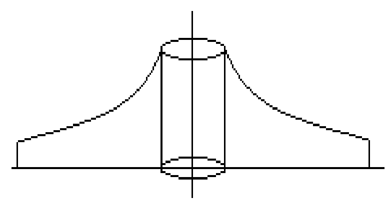


$$Vx=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_1^5\left(\frac{5}{x}\right)^2dx=25\pi\int_1^5 x^{-2}dx$$

$$V_x=25\pi\left(-\frac{1}{x}\right|_1^5=25\pi\frac{4}{5}=20\pi$$

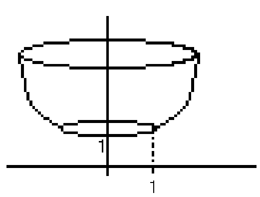
c) $$V_y=2\pi\int_a^b xydx \;=2\pi\int_1^5 x\frac{5}{x}dx \;=10\pi\int_1^5 dx$$

$$V_y=10\pi(x\Big|_1^5 \;=10\pi(5-1)=40\pi$$



2-) x^2 = y eğrisi , x = 0, y = 1, y = 4 doğruları ile sınırlı bölgenin y- ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin dönel alanı nedir?

Çözüm :



$$S=2\pi\int_a^b x\sqrt{1+(x')^2}\,dy \quad \text{idi.}$$

$$x=\sqrt{y}\Rightarrow x'=\frac{dx}{dy}=\frac{1}{2\sqrt{y}}\Rightarrow (x')^2=\frac{1}{4y}$$

$$S=2\pi\int_1^4\sqrt{y}\sqrt{1+\frac{1}{4y}}dy=2\pi\int_1^4\sqrt{y}.\frac{\sqrt{4y+1}}{\sqrt{y}}dy$$

$$\sqrt{4y+1}=u\Rightarrow 4y+1=u^2$$

$$\Rightarrow dy=\frac{1}{2}ud.u$$

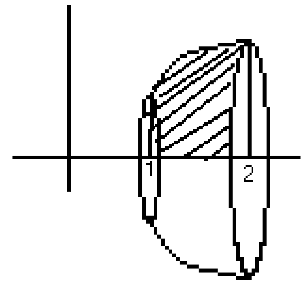
$$y=1\Rightarrow u_1=\sqrt{5}\Rightarrow y=2\Rightarrow u_2=\sqrt{17}$$

$$S=2\pi\int_1^4\sqrt{4y+1}dy=2\pi=\int_5^{17}u\frac{1}{2}u.du=\pi\left(\frac{u^3}{3}\right|_{\sqrt{5}}^{\sqrt{17}}$$

$$=\pi\left(\frac{17\sqrt{17}-5\sqrt{5}}{3}\right)$$

3) $y = 3\sqrt{x}$ eğrisi y = 0, x = 1, x = 2 doğruları ile sınırlı bölgenin x- ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin yanal alanı nedir ?

Çözüm : $S = 2\Pi \int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx$



$$y = 3\sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{3}{2\sqrt{x}} \Rightarrow (y')^2 = \frac{9}{4x}$$

$$S = 2\Pi \int_1^2 3\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{9}{4x}}\,dx = 3\Pi \int_1^2 \sqrt{x}\,\frac{\sqrt{4x+9}}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$S = 3\Pi \int_1^2 \sqrt{4x+9}\,dx = 3\Pi \int_{\sqrt{13}}^{\sqrt{17}} u\,\frac{1}{2}u.du$$

$$S = \frac{3\Pi}{2}\left(\frac{u^3}{3}\right|_{\sqrt{13}}^{\sqrt{17}} \quad \text{ise} \quad S = \Pi\left(17\sqrt{17} - 13\sqrt{13}\right) \quad \text{olur.}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \sqrt{4x+9} = u \quad 4x+9 = u^2 \Rightarrow x = \dfrac{u^2-9}{4} \quad dx = \dfrac{1}{2}u.du \\ \Rightarrow x = 1 \Rightarrow u = \sqrt{13} \quad \Rightarrow x = 2 \Rightarrow u = \sqrt{17} \end{array}}$$

4-) $\int e^{Lnx - Ln(x^2-1)}dx = ?$

Çözüm : $\int e^{Lnx - Ln(x^2-1)}dx = \int e^{Ln\left(\frac{x}{x^2-1}\right)}dx = \int \frac{x.dx}{x^2-1}$

1. Yol : $x^2 - 1 = u$ dersek ve $x.dx = \frac{du}{2}$ olur. Böylece ;

$$\int \frac{x.dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}Ln|u| + c = \frac{1}{2}Ln\left|x^2-1\right| + c$$

2. Yol :

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{x}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \quad \text{ise} \quad x = A(x+1) + B(x-1)$$

$$x = x\underbrace{(A+B)}_{1} + \underbrace{(A-B)}_{0} \quad \text{ve} \quad \begin{array}{l} A+B = 1 \\ A-B = 0 \end{array} \quad \text{ise } A = B = \frac{1}{2} \text{ bulunur. Buna göre;}$$

$$\int \frac{x.dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} = \frac{1}{2}Ln|x-1| + \frac{1}{2}Ln|x+1| + c = \frac{1}{2}Ln\left|x^2-1\right| + c \quad \text{aynı sonuç bulunur.}$$

5) $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}=?$

Çözüm : $tg\frac{x}{2}=t$ dersek $\frac{x}{2}=Arctg.t$ ve x = 2 Arctg.t$\Rightarrow dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ ve

$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ değerleri verilen integralde yerine yazılırsa;

$$\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}=\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{8-4\frac{2t}{1+t^2}+7\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{t^2-8t+15}{1+t^2}}=\int \frac{2dt}{t^2-8t+15}$$

$$\frac{2}{t^2-8t+15}=\frac{2}{(t-3)(t-5)}=\frac{A}{(t-3)}+\frac{B}{(t-5)}$$

2 = A(t – 5)+B(t – 3) ise 2 = t(A + B)+(-5A – 3B)

-5A-3B= 2 ve A+B=0 ise A=-1 , B=1 olur.

$$=-\int \frac{dt}{t-3}+\int \frac{dt}{t-5}$$

$$= Ln|t-5| - Ln|t-3| + c$$

$$= Ln\left|\frac{t-5}{t-3}\right|+c = Ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}-5}{tg\frac{x}{2}-3}\right|+c$$

6-) y’’= $3x^2$ – 2x +1 olan ve (-2, 3) 'deki eğimi $m=\frac{3}{4}$ olan eğrinin denklemini bulunuz.

Çözüm : $\int y''dx=y' \Rightarrow \int (3x^2-2x+1)dx=\frac{3}{4}$

$$y'=x^3-x^2+x+c_1=\frac{3}{4}\Rightarrow (-2)^3-(-2)^2+(-2)+c_1=\frac{3}{4}\Rightarrow c_1=\frac{59}{4}$$

$$\int y'dx=y \Rightarrow \int (3x^3-x^2+x+\frac{59}{4})dx=y \Rightarrow \frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{59}{4}x+c_2=y$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}(-2)^4-\frac{1}{3}(-2)^3+\frac{1}{2}(-2)^2+\frac{59}{4}(-2)+c_2=3\Rightarrow c_2=-\frac{143}{6}$$

Böylece; $y=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{59}{4}x-\frac{143}{6}$ olur.

7) $\int \frac{\ln(\ln x)}{x\ln x}dx=?$

Çözüm: $\ln(\ln x)=t$

$$\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}dx=dt\Rightarrow \frac{dx}{x\ln x}=dt\Rightarrow dx=x\ln x dt$$

$$\int \frac{1}{x\ln x}x\ln x dt=\int t dt=\frac{t^2}{2}+c=\frac{1}{2}[\ln(\ln x)]^2+c$$

8) $\int \sin^2 x\cos^5 x dx = ?$

Çözüm: $\int \sin^2 x(\cos^2 x)^2 \cos x dx = \int \sin^2 x(1-\sin^2 x)^2 .\cos x dx$

$\sin x = u \Rightarrow \cos x dx = du$

$= \int u^2(1-u^2)^2 du = \int u^2(1-2u^2+u^4)du$

$= \int (u^2 - 2u^4 + u^6)du = \frac{u^3}{3} - \frac{2}{5}u^5 + \frac{u^7}{7} + c = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{2\sin^5 x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + c$

9) $\int \frac{e^x dx}{e^{2x} - e^x - 2} = ?$

Çözüm : $e^x = u \Rightarrow e^x dx = du$ olur.

$$\int \frac{e^x dx}{e^{2x} - e^x - 2} = \int \frac{du}{u^2 - u - 2} = \frac{1}{u^2 - u - 2} = \frac{1}{(u-2)(u+1)} = \frac{A}{u-2} + \frac{B}{u+1}$$

$1 = A(u+1) + B(u-2) \Rightarrow 1 = (A+B)u + (A-2B) \Rightarrow A + B = 0$ ve $A - 2B = 1$

Buradan; $A = \frac{1}{3}$ $B = -\frac{1}{3} \Rightarrow$ $\int \frac{e^x dx}{e^{2x} - e^x - 2} = \int \frac{du}{u-2} - \frac{1}{3}\int \frac{du}{u+1}$

$$= \frac{1}{3}\ln|u-2| - \frac{1}{3}\ln|u+1| + c = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{e^x - 2}{e^x + 1}\right| + c$$

10) $\int \frac{5e^x}{4 + e^{2x}} dx = ?$

Çözüm : $e^x = u \Rightarrow$ $u = 2\tan\theta$

$e^x dx = du \Rightarrow$ $du = 2\sec^2\theta.d\theta \Rightarrow$ $\tan\theta = \frac{u}{2} \Rightarrow \theta = \mathrm{Arc}\tan\frac{u}{2}$

$$= \int \frac{5du}{4+u^2} = 5\int \frac{du}{4+u^2} = 5\int \frac{2\sec^2\theta.d\theta}{4+4\tan^2\theta} = 5\int \frac{2\sec^2\theta.d\theta}{4(1+\tan^2\theta)} = 5\int \frac{2\sec^2\theta.d\theta}{4\sec^2\theta}$$

$$= 5\int \frac{1}{2}d\theta = \frac{5}{2}\theta = \frac{5}{2}\mathrm{Arc}\tan\frac{u}{2} = \frac{5}{2}\mathrm{Arc}\tan\frac{e^x}{2} + c$$

11) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{e^{\sin x}}} = ?$

Çözüm : $e^{\sin x} = t \Rightarrow \cos x e^{\sin x} dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{\cos x e^{\sin x}}$

$$= \int \frac{\cos x}{\sqrt{t}} \frac{dt}{\cos x e^{\sin x}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}.e^{\sin x}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}.t} = \int (t^{-1/2}.t^{-1})dt = \int (t^{-3/2})dt = -\frac{2}{\sqrt{t}} + c = -\frac{2}{\sqrt{e^{\sin x}}} + c$$

12) $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx = ?$

Çözüm : $\ln x = t \Rightarrow \frac{1}{x} dx = dt \Rightarrow dx = xdt$

$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx = \int \frac{\sin t}{x}.xdt == -\cos t + c = -\cos \ln x + c$$

13) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x}} = ?$

Çözüm : $\sqrt{1-x} = t \Rightarrow 1 - x = t^2 \Rightarrow x = 1 - t^2$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x}} = -\int \frac{2t.dt}{(1-t^2).t} = -2\int \frac{dt}{1-t^2} = 2\int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{A}{(t-1)} + \frac{B}{(t+1)}$$

$1 = A(t+1) + B(t-1) \quad t = 1 \Rightarrow 1 = 2A \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}$

$t = -1 \Rightarrow 1 = -2B \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x}} = 2\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t-1} - 2\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t+1} = \ln|t-1| - \ln|t+1| = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| = \ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}\right| + c$$

14) $\int \mathrm{Arctgx}dx = ?$

Çözüm :

$$\left.\begin{array}{ll} \mathrm{Arctgx} = u & dx = du \\ du = \dfrac{dx}{1+x^2} & x = v \end{array}\right\} \quad \int \mathrm{Arctgx}dx = x.\mathrm{Arctgx} - \int \frac{xdx}{1+x^2}$$

$$\int \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Ln}|u| + c$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 1 + x^2 = u \\ 2xdx = du \end{array}} \qquad = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left|1 + x^2\right| + c$$

$$\int \mathrm{Arctgx}dx = x.\mathrm{Arctgx} - \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left|1 + x^2\right| + c$$

Ek.2 Rasyonel Kesirleri İçeren İntegral Örnekleri

1) $\int \frac{x-3}{x^3+x^2}dx = ?$

Çözüm : $\frac{x-3}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$

$x-3 = Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2$

$x-3 = Ax^2 + Ax + Bx + B + Cx^2$

$A + C = 0 \Rightarrow\ A + B = 1 \Rightarrow\ B = -3$

Buradan A=4 ve C=-4 bulunur.Buna göre;

$\int \frac{x-3}{x^3+x^2}dx\ = 4\ln x + \frac{3}{x} - 4\ln|x+1| + c$

2) $\int \frac{3x^2 - 4x + 5dx}{(x^2-4)(x^2-9)} = ?$

Çözüm : $\frac{3x^2-4x+5}{(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3} + \frac{D}{x+3}$

$3x^2 - 4x + 5 = A(x+2)(x^2-9) + B(x-2)(x^2-9) + C(x^2-4)(x+3) + D(x-3)(x^2-4)$

$x = 2 \Rightarrow 9 = -20A\ \ A = -\frac{20}{19}\ \ x = 3 \Rightarrow 20 = 30C \Rightarrow C = \frac{2}{3}$

$x = -2 \Rightarrow 25 = 20B\ \ B = \frac{5}{4}\ \ x = -3 \Rightarrow 44 = -30D \Rightarrow D = \frac{-15}{22}$

$= -\frac{20}{9}\int\frac{dx}{x-2} + \frac{5}{4}\int\frac{dx}{x+2} + \frac{2}{3}\int\frac{dx}{x-3} - \frac{15}{22}\int\frac{dx}{x+3}$

$= \frac{-20}{9}\ln|x-2| + \frac{5}{4}\ln|x+2| + \frac{2}{3}\ln|x-3| - \frac{15}{22}\ln|x+3| + c$

3) $\int \frac{x^3+1}{(x-1)^4}dx = ?$

Çözüm : $\frac{x^3+1}{(x-1)^4} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{D}{(x-1)^4}$

$x^3 + 1 = A(x-1)^3 + B(x-1)^2 + C(x-1) + D$

$x^3 + 1 = Ax^3 - 3Ax^2 + 3Ax - A + Bx^2 - 2Bx + B + Cx - C + D$

$x^3 + 1 = x^3A + x^2(-3A + B) + x(3A - 2B + C) - A + B - C + D$ ve buradan;

$A = 1, B = 3, C = 3, D = 2$ olur.

$= \int\frac{x^3+1}{(x-1)^4} = \int\frac{dx}{x-1} + 3\int\frac{dx}{(x-1)^2} + 3\int\frac{dx}{(x-1)^3} + 2\int\frac{dx}{(x-1)^2}$

$\int\frac{x^3+1}{(x-1)^4}dx = \ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + \frac{3}{2}.\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2}{3}.\frac{1}{(x-1)^3} + c$

4) $\int \dfrac{3x-1}{4x^2-2x}dx = ?$

Çözüm : $\dfrac{3x-1}{4x^2-2x} = \dfrac{3x-1}{2x(2x-1)} = \dfrac{A}{2x} + \dfrac{B}{2x-1}$

$3x-1 = A(2x-1) + B(2x)$ ve buradan; $x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow B = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \quad x = 0 \Rightarrow A = 1$

$= \int \dfrac{dx}{2x} + \dfrac{1}{2}\int \dfrac{dx}{2x-1} = \dfrac{1}{2}\ln x + \dfrac{1}{4}\ln|2x-1| + c$

5) $\int \dfrac{dx}{\sin x.\cos x} = ?$

Çözüm : $\int \dfrac{dx}{\sin x.\cos x} = \int \dfrac{\dfrac{2dt}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}.\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \dfrac{2}{1+t^2}.\dfrac{(1+t^2)^2}{2t(1-t^2)}$

$= -\dfrac{(1+t^2)}{t(t^2-1)} = \dfrac{A}{t} + \dfrac{B}{t-1} + \dfrac{C}{t+1} \Rightarrow -1+t^2 = A(t-1)(t+1) + B.t(t+1) + C.t(t-1)$

$t = 1 \Rightarrow 2B = -2 \Rightarrow B = -1$

$t = -1 \Rightarrow 2C = -2 \Rightarrow C = -1$

$t = 0 \Rightarrow -A = -1 \Rightarrow A = 1$

$= \int \dfrac{dt}{t} - \int \dfrac{dt}{t-1} - \int \dfrac{dt}{t+1} = \ln t - \ln|t-1| - \ln|t+1| + c = \ln\left|\dfrac{t}{t^2-1}\right| + c = \ln\left|\dfrac{tg\,\dfrac{x}{2}}{\tan^2\dfrac{x}{2}-1}\right| + c$

6) $I = \int \dfrac{x^4+1}{x^3-x} = ?$

Çözüm : $I = \int\left(x + \dfrac{x^2+1}{x^3-x}\right)dx = \int xdx + \int \dfrac{x^2+1}{x^3-x}dx$

$$\dfrac{x^2+1}{x^3-x} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C}{x+1}$$

$$x^2+1 = A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)$$

$$I = \int \dfrac{x^4+1}{x^3-x} = \int xdx - \int \dfrac{dx}{x} + \int \dfrac{dx}{x-1} + \int \dfrac{dx}{x+1}$$

$$= \dfrac{x^2}{2} - \ln x + \ln(x-1) + \ln(x+1) + c = \dfrac{x^2}{2} + \ln\left|\dfrac{(x-1)(x+1)}{x}\right| + c$$

7) $I=\int \frac{x^3-1}{x^5-x^4-5x^3+x^2+8x+4}dx=?$

Çözüm $x^5-x^4-5x^3+x^2+8x+4=(x+1)^3(x-2)^2$

$$\frac{x^3-1}{x^5-x^4-5x^3+x^2+8x+4}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+1)^3}+\frac{D}{x-2}+\frac{E}{(x-2)^2}$$

$x^3-1=A(x+1)^2(x-2)^2+B(x+1)(x-2)^2+C(x-2)^2+D(x-2)(x+1)^3+E(x+1)^3$

$x^3-1=A(x^2+2x+1)(x^2-4x+4)+B(x+1)(x^2-4x+4)+C(x^2-4x+4)$

$+D(x-2)(x^3+3x^2+3x+1)+E(x^3+3x^2+3x+1)$

$x^3-1=x^4(A+D)+x^3(-2A+B+D+E)+x^2(-3E-3B+C-3D+3E)+x(-4A-4B-5D+3E)$

$+(12A+4B+4C-2D+E)$

$x=-1\Rightarrow -2=9C\Rightarrow C=-\frac{2}{9}=-\frac{6}{27}$

$x=2 \text{ için } 7=27E\Rightarrow E=\frac{7}{27}$

$-3A-3B+C-3D+3E=0$

$-3A-3B-\frac{2}{9}-3D+\frac{21}{27}=0\Rightarrow -3A-3B-3D=-\frac{15}{27}(i)$

$-2A+B+D+E=1\Rightarrow -2A+B+D=\frac{20}{27}(ii)$

$-2A+B+D=\frac{20}{27}\Rightarrow A+D=0\Rightarrow A=-D$

$+3D-3B-3D=-\frac{15}{27}\Rightarrow\ -3B=-\frac{15}{27}\Rightarrow B=\frac{15}{81}=\frac{5}{27}$

$D=\frac{15}{81}=\frac{5}{27}\Rightarrow -2A+B-A=\frac{20}{27}\Rightarrow -3A=\frac{20}{27}-B\Rightarrow -3A=\frac{20}{27}-\frac{15}{81}\Rightarrow A=-\frac{45}{243}=-\frac{5}{27}$

$$I=\frac{5}{27}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{5}{27}\int\frac{dx}{(x+1)^2}-\frac{6}{27}\int\frac{dx}{(x+1)^3}+\frac{5}{27}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{2}{27}\int\frac{dx}{(x-2)^2}$$

$$=-\frac{5}{27}.\ln|x+1|-\frac{5}{27}.\frac{1}{(x+1)}+\frac{3}{27}.\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{5}{27}.\ln|x-2|-\frac{2}{27}.\frac{1}{(x-2)}+c$$

Ek.3. Trigonometrik fonksiyonları içeren veya gerektiren integral örnekleri

1) $\int \dfrac{dx}{2(1+\cos x)+\sin x} = ?$

Çözüm : $\text{tg}\,\dfrac{x}{2} = t \Rightarrow dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2} \quad \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

$$= \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{2\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)+\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{2.\left(\frac{1+t^2+1-t^2}{1+t^2}\right)+\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{\frac{4+2t}{1+t^2}}$$

$$= \int \frac{2\,dt}{4+2t} = \int \frac{2\,dt}{2(2+t)} = \int \frac{dt}{2+t} = \ln(2+t)+c = \ln\left|2+\text{tg}\,\frac{x}{2}\right|+c$$

2) $\int_0^{\Pi/2} \dfrac{dx}{1+\sin x+\cos x} = ?$

Çözüm : $\text{tg}\,\dfrac{x}{2} = t \Rightarrow x = 2\,\text{Arc}\tan t \Rightarrow dx = 2\dfrac{dt}{1+t^2}$

$\text{sinx} == \dfrac{2t}{1+t^2} \Rightarrow \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

$$\int_0^{\Pi/2} \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1+t^2+2t+1-t^2}{1+t^2}}$$

$$\int_0^{\Pi/2} \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} = \int \frac{2}{1+t^2}.\frac{1+t^2}{2t+2}dt = \int \frac{dt}{t+1} = \ln|t+1| = \ln\left|\text{tg}\,\frac{x}{2}+1\right|+c$$

$$\int_0^{\Pi/2} \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} = \ln\left|\text{tg}\,\frac{x}{2}+1\right| = \ln\left|\text{tg}\,\frac{\pi/2}{2}+1\right| - \ln\left|\text{tg}\,\frac{0}{2}+1\right|$$

$$= \ln\left|\text{tg}\,\frac{\Pi}{4}+1\right| - \ln|\text{tg}0+1| = \ln|2|-\ln|1| = \ln 2 - 0 = \ln 2$$

3) $I = \int \dfrac{-dx}{8(\cos x+1)} = ?$

Çözüm : $\int \dfrac{-dx}{8(\cos x+1)} = \int \dfrac{\frac{-2\,dt}{1+t^2}}{8\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}+1\right)} = \int \dfrac{\frac{-2\,dt}{1+t^2}}{8\left(\frac{1-t^2+1+t^2}{1+t^2}\right)} =$

$$\int \frac{-2\,dt}{8.2} = -\frac{1}{8}\int dt = \frac{-1}{8}t+c = \frac{-1}{8}\,\text{tg}\,\frac{x}{2}+c$$

4) $\int \dfrac{x^2.dx}{(9-x^2)^{3/2}} = ?$

Çözüm : $x = 3\sin\theta \Rightarrow dx = 3\cos\theta.d\theta$

$\sqrt{(9-x^2)} = 3\cos\theta$ ise $\int \dfrac{x^2.dx}{(9-x^2)^{3/2}} \Rightarrow \int \dfrac{9\sin^2\theta.3\cos\theta.d\theta}{27.\cos^3\theta}$

$$= \int \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}d\theta = \int \tan^2\theta.d\theta = \int (\sec^2\theta - 1)d\theta = \int \sec^2\theta.d\theta - \int d\theta$$

$$= \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} - \text{Arctan}\,\frac{x}{3} + c$$

5) $\int \text{Tan}^4 x.d.x$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $u = \text{Tan}x \Rightarrow du = \sec^2 x.dx$ olur.

$$\int \text{Tan}^4 x.dx = \int \text{Tan}^2 x.\text{Tan}^2 x.dx = \int \text{Tan}^2 x(\sec^2 x - 1)dx$$

$$= \int \text{Tan}^2 x.\sec^2 x.dx - \int \text{Tan}^2 x.dx = \int \text{Tan}^2 x.\sec^2 x.dx - \int (\sec^2 x - 1)dx$$

$$= \int \text{Tan}^2 x.\sec^2 xdx - \int \sec^2 x.dx + \int dx = \int u^2.du - \int du + \int dx$$

$$= \frac{1}{3}u^3 - u + x + c = \frac{1}{3}\text{Tan}^3 x - \text{Tan}x + x + c$$

6) $I = \displaystyle\int_{\Pi/3}^{\Pi/2} \frac{1}{1-\cos x}dx = ?$

Çözüm $1-$yol: $t = \tan\dfrac{x}{2}$ dersek $\Rightarrow dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt \Rightarrow \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

$x = \dfrac{R}{3}$ için $\Rightarrow t = \tan\dfrac{R}{6} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$x = \dfrac{R}{2}$ için $\Rightarrow t = \tan\dfrac{R}{4} = 1$

$$I = \int_{1/\sqrt{3}}^{1} \frac{\frac{2}{1+t^2}}{1-\frac{1-t^2}{1+t^2}}dt = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t}\Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} = -1+\sqrt{3}$$

$2-$yol: $\cos x = 1 - 2\sin^2\dfrac{x}{2} \Rightarrow 1 - \cos x = 2\sin^2\dfrac{x}{2}$ olur.

$$I = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{2\sin^2\frac{x}{2}} = -\text{cotan}\frac{x}{2}\Big|_{\pi/3}^{\pi/2} = -1+\sqrt{3}$$

7) $\int \frac{dx}{2(1+\cos x)+\sin x} = ?$

Çözüm : $tg\frac{x}{2} = t \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)+\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2.\left(\frac{1+t^2+1-t^2}{1+t^2}\right)+\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{4+2t}{1+t^2}}$$

$$= \int \frac{2dt}{4+2t} = \int \frac{2dt}{2(2+t)} = \int \frac{dt}{2+t} = \ln(2+t)+c = \ln\left|2+tg\frac{x}{2}\right| + C$$

8) $\int \frac{dx}{x^2.\sqrt{x^2+9}} = ?$

Çözüm : $x = 3tg\theta \Rightarrow dx = 3\sec^2\theta.d\theta$

$$= \int \frac{3\sec^2\theta.d.\theta}{(3tg\theta)^2.\sqrt{(3tg\theta)^2+9}} = \int \frac{3\sec^2\theta.d.\theta}{9tg^2\theta.\sqrt{9tg^2\theta+9}} = \int \frac{3\sec^2\theta.d.\theta}{9tg^2\theta.\sqrt{9(tg^2\theta+1)}} = \int \frac{3\sec^2\theta.d.\theta}{9tg^2\theta.3\sec\theta}$$

$$= \int \frac{\sec\theta.d.\theta}{9tg^2\theta} = \frac{1}{9}\int \frac{1}{\cos\theta}.\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}.d\theta = \frac{1}{9}\int \frac{\cos\theta.d.\theta}{\sin^2\theta}$$

$\sin\theta = u \quad \cos\theta.d.\theta = du$

$$= \frac{1}{9}\int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{9}\int u^{-2}du = \frac{1}{9}.\left(-\frac{1}{9u}\right)+c = -\frac{1}{9u}+c = -\frac{1}{9.\sin\theta}+c = -\frac{1}{9.\sin\theta}+c = -\frac{\sqrt{x^2+9}}{9x}+c$$

$$x = 3tg\theta \Rightarrow tg\theta = \frac{x}{3} \Rightarrow \sin\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} \Rightarrow \theta = Arctg\frac{x}{3}+c$$

9) $I = \int \frac{dx}{6+4\cos x+4\sin x} = ?$

Çözüm : $\tan\frac{x}{2} = t \Rightarrow \; dx = \frac{2dt}{1+t^2} \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \Rightarrow \; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$I = \int \frac{dx}{6+4\cos x+4\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{6+\frac{4(1-t^2)}{1+t^2}+\frac{4(2t)}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{6+6t^2+4-4t^2+8t}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{2t^2+8t+10}$$

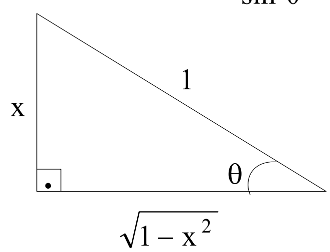
$$= \int \frac{2dt}{2(t^2+4t+5)} = \int \frac{dt}{(t^2+4t+4+1)} = \int \frac{dt}{(t+2)^2+1} = Arctg\left(tg\frac{x}{2}+2\right)+c$$

10) $I = \int \frac{dx}{x^2.\sqrt{1-x^2}} = ?$

Çözüm : $x = \sin\theta \Rightarrow dx = \cos\theta.d.\theta$

$$I = \int \frac{\cos\theta.d.\theta}{\sin^2\theta.\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \int \frac{\cos\theta.d\theta}{\sin^2\theta.\cos\theta} = \int \frac{d\theta}{\sin^2\theta}$$

$$= -\cot an\theta + c = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + c = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + c$$



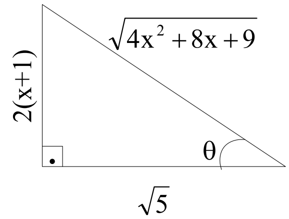
11) $I = \int \frac{2x+5}{\sqrt{4x^2+8x+9}}dx = ?$

Çözüm : $I = \frac{1}{4}\int \frac{8x+8}{\sqrt{4x^2+8x+9}}dx + 3\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+8x+9}}$

$4x^2+8x+9 = u \Rightarrow (8x+8)dx = du$

$$\int \frac{(8x+8)dx}{\sqrt{4x^2+8x+9}} = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int u^{-1/2}du = 2\sqrt{u} + c = 2\sqrt{4x^2+8x+9} + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+8x+9}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+\frac{9}{4}}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+\frac{5}{4}}}$$



$x+1 = \frac{\sqrt{5}}{2}\tan\theta \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{5}}{2}\sec^2\theta.d.\theta$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}.\sec^2\theta.d.\theta}{\sqrt{\frac{5}{4}\tan^2\theta + \frac{5}{4}}} = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}\sec^2\theta.d.\theta}{\sqrt{5}/2\ \sec\theta} = \frac{1}{2}\int \sec\theta.d.\theta = \frac{1}{2}\ln\left|\sec\theta + \tan\theta\right| + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{4x^2+8x+9}}{\sqrt{5}} + \frac{2(x+1)}{\sqrt{5}}\right| + c$$

12) $\int_3^6 \frac{dx}{(x^2-6x+5)^{3/2}} = ?$

Çözüm : $x^2-6x+5 = x^2-6x+9-9+5 = (x-3)^2-4$

$$\int_3^6 \frac{dx}{(x^2-6x+5)^{3/2}} = \int_3^6 \frac{dx}{((x-3)^2-4)^{3/2}} = \int \frac{du}{(u^2-4)^{3/2}}$$

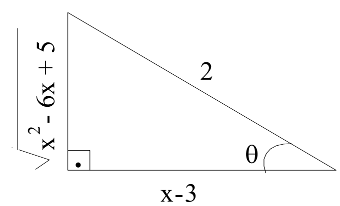
$x-3 = u \Rightarrow dx = du \Rightarrow u = a\sec\theta \Rightarrow x-3 = 2\sec\theta$

$du = a\sec\theta.\tan\theta.d\theta \Rightarrow dx = 2\sec\theta\tan\theta.d.\theta$

$$\int_3^6 \frac{dx}{((x-3)^2-4)^{3/2}} = \int_3^6 \frac{2\sec\theta\tan\theta.d.\theta}{(4\sec^2\theta-4)^{3/2}} = \int \frac{2\sec\theta.\tan\theta.d\theta}{(4(\sec^2\theta-1))^{3/2}}$$

$$= \int \frac{2\sec\theta.\tan\theta.d.\theta}{(4\tan^2\theta)^{3/2}} = \frac{1}{4}\int \frac{\sec\theta.\tan\theta.d.\theta}{\tan^3\theta} = \frac{1}{4}\int \frac{\sec\theta.d.\theta}{\tan^2\theta}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\cos\theta}.\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}.d\theta = \frac{1}{4}\int \frac{\cos\theta.d.\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{4}\int t^{-2}dt$$



$\sin\theta = t \Rightarrow \cos\theta.d\theta = dt$

$x-3 = 2\sec\theta \Rightarrow \frac{x-3}{2} = \sec\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{x^2-6x+5}}{x-3}$

$$= -\frac{1}{4}.\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{4}.\frac{1}{\sin\theta} + C = -\frac{1}{4}.\frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+5}} + c$$

$$\int_3^6 \frac{dx}{((x-3)^2-4)^{3/2}} = \left(-\frac{1}{4}.\frac{(x-3)}{\sqrt{x^2-6x+5}}\right) = -\frac{3}{4\sqrt{5}}$$

13) $\int \frac{dx}{3-5\cos x} = ?$

Çözüm : $\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3-5\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{3+3t^2-5+5t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{8t^2-2} = \int \frac{dt}{4t^2-1}$

$$\frac{1}{4t^2-1} = \frac{A}{2t-1} + \frac{B}{2t+1} \Rightarrow 1 = A(2t+1) + B(2t-1)$$

$t = -\frac{1}{2} \Rightarrow 1 = -2B \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$ ve $t = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 = 2A \Rightarrow A = \frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{2t-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{2t+1} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2t-1}{2t+1}\right| + c = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2tg\frac{x}{2}-1}{2tg\frac{x}{2}+1}\right| + c$$

$2t+1 = u \Rightarrow 2dt = du \Rightarrow dt = \frac{du}{2}$

Ek.4.Diferansiyel Hesap, İntegral, Cebir, Diferansiyel Denklemler, Geometri, Trigonometri, Olasılık ve İstatistik alanlarında kullanılan temel özellikler, bağıntılar ve formüller.

Kitabımıza ek olarak hazırlanan bu bölümde, gerek kitapta yer alan konular ve gerekse diğer bilim dallarında yer alan belli başlı tanımlar, özellikler, özet bilgiler ve formüller verilmiştir. Bu ek bölümde Analiz, Cebir, Geometri, Diferansiyel, İntegral, Diferansiyel Denklemler, Analitik Geometri, Trigonometri, Logaritma, Fonksiyonlar ve benzeri Matematik dallarındaki temel tanımlar, özellikler, özet bilgiler ve formüllerin yanı sıra Mühendisliğin her branşında kullanılan temel bilgiler, Olasılık ve İstatistik dallarına ait 546 adet tanım,özellik,özet bilgi ve formülden oluşmuştur.

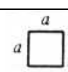
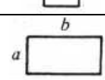
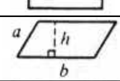
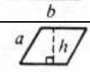
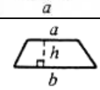
CEBİRSEL KURALLAR	**1**	**Değişme Özelliği**	Toplama	a + b = b + a
	2		Çarpma	a.b = b.a
	3	**Birleşme Özelliği**	Toplama	a + (b + c) = (a + b) + c = (a + c) + b
	4		Çarpma	a.(b.c) = (a.b).c =(a.c).b = a.b.c
	5	**Dağılma Özelliği**		a.(b +c) =a.b + a.c
İŞARET KURALLARI	**6**	**Toplama ve Çıkarma**	a + (- b) = a – (+ b) = a – b	
	7		a + (+ b) = a – (- b) = a + b	
	8	**Çarpma**	(+ a).(+ b) = (- a).(- b) = a.b	
	9		(+ a).(- b) = (- a).(+b) = - (+ a).(+ b) = - a.b	
	10	**Bölme**	$\frac{+a}{+b} = \frac{-a}{-b} = -\frac{-a}{+b} = -\frac{+a}{-b} = \frac{a}{b}$	
	11		$\frac{+\mathrm{a}}{-\mathrm{b}} = \frac{-\mathrm{a}}{+\mathrm{b}} = -\frac{-\mathrm{a}}{-\mathrm{b}} = -\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$	
YÜZDELİKLER	**12**	Miktar = Temel x Oran		
	13	$\text{Yüzde Değişim} = \frac{\text{Yeni Değer - Esas Değer}}{\text{Esas Değer}} \times \%100$		
	14	$\text{Yüzde Hata} = \frac{\text{Ölçülen Değer - Bilinen Değer}}{\text{Bilinen Değer}} \times \%100$		
	15	$\text{A'nın Yüzde karışımı} = \frac{\text{A'nın Miktarı}}{\text{Karışım Miktarı}} \times \%100$		
	16	$\text{Yüzde Etki} = \frac{\text{Çıkış}}{\text{Giriş}} \times \%100$		

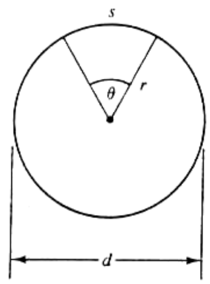
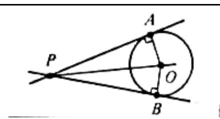
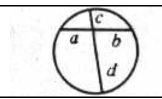
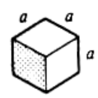
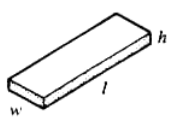
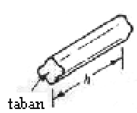
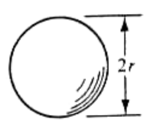
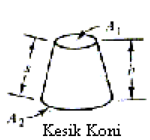
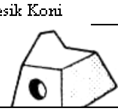
İKİLİ SAYILAR	17	En büyük n bit ikili sayı		$2^n - 1$
	18	Toplama		0 + 0 = 0 0 + 1 = 1 1 + 0 = 1 1 + 1 = 0 eldeli toplama
	19	Çıkarma		0 – 0 = 0 0 – 1 = 1 eldeli çıkarma 1 – 0 = 1 1 – 1 = 0
	20			A-B=A+(-B)
	21	Çarpma		0 x 0 = 0 0 x 1 = 0 1 x 0 = 0 1 x 1 = 1
	22	Bölme		0 ÷ 0 tanımsız 1 ÷ 0 tanımsız 0 ÷ 1 = 0 1 ÷ 1 = 1
İKİLİ SAYILAR	23	Ters alma	n bit x sayısının birinci tersi	$\left(2^n - 1\right) - x$
	24			Bir sayının birinci tersi 1' lerin 0, 0' ların 1 yapılmasıyla elde edilir.
	25		n bit x sayısının ikinci tersi	$\left(2^n - x\right)$
	26			Bir sayının ikinci tersi, birinci tersinin alınıp bulunan sayıya 1 ilave edilmesiyle elde edilir
	27	Negatif ikili sayılar		Eğer M pozitif ikili bir sayı ise –M, M sayısının ikinci tersidir.
ÜSLER	28	Tanım		$a^n = a.a.a........a$ n adet a çarpımı
	29	Üs Alma Kuralları	Çarpım	$(x^a).(x^b) = x^{a+b}$
	30		Bölme	$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$
	31		Kuvvet	$(x^a)^b = x^{ab} = (x^b)^a$
	32		Çarpımın kuvveti	$(x.y)^n = x^n.y^n$
	33		Bölümün kuvveti	$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$
	34		0. üs	$x^0 = 1$
	35		Negatif üs	$x^{-a} = \frac{1}{x^a}$
	36	Kesirli üsler		$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$
	37			$a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p$

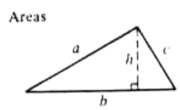
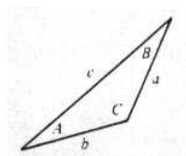
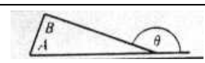
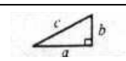
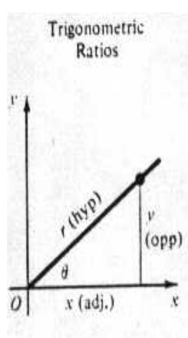
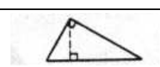
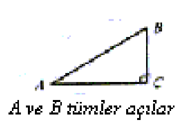
KÖKLER	**38**	**Kök kuralları**	Çarpımın kökü	$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$
	39		Bölümün kökü	$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
	40		Kuvvetin kökü	$\sqrt[p]{a^q}=(\sqrt[p]{a})^q$
ÖZEL ÇARPANLAR VE ÇARPIMLAR	**41**	**İki terimliler**	İki kare farkı	$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
	42		İki küp toplamı	$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
	43		İki küp farkı	$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
	44	**Üç terimliler**	Çarpanlara ayırma testi	Eğer b^2-4ac tam kare ise ax^2+bx+c çarpanlarına ayrılabilir
	45		Eğer a=1	$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$
	46		Genel ikinci derece üç terimli	$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$
	47		Tam kare üç terimliler	$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$
	48			$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$
	49	**Gruplayarak çarpanlarına ayırma**		$ac+ad+bc+bd=(a+b)(c+d)$
KESİRLER	**50**	**Sadeleştirme**		$\dfrac{ad}{bd}=\dfrac{a}{b}$
	51	**Çarpma**		$\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d}=\dfrac{ac}{bd}$
	52	**Bölme**		$\dfrac{a}{b}\div\dfrac{c}{d}=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{d}{c}=\dfrac{ad}{bc}$
	53	**Toplama ve çıkarma**	Aynı paydalar	$\dfrac{a}{b}\pm\dfrac{c}{b}=\dfrac{a\pm c}{b}$
	54		Farklı Paydalar	$\dfrac{a}{b}\pm\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad}{bd}\pm\dfrac{bc}{bd}=\dfrac{ad\pm bc}{bd}$
ORANTI	**55**	**a:b=c:d orantısında**	İçler çarpımı dışlar çarpımına eşittir	$ad=bc$
	56		Dışlar kendi arasında yer değiştirebilir	$d:b=c:a$
	57		İçler kendi arasında yer değiştirebilir	$a:c=b:d$
	58		İçler ile dışlar yer değiştirebilir	$b:a=d:c$
	59	**Orta orantılı**	Orantı	$a:b=b:c$
			Geometrik ortalama	$b=\pm\sqrt{ac}$
DEĞİŞİM	**60**	**k= Orantı katsayısı**	Doğru	$y\ \alpha\ x$ yada $y=kx$
	61		Ters	$y\ \alpha\ \dfrac{1}{x}$ yada $y=\dfrac{k}{x}$
	62		Bileşik	$y\ \alpha\ x.w$ yada $y = k.x.w$

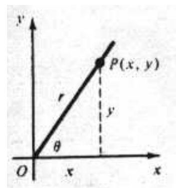
LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ	**63**	**Cebirsel Çözüm**	$a_1x+b_1y=c_1$ $a_2x+b_2y=c_2$		$x=\frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}$ ve $y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$	burada $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$
	64		$a_1x+b_1y+c_1z=k_1$ $a_2x+b_2y+c_2z=k_2$ $a_3x+b_3y+c_3z=k_3$		$x=\frac{b_2c_3k_1+b_1c_2k_3+b_3c_1k_2-b_2c_1k_3-b_3c_2k_1-b_1c_3k_2}{a_1b_2c_3+a_3b_1c_2+a_2b_3c_1-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3}$ $y=\frac{a_1c_3k_2+a_3c_2k_1+a_2c_1k_3-a_3c_1k_2-a_1c_2k_3-a_2c_3k_1}{a_1b_2c_3+a_3b_1c_2+a_2b_3c_1-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3}$ $z=\frac{a_1b_2k_3+a_3b_1k_2+a_2b_3k_1-a_3b_2k_1-a_1b_3k_2-a_2b_1k_3}{a_1b_2c_3+a_3b_1c_2+a_2b_3c_1-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3}$	
	65	**Determinantlar**	Bir Determinantın Değeri	İkinci Derece	$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$	
	66			Üçüncü derece	$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1b_2c_3+a_3b_1c_2+a_2b_3c_1-(a_3b_2c_1+a_1b_3c_2+a_2b_1c_3)$	
	67			Minörler	Determinantta b elemanının işaretli minörü $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ ise $-\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}$	
	68				Bir determinantın değerinin bulmak için; 1. Herhangi bir satır veya sütun seçilip işaretli minörü hesaplanır.. 2. Bu satır veya sütundaki her bir eleman ile o elemanın işaretli minörü çarpılır. 3. Bu çarpımlar toplanarak determinantın değeri bulunur.	
	69		Cramer Kuralı	Herhangi bir değişkenin çözümü, paydası katsayılar determinantı, payı ise o değişkenin bulunduğu sütuna sabitler vektörü konularak elde edilen determinantın hesaplanması ile edilen kesrin değeridir.		
	70			İki denklem	$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$ ve $y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$	
	71			Üç denklem	$x=\frac{\begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\Lambda}$ $y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & k_1 & c_1 \\ a_2 & k_2 & c_2 \\ a_3 & k_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\Lambda}$ $z=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & k_2 \\ a_3 & b_3 & k_3 \end{vmatrix}}{\Lambda}$ Burada ; $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\neq 0$	

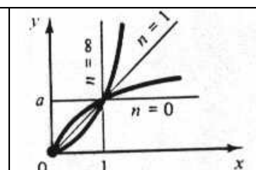
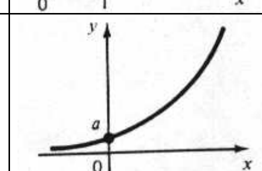
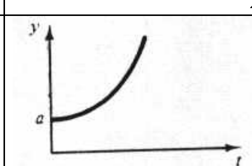
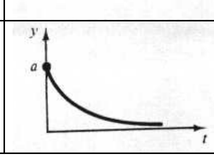
LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ	72	Determinantın Özellikleri	Sıfır satır veya sütun	Bir satırın (veya sütun) bütün elemanları 0 ise determinant değeri 0' dır.
	73		Eşit satırlar veya sütunlar	Eğer iki satır (veya sütun) eşitse determinant değeri 0' dır.
	74		Temel köşegen altındaki sıfırlar	Eğer temel köşegen altındaki elemanların hepsi sıfırsa determinantın değeri köşegen üzerindeki elemanların çarpımına eşittir.
	75		Satırlar ile sütunların yer değiştirmesi	Eğer satırlarla sütunları (veya sütunlarla satırları) yer değiştirirsek determinantın değeri değişmez.
	76		Satırlar veya sütunların yer değiştirmesi	İki satır (veya sütun) aralarında yer değiştirilirse determinantın işareti değişir.
	77		Bir sabit ile çarpım	Bir determinantın bir sabitle çarpımı o determinantın bütün elemanlarının o sayıyla çarpımı demektir.
	78		Bir satır veya sütunun bir katının diğerine ilave edilmesi	Bir satır (veya sütunun) elemanları bir çarpanla çarpılır ve diğer satır veya sütunun aynı konumdaki elemanlarına ilave edilirse determinantın değeri değişmez.
MATRİSLER	79	Toplama	Değişme özelliği	A+B=B+A
	80		Birleşme özelliği	A+(B+C)=(A+B)+C=(A+C)+B
	81		Toplama ve Çıkarma	$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+w & b+x \\ c+y & d+z \end{pmatrix}$
	82	Çarpma	Çarpılabilir Matrisler	A ve B iki matris olsun. AB çarpım matrisi ancak A matrisinin sütun sayısı B matrisinin satır sayısına eşit iken tanımlanır.
	83		Değişme Özelliği	AB $\neq$ BA Matris çarpımında değişme özelliği yoktur
	84		Birleşme Özelliği	A(BC) = (AB)C = ABC
	85		Dağılma Özelliği	A(B+C) = AB + AC
	86		Çarpımın boyutu	(m x p)(p x n)=(m x n)
	87		Bir matrisin ve bir skalerin çarpımı	$k\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$
	88		Bir sütun vektörü ve bir satır vektörünün skaler çarpımı	(1 X 2)(2 X 1) (1 X 1) $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & + & by \end{pmatrix}$
	89		Bir satır vektörü ve bir sütun vektörünün tensör çarpımı	(2 X 1)(1 X 2) (2 X 2) $\begin{pmatrix} \mathrm{a} \\ \mathrm{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{x} & \mathrm{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ax} & \mathrm{ay} \\ \mathrm{bx} & \mathrm{by} \end{pmatrix}$
	90		Bir satır vektörü ve bir matrisin çarpımı	(1 X 2) (2 X 3) (1 X 3) $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v & w \\ x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au+bx & av+by & aw+bz \end{pmatrix}$
	91		Bir sütun vektörü ve bir matrisin çarpımı	(2 X 2) (2 X 1) (2 X 1) $\begin{pmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ax} + \mathrm{by} \\ \mathrm{cx} + \mathrm{dy} \end{pmatrix}$

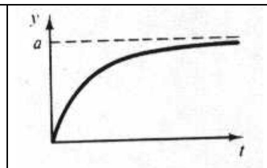
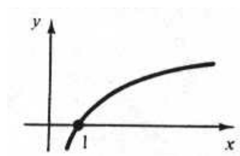
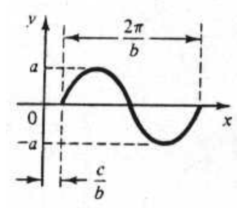
	92		İki matrisin çarpımı	(2 X 3) (3 X 2) (2 X 2) $\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u & x\\ v & y\\ w & z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}au+bv+cw & ax+by+cz\\ du+ev+fw & dx+ey+fz\end{pmatrix}$
	93		Bir matrisin tersi ile çarpımı	**$AA^{-1}=A^{-1}A=I$**
	94		Bir matrisin birim matris ile çarpımı	**AI=IA=A**
	95	**Denklem sistemlerinin çözümleri**	Bir denklem sistemin matris formu	**AX=B**
	96		Bir matrisin	1. Herhangi satırların değişimi 2. 0 olmayan bir sabit ile bu satırları çarpma 3. Bir satırın sabit çarpımının diğer satıra ilave edilmesi
	97		Birim matris metodu	AX=B formunun her iki tarafı A^{-1} ile çarpılarak X bilinmeyenler vektörü aşağıdaki gibi elde edilir.
	98		Ters matris yöntemiyle denklem sistemi çözümü	**$X=A^{-1}B$**
	99	**Genel form**	$ax^2+bx+c=0$	
	100	**Kuadratik form**	$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	
	101	**Diskriminant**	Eğer a,b ve c reel sayı ise	Eğer $b^2 - 4ac > 0$ gerçel iki farklı kök varsa Eğer $b^2 - 4ac = 0$ İki eşit kök varsa Eğer $b^2 - 4ac < 0$ Gerçel olmayan kökler
	102	**n. derece polinom**	$a_0x^n+a_1x^{n-1}+.....+a_{n-1}x+a_n$	
	103	**Çarpan teoremi**	Eğer f(x)=0 denkleminin kökü r ise x-r f(x) polinomunun bir çarpanıdır; tersine x-r f(x) polinomunun bir çarpanı ise r, f(x)=0 denkleminin bir köküdür.	
Kesişen doğrular	104	Kesişen iki doğrunun ters açıları eşittir.		
	105	Eğer iki paralel doğruyu üçüncü bir doğru keserse oluşan yöndeş ve iç ters açılar eşittir.		
	106	Eğer iki doğru birçok paralel doğruyla kesilirse karşılıklı doğru parçaları orantılıdır.		
ÇOKGENLER	107		Kare	$\text{Alan} = a^2$
	108		Dikdörtgen	$\text{Alan} = a.b$
	109		Paralelkenar	$\text{Alan} = b.h$
	110		Eşkenar Dörtgen	$\text{Alan} = a.h$
	111		Yamuk	$\text{Alan} = \dfrac{(a+b).h}{2}$
	112		Çokgen	$\text{AçılarToplamı} = (n-2).180^\circ$

DAİRE VE ÇEMBER	**113**		$\text{Çevre} = 2.\pi.\text{r} = \pi.\text{d}$	
	114		$\text{Alan} = \pi.\text{r}^2 = \dfrac{\pi.\text{d}^2}{4}$	
	115		$\text{Merkez açı } \theta(\text{radyan}) = \dfrac{\text{s}}{\text{r}}$	
	116		$Kesit\ alanı = \dfrac{rs}{2} = \dfrac{r^2\theta}{2}$	
	117		$1 \quad dönüş = 2\pi \quad radyan = 360^\circ \quad 1^\circ = 60dak. \quad 1\min = 60s$	
	118		Bir dik üçgende	
	119		Bir çemberin teğetleri	AP teğeti OA yarıçapına diktir
	120			Teğet AP = Teğet BP OP APB açısını ortalar
	121		Kesişen kirişler	a.b = c.d
	122		Küp	$hacim = a^3$
	123			$Yüzey\ Alanı = 6a^2$
	124		Dikdörtgen prizma	$\text{Hacim} = \ell.\text{w}.\text{h}$
	125			$\text{YüzeyAlanı} = 2(\ell.\text{h} + \ell.\text{w} + \text{h}.\text{w})$
	126		Herhangi bir silindir veya prizma	Hacim = (taban alanı).(yükseklik)
	127		Dik silindir veya prizma	Yanal alan = (Taban çevresi).(yükseklik)
	128		Küre	$\text{Hacim} = \dfrac{4}{3}.\pi.\text{r}^3$
	129			$\text{Yüzey Alanı} = 4.\pi.\text{r}^2$
	130		Herhangi koni veya silindir	Hacim=(1/3).(taban alanı).(yükseklik)
	131		Dik dairesel koni veya düzgün piramit	Yanal Alan=(1/2).(Taban çevresi) X (yan yükseklik)
	132		Herhangi koni veya düzgün piramit	$Hacim = \dfrac{h}{3}(A_1 + A_2 + \sqrt{A_1 A_2})$
	133		Dik dairesel koni veya düzgün piramit	Yanal alan= $\dfrac{\text{s}}{2}$ (taban çevrelerinin toplamı)= $\dfrac{s}{2}(P_1 + P_2)$
	134		Katı benzer şekiller veya düzlemin karşılıklı boyutları orantılıdır.	

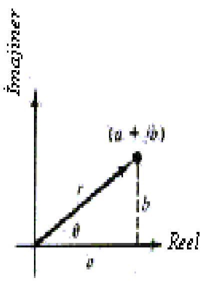
	135		Benzer düzlem veya katı şekillerin alanları, herhangi iki karşılıklı boyutun oranının karesi ile orantılıdır.	
	136		Benzer katı şekillerin hacimleri herhangi iki karşılıklı boyutun oranının küpü ile orantılıdır.	
	137		$\text{Alan} = \frac{1}{2}.\text{b.h}$	
	138		Hero Formülü: $Alan = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ burada $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$	
	139		İç açılar toplamı	$A + B + C = 180^{\circ}$
	140		Sinüs teoremi	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$
	141		Kosinüs teoremi	$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\ \cos A$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\ \cos B$ $c^2 = b^2 + b^2 - 2.a.b.\ \cos C$
	142		Dış Açı	$\theta = A + B$
	143	Eğer bir üçgenin iki açısı diğer bir üçgenin iki açısına eşitse,bu iki üçgen benzerdir.		
	144	Benzer üçgenlerin karşılıklı kenarları orantılıdır.		
	145		Pisagor teoremi	$a^2 + b^2 = c^2$
	146		Sinüs	$\sin\ \theta = \frac{y}{r} = \frac{\text{Karşı Dik Kenar}}{\text{Hipotenüs}}$
	147		Kosinüs	$\cos\ \theta = \frac{x}{r} = \frac{\text{Komşu Dik Kenar}}{\text{Hipotenüs}}$
	148		Tanjant	$\tan\ \theta = \frac{y}{x} = \frac{\text{Karşı Dik Kenar}}{\text{Komşu Dik Kenar}}$
	149		Kotanjant	$\cot\ \theta = \frac{x}{y} = \frac{\text{Komşu Dik Kenar}}{\text{Karşı Dik Kenar}}$
	150		Sekant	$\sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{\text{Hipotenüs}}{\text{Komşu Dik Kenar}}$
	151		Kosekant	$\csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{\text{Hipotenüs}}{\text{Karşı Dik Kenar}}$
	152	Ters Bağıntılar	(a) $\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta}$	(b) $\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$ (3) $\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$
	153		Bir dik üçgende hipotenüse ait yüksekliğin oluşturduğu iki üçgenden her biri diğerine ve ilk dik üçgene benzerdir.	
	154		Eş fonksiyonlar	$(a)\sin A = \cos B$ $(b)\cos A = \sin B$ $(c)\tan A = \cot B$ $(d)\cot A = \tan B$ $(e)\sec A = \csc B$ $(f)\csc A = \sec B$
	155	İki üçgenin eşliği	Karşılıklı birer kenarları ve ikişer açıları aynı olan üçgenler eştir. (A.K.A) (A.A.K)	
	156		Karşılıklı ikişer kenarları ile bu kenarlar arasındaki açıları aynı olan üçgenler eştir.(K.A.K)	
	157		Karşılıklı kenarları aynı olan üçgenler eştir. (K.K.K)	

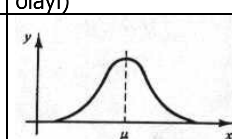
	158		Kartezyen Form	$x = r\cos\theta$
	159			$y = r\sin\theta$
	160		Kutupsal Form	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$
	161			$\theta = \arctan\dfrac{y}{x}$
	162	**Bölüm Bağıntıları**		$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$
	163			$\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$
	164	**Pisagor Bağıntılar**		$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
	165			$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$
	166			$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$
	167	**İki açı farkı veya toplamı**		$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$
	168			$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$
	169			$\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$
	170	**İki kat yay formülleri**		$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
	171			(a) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ (b) $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ (c) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
	172			$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$
	173	**Yarım açı formülleri**		$\sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$
	174			$\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$
	175			(a) $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ (b) $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$ (c) $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$
	176	**İki fonksiyonun farkı ve toplamı**		$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$
	177			$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$
	178			$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$
	179			$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

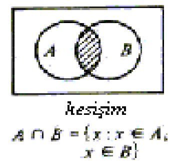
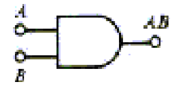
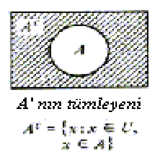
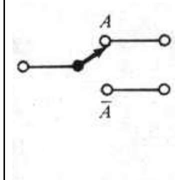
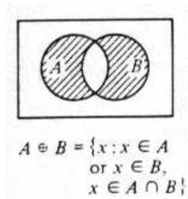
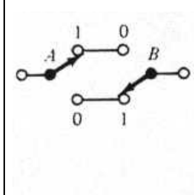
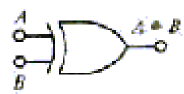
	180	**İki Fonksiyonun Çarpımı**		$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$
	181			$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$
	182			$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta)$
	183	**Ters trigonometrik fonksiyonlar**		$\theta = \arcsin C = \arctan \frac{C}{\sqrt{1-C^2}}$
	184			$\theta = \arccos D = \frac{\sqrt{1-D^2}}{D}$
LOGARİTMA	**185**	**Üstel formun Logaritmik ifadesi**		Eğer, $\mathbf{b^x=y}$ ise $\mathbf{x=\log_b y}$ olur. Terside doğrudur. (y>0, b>0, b $\neq$ 1)
	186	**Logaritma kuralları**	Çarpımlar	$\log_b MN = \log_b M + \log_b N$
	187		Bölümler	$\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$
	188		Kuvvetler	$\log_b M^p = p\log_b M$
	189		Kökler	$\log_b \sqrt[q]{M} = \frac{1}{q}\log_b M$
	190		1'in logaritması	$\log_b 1 = 0$
	191		Taban ile üs aynı ise	$\log_b b = 1$
	192	**Taban ile üs aynı iken kuvvet alma**		$\log_b b^n = n$
	193	**Taban değiştirme**		$\log N = \frac{\ln N}{\ln 10} \cong \frac{\ln N}{2.3026}$
	194	**Kuvvet Fonksiyon**		$y = a.x^n$
	195	**Üstel Fonksiyon**		$y = a(b)^{nx}$
	196	**Seri Açılımı**		$b^x = 1 + x\ln b + \frac{(x\ln b)^2}{2!} + \frac{(x\ln b)^2}{3!} + ...$ (b>0)
	197	**Üstel Büyüme**		$y = a.e^{nt}$
	198			Yarılanma Süresi: $t = \frac{\ln 2}{n}$
	199	**Üstel Azalış**		$y = ae^{-nt}$

	200	**Bir üst limitle üstel büyüme**		$y = a(1 - e^{-nt})$
	201	**Zaman sabiti**	$T = \dfrac{1}{\mathit{Büyüme}\ \text{Oranı}}$	
	202	**Seri Açılımı**	$e = 2 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{4!} + \cdots$	
	203		$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots$	
	204	**Logaritmik fonksiyon**		$y = \log_b x$ $(x > 0, b > 0, b \neq 1)$
	205	**Seri Açılımı**	$\ln x = 2a + \dfrac{2a^3}{3} + \dfrac{2a^5}{5} + \dfrac{2a^7}{7} + \cdots$ burada $a = \dfrac{x-1}{x+1}$	
	206	**Sinüs dalgası**		$y = a\sin(bx + c)$
	207			$\text{Periyod} = \dfrac{360}{b}\,\text{deg/cycle} = \dfrac{2\pi}{b}\,\text{rad/cycle}$
	208			$\text{Frekans} = \dfrac{b}{360}\,\text{cycle/deg} = \dfrac{b}{2\pi}\,\text{cycle/rad}$
	209			$\mathit{Faz\ Kayması} = -\dfrac{c}{b}$
	210	**Seri Açılımı**	$\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots$	
	211		$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots$	
	212	**i nin kuvveti**	$i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, ...	

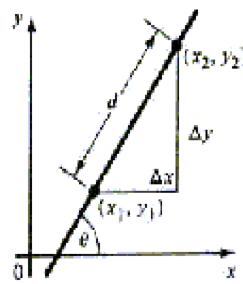
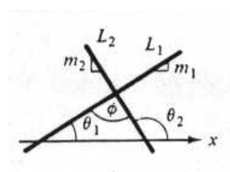
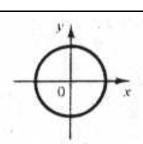
	213		Kartezyen Form	$a + ib$	
	214			Toplamlar	$(a+ib) + (c+id) = (a+c) + i(b+d)$
	215			Farklar	$(a+ib) - (c+id) = (a-c) + i(b-d)$
	216			Çarpımlar	$(a+ib)(c+id) = (ac-bd) + i(ad+bc)$
	217			Bölme	$\dfrac{a+ib}{c+id} = \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}$

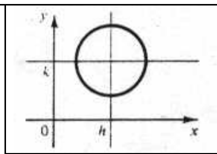
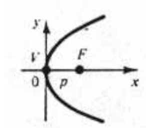
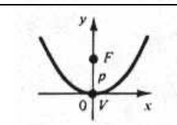
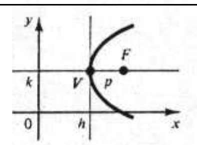
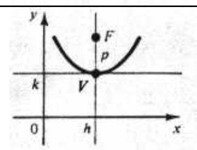
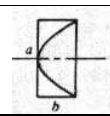
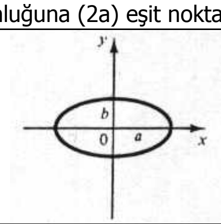
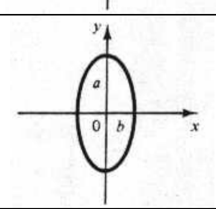
	218		Trigonometrik Form		z= $a+ib=r(\cos\theta+i\sin\theta)$
	219			Burada	$a=r\cos\theta$
	220				$b=r\sin\theta$
	221				$r=\sqrt{a^2+b^2}$
	222				$\theta=\arctan\dfrac{b}{a}$
	223		Kutupsal Form		Z= $r\angle\theta=a+ib$
	224			Çarpma	$(r_1\angle\theta_1).(r_2\angle\theta_2)=(r_1.r_2\angle(\theta_1+\theta_2))$
	225			Bölme	$\dfrac{(r_1\angle\theta_1)}{(r_2\angle\theta_2)}=\dfrac{r_1}{r_2}\angle(\theta_1-\theta_2)$
	226			Üsler ve Kökler	$(r\angle\theta)^n=r^n\angle n\theta$
	227		Üstel l Form	Euler Formülü	$re^{j\theta}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$
	228			Çarpma	$r_1e^{i\theta_1}\cdot r_2e^{i\theta_2}=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
	229			Bölme	$\dfrac{r_1e^{i\theta_1}}{r_1e^{i\theta_2}}=\dfrac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$
	230			Üsler ve Kökler	$(re^{i\theta})^n=r^ne^{in\theta}$
	231	**Aritmetik Dizi Ortak fark=d**	İndirgeme Formülü		$a_n=a_{n-1}+d$
	232		Genel Terim		$a_n=a+(n-1)d$
	233		Terimler Toplamı		$s_n=\dfrac{n(a+a_n)}{2}$
	234				$s_n=\dfrac{n[2a+(n-1)d]}{2}$
	235	**Geometrik Dizi Ortak oran=r**	İndirgeme Formülü		$a_n=ra_{n-1}$
	236		Genel Terim		$a_n=ra^{n-1}$
	237		Terimler Toplamı		$s_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$
	238				$s_n=\dfrac{a-ra_n}{1-r}$
	239		Sonsuz Toplam		$S=\dfrac{a}{1-r}$ burada $\lvert r\rvert<1$

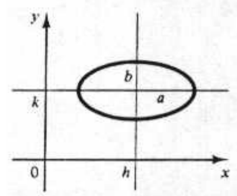
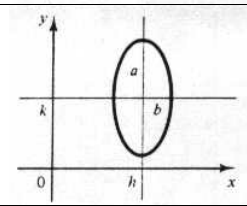
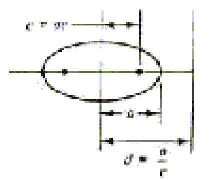
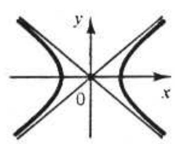
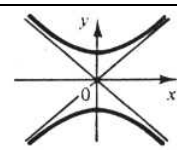
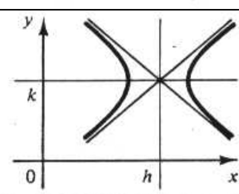
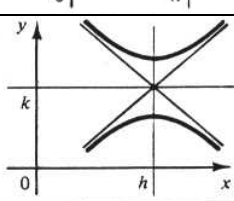
	240	**Binom Açılımı**	$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \cdots + b^n$	
	241	**Genel Terim**	$\text{r. terim} = \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)!}a^{n-r+1}b^{r-1}$	
	242	**Binom Serisi**	$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \cdots$ burada $\|a\| > \|b\|$	
	243		$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots$ burada $\|x\| < 1$	
	244	**Merkezi Yoğunluk Ölçüleri**	Aritmetik Ortalama	$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$
	245		Medyan	Bir seride tek sayıda terim varsa en ortadaki terim,seride çift terim varsa ortadaki iki terimin aritmetik ortalaması medyanı verir.
	246		Mod	Bir seride en çok tekrarlanan veya gözlenen terim o serinin modudur.
	247	**Dağılım Ölçüleri**	Değişim Aralığı	Bir serideki en büyük değer ile en küçük değer arasındaki farka değişim aralığı denir.
	248		Varyans (s^2)	$s^2 = \frac{\sum (x-\bar{x})^2}{n}$
	249		Standart Sapma (s)	Standard sapma, varyansın pozitif kareköküdür.
	250	**Olasılık**	Bir olayın olma olasılığı	$P(A) = \frac{\text{A olayının eleman sayısı}}{\text{Bütün olayın eleman sayısı}}$
	251		Bağımsız İki olayın birlikte olma olasılığı	$P(A,B) = P(A)P(B)$
	252		Bağımsız ikiden fazla olayın birlikte olma olasılığı	$P(A,B,C,....) = P(A)P(B)P(C)\cdots$
	253		Ayrık olmayan iki olayın birleşiminin olasılığı(A veya B olayı)	$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A,B)$
	254		Ayrık iki olayın birleşiminin olasılığı(A veya B olayı)	$P(A+B) = P(A) + P(B)$
	255	**Gauss Dağılımı**		$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$
	256	**Standart Hata**	Ortalamanın standart hatası	$SE_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$
	257		Standart sapmanın hatası	$SE_s = \frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$

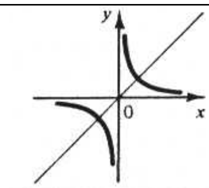
<table>
<tr><td rowspan="5">BOOLEAN CEBİRİ VE KÜMELER</td><td></td><td rowspan="5">Boolean Cebiri</td><td></td><td>Doğruluk Tablosu</td><td>Venn Diyagramı</td><td>Anahtar Diyagram</td><td>Lojik Kapılar</td></tr>
<tr><td>258</td><td>AND</td><td>$\begin{array}{cc|c} A & B & A\cdot B \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>259</td><td>OR</td><td>$\begin{array}{cc|c} A & B & A+B \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>260</td><td>NOT</td><td>$\begin{array}{c|c} A & \overline{A} \\ \hline 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>261</td><td>EXOR</td><td>$\begin{array}{cc|c} A & B & A\oplus B \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	262	Boolean cebirinin özellikleri	Değişme özelliği	AND	OR
				$AB \equiv BA$	$A+B \equiv B+A$
	263		Sınırlılık özelliği	$A\cdot 0 \equiv 0$	$A+1 \equiv 1$
	264		Birim özellik	$A\cdot 1 \equiv A$	$A+0 \equiv A$
	265		Idempotent Özelliği	$AA \equiv A$	$A+A \equiv A$
	266		Ters işlem	$A\cdot \overline{A} \equiv 0$	$A+\overline{A} \equiv 1$
	267		Birleşme özelliği	$A(BC) \equiv (AB)C$	$A+(B+C) \equiv (A+B)+C$
	268		Dağılma özelliği	$A(B+C) \equiv AB+AC$	$A+BC \equiv (A+B)(A+C)$
	269			$A(\overline{A}+B) \equiv AB$	$A+\overline{A}\cdot B \equiv A+B$
	270		Yutma Kuralı	$A(A+B) \equiv A$	$A+(AB) \equiv A$
	271		DeMorgan Kuralı	$\overline{A\cdot B} \equiv \overline{A}+\overline{B}$	$\overline{A+B} \equiv \overline{A}\cdot\overline{B}$
	272		Üs alma kuralı	$\overline{\overline{A}} \equiv A$	

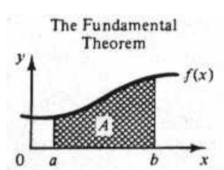
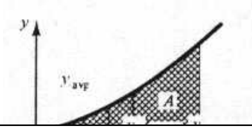
ANALİTİK GEOMETRİ	273		**Uzunluk Formülü**		$d=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
	274		**Eğim (m)**		$m=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$
	275				m=tan θ $0\le\theta<180°$
	276		**DOĞRU DENKLEMİ**	Genel Form	$Ax+By+C=0$
	277			x-eksenine Paralel	$y=b$
	278			y-eksenine Paralel	$x=a$
	279			Standart Form	$y=mx+b$
	280			İki noktası belli	$\dfrac{y-y_1}{x-x_1}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$
	281			Bir noktası ve eğimi belli	$m=\dfrac{y-y_1}{x-x_1}$
	282			Eksen form	$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$
	283			Kutupsal Form	$r\cos(\theta-\beta)=p$
	284		L_1 ve L_2 paralelse		$m_1=m_2$
	285		L_1 ve L_2 dikse		$m_1=-\dfrac{1}{m_2}$
	286		L_1 ve L_2 doğruları arasındaki açı		$\tan\phi=\dfrac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}$
	287	**KONİKLER**	İkinci derece eğrilerin genel denklemi(Konikler)		$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$
	288		Eksenlerin dönüşümü		Bir eğrinin eksenlerinin dönüşümü veya kaydırılması (Öteleme) : (h,k) noktasına eksenleri ötelemek,x-eksenini h kadar sola ve y-eksenini k kadar aşağı doğru kaydırmaktır.
	289		Dışmerkezlilik 		$e=\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}$
	290				e=0 ise Çember 0< e < 1 ise Elips e = 1 ise Parabol e > 1 ise Hiperbol
	291		Bir koniğin tanımı		$PF=e\cdot PD$
	292		Konikler için kutupsal denklem		$r=\dfrac{ke}{1-e\cos\theta}$
	293		Çember:Sabit bir noktadan eşit uzaklıktaki noktaların kümesi		
	294	**ÇEMBER**		Standart Form	$x^2+y^2=r^2$

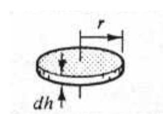
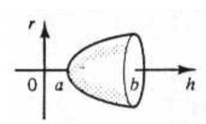
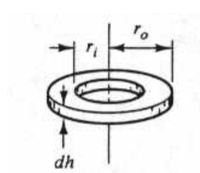
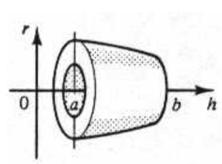
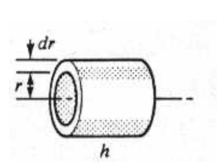
	295				$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$
	296		Genel Form		$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$
	297	**PARABOL**	Parabol:Bir düzlemde sabit bir nokta(Odak) ile sabit bir doğruya (Doğrultman) eşit uzaklıktaki noktalar kümesi		
	298			Standart Form	$y^2=4px$
	299				$x^2=4py$
	300				$(y-k)^2=4p(x-h)$
	301				$(\mathrm{x}-\mathrm{h})^2=4\mathrm{p}(\mathrm{y}-\mathrm{k})$
	302		Genel Form		$Cy^2+Dx+Ey+F=0$ *or* $Ax^2+Dx+Ey+F=0$
	303		Odaklar arası uzaklık		$L=\lvert 4p \rvert$
	304		Alan 		$\mathrm{Alan}=\dfrac{2}{3}\mathrm{ab}$
	305		Elips: F ve F' sabit noktalarına (odaklar) uzaklıkları toplamı sabit ve büyük eksenin uzunluğuna (2a) eşit noktalar kümesi (PF + PF' = 2a)		
	306	**ELİPS**		Standart Form	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $a>b$
	307	**ELİPS**			$\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1$ $a>b$

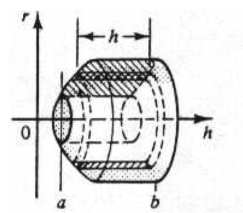
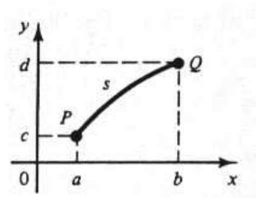
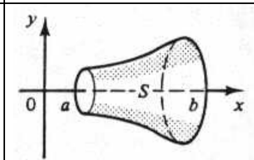
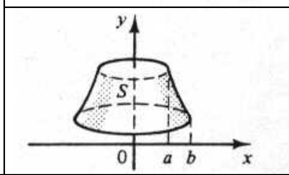
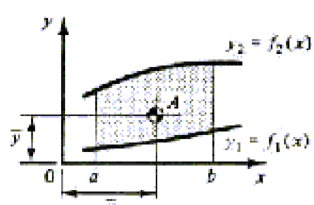
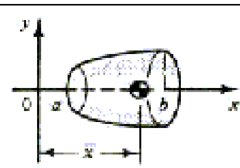
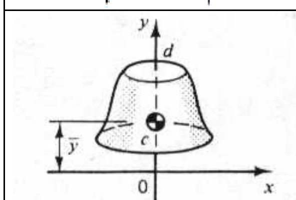
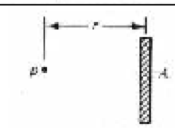
	308			$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$ $a>b$
	309			$\dfrac{(\mathrm{y}-\mathrm{k})^2}{\mathrm{a}^2}+\dfrac{(\mathrm{x}-\mathrm{h})^2}{\mathrm{b}^2}=1$ $\mathrm{a}>\mathrm{b}$
	310		Genel Form	$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ $A\neq C,$ ama aynı işaretli
	311		Merkezin odağa uzaklığı	$c=\sqrt{a^2-b^2}$
	312		Odaklar arası uzaklık	$\mathrm{L}=\dfrac{2\mathrm{b}^2}{\mathrm{a}}$
	313			(Dış merkezlilik) $e=\dfrac{a}{d}=\dfrac{c}{a}$
	314		$\mathrm{Alan}=\pi\mathrm{ab}$	
	315	**HİPERBOL**	Hiperbol: F ve F' sabit noktalarına (odaklar) uzaklıkları farkı sabit ve 2a noktalar kümesi (PF - PF' =2a)	
	316			$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$
	317			$\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$
	318			$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$
	319	**HİPERBOL**		$\dfrac{(\mathrm{y}-\mathrm{k})^2}{\mathrm{a}^2}-\dfrac{(\mathrm{x}-\mathrm{h})^2}{\mathrm{b}^2}=1$
	320		Genel Form	$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ $A\neq C,$ A ve C farklı işaretli

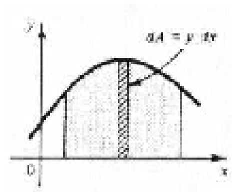
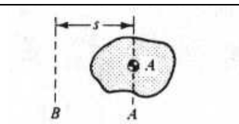
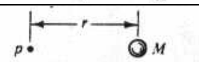
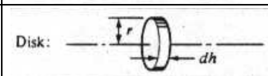
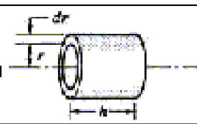
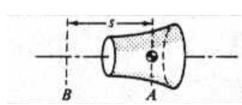
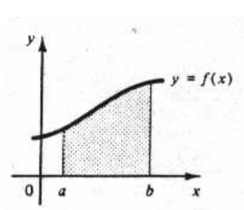
	321		Merkezin odağa uzaklığı		$c=\sqrt{a^2+b^2}$
	322		Asimptotların eğimi	Yatay Eksen	$\text{Eğim}=\pm\frac{\text{b}}{\text{a}}$
	323			Düşey Eksen	$\text{Eğim}=\pm\frac{\text{a}}{\text{b}}$
	324		Özkiriş uzunluğu		$L=\frac{2b^2}{a}$
	325				Eksenler 45 ^{0} döndürülürse; $xy = k$
	326	Limit Notasyonu			$\lim_{x\to a} f(x)=L$
	327	Apsisler-Ordinatlar farkı			$\Delta x = x_2 - x_1,\ \Delta y = y_2 - y_1$
	328	Türevin Tanımı			$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ $=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(y+\Delta y)-y}{\Delta x}$
	329	Zincir Kuralı			$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$
	330		Sabitin türevi		$\frac{d(c)}{dx}=0$
	331		Kuvvet fonksiyonunun türevi		$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$
	332		Bir sabitle bir fonksiyonun çarpımının türevi		$\frac{d(cu)}{dx}=c\frac{du}{dx}$
	333		x'in kuvvetinin c katının türevi		$\frac{d}{dx}cx^n = cnx^{n-1}$
	334	**TÜREV**	Toplamın türevi		$\frac{d}{dx}(u+v+w)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}+\frac{dw}{dx}$
	335		u'nun kuvvetinin c katının türevi		$\frac{d(cu^n)}{dx}=cnu^{n-1}\frac{du}{dx}$
	336		Çarpımın türevi		$\frac{\text{d(uv)}}{\text{dx}}=\text{u}\frac{\text{dv}}{\text{dx}}+\text{v}\frac{\text{du}}{\text{dx}}$
	337		Üçlü çarpım türevi		$\frac{\text{d(uvw)}}{\text{dx}}=\text{uv}\frac{\text{dw}}{\text{dx}}+\text{uw}\frac{\text{dv}}{\text{dx}}+\text{vw}\frac{\text{du}}{\text{dx}}$
	338		N terimin çarpım türevi		N terimin her biri, kendi türevi ile diğer (N-1) terimin çarpımından oluşur ve toplam terim sayısı N tanedir.
	339		Bölümün türevi		$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

	340		Trigonometrik Fonksiyonların türevi	$\frac{d(\sin u)}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}$
	341			$\frac{d(\cos u)}{dx} = -\sin u \frac{du}{dx}$
	342			$\frac{d(\tan u)}{dx} = \sec^2 u \frac{du}{dx}$
	343			$\frac{d(\cot u)}{dx} = -\csc^2 u \frac{du}{dx}$
	344			$\frac{d(\sec u)}{dx} = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$
	345			$\frac{d(\csc u)}{dx} = -\csc u \cot u \frac{du}{dx}$
	346		Ters Trigonometrik Fonksiyonların Türevi	$\frac{d(\sin^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$ -1 < u < 1
	347			$\frac{d(\cos^{-1} u)}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$ -1 < u < 1
	348			$\frac{d(\tan^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$
	349			$\frac{d(\cot^{-1} u)}{dx} = \frac{-1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$
	350			$\frac{d(\sec^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$ |u|>1
	351			$\frac{d(\csc^{-1} u)}{dx} = \frac{-1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$ |u|>1
	352		Logaritmik ve Üstel Fonksiyonların Türevi	(a) $\frac{d}{dx}(\log_b u) = \frac{1}{u} \log_b e \frac{du}{dx}$ (b) $\frac{d}{dx}(\log_b u) = \frac{1}{u \, \mathrm{Ln}\, b} \frac{du}{dx}$
	353			$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$
	354			$\frac{d}{dx} b^u = b^u \frac{du}{dx} \ln b$
	355			$\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}$
	356		Maksimum ve Minimum Noktalar	Maksimum ve Minimum noktaları bulmak için birinci türev alınıp sıfıra eşitlenerek elde edilen denklem çözülür.Bu denklemin çözümü olan x değerlerine sabit noktalar denir ve bu noktalar ekstremum (maksimum yada minimum) adayıdır.

	357		Birinci Türev Testi	f ′(x_0)= 0 olsun.Eğer, x_0 noktasında birinci türev işaret değiştirirse, x_0 noktası ekstremum noktadır.
	358		İkinci Türev Testi	Eğer, f′(x_0)=0 iken x_0 noktasında: f″(x_0) $>$ 0 ise noktası minimum f″(x_0) $<$ 0 ise noktası maksimum noktadır. f″(x_0) = 0 ise test başarısız
	359		Büküm Noktaları	f″(x_0)=0 olsun. Eğer, x_0 noktasında ikinci türev işaret değiştirirse x_0 noktası büküm noktasıdır.
	360		Newton Metodu	$x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
	361		Diferansiyel (y'nin)	$dy = f'(x)\,dx$
	362		Diferansiyel ile yaklaşık hesap	$\Delta y \cong \dfrac{dy}{dx}\Delta x$
	363		**Belirli İntegral**	$\int F'(x)dx = F(x) + c$
	364			$\int \mathrm{f(x).dx = F(x) + c}$ ve $\mathrm{f(x) = F'(x)}$
	365			$A = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
	366		**Riemann Toplamları ile İntegral Tanımı**	$A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \int_a^b f(x)dx$
	367		**Belirli İntegralin Özellikleri**	$\int_a^b c\, f(x)\, dx = c\int_a^b f(x)\, dx$
	368			$\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$
	369			$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^c f(x)\, dx$
	370			$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$
	371	**Yaklaşık İntegral**		Orta Nokta Metodu $A \cong \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$ burada; $f(x_i^*)$, i.dilimin yüksekliğidir.

	372			Ortalama Ordinat Metodu	$A \cong y_{ort}(b-a)$
	373			Yamuk Kuralı	Dilim genişliği eşit değilse; $A \cong \frac{1}{2}[(x_1-x_0)(y_1+y_0)+(x_2-x_1)(y_2+y_1)+\cdots$ $+(x_n-x_{n-1})(y_n+y_{n-1})$
	374				Dilim genişliği eşitse, $h = x_1 - x_0$: $A \cong h[\frac{1}{2}(y_0+y_n)+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}]$
	375			Parabolik Formül	$A = \frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)$
	376			Simpson Kuralı	$A \cong \frac{h}{3}(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+\cdots+4y_{n-1}+y_n)$
	377	**Dönel Cisimlerin Hacimleri**	**Disk Metodu**		Hacim = $dV = \pi r^2 dh$
	378				$V = \pi \int_a^b r^2\, dh$
	379		**Halka Metodu**		$dV = \pi(r_0^2 - r_i^2)\, dh$
	380				$V = \pi \int_a^b (r_0^2 - r_i^2)\, dh$
	381		**Tabaka Metodu**		$dV = 2\pi r h\, dr$

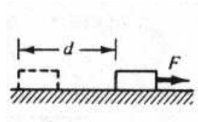
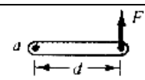
	382				$V = 2\pi \int_a^b rh\, dr$
	383	**Yay Uzunluğu**			$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$
	384				$s = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$
	385	**Yüzey Alanı**			x-ekseni; $s = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$
	386				y-ekseni; $S = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$
	387	**Ağırlık ve Kütle Merkezi**			$\bar{x} = \frac{1}{A} \int_a^b x(y_2 - y_1)\, dx$
	388				$\bar{y} = \frac{1}{2A} \int_a^b (y_1 + y_2)(y_2 - y_1)\, dx$
	389				x-ekseni; $\bar{x} = \frac{\pi}{V} \int_a^b xy^2\, dx$
	390				y-ekseni; $\bar{y} = \frac{\pi}{V} \int_c^d yx^2\, dy$
	391				$I_p = Ar^2$

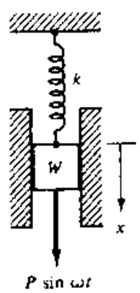
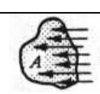
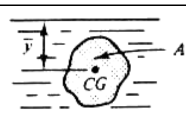
	392				$I_x = \frac{1}{3}\int y^3\, dx$
	393				$I_y = \int x^2 y\, dx$
	394				Kutupsal: $I_0 = I_x + I_y$
	395				Dönme yarıçapı $r = \sqrt{\frac{I}{A}}$
	396				Paralel Eksen Teoremi $\mathrm{I_B = I_A + As^2}$
	397				$I_P = Mr^2$
	398				$dI = \frac{m\pi}{2} r^4\, dh$
	399			Halka 	$dI = \frac{m\pi}{2}(r_0{}^4 - r_i{}^4)\, dh$
	400			Tabaka 	$dI = 2\pi m r^3 h\, dr$
	401			Katıların döndürülmesi 	Disk Metodu: $I = \frac{m\pi}{2}\int_a^b r^4\, dh$
	402				Shell(Tabaka) Metodu: $I = 2\pi m\int r^3 h\, dr$
	403				Paralel Eksen Teoremi $I_B = I_A + Ms^2$
	404				Ortalama Ordinat Formülü: $\mathrm{y_{ort}} = \frac{1}{\mathrm{b-a}}\int_a^b \mathrm{f(x)\,dx}$
	405				Etkin (Efektif) Değer: $rms = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x)]^2\, dx}$

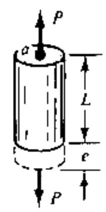
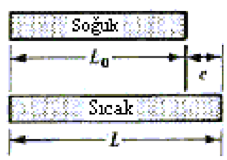
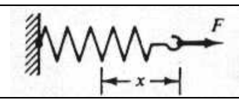
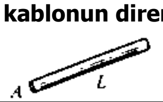
No	Grup	Tür	Alt Başlık	Açıklama	İfade
406	**1.MERTEBE DİFERANSİYEL DENKLEMLER**	**Değişkenlerine Ayrılabilen**			$f(y)\,dy = g(x)\,dx$
407	**1.MERTEBE DİFERANSİYEL DENKLEMLER**	**İntegral Yöntemi**			$\mathrm{x\,dy + y\,dx = d(xy)}$
408	**1.MERTEBE DİFERANSİYEL DENKLEMLER**	**İntegral Yöntemi**			$\dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = d\left(\dfrac{y}{x}\right)$
409	**1.MERTEBE DİFERANSİYEL DENKLEMLER**	**İntegral Yöntemi**			$\dfrac{y\,dx - x\,dy}{y^2} = d\left(\dfrac{x}{y}\right)$
410	**1.MERTEBE DİFERANSİYEL DENKLEMLER**	**İntegral Yöntemi**			$\dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = d\left(\tan^{-1}\dfrac{y}{x}\right)$
411	**1.MERTEBE DİFERANSİYEL DENKLEMLER**	**Homojen D.D**			$M\,dx + N\,dy = 0$ y=u.x konarak bulunur.
412	**1.MERTEBE DİFERANSİYEL DENKLEMLER**	**Lineer D.D**		Form	$y' + Py = Q$
413	**1.MERTEBE DİFERANSİYEL DENKLEMLER**	**Lineer D.D**		Integral Çarpanı	$R = e^{\int P dx}$
414	**1.MERTEBE DİFERANSİYEL DENKLEMLER**	**Lineer D.D**		Çözüm	$ye^{\int P dx} = \int Q e^{\int P dx}\,dx$
415	**2.MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER**	**HOMOJEN D.D**	Form		$\mathrm{ay'' + by' + cy = 0}$
416	**2.MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER**	**HOMOJEN D.D**	Karakteristik Denklem		$\mathrm{ar^2 + br + c = 0}$
	2.MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER	**HOMOJEN D.D**	Çözüm Formu	Karakteristik Denklemin Kökleri	Çözüm
417	**2.MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER**	**HOMOJEN D.D**	Çözüm Formu	Reel ve eşit değil	$\mathrm{y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}}$
418	**2.MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER**	**HOMOJEN D.D**	Çözüm Formu	Reel ve eşit	$\mathrm{y = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}}$
419	**2.MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER**	**HOMOJEN D.D**	Çözüm Formu	Kompleks	$(a)\; y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$ veya $(b)\; y = Ce^{ax}\sin(bx + \phi)$
420	**2.MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER**	**HOMOJEN OLMAYAN**	Form		$ay'' + by' + cy = f(x)$
421	**2.MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER**	**HOMOJEN OLMAYAN**	Genel Çözüm		$y = \underbrace{y_c}_{\text{Homojen Kısmın Çözümü}} + \underbrace{y_p}_{\text{Sağ Taraf Çözümü}}$
422	**Bernoulli Denklemi**				$\dfrac{dy}{dx} + Py = Qy^n$ Burada; $(z = y^{1-n})$ dönüşümü yapılır.
423	**Laplace Dönüşümü**			Tanım	$\ell[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$
424	**Laplace Dönüşümü**			Ters Laplace	$\ell^{-1}[F(s)] = f(t)$

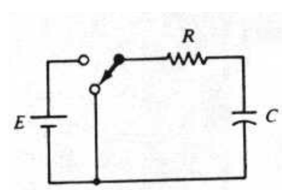
425	Nümerik Çözümler	**Euler Metodu**		$x_q = x_p + \Delta x$ $y_q = y_p + m_p \Delta x$
426		**Değiştirilmiş Euler Metodu**		$x_q = x_p + \Delta x$ $y_q = y_p + \left(\frac{m_p + m_q}{2}\right)\Delta x$
427		**Runge-Kutta Metodu**		$x_q = x_p + \Delta x$ $y_q = y_p + m_{ort}\Delta x$ $m_{ort} = \left(\frac{1}{6}\right)(m_p + 2m_r + 2m_s + m_q)$ $m_p = f'(x_p, y_p)$ $m_r = f'\left(x_p + \frac{\Delta x}{2}, y_p + m_p \frac{\Delta x}{2}\right)$ $m_s = f'\left(x_p + \frac{\Delta x}{2}, y_p + m_r \frac{\Delta x}{2}\right)$ $m_q = f'(x_p + \Delta x, y_p + m_s \Delta x)$
428	Kuvvet Serileri	**Notasyon**		$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$
429		**Yakınsaklık testleri**	**Limit Testi**	$\lim_{n \to \infty} u_n = 0$
430			**Kısmi toplamlar testi**	$\lim_{n \to \infty} S_n = S$
431			**Oran testi**	Eğer $\lim_{n\to\infty}\left\vert\frac{u_{n+1}}{u_n}\right\vert$ (a) 1' den küçükse, seri yakınsaktır. (b) 1' den büyükse, seri ıraksaktır (c) 1' e eşitse, test edilemez.
432		**Mac-Laurent Serisi**		$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$
433		**Taylor Serisi**		$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$
434			**n. terimden sonra kalan terim**	$R_n = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(c)$ c, a ile x arasında

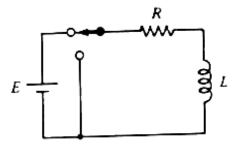
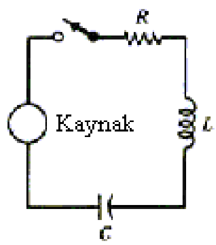
	435	**Fourier Serileri**	**Periyod** 2π	$$f(x)=a_0/2+a_1\cos x+a_2\cos 2x+a_3\cos 3x+\cdots+a_n\cos nx+\cdots$$ $$+b_1\sin x+b_2\sin 2x+b_3\sin 3x+\cdots+b_n\sin nx+\cdots$$	
	436			burada	$a_0=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx$
	437				$a_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$
	438				$b_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$
	439		**Periyod 2L**	$$f(x)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos\frac{\pi x}{L}+a_2\cos\frac{2\pi x}{L}+a_3\cos\frac{3\pi x}{L}+\cdots$$ $$+b_1\sin\frac{\pi x}{L}+b_2\sin\frac{2\pi x}{L}+b_3\sin\frac{3\pi x}{L}+\cdots$$	
	440			**Katsayılar**	$a_0=\dfrac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\,dx$
	441				$a_n=\dfrac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{L}\,dx$
	442				$b_n=\dfrac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{L}\,dx$
	443		**Simetrik dalga şekli**	**Tek ve çift fonksiyonlar**	(a) Tek fonksiyonların fourier serilerine açılımları yalnız sinüslü terimlerden oluşur. (sabit yoktur) (b) Çift fonksiyonların fourier serilerine açılımları yalnız kosinüslü terimlerden oluşur. (sabit vardır)
	444			**Yarım dalga simetri**	Bir dalganın fourier dönüşümleri yalnızca tek harmoniklere sahipse yarım dalga simetri vardır
	A1	**Karışım A, B, C .... gibi maddelerden oluşsun**			Toplam karışım miktarı= A' nın miktarı + B' nin miktarı +.....
	A2				Her karışımın son değeri= Başlangıç miktarı + eklenen miktar – çıkarılan miktar
	A3	**İki karışım**			Karışım 1'deki A'nın son değeri + Karışım 2'deki A'nın değeri
	A4	**Akış miktarı**			Akış miktarı = akış oranı x akma zamanı A=QT
	A5	Yapılan iş = iş oranı x çalışma süresi			

	A6			Sabit kuvvet	İş = Kuvvet X Yol = *F.d*
	A7			Değişken kuvvet	$İş = \int_{a}^{b} F(x)\, dx$
FİNANS	**A8**	**Birim maliyet**		$\text{Birim maliyet} = \dfrac{\text{Toplam maliyet}}{\text{Birimlerin sayısı}}$	
	A9	**Faiz:** **t= yıl,** **a = ana para, n=faiz oranı,** **y=biriktirilmiş miktar**		Basit faiz	$y = a(1+nt)$
	A10			Yıllık bileşik faiz	$y = a(1+n)^{t}$
	A11			Bileşik faiz (*m*) zaman/yıl	$y = a(1+\dfrac{n}{m})^{mt}$
STATİK	**A12**			Bir noktanın momenti	$M_{a} = Fd$
	A13	**Denge denklemleri (Newton' un birinci kanunu)**		Dikey kuvvetler toplamı = 0	
	A14			Yatay kuvvetler toplamı = 0	
	A15			Bir noktadaki momentler toplamı = 0	
	A16			Sürtünme katsayısı	$\mu = \dfrac{f}{N}$
HAREKET DENKLEMLERİ	**A17**	**Lineer Hareket**	**Düzgün hareket (Sabit Hız)**	Uzaklık = oran X time *D = Rt*	
	A18		**Düzgün ivmelenme (Sabit ivme a, Başlangıç hızı v_0) Serbest düşme için, a=g=9.807 m/s² = 32.2 ft/s²**	**t zamanda yer değiştirme**	$s = v_{0}t + \dfrac{at^{2}}{2}$
	A19			**t anındaki hız**	$v = v_{0} + at$
	A20			**Newton' nun İkinci Kanunu**	$F = ma$
	A21		**Düzgün olmayan hareket**	**Ortalama hız**	Ortalama Hız= Toplam alınan yol / Toplam süre
	A22			**Yer değiştirme**	$s = \int v\, dt$
	A23			**Ani hız**	$v = \dfrac{ds}{dt}$
	A24				$v = \int a\, dt$
	A25			**Ani ivme**	$a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^{2}s}{dt^{2}}$
	A26	**Dönme**	**Düzgün hareket**	**Açısal yer değiştirme**	$\theta = wt$
	A27			***r* yarıçapında noktanın lineer hızı**	$v = wr$
	A28		**Düzgün olmayan hareket**	**Açısal yer değiştirme**	$\theta = \int w\, dt$

	A29			**Açısal Hız**	$w = \frac{d\theta}{dt}$
	A30				$w = \int \alpha \, dt$
	A31			**Açısal ivme**	$\alpha = \frac{dw}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$
	A32	**Lineer dairesel hareket**	**x ve y bileşenleri**	**Yer değiştirme**	(a) $x = \int v_x \, dt$ (b) $y = \int v_y \, dt$
	A33			**Hız**	(a) $v_x = \frac{dx}{dt}$ (b) $v_y = \frac{dy}{dt}$
	A34				(a) $v_x = \int a_x \, dt$ (b) $v_y = \int a_y \, dt$
	A35			**İvme**	(a) $a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ (b) $a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$
MEKANİK TİTREŞİMLER	**A36**	 **Sürtünme katsayısı = c**	**Serbest salınımlar ($P = 0$)**	**Basit harmonik hareket**	$x = x_0 \cos w_n t$
	A37				Sönümsüz açısal hız $w_n = \sqrt{\frac{kg}{W}}$
	A38				Doğal frekans $f_n = \frac{w_n}{2\pi}$
	A39			**Eksik Sönümlü (Underdamped)**	$x = x_0 e^{-at} \cos w_d t$
	A40				Sönümlü Açısal Hız $w_d = \sqrt{w_n^2 - \frac{c^2 g^2}{w^2}}$
	A41			**Aşırı Sönümlü (overdamped)**	$x = C_1 e^{m_1 t} + C_2 e^{m_2 t}$
	A42		**Kuvvet Titreşimleri**	**Maksimum Sapma**	$x_0 = \frac{P_g}{W\sqrt{4a^2 w^2 + (w_n^2 - w^2)^2}}$
	A43	**Yoğunluk**			*Yoğunluk = Kütle / Hacim*
	A44	**Kütle**			*Kütle = Ağırlık / Yerçekimi ivmesi*
	A45	**Özgül Ağırlık**			*SG = Madde Yoğunluğu / Su Yoğunluğu*
	A46	 **Basınç**		Bir yüzeydeki toplam kuvvet	*Kuvvet = Basınç X Yüzey*
	A47			Suyun içindeki bir yüzeye etkiyen kuvvet	$F = \delta \int y \, dA$
	A48				$F = \delta \bar{y} A$

	A49	**PH**	pH = -10 log konsantrasyon	
SICAKLIK	**A50**	**Celsuis derecesi (C) ile Fahrenheit derecesi arasındaki ilişki (*F*)**	$C = \frac{5}{9}(F - 32)$	
	A51		$F = \frac{9}{5}C + 32$	
MATERYAL KUVVETLERİ	**A52**		Normal gerilim	$a = \frac{P}{a}$
	A53		Uzama	$\varepsilon = \frac{e}{L}$
	A54		Modül elastikiyeti ve Hooke Kanunu	$E = \frac{PL}{ae}$
	A55	**Gerilme yada sıkıştırma**		$\mathrm{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$
	A56	**Sıcaklıkla genleşme**	Uzama	$e = \alpha L \, \Delta t$
	A57		Yeni uzunluk	$L = L_0(1 + \alpha \, \Delta t)$
	A58		Birim uzama katsayısı	$\varepsilon = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{L}} = \alpha \, \Delta \mathrm{t}$
	A59		Gerilme	$\sigma = E\varepsilon = E\alpha \, \Delta t$
	A60	**Sıcaklık değişimi= Δt Sıcaklık genleşme katsayısı =α**	Gerilme kuvveti	$P = a\sigma = aE\alpha \, \Delta t$
	A61		Bir yaya etki eden kuvvet	F = yay katsayısı X uzunluk = kx
	A62	**Ohm Kanunu**	$\text{Akım} = \frac{\text{Gerilim}}{\text{Direnç}}$	$\mathrm{I} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{R}}$
	A63	**Direnç Eşdeğerleri**	Seri	$R = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots$
	A64		Paralel	$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots$
	A65	**Bir direncin gücü**	$Güç = P = VI$	
	A66		$P = \frac{V^2}{R}$	
	A67		$\mathrm{P} = \mathrm{I}^2 \mathrm{R}$	
	A68	**Kirchhoff Kanunu**	**Çevreler**	Bir kapalı çevredeki gerilimlerin toplamı sıfırdır.
	A69		**Düğümler**	Bir düğüme giren ve çıkan akımların toplamı sıfırdır.
	A70	**Sıcaklıkla direncin değişimi**	$R = R_1[1 + \alpha(t - t_1)]$	
	A71	**Bir kablonun direnci** 	$R = \frac{\rho L}{A}$	

<table>
<tr><td rowspan="18"></td><td>A72</td><td colspan="2" rowspan="2">Kapasitör Eşdeğerleri</td><td>Seri</td><td>$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}+\cdots$</td></tr>
<tr><td>A73</td><td>Paralel</td><td>$C=C_1+C_2+C_3+\cdots$</td></tr>
<tr><td>A74</td><td colspan="2">V geriliminde C kapasitesinin yükü</td><td colspan="2">$Q=CV$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">A75</td><td colspan="2" rowspan="2">Alternatif Gerilimi</td><td>Sinusoidal Form</td><td>Kompleks Form</td></tr>
<tr><td>$v=V_m\cos(wt+\phi_1)$</td><td>$V=V_m\angle\phi_1$</td></tr>
<tr><td>A76</td><td colspan="2">Alternatif Akım</td><td>$I=I_m\cos(wt+\phi_1)$</td><td>$I=I_m\angle\phi_2$</td></tr>
<tr><td>A77</td><td colspan="2">Periyod</td><td colspan="2">$P=\frac{2\pi}{w}\ saniye$</td></tr>
<tr><td>A78</td><td colspan="2">Frekans</td><td colspan="2">$f=\frac{1}{P}=\frac{w}{2\pi}\ hertz$</td></tr>
<tr><td>A79</td><td colspan="2">Akım</td><td colspan="2">$i=\frac{dp}{dt}$</td></tr>
<tr><td>A80</td><td colspan="2">Yük</td><td colspan="2">$q=\int i\ dt\ coulombs$</td></tr>
<tr><td>A81</td><td rowspan="4">Kapasitör</td><td>Ani Akım</td><td colspan="2">$i=C\frac{dv}{dt}$</td></tr>
<tr><td>A82</td><td>Ani Gerilim</td><td colspan="2">$v=\frac{1}{C}\int i\ dt\ volt$</td></tr>
<tr><td>A83</td><td>Dolma yada boşalma anında akım</td><td rowspan="2"></td><td>$\mathrm{i}=\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}\mathrm{e}^{-t/RC}$</td></tr>
<tr><td>A84</td><td>Boşalma anında Gerilim</td><td>$\mathrm{V}=\mathrm{Ee}^{-t/RC}$</td></tr>
<tr><td>A85</td><td rowspan="3"></td><td>Ani akım</td><td colspan="2">$\mathrm{i}=\frac{1}{\mathrm{L}}\int \mathrm{V(t)\ dt}\ [\mathrm{amper}]$</td></tr>
<tr><td>A86</td><td>Ani Gerilim</td><td colspan="2">$\mathrm{V}=\mathrm{L}\frac{\mathrm{di}}{\mathrm{dt}}$</td></tr>
<tr><td>A87</td><td>Dolma anında akım</td><td></td><td>$\mathrm{i}=\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}(1-\mathrm{e}^{-Rt/L})$</td></tr>
</table>

	A88		**Dolma yada boşalma anında gerilim**	**Seri RL Devresi** 	$V = Ee^{-Rt/L}$
	A89		**DC Kaynak**	Rezonans Frekansı	$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{LC}}$
	A90		**DC Kaynak**	Dirençsiz: Seri LC Devresi:	$i = \frac{E}{\omega_n L}\sin\omega_n t$
	A91		**DC Kaynak**	Sönümsüz	$i = \frac{E}{\omega_d L}e^{-at}\sin\omega_d t$
	A92		**DC Kaynak**	Sönümsüz	$\omega_d = \sqrt{\omega_n^2 - \frac{R^2}{4L^2}}$
	A93	**Seri *RLC* Devresi** 	**DC Kaynak**	Sönümlü	$i = \frac{E}{2i\omega_d L}[e^{(-a+i\omega_d)t} - e^{(-a-i\omega_d)t}$
	A94		**AC Kaynak**	Endüktif Reaktans	$X_L = \omega L$
	A95		**AC Kaynak**	Kapasitif Reaktans	$X_C = \frac{1}{\omega C}$
	A96		**AC Kaynak**	Toplam Reaktans	$X = X_L - X_C$
	A97		**AC Kaynak**	Empedans	$\lvert Z \rvert = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$
	A98		**AC Kaynak**	Faz açısı	$\phi = \arctan\frac{X}{R}$
	A99		**AC Kaynak**	Empedansın kompleks formu	$Z = R + iX = Z\angle\phi = Ze^{i\phi}$
	A100		**AC Kaynak**	Kararlı hal akımı	$i_{ss} = \frac{E}{Z}\sin(\omega t - \varphi)$
	A101	**AC için ohm kanunu**	$V = ZI$		
	A102	**Desibel cinsinden kazanç yada kayıp**	$G = 10\log_{10}\frac{P_2}{P_1} \quad dB$		